Istituzioni di Analisi Superiore

20 aprile 2001

Indice

1 Teoria della misura **7**
1.1 Famiglie di insiemi 7
1.2 Misura degli insiemi piani 13
1.3 Misura di Lebesgue nel piano 16
1.4 Nozione generale di misura 25
1.5 Prolungamento secondo Lebesgue 30
1.6 Funzioni misurabili 41
1.7 Integrazione 48
1.8 Integrazione su insiemi di misura non limitata 62
1.9 Misure Prodotto 70
1.10 Il teorema di Fubini 72
1.11 Proprietà delle funzioni monotone 77
1.12 Funzioni di variazione limitata 87
1.13 Derivazione dell'integrale di Lebesgue 91
1.14 Assoluta continuità 93
1.15 Misure con segno 99

2 Spazi lineari, normati e con prodotto scalare **107**
2.1 Spazi lineari 107
2.2 Il teorema di Hahn Banach 114
2.3 Spazi normati 118
2.4 Spazi di funzioni misurabili 120
2.5 Spazi con prodotto scalare 127
2.6 Dualità negli spazi di Banach 138

3 Funzioni di una variabile complessa **147**
3.1 L'insieme dei numeri complessi 147
3.2 Derivabilità di una funzione complessa 150
3.3 Serie di potenze e funzioni olomorfe 155
3.4 Funzioni analitiche e forme differenziali 159
3.5 Prolungamento analitico 162
3.6 Serie di Laurent 166
3.7 Qualche applicazione del teorema dei residui 171

A Serie di Potenze **177**
A.1 Serie di Taylor 177
A.2 Le serie di potenze 179

B Calcolo differenziale **187**
B.1 Forme Differenziali in $\mathbb{R}^n$ 187
B.2 La formula di Green nel piano 206

Elenco delle figure

1.1 Definizione di semianello 8
1.2 Lemma 1.1.1 9
1.3 Lemma 1.1.2 10
1.4 Le funzioni possono non conservare le operazioni insiemistiche . . 12
1.5 Definizione 1.2.4 15
1.6 Teorema 1.2.3 15
1.7 $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$ 19
1.8 Approssimazione di una funzione mediante funzioni semplici. . . 49
1.9 Il prodotto di σ-algebre può non essere una σ-algebra 71
1.10 Sezionando un insieme misurabile 74
1.11 Teorema di Fubini 77

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Famiglie di insiemi

Definizione 1.1.1 *Una famiglia di insiemi $\mathcal{A}$ si chiama* **anello** *se*

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A} \ , \ A \cap B \in \mathcal{A}$$

cioè se è chiusa rispetto alle operazioni di differenza simmetrica e di intersezione.

Poichè

$$(A\Delta B)\Delta(A \cap B) = ((A\Delta B) \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus (A\Delta B)) = \\ = (A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

mentre

$$A\Delta(A \cap B) = A \setminus (A \cap B) \cup (A \cap B) \setminus A = A \setminus B \cup \emptyset = A \setminus B$$

ogni anello risulta chiuso rispetto alle operazioni di differenza simmetrica, intersezione, unione, differenza, purchè applicate un numero finito di volte. Inoltre, poichè

$$A \setminus A = \emptyset$$

ogni anello contiene l'insieme vuoto; si vede inoltre facilmente che il più piccolo anello è costituito dal solo insieme vuoto.

Definizione 1.1.2 *Un anello di insiemi ammette un'***unità** $E \in \mathcal{A}$ *se*

$$E \cap A = A \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

e si ha

$$E \supset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

In altre parole E è l'elemento massimale rispetto all'inclusione della famiglia di insiemi $\mathcal{A}$.

Infatti è facile verificare che

$$E \supset A \iff E \cap A = A$$

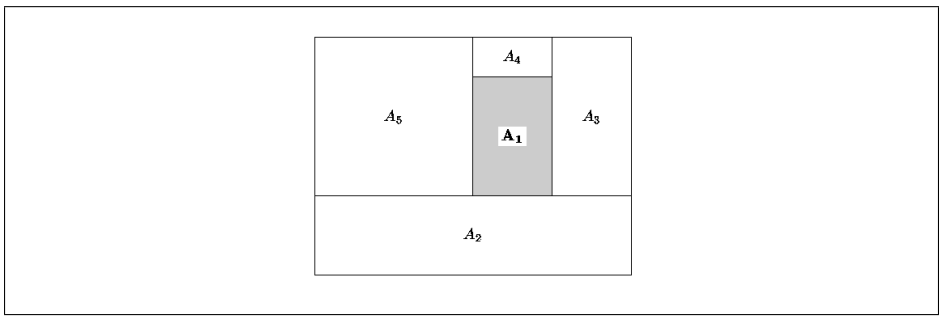

Figura 1.1: Definizione di semianello

Definizione 1.1.3 *Si chiama* **algebra** *di insiemi un anello $\mathcal{S}$ che ammetta un'unità*

- L'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di un insieme A è un'algebra la cui unità è A
- L'insieme $\{A, \emptyset\}$ è un'algebra la cui unità è A
- la famiglia dei sottoinsiemi finiti di un insieme A è un anello di insiemi e risulta un'algebra se e solo se A è esso stesso un insieme finito.
- La famiglia dei sottoinsiemi limitati della retta reale è un anello di insiemi senza unità.

È immediato provare che

Teorema 1.1.1 *Se $\mathcal{A}_\alpha$ è una famiglia di anelli allora*

$$\mathcal{A} = \bigcap_\alpha \mathcal{A}_\alpha$$

è esso stesso un anello.

Possiamo altresì provare che

Teorema 1.1.2 *Per ogni famiglia non vuota $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi esiste uno ed un solo anello $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ che contiene $\mathcal{S}$ ed è contenuto in ogni anello che contiene $\mathcal{S}$. $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ si chiama anello generato dalla famiglia di insiemi $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Sia

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$$

Allora $\mathcal{P}(A)$ è un anello che contiene gli insiemi di $\mathcal{S}$. Sia ora Σ la famiglia di tutti gli anelli che contengono gli insiemi di $\mathcal{S}$ e poniamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{R} \in \Sigma} \mathcal{R}$$

Evidentemente $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ è un anello e soddisfa le caratteristiche di minimalità richieste. □

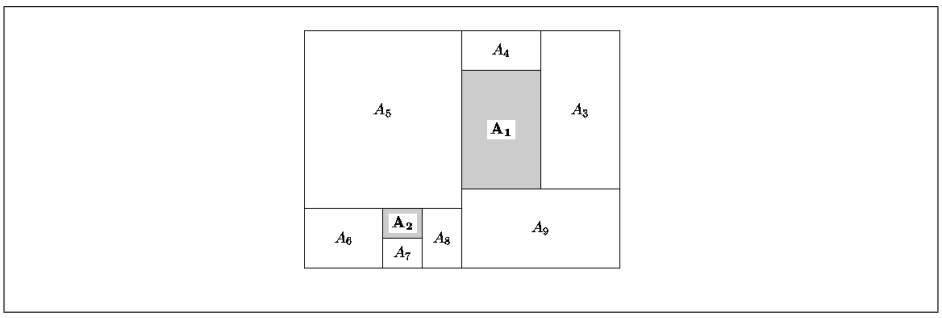

Figura 1.2: Lemma 1.1.1

Definizione 1.1.4 *Una famiglia $\mathcal{S}$ di insiemi si dice semianello se*

- $\emptyset \in \mathcal{S}$
- $A, B \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{S}$
- *se $A_1, A \in \mathcal{S}$, $A_1 \subset A$ allora esistono $\{A_k \in \mathcal{S} \ : \ k = 2, ..., n\}$ a due a due disgiunti tali che*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Si verifica immediatamente che ogni anello è anche un semianello, infatti se $A_1 \subset A$ è possibile decomporre A come segue

$$A = A_1 \cup A_2 \qquad A_2 = A \setminus A_1$$

L'insieme degli intervalli aperti, chiusi, semiaperti (o semichiusi) è un esempio di semianello che non è un anello, un esempio analogo si ottiene considerando i rettangoli chiusi, aperti o semiaperti (semichiusi).

Si può provare per induzione il seguente risultato

Lemma 1.1.1 *Sia $\mathcal{S}$ un semianello e siano $A, A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{S}$ tali che $A_k \subset A$, supponiamo inoltre che gli A_k siano a due a due disgiunti, allora esistono $A_k \in \mathcal{S}$ con $k = n+1, ..., m$, a due a due disgiunti tali che*

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$$

La dimostrazione si può concludere usando il principio di induzione. Sempre per induzione si può anche dimostrare che

Lemma 1.1.2 *Sia $\mathcal{S}$ un semianello e siano $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ allora esiste una famiglia finita di insiemi $B_1, ..., B_s$ di elementi di $\mathcal{S}$, a due a due disgiunti tale che*

$$A_k = \bigcup_{s=r_k}^{r_{k+1}} B_s$$

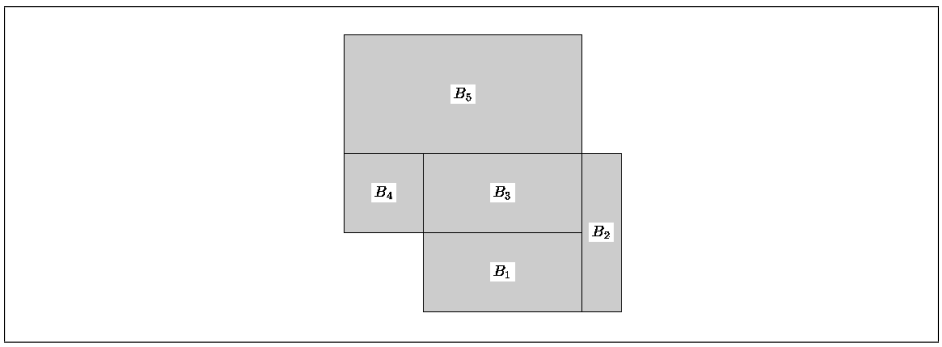

Figura 1.3: Lemma 1.1.2

Abbiamo già visto che ogni famiglia di insiemi $\mathcal{S}$ genera un anello di insiemi $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, ma la costruzione di $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ può non essere banale. Per contro è facile costruire $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ nel caso in cui $\mathcal{S}$ sia un semianello. Infatti possiamo dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.1.3 *Sia $\mathcal{S}$ un semianello allora l'anello $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ generato da $\mathcal{S}$ coincide con la famiglia $\mathcal{B}$ degli insiemi A che ammettono una decomposizione finita del tipo*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

DIMOSTRAZIONE. Si prova, utilizzando il fatto che $\mathcal{S}$ è un semianello ed i precedenti lemmi, che $\mathcal{B}$ è un anello e la tesi si deduce dal fatto che la minimalità di $\mathcal{B}$ è evidente. □

In molti casi tuttavia non è sufficiente considerare unione ed intersezione finita di insiemi, spesso è necessario considerare unione ed intersezione anche di famiglie numerabili di insiemi. Perciò è opportuno introdurre anche la nozione di $\sigma-$anello e di $\delta-$anello.

Definizione 1.1.5 *Un anello di insiemi $\mathcal{A}$ si dice $\sigma-$anello se risulta chiuso rispetto all'unione numerabile cioè se*

$$A_k \in \mathcal{A} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Un anello di insiemi $\mathcal{A}$ si dice $\delta-$anello se risulta chiuso rispetto all'inersezione numerabile.

$$A_k \in \mathcal{A} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Inoltre si chiama $\sigma-$algebra o $\delta-$algebra un $\sigma-$anello o un $\delta-$anello con unità

È evidente dalle formule di De Morgan che i concetti di $\sigma-$algebra e di $\delta-$algebra coincidono; infatti

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = E \setminus \bigcap_{k=1}^{+\infty} (E \setminus A_k)$$

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = E \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} (E \setminus A_k)$$

L'esempio più semplice di $\sigma-$algebra è costituito dalla famiglia $\mathcal{P}(A)$ delle parti di un insieme A.

Se $\mathcal{S}$ è una famiglia di insiemi ed

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

la famiglia $\mathcal{P}(X)$ costituisce una $\sigma-$algebra che contiene $\mathcal{S}$.

Se $\mathcal{T}$ è un'altra $\sigma-$algebra che contiene $\mathcal{S}$ e se $\tilde{X}$ è la sua unità allora evidentemente si ha

$$X \subset \tilde{X}$$

Diremo che la $\sigma-$algebra è irriducibile se accade che

$$X = \tilde{X}$$

A questo proposito possiamo provare che

Teorema 1.1.4 *Per ogni famiglia non vuota $\mathcal{S}$ di insiemi esiste una $\sigma-$algebra irriducibile $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ che contiene $\mathcal{S}$ ed è contenuta in ogni $\sigma-$algebra che contiene $\mathcal{S}$.*

La dimostrazione del teorema è simile a quella analoga che riguarda gli anelli generati da una famiglia di insiemi. La $\sigma-$algebra $\mathcal{T}(S)$ si chiama $\sigma-$algebra minimale generata da S.

È anche opportuno ricordare che se

$$f : M \to N$$

è una funzione e se $\mathcal{M} = \mathcal{P}(M)$ e se $\mathcal{N}$ è una famiglia di insiemi in N allora

- se $\mathcal{N}$ è un anello anche $f^{-1}(\mathcal{N})$ è esso pure un anello;
- se $\mathcal{N}$ è un'algebra anche $f^{-1}(\mathcal{N})$ è essa pure un'algebra;
- se $\mathcal{N}$ è una $\sigma-$algebra anche $f^{-1}(\mathcal{N})$ è essa pure una $\sigma-$algebra.

Le affermazioni non sono più vere se f prende il posto di f^{-1}.

Infatti basta considerare una funzione $f : A \to B$ dove $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\alpha, \beta\}$ tale che

$$f(1) = f(2) = \alpha \qquad f(3) = \beta$$

In tal caso si ha

$$f(\{1, 3\} \cap \{2, 3\}) = f(3) = \beta \qquad f(\{1, 3\}) \cap f(\{2, 3\}) = \{\alpha, \beta\}$$

Ciò è sufficiente per concludere in quanto mostra come l'immagine dell'intersezione di due insiemi possa non essere l'intersezione delle immagini degli stessi insiemi, facendo così venir meno la proprietà di chiusura rispetto all'intersezione.

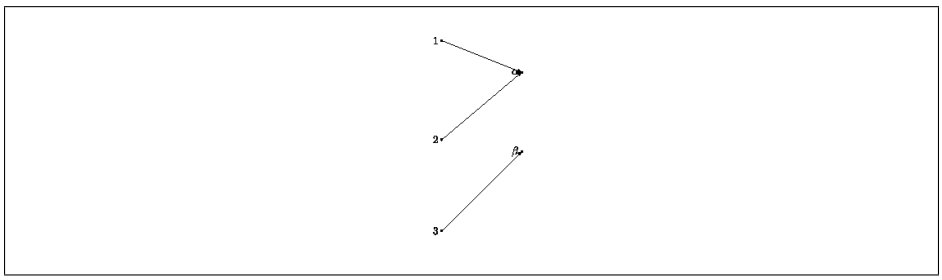

Figura 1.4: Le funzioni possono non conservare le operazioni insiemistiche

Definizione 1.1.6 *Sia X uno spazio topologico, chiamiamo $\mathcal{B}$ la $\sigma-$algebra in X generata dagli aperti di X. $\mathcal{B}$ si chiama $\sigma-$algebra degli insiemi di Borel, o Borelliani, in X.*

Segue facilmente dalla definizione e dalle osservazioni precedenti che

Teorema 1.1.5 *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ la $\sigma-$algebra in X degli insiemi di Borel in X; allora se $A \in \mathcal{B}$*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

dove F_n sono insiemi chiusi e G_n sono aperti,

Osserviamo inoltre che in $\mathbb{R}$ i Borelliani possono essere generati mediante intersezione, unione e differenza a partire dalle semirette illimitate a sinistra $(-\infty, c]$. Più precisamente possiamo provare che vale il seguente

Teorema 1.1.6 *La σ-algebra degli insiemi di Borel in $\mathbb{R}$ è generata da ciascuna delle seguenti famiglie di insiemi.*

1. *Gli intervalli del tipo $(-\infty, b)$*
2. *Gli intervalli del tipo $[a, b)$*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{B}_1$ $\mathcal{B}_2$ le σ-algebre generate dalle famiglie di insiemi definite in 1) e 2) rispettivamente; allora si ha

$$\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B} \tag{1.1}$$

Infatti poichè gli insiemi del tipo $(-\infty, b)$ sono insiemi aperti, $\mathcal{B}$ contiene $\mathcal{B}_1$; inoltre si ha

$$[a, b) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a)^c$$

e quindi $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2$.

Infine $\mathcal{B}_2$ contiene le unioni numerabili di intervalli del tipo $[a, b)$ e quindi gli intervalli aperti e gli aperti; ne deduciamo che $\mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}$

□

In modo del tutto simile otteniamo che

Teorema 1.1.7 *La σ-algebra degli insiemi di Borel in $\mathbb{R}$ è generata da ciascuna delle seguenti famiglie di insiemi.*

1. *I sottoinsiemi chiusi di* $\mathbb{R}$
2. *Gli intervalli del tipo* $(-\infty, b]$
3. *Gli intervalli del tipo* $(a, b]$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{B}_1$ $\mathcal{B}_2$ $\mathcal{B}_3$ le σ-algebre generate dalle famiglie di insiemi definite in 1), 2) e 3) rispettivamente; allora si ha

$$\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_3 \supset \mathcal{B} \tag{1.2}$$

Infatti poichè $\mathcal{B}$ contiene gli aperti ed è chiusa rispetto al complementare contiene anche i chiusi e quindi la σ-algebra $\mathcal{B}_1$. Gli insiemi del tipo $(-\infty, b]$ sono insiemi chiusi e quindi $\mathcal{B}_1$ contiene $\mathcal{B}_2$; inoltre si ha

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$$

e quindi $\mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_3$.

Infine $\mathcal{B}_3$ contiene le unioni numerabili di intervalli del tipo $(a, b]$ e quindi gli intervalli aperti e gli aperti; ne deduciamo che $\mathcal{B}_3 \supset \mathcal{B}$

□

1.2 Misura degli insiemi piani

Definizione 1.2.1 *Definiamo rettangolo il prodotto cartesiano R di due intervalli I e J, chiusi aperti, semichiusi o semiaperti. In altre parole diciamo che R è un rettangolo se*

$$R = I \times J$$

con I, J intervalli reali.

Chiamiamo $\mathcal{S}$ l'insieme di tutti i rettangoli di $\mathbb{R}^2$; si verifica subito che $\mathcal{S}$ è un semianello di insiemi.

Definizione 1.2.2 *Definiamo la misura di un rettangolo $m(R)$ nel senso usuale.*

Teorema 1.2.1 *La misura*

$$m : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$

è una funzione soddisfacente le seguenti proprietà

- $m(\emptyset) = 0$
- $m(R) = (b - a)(d - c)$ *essendo a, b e c, d gli estremi degli intervalli che definiscono R*
- *La misura m assume solo valori positivi o nulli.*
- *La misura m è additiva, cioè se*

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k \qquad P_i \cap P_j = \emptyset \quad se \quad i \neq j$$

allora

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

È opportuno sottolineare che m è una misura additiva su un semianello $\mathcal{S}$.

Estendiamo ora il concetto di misura dall'insieme dei rettangoli ad una famiglia di insiemi più vasta: quella degli insiemi elementari.

Definizione 1.2.3 *Diciamo che un insieme A è elementare se è l'unione di un numero finito di rettangoli a due a due disgiunti.*

Indichiamo con $\mathcal{E}$ la famiglia degli insiemi elementari.

Si può facilmente verificare che

Teorema 1.2.2 *Unione, intersezione, differenza e differenza simmetrica di insiemi elementari è un insieme elementare, pertanto la famiglia $\mathcal{E}$ degli insiemi elementari costituisce un anello di insiemi; più precisamente si ha $\mathcal{E} = \mathcal{A}(\mathcal{S})$.*

Definizione 1.2.4 *Definiamo sulla famiglia $\mathcal{E}$ degli insiemi elementari una misura m' nella maniera seguente: se $A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ è un insieme elementare definiamo*

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

Si può verificare che la definizione di $m'(A)$ non dipende dalla maniera di rappresentare A come unione finita di rettangoli; infatti se

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$$

si ha

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} m(P_k \cap Q_h)$$

In particolare se R è un rettangolo allora

$$m'(R) = m(R)$$

Inoltre, se $a, B \in \mathcal{E}$ e $A \subset B$ avremo che

$$B \subset B \cup (B \setminus A) \qquad \text{e} \qquad B \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

Ne deduciamo che

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \leq m(B)$$

per cui m risulta finitamente subadditiva.

Teorema 1.2.3 *Siano $A, A_n \in \mathcal{E}$ per $n \in \mathbb{I}$ dove $\mathbb{I}$ è un insieme di indici finito o numerabile, tali che*

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{I}} A_n$$

allora

$$m'(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{I}} m'(A_n)$$

In altre parole la misura m' è numerabilmente subadditiva su $\mathcal{E}$

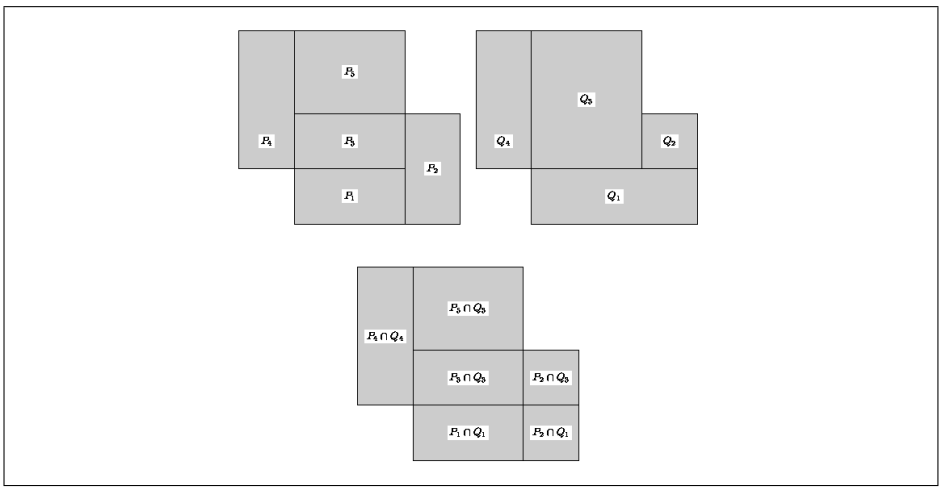

Figura 1.5: Definizione 1.2.4

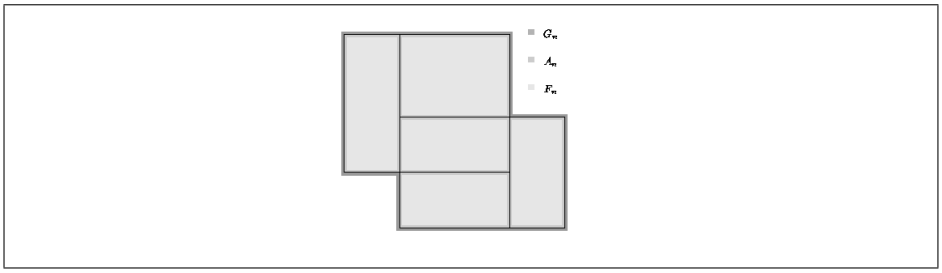

Figura 1.6: Teorema 1.2.3

DIMOSTRAZIONE. Sia $\epsilon > 0$ e consideriamo $F \in \mathcal{E}$ chiuso tale che

$$F \subset A \qquad m'(F) \geq m'(A) - \frac{\epsilon}{2}$$

(ciò è possibile in quanto ognuno dei k rettangoli P_i a due a due disgiunti che costituiscono A può essere sostituito in F da un rettangolo chiuso in esso contenuto avente area più grande di $m'(P_i) - \frac{\epsilon}{2k}$) D'altro canto per ogni A_n esiste $G_n \in \mathcal{E}$ aperto, tale che

$$G_n \supset A_n \qquad m'(G_n) \leq m'(A_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

Ovviamente si ha

$$F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{I}} G_n$$

e, poichè F risulta compatto è possibile trovare un sottoricoprimento finito

$$G_{n_1}, ..., G_{n_s}$$

tale che

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{s} G_{n_i} \quad \text{e} \quad m'(F) \leq \sum_{i=1}^{s} m'(G_{n_i})$$

Pertanto

$$\begin{aligned} m'(A) &\leq m'(F) + \frac{\epsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} m'(G_{n_i}) + \frac{\epsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{I}} m'(G_n) + \frac{\epsilon}{2} \leq \sum_{n\in\mathbb{I}} m'(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{I}} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} + \frac{\epsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{I}} m'(A_n) + \epsilon \end{aligned}$$

Per $\epsilon \to 0$ si ottiene la tesi. □

Teorema 1.2.4 *La subadditività numerabile della misura m' implica la sua additività numerabile cioè la sua $\sigma-$additività.*

Dimostrazione. Infatti se $A \in \mathcal{E}$ e si ha

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \qquad A_n \in \mathcal{E}$$

dove gli A_n sono insiemi a due a due disgiunti, allora

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n)$$

Infatti, poichè $A \supset \bigcup_{n=1}^{N} A_n$, per l'additività finita della misura m', si ha

$$m'(A) \geq m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n)$$

e, passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n)$$

se d'altro canto vale la numerabile subadditività (si veda il teorema 1.2.3) allora si ha

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n)$$

□

È opportuno tuttavia osservare che l'additività numerabile non si ottiene mediante un semplice passaggio al limite dalla additività finita, infatti per ottenere la subadditività di m' abbiamo sfruttato le proprietà di compattezza di un insieme elementare chiuso e limitato.

1.3 Misura di Lebesgue nel piano

Gli insiemi elementari non bastano per sviluppare una teoria della misura soddisfacente pertanto è necessario estendere il concetto di misurabilità e di misura ad insiemi più generali come l'unione infinita di rettangoli. Ci limitiamo per ora a considerare insiemi limitati e a questo scopo supporremo di lavorare nell'insieme $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Definizione 1.3.1 *Chiamiamo misura esterna di un insieme A del piano il numero*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum m(P_k)$$

essendo l'estremo inferiore esteso a tutti i ricoprimenti finiti o numerabili dell'insieme A mediante rettangoli.

È evidente che la definizione di misura esterna non cambierebbe se sostituissimo i rettangoli P_k con insiemi elementari; anche con tale scelta infatti considereremmo ancora unione numerabile o finita di rettangoli; possiamo anche osservare che mediante unione numerabile di rettangoli possiamo descrivere ogni Borelliano in $\mathbb{R}^2$ per cui si ha

$$\mu^*(A) = \inf_{B \in \mathcal{E}} m'(B) = \inf_{B \in \mathcal{B}} m'(B)$$

Osserviamo inoltre che se A è un insieme elementare, allora, per la definizione di misura di un insieme elementare, si ha

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

Pertanto

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m(P_k) = m'(A)$$

d'altro canto se Q_j è una famiglia finita o numerabile di rettangoli che ricopre A, per la $\sigma-$subadditività di m' si ha

$$m'(A) \leq \sum_{j=1}^{n} m'(Q_j) \leq \sum_{j=1}^{n} m(Q_j) \quad \text{e} \quad m'(A) \leq \mu^*(A)$$

Ciò è sufficiente per affermare che, nel caso in cui A sia un insieme elementare,

$$\mu^*(A) = m'(A)$$

essendo l'estremo inferiore nella definizione di μ^* un minimo.

Teorema 1.3.1 *Se*

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{I}} A_n$$

dove $\{A_n \quad , \quad n \in \mathbb{I}\}$ è una famiglia finita o numerabile di insiemi, allora si ha

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{I}} \mu^*(A_n)$$

In particolare

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

Dimostrazione. Per la definizione di misura esterna, per ogni insieme A_n esiste una famiglia finita o numerabile $\{P_k^n : k \in \mathbb{J}\}$ tale che

$$A_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{J}} P_k^n \qquad \sum_{k \in \mathbb{J}} m(P_k^n) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Pertanto

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{I}} \bigcup_{k\in\mathbb{J}} P_k^n$$

e

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{I}} \sum_{k\in\mathbb{J}} m(P_k^n) \leq \sum_{n\in\mathbb{I}} \mu^*(A_n) + \epsilon$$

poichè è lecito considerare $\epsilon \to 0$ è possibile concludere. □

Osserviamo che il teorema precedente dimostra come caso particolare la $\sigma-$subadditività della misura m' non appena si tenga conto che, sugli insiemi elementari la misura μ^* e la misura m' coincidono.

Tutttavia la misura esterna μ^* non risulta additiva.

Definizione 1.3.2 *Diciamo che un insieme A è misurabile nel senso di Lebesgue, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme elementare $B \in \mathcal{E}$ tale che*

$$\mu^*(A\Delta B) < \epsilon$$

Indichiamo con $\mathcal{L}$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Se un insieme A è misurabile indichiamo semplicemente con $\mu(A)$ la sua misura esterna $\mu^*(A)$ e la chiamiamo misura di Lebesgue dell'insieme A.

Teorema 1.3.2 *Se $A \in \mathcal{L}$ allora $Q \setminus A \in \mathcal{L}$; in altre parole se A è misurabile secondo Lebesgue anche il complementare di A è misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. È immediato non appena si tenga conto che

$$(Q \setminus A)\Delta(Q \setminus B) = A\Delta B$$

□

Teorema 1.3.3 *Se $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$ allora*

$$A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}$$

In altre parole la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è chiusa rispetto all'unione ed all'intersezione finita.

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e siano B_1, B_2 due insiemi elementari tali che

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \frac{\epsilon}{2}$$

poichè si può verificare che

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$$

si ha

$$\mu^*\left((A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2)\right) \leq \mu^*\left((A_1\Delta B_1)\right) + \mu^*\left((A_2\Delta B_2)\right) < \epsilon$$

Dal momento che $B_1 \cup B_2$ è un insieme elementare possiamo concludere che $A_1 \cup A_2$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue.

Inoltre poichè

$$A_1 \cap A_2 = Q \setminus ((Q \setminus A_1) \cup (Q \setminus A_2))$$

possiamo concludere anche che $A_1 \cap A_2$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue

□

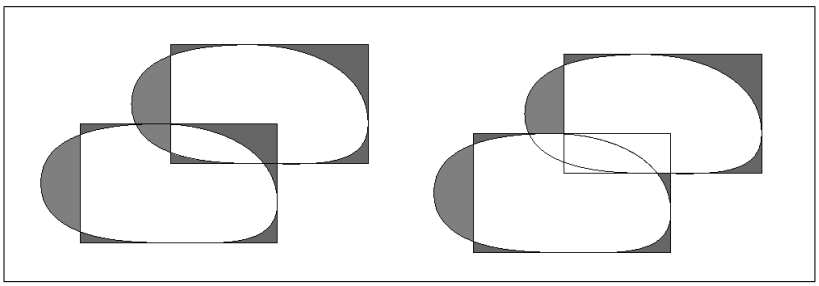

Figura 1.7: $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$

Corollario 1.3.1 *Se $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$ allora*

$$A_1 \setminus A_2,\ A_1\Delta A_2 \in \mathcal{L}$$

In altre parole la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è chiusa rispetto alla differenza ed alla differenza simmetrica finita.

Dimostrazione. L'enunciato si deduce immediatamente dai teoremi precedenti e dalle seguenti uguaglianze

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (Q \setminus A_2) \qquad A_1\Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$$

□

Abbiamo con ciò provato che $\mathcal{L}$ è un anello di insiemi su cui è definita una misura $\mu = \mu^*$ numerabilmente subadditiva (si veda il teorema 1.3.1)

Passiamo ora a provare il seguente risultato che è utile per il seguito.

Lemma 1.3.1 *Siano A, B due insiemi allora*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B)$$

Dimostrazione. Poichè

$$(A\Delta B) \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup A$$
$$= (A\Delta B) \cup A = A \cup B$$

si ha

$$A \subset B \cup (A\Delta B)$$

per cui per i teoremi precedenti

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B)$$

Per concludere è sufficiente scambiare i ruoli di A e B. □

Teorema 1.3.4 *Siano A_1, A_2 due insiemi misurabili disgiunti, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{2} A_k\right) = \sum_{k=1}^{2} \mu(A_k)$$

È chiaro che l'enunciato si può facilmente estendere ad un qualunque numero finito di insiemi a due a due disgiunti.

Ciò permette di concludere che μ è una misura (finitamente) additiva.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\epsilon > 0$ e siano B_1, B_2 due insiemi elementari tali che

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \epsilon \qquad \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \epsilon$$

Poniamo

$$A = A_1 \cup A_2 \qquad B = B_1 \cup B_2$$

si ha, poichè $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

infatti se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$B_1 \cap B_2 \subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) \subset$$
$$\subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) = (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

e quindi

$$m'(B_1 \cap B_2) \leq 2\epsilon$$

D'altro canto per il lemma 1.3.1 e poichè B_1, B_2 sono insiemi elementari, si ha

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| \leq \epsilon$$

$$|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| \leq \epsilon$$

e quindi, poichè $B = [B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)] \cup B_2$,

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\epsilon$$

Se osserviamo inoltre che

$$A \Delta B = (A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

si ottiene che per il lemma 1.3.1

$$\mu^*(A) \geq m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq m'(B) - 2\epsilon \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\epsilon$$

e poichè ϵ è arbitrario

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

Poichè la disuguaglianza opposta

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

è sempre vera per la subadditività della misura μ^*, (si veda il teorema 1.3.1), si ha

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

□

Dal teorema appena dimostrato si deduce in particolare che

$$\mu(Q) = \mu(A) + \mu(Q \setminus A) \qquad \text{e} \qquad \mu(Q \setminus A) = 1 - \mu(A)$$

Teorema 1.3.5 *Per ogni insieme misurabile $A \in \mathcal{L}$, e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme $B = \bigcup_n P_n$ dove gli insiemi P_n sono rettangoli aperti, tale che*

$$A \subset B \qquad 0 \leq \sum_n m(P_n) - \mu^*(A) = \sum_n m(P_n) - \mu(A) < \epsilon$$

Inoltre per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme C chiuso tale che

$$C \subset A \qquad 0 \leq \mu(A) - \mu(C) < \epsilon$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè A è misurabile $\mu^*(A) = \mu(A)$ e, per la definizione 1.3.1 di misura esterna, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una famiglia finita o numerabile $\{P_n : n \in \mathbb{J}\}$ di rettangoli tale che

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{J}} P_n \qquad \sum_{n\in\mathbb{J}} m(P_n) \leq \mu^*(A) + \frac{\epsilon}{2}$$

Se R_n sono rettangoli aperti,

$$P_n \subset R_n \qquad m(R_n) < m(P_n) + \frac{\epsilon}{2_n}$$

si ha

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{J}} R_n \qquad \sum_{n\in\mathbb{J}} m(R_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon$$

Per provare la seconda affermazione è sufficiente osservare che $Q \setminus A \in \mathcal{L}$ e pertanto per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme $B = \bigcup_n P_n$ dove gli insiemi P_n sono rettangoli aperti, tale che

$$Q \setminus A \subset B \qquad 0 \leq \mu(B) - \mu(Q \setminus A) < \epsilon$$

Si ha poi che

$$A \supset Q \setminus B \qquad \mu(A) = 1 - \mu(Q \setminus A) \qquad \mu(Q \setminus B) = 1 - \mu(B)$$

e

$$\mu(A) - \mu(Q \setminus B) = 1 - \mu(Q \setminus B) - 1 + \mu(A) = \mu(B) - \mu(Q \setminus A) < \epsilon$$

per cui si deduce che $C = Q \setminus B$ è un insieme chiuso tale che

$$C \subset A \qquad \mu(A) - \mu(C) < \epsilon$$

□

Teorema 1.3.6 *Se $\{A_k \in \mathcal{L} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di insiemi misurabili numerabile, allora*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$$

sono insiemi misurabili.

Cioè $\mathcal{L}$ è un $\sigma-$anello e un $\delta-$anello; poichè è evidente che $Q = [0,1] \times [0,1]$ è una unità per $\mathcal{L}$, possiamo affermare che $\mathcal{L}$ è una $\sigma-$algebra.

DIMOSTRAZIONE.
Definiamo

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_k \qquad A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

È chiaro che

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A'_k$$

ed inoltre è ovvio che gli insiemi A'_n sono insiemi misurabili e a due a due disgiunti.

Per il precedente teorema 1.3.4 e per la definizione di misura esterna, 1.3.1, e per il teorema 1.3.1, che asserisce l'additività finita di μ^*, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leq \mu^*(A)$$

non appena si sia tenuto conto del fatto che μ e μ^*, coincidono su $\mathcal{L}$.

Pertanto la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A'_k)$$

è convergente e di conseguenza, per N abbastanza grande,

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \mu(A'_k) < \frac{\epsilon}{2}$$

Poichè gli insiemi

$$C = \bigcup_{k=1}^{N} A'_k \qquad R = \bigcup_{k>N} A'_k = A \setminus C$$

sono misurabili, allora esiste un insieme elementare B tale che

$$\mu^*(C \Delta B) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \mu(R) = \mu^*(R) = \sum_{k>N} \mu(A'_k)$$

e d'altra parte

$$A = C \cup R \qquad A \Delta B = (C \cup R) \Delta B \subset (C \Delta B) \cup R$$

per cui

$$\mu^*(A \Delta B) \leq \mu^*(C \Delta B) + \mu^*(R) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e quindi A è un insieme misurabile.

Poichè gli insiemi misurabili sono chiusi rispetto all'operazione di complementare la seconda affermazione del teorema deriva dall'uguaglianza

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = Q \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} (Q \setminus A_k)$$

□

Teorema 1.3.7 *Se* $\{A_k \in \mathcal{L} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti, e se*

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

allora

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

Dimostrazione. Poichè μ è finitamente additiva, si ha

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) < \mu(A)$$

e passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$$

D'altra parte poichè $\mu = \mu^*$ sugli insiemi misurabili e μ^* è subadditiva per il teorema 1.3.1 si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \geq \mu(A)$$

e si può concludere l'uguaglianza. □

Il teorema precedente asserisce una proprietà che si indica con il nome di $\sigma-$additività; la $\sigma-$additività implica una proprietà che viene solitamente indicata con il nome di continuità della misura μ, che si enuncia come segue.

Teorema 1.3.8 *Sia*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots\ldots\ldots \supset A_n \supset \ldots\ldots\ldots$$

una successione di insiemi misurabili decrescente rispetto all'inclusione e sia

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$$

Allora

$$\mu(A) = \lim_k \mu(A_k)$$

Dimostrazione. Possiamo supporre, a meno di sostituire A_k con $A_k \setminus A$ che $A = \emptyset$, $A_k \setminus A$ è decrescente rispetto all'inclusione e $\mu(A_k \setminus A) = \mu(A_k) - \mu(A) \to 0$. Si ha

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots\ldots$$

e

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup (A_{n+2} \setminus A_{n+3}) \cup \ldots\ldots$$

Poichè gli insiemi che figurano a secondo membro sono a due a due disgiunti e poichè sussiste l'additività numerabile si ha

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$$
$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$$

Ora poichè $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) < +\infty$ il suo resto $\sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) \to 0$ per cui risulta

$$\mu(A_n) \to 0$$

□

Corollario 1.3.2 *Sia*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \text{.....} \subset A_n \subset \text{.....}$$

una successione di insiemi misurabili crescente rispetto all'inclusione e sia

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

Allora

$$\mu(A) = \lim_k \mu(A_k)$$

Dimostrazione. Sia

$$B_k = A_k^c \qquad B = A^c = (\bigcup_k A_k)^c = \bigcap_k B_k^c$$

Allora si ha

$$\mu(B_k) \to \mu(B) \qquad \text{e} \qquad 1 - \mu(A_k) \to 1 - \mu(A)$$

□

Ricordiamo infine che siccome $\emptyset$ è un insieme elementare, ogni insieme A la cui misura esterna $\mu^*(A)$ è nulla, è misurabile. Infatti

$$\mu^*(A \setminus \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \epsilon$$

Abbiamo con ciò completato la costruzione di una misura μ $\sigma-$additiva definita su una $\sigma-$algebra di insiemi $\mathcal{L}$. Tale misura si chiama misura di Lebesgue nel piano e $\mathcal{L}$ è la $\sigma-$algebra di Lebesgue nel piano; si ha inoltre che $\mathcal{L} \supset \mathcal{E}$, cioè la $\sigma-$algebra degli insiemi di Lebesgue contiene l'anello degli insiemi elementari e, per la definizione di misura esterna e di misurabilià, che $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}$. In altre parole ogni insieme borelliano è misurabile secondo Lebesgue.

È chiaro che una simile costruzione può essere ripetuta su ogni insieme limitato di uno spazio euclideo di dimensione finita.

1.4 Nozione generale di misura

Abbiamo definito la misura di una considerevole classe di insiemi del piano a partire dalla definizione di misura di un rettangolo; è importante rendersi conto che il procedimento che abbiamo seguito è indipendente dall'espressione dell'area dei rettangoli, e si fonda unicamente sulle proprietà astratte dell'area medesima.

Più precisamente, nell'estendere il concetto di misura dai rettangoli agli insiemi elementari, ci siamo serviti delle seguenti proprietà:

1. l'area è una funzione definita sui rettangoli che assume valori positivi
2. l'area è una funzione (finitamente) additiva
3. i rettangoli nel piano formano un semi-anello

In questo paragrafo intendiamo mostrare come sia possibile riproporre i metodi illustrati prima nel caso particolare, in una situazione più generale.

Definizione 1.4.1 *Sia*

$$m : \mathcal{S}_m \to \mathbb{R}$$

una funzione definita su una famiglia di insiemi $\mathcal{S}_m$; diciamo che m definisce una misura su $\mathcal{S}_m$ se

1. *la famiglia di insiemi $\mathcal{S}_m$ è un semi-anello*
2. *$m(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{S}_m$*
3. *la funzione m è (finitamente) additiva, cioè se*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \Longrightarrow \quad m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

essendo $A, A_k \in \mathcal{S}_m$ ed essendo gli A_k a due a due disgiunti.

Osserviamo che poichè

$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \cap \emptyset$$

si ha

$$m(\emptyset) = m(\emptyset) + m(\emptyset)$$

da cui

$$m(\emptyset) = 0$$

Definizione 1.4.2 *Siano m' e m misure su $\mathcal{A}_{m'}$ e $\mathcal{S}_m$ rispettivamente, diciamo che m' è un prolungamento di m se*

$$\mathcal{A}_{m'} \supset \mathcal{S}_m \quad \text{e se} \quad m'(A) = m(A) \ \ \forall A \in \mathcal{S}_m$$

Teorema 1.4.1 *Ogni misura m definita su un semianello $\mathcal{S}_m$ può essere prolungata in modo unico ad una misura m' definita sull'anello $\mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ generato da $\mathcal{S}_m$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$, allora

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \qquad B_k \in \mathcal{S}_m \qquad B_k \cap B_h = \emptyset \ \text{ per } \quad k \neq h$$

e definiamo

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k)$$

Si può verificare che la definizione di $m'(A)$ non dipende dalla maniera di rappresentare A come unione finita di rettangoli; infatti se

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$$

poichè $B_k \cap C_h \in \mathcal{S}_m$ si ha

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} m(B_k \cap C_h) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \sum_{h=1}^{m} m(C_h)$$

La misura così definita risulta evidentemente positiva ed additiva, per cui l'esistenza di almeno un prolungamento di m ad m' è così dimostrata.

Per concludere l'unicità osserviamo che se

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \qquad B_k \in \mathcal{S}_m \qquad B_k \cap B_h = \emptyset \ \text{ per } \quad k \neq h$$

comunque si scelga un prolungamento $\tilde{m}$ di m all'anello $\mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ si ha

$$\tilde{m}(A) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m'(B_k) = m'(A)$$

e le misure $\tilde{m}$ ed m' coincidono.

□

Abbiamo con ciò ripetuto il procedimento utilizzato per estendere la misura m dall'insieme dei rettangoli alla classe degli insiemi elementari. Ricordiamo anche che l'anello $\mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ generato dal semianello $\mathcal{S}_m$ dei rettangoli è costituito dalla classe degli insiemi elementari cioè dalla classe degli insiemi che possono essere espressi come unione finita di rettangoli.

Proviamo ora un teorema che risulta banalmente verificato nel caso dell'anello degli insiemi elementari considerato in precedenza.

Teorema 1.4.2 *Se m è una misura definita su un anello $\mathcal{A}_m$ e se*

$$A_1, A_2, ..., A_m \in \mathcal{A}_m$$

allora si ha

1. *se $A \supset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ e se $A_k \cap A_h = \emptyset$ allora*

$$m(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

2. se $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ *allora*

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

In particolare se $A, B \in \mathcal{A}_m$ *e se* $A \subset B$ *allora*

$$m(A) \leq m(B)$$

DIMOSTRAZIONE. Per provare la prima delle affermazioni è sufficiente osservare che

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) + m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

e ricordare che la misura di un insieme è positiva.

Per quanto riguarda la seconda affermazione si ha che se $A, B \in \mathcal{A}_m$ si ha

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \qquad m(A) = m(B) - m(B \setminus A)$$

Perciò

$$m(A) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) - m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus A\right) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

e si può concludere. □

Il teorema precedente è stato dimostrato nel caso in cui la misura m sia definita su un anello tuttavia, poichè una misura definita su un semianello può essere estesa all'anello generato restando invariata sul semianello di partenza, lo stesso teorema vale anche se consideriamo una misura m definita su un semianello.

Passiamo ora a considerare l'additività numerabile di una misura.

Definizione 1.4.3 *Una misura* m *si dice numerabilmente additiva se per ogni successione* $\{A_n \in \mathcal{S}_m \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ *tali che*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad A_k \cap A_h = \emptyset$$

si ha

$$m(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k)$$

Sono esempi di misura $\sigma-$additiva

1. la misura di Lebesgue per gli insiemi del piano
2. la misura definita su un insieme discreto numerabile

   $$X = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

   mediante la

   $$m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$$

   essendo verificata la condizione

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n < +\infty \qquad p_n \geq 0 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$$

Per avere un esempio di misura additiva ma non numerabilmente additiva possiamo invece considerare l'insieme

$$X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

ed il semianello $\mathcal{S}_m$ di insiemi costituito dai sottoinsiemi A_{ab} di X che sono intersezioni con intervalli aperti, chiusi, semiaperti (o semichiusi) di etremi a e b.

Definiamo su $\mathcal{S}_m$ una misura ponendo

$$m(A_{ab}) = b - a$$

La misura m è additiva, ma non risulta $\sigma-$additiva in quanto

$$m(X) = 1 \qquad X = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{qq} \qquad m(A_{qq}) = m(\{q\}) = 0$$

Supporremo, d'ora innanzi che le misure considerate siano $\sigma-$additive.

Teorema 1.4.3 *Sia m una misura $\sigma-$additiva definita su un semianello $\mathcal{S}_m$ e sia m' la misura ottenuta prolungando m all'anello $\mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$; allora anche m' è una misura $\sigma-$additiva.*

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m) \qquad B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m) \qquad B_k \cap B_h = \emptyset \quad \text{per} \quad h \neq k$$

e sia

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

allora

$$A = \bigcup_j A_j \qquad B_n = \bigcup_i B_i^n$$

essendo

$$A_j, B_i^n \in \mathcal{S}_m$$

e gli indici i, j estesi ad un insieme finito. Se definiamo

$$C_{i,j}^n = B_i^n \cap A_j \in \mathcal{S}_m$$

si ha

$$A_j = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_i C_{i,j}^n \qquad B_i^n = \bigcup_j C_{i,j}^n$$

Pertanto, poichè m è $\sigma-$additiva su $\mathcal{S}_m$ si ha

$$m(A_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_i m(C_{i,j}^n) \qquad B_i^n = \sum_j m(C_{i,j}^n)$$

E, per la definizione di m'

$$m'(A) = \sum_j m(A_j) = \sum_j \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_i m(C_{i,j}^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_j \sum_i m(C_{i,j}^n)$$

$$m'(B_n) = \sum_i m'(B_i^n) = \sum_j \sum_i m(C_{i,j}^n)$$

e

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(B_n)$$

□

Dimostriamo ora due proprietà fondamentali di una misura $\sigma-$additiva; definita su un anello $\mathcal{A}$. Poichè una misura definita su un semianello può essere estesa all'anello generato restando invariata sul semianello di partenza, lo stesso teorema vale anche se consideriamo una misura m definita su un semianello.

Teorema 1.4.4 *Sia m una misura $\sigma-$additiva su un anello $\mathcal{A}$ e siano $A, A_n \in \mathcal{A}$ per $n \in \mathbb{N}$; allora*

1. *se*

$$A \supset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad j \neq j$$

allora

$$m(A) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$$

2. *se*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

allora

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$$

Dimostrazione. Per l'additività finita si ha

$$\sum_{n=1}^{N} m(A_n) \leq m(A)$$

e passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene la tesi

Per verificare la seconda affermazione osserviamo che, poichè $\mathcal{A}$ è un anello, si ha che gli insiemi

$$B_n = (A_n \cap A) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \in \mathcal{A}$$

Inoltre

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \qquad B_n \subset A_n \qquad B_k \cap B_h = \emptyset \text{ per } h \neq k$$

per cui

$$m(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(B_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$$

□

Delle due affermazioni del teorema precedente la prima non dipende dalla $\sigma-$additività della misura e resta vera anche per le misure solamente additive.

La seconda affermazione dipende invece dalla $\sigma-$additività e può essere falsa per misure solamente additive.

Se infatti consideriamo l'esempio di misura additiva ma non $\sigma-$ additiva che abbiamo precedentemente proposto, è facile verificare che l'insieme X la cui misura è 1 può essere ricoperto con unione numerabile di insiemi, i singoli numeri razionali, di misura 0.

Di più posssiamo osservare che, dal momento che la prima proprietà vale per ogni misura additiva, la seconda risulta equivalente all'additività numerabile stessa.

1.5 Prolungamento secondo Lebesgue

Definizione 1.5.1 *Sia*

$$m : \mathcal{S}_m \to \mathbb{R}$$

una misura $\sigma-$additiva su un semianello $\mathcal{S}_m$ con unità E e sia $\mathcal{P}$ l'insieme delle parti di di $E = \bigcup_{A\in\mathcal{S}_m} A$; definiamo

$$\mu^* : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

mediante la

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_n m(B_n)\right\}$$

essendo l'estremo inferiore esteso a tutti i ricoprimenti finiti o numerabili di A mediante insiemi $B_n \in \mathcal{S}_m$

Riscrivendo in astratto la dimostrazione del teorema 1.3.1 fatta allorquando abbiamo provato la subadditività numerabile della misura esterna di un insieme del piano, possiamo dimostrare che

Teorema 1.5.1 *Se*

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{I}} A_n$$

dove $\{A_n \quad n \in \mathbb{I}\}$ è una famiglia finita o numerabile di insiemi, allora si ha

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{I}} \mu^*(A_n)$$

In particolare

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

Definizione 1.5.2 *Diciamo che un insieme A è misurabile nel senso di Lebesgue, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme $B \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ tale che*

$$\mu^*(A\Delta B) < \epsilon$$

Indichiamo con $\mathcal{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. La funzione μ^*, considerata solo su $\mathcal{M}$ si chiama misura di Lebesgue e si denota semplicemente con μ.

È immediato verificare che se $A \in \mathcal{S}_m$ si ha

$$\mu(A) = m(A)$$

Ancora come nel caso della misura nel piano possiamo dimostrare che

Teorema 1.5.2 *Se $A \in \mathcal{M}$ allora $E \setminus A \in \mathcal{M}$; in altre parole se A è misurabile secondo Lebesgue anche il complementare di A è misurabile secondo Lebesgue.*

DIMOSTRAZIONE. È immediato non appena si tenga conto che

$$(E \setminus A)\Delta(E \setminus B) = A\Delta B$$

□

Teorema 1.5.3 *La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è un anello.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè si ha

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$$

e

$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)]$$

è sufficiente dimostrare che

$$A_1, A_2 \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad A = A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{M}$$

Siano pertanto $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, sia $\epsilon > 0$ e siano $B_1, B_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ due insiemi elementari tali che

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \frac{\epsilon}{2}$$

Poniamo $B = B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$, poichè

$$(A_1 \setminus A_2)\Delta(B_1 \setminus B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$$

si ha

$$\mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*((A_1\Delta B_1)) + \mu^*((A_2\Delta B_2)) < \epsilon$$

□

È evidente che E è una unità per l'anello $\mathcal{M}$ e pertanto $\mathcal{M}$ è un'algebra di insiemi.

Esattamente come fatto nel caso della misura degli insiemi piani (teorema 1.3.4) possiamo provare che

Teorema 1.5.4 *La funzione μ definita sulla famiglia di insiemi $\mathcal{M}$ è una funzione additiva*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\epsilon > 0$ e siano B_1, B_2 due insiemi elementari tali che

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \epsilon \qquad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \epsilon$$

Poniamo

$$A = A_1 \cup A_2 \qquad B = B_1 \cup B_2$$

si ha, poichè $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$$

infatti se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$B_1 \cap B_2 \subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) \subset$$
$$\subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) = (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

e quindi

$$m'(B_1 \cap B_2) \leq 2\epsilon$$

D'altro canto per il lemma 1.3.1 e poichè B_1, B_2 sono insiemi elementari, si ha

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| \leq \epsilon$$

$$|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| \leq \epsilon$$

e quindi, poichè $B = B_1 \setminus (B_1 \cap B_2) \cup B_2$,

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\epsilon$$

Se osserviamo inoltre che

$$A \Delta B = (A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

si ottiene che per il lemma 1.3.1

$$\mu^*(A) \geq m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq m'(B) - 2\epsilon \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\epsilon$$

e poichè ϵ è arbitrario

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

Poichè la disuguaglianza opposta

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

è sempre vera per la subadditività della misura μ^*, (si veda il teorema 1.3.1), si ha

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

□

Sempre come fatto nel caso della misura piana possiamo dimostrare che

Teorema 1.5.5 *Se $\{A_k \in \mathcal{M} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti, e se*

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

allora

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè μ è finitamente additiva, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) < \mu(A)$$

e passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$$

D'altra parte poichè μ è subadditiva si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \geq \mu(A)$$

e si può concludere l'uguaglianza. □

Esattamente come nel caso della misura di insiemi piani possiamo provare che

Teorema 1.5.6 *Se $\{A_k \in \mathcal{M} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili, allora*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$$

sono insiemi misurabili. Pertanto la famiglia di insiemi $\mathcal{M}$ risulta essere una $\sigma-$algebra la cui unità è E.

DIMOSTRAZIONE.

Definiamo

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_k \qquad A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

È chiaro che

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A'_k$$

ed inoltre è ovvio che gli insiemi A'_n sono insiemi misurabili e a due a due disgiunti.

Per il precedente teorema 1.3.4 e per la definizione di misura esterna, 1.3.1, e per il teorema 1.3.1, che asserisce l'additività finita di μ^*, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leq \mu^*(A)$$

non appena si sia tenuto conto del fatto che μ e μ^*, coincidono su $\mathcal{L}$.

Pertanto la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A'_k)$$

è convergente e di conseguenza, per N abbastanza grande,

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \mu(A'_k) < \frac{\epsilon}{2}$$

Poichè gli insiemi

$$C = \bigcup_{k=1}^{N} A'_k \qquad R = \bigcup_{k>N} A'_k = A \setminus C$$

sono misurabili, allora esiste un insieme elementare B tale che

$$\mu^*(C\Delta B) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \mu(R) = \mu^*(R) = \bigcup_{k>N} A'_k$$

e d'altra parte

$$A = C \cup R \qquad A\Delta B = (C \cup R)\Delta B \subset (C\Delta B) \cup R$$

per cui

$$\mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*(C\Delta B) + \mu^*(R) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e quindi A è un insieme misurabile.

Poichè gli insiemi misurabili sono chiusi rispetto all'operazione di complementare la seconda affermazione del teorema deriva dall'uguaglianza

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = Q \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} (Q \setminus A_k)$$

□

Teorema 1.5.7 *Sia*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots\ldots\ldots \supset A_n \supset \ldots\ldots\ldots$$

una successione di insiemi misurabili decrescente rispetto all'inclusione e sia

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$$

Allora

$$\mu(A) = \lim_k \mu(A_k)$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre, a meno di sostituire A_k con $A_k \setminus A$ che $A = \emptyset$, $A_k \setminus A$ è decrescente rispetto all'inclusione e $\mu(A_k \setminus A) = \mu(A_k) - \mu(A) \to 0$. Si ha

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots\ldots$$

e

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup (A_{n+2} \setminus A_{n+3}) \cup \ldots\ldots$$

Poichè gli insiemi che figurano a secondo membro sono a due a due disgiunti e poichè sussiste l'additività numerabile si ha

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$$
$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$$

Ora poichè $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) < +\infty$ il suo resto $\sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) \to 0$ per cui risulta

$$\mu(A_n) \to 0$$

□

Corollario 1.5.1 *Sia*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots\ldots\ldots \subset A_n \subset \ldots\ldots\ldots$$

una successione di insiemi misurabili crescente rispetto all'inclusione e sia

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

Allora

$$\mu(A) = \lim_k \mu(A_k)$$

Dimostrazione. Sia

$$B_k = A_k^c \qquad B = A^c = (\bigcup_k A_k)^C = \bigcap_k B_k^c$$

Allora si ha

$$\mu(B_k) \to \mu(B) \qquad \text{e} \qquad 1 - \mu(A_k) \to 1 - \mu(A)$$

□

Definizione 1.5.3 *Chiamiamo prolungamento secondo Lebesgue della misura m la misura μ definita sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{M}$; osserviamo che su $\mathcal{M}$ μ coincide con m.*

Prolungamento di una misura data su un semianello senza unità

Il problema di estendere una misura data su un semianello $\mathcal{S}_m$ senza unità si presenta ad esempio quando si ha a che fare con insiemi non limitati nel piano o nello spazio.

Indichiamo di seguito gli accorgimenti da osservare nel caso in cui $\mathcal{S}_m$ non possieda unità.

Definizione 1.5.4 *Sia*

$$m : \mathcal{S}_m \to \mathbb{R}$$

una misura $\sigma-$additiva su un semianello $\mathcal{S}_m$ senza unità sia $\mathcal{P}$ l'insieme delle parti di $E = \bigcup_{A\in\mathcal{S}_m} A$; definiamo

$$\mu^* : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

mediante la

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_n m(B_n)\right\}$$

essendo l'estremo inferiore esteso a tutti i ricoprimenti finiti o numerabili di A mediante insiemi $B_n \in \mathcal{S}_m$ per tutti quegli insiemi A che ammettono almeno un ricoprimento $\bigcup_n A_n$, $A_n \in \mathcal{S}_m$ tale che $\sum_n m(A_n) < +\infty$.

Definizione 1.5.5 *Diciamo che un insieme A è misurabile nel senso di Lebesgue, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme $B \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ tale che*

$$\mu^*(A\Delta B) < \epsilon$$

Indichiamo con $\mathcal{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. La funzione μ^*, considerata solo su $\mathcal{M}$ si chiama misura di Lebesgue e si denota semplicemente con μ.

È immediato verificare che se $A \in \mathcal{S}_m$ si ha

$$\mu(A) = m(A)$$

Inoltre, poichè μ^* è subadditiva, si ha

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B) < +\infty$$

ogni volta che A è misurabile.

Teorema 1.5.8 *La classe $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili è un anello.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare che la famiglia $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto alle operazioni di unione, intersezione, differenza e differenza simmetrica.

A questo scopo si può procedere come nel teorema 1.3.2, sfruttando il fatto che

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$$

per verificare che $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto alla unione finita di insiemi. Si può poi sfruttare, come nel teorema 1.5.3 il fatto che

$$(A_1 \setminus A_2)\Delta(B_1 \setminus B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$$

per provare che $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto alla differenza di insiemi. Infine si possono usare le due precedenti asserzioni per provare che $\mathcal{M}$ è chiusa anche rispetto ad intersezione e differenza simmetrica.

Si ricordi che

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \qquad A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

□

Il teorema che asserisce che la classe degli insiemi misurabili è una $\sigma-$algebra va modificato come segue

Definizione 1.5.6 *Se $A \in \mathcal{M}$ chiamiamo $\mathcal{M}_A$ la famiglia degli insiemi misurabili contenuti in A. In altre parole*

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} \ : \ B \subset A\}$$

Teorema 1.5.9 *Se $A \in \mathcal{M}$ allora $\mathcal{M}_A$ è una $\sigma-$algebra*

Dimostrazione. Possiamo applicare il teorema 1.3.6 in quanto $\mu(A) < +\infty$ □

Teorema 1.5.10 *Se m è una misura su un semianello $\mathcal{S}_m$ senza unità, allora la classe $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è un $\delta-$anello; se $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di insiemi misurabili secondo Lebesgue, allora*

$$A = \bigcup_n A_n$$

è misurabile se e solo se esiste una costante K indipendente da N tale che

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq K \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Per provare che $\mathcal{M}$ è un $\delta-$anello, basta provare che $\mathcal{M}$ è chiuso rispetto alla intersezione numerabile. Sia pertanto $\{A_n \in \mathcal{M} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di insiemi misurabili, allora se

$$A = \bigcap_n A_n$$

posto $A'_n = A_n \cap A_1$ si ha che

$$A = \bigcap_n A'_n \qquad A'_n \in \mathcal{M}_{A_1}$$

Ciò consente di affermare che $A \in \mathcal{M}_{A_1}$.

Per quanto riguarda la seconda parte dell'enunciato sia $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di insiemi misurabili secondo Lebesgue e sia

$$A = \bigcup_n A_n$$

Possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a due a due disgiunti.

Ora se vale la condizione 1.3, possiamo affermare che

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leq K$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leq K \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=N}^{+\infty} \mu(A_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Se chiamiamo $C = \bigcup_{n=1}^{N} A_k$ ed $R = A \setminus C$ possiamo dedurre che C è misurabile in quanto è unione finita di insiemi misurabili e quindi esiste $B \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ tale che

$$\mu^*(C \Delta B) < \frac{\epsilon}{2}$$

Pertanto

$$\mu^*(A\Delta B) < \mu^*(C\Delta B) + \mu^*(R) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e anche A è misurabile.

Se viceversa A è misurabile, allora

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\geq N+1} A_n\right)$$

e

$$\mu(A) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

□

Osserviamo infine che vale la seguente notevole proprietà.

Definizione 1.5.7 *Una misura μ si dice completa se*

$$B \subset A \qquad \mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B \quad \textit{è misurabile}$$

In tal caso è evidente che $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$.

Si può facilmente dimostrare che

Teorema 1.5.11 *Il prolungamento secondo Lebesgue di ogni misura m definita su un semianello $\mathcal{S}_m$ è completo.*

Dimostrazione. Infatti se

$$B \subset A \qquad \mu(A) = 0$$

allora

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$$

e quindi B è misurabile in quanto ogni insieme C avente misura esterna nulla è misurabile perchè $\emptyset \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ e si ha

$$\mu^*(C\Delta\emptyset) = \mu^*(C) = 0$$

□

Abbiamo così visto come si può prolungare una misura nel caso sia definita su un semianello senza unità, però il procedimento usato è troppo restrittivo e non consente, ad esempio, di trattare nel piano la misurabilità di insiemi non limitati come l'esterno di una circonferenza una striscia oppure l'intero piano.

Occorre pertanto estendere la nozione di misurabilità ammettendo anche insiemi misurabili di misura infinita in modo che la famiglia degli insiemi misurabili possieda, come nel caso di un semianello con unità, la struttura di $\sigma-$algebra e non soltanto di $\sigma-$anello.

Consideriamo qui il caso in cui la misura sia $\sigma-$finita soddisfi cioè la seguente proprietà:

Definizione 1.5.8 *Diciamo che una misura m definita su un semianello $\mathcal{S}_m$ di sottoinsiemi di un insieme X è $\sigma-$finita se*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

con $B_n \in \mathcal{S}_m$ essendo l'unione estesa ad una quantità numerabile, e non finita, di insiemi B_n del semianello $\mathcal{S}_m$.

Un esempio di misura $\sigma-$finita è fornita dalla misura $\sigma-$finita generata dall'area dei rettangoli nel piano. Al contrario, un esempio di misura non $\sigma-$finita può essere costruito considerando un insieme X, una funzione

$$f : X \to R$$

e definendo per ogni sottoinsieme finito

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$$

$$\mu(A) = \sum_i f(x_i)$$

Se l'insieme in cui $f(x) \neq 0$ è costituito da un insieme più che numerabile di punti, la misura non è $\sigma-$finita

Sia pertanto una misura m $\sigma-$additiva e $\sigma-$finita su un insieme X, definita su un semianello $\mathcal{S}_m$ di sottoinsiemi di X.

Supponiamo che

$$X = \bigcup_n B_n \qquad B_n \in \mathcal{S}_m$$

Passando all'anello $\mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ generato da $\mathcal{S}_m$ e sostituendo B_n con

$$B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$$

possiamo supporre che

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \qquad B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m) \qquad B_n \cap B_m \qquad n \neq m$$

Più in generale possiamo supporre che $B_n \in \mathcal{M}$.

Applicando ad m il procedimento di prolungamento della misura secondo Lebesgue otteniamo una misura μ definita sul $\delta-$anello $\mathcal{M}$. Se $B \in \mathcal{M}$, ricordiamo che $\mathcal{M}_B$ è la classe degli insiemi misurabili contenuti in B, cioè

$$\mathcal{M}_B = \{C \in \mathcal{M} \ : \ C \subset B\}$$

e che $\mathcal{M}_B$ è una $\sigma-$algebra la cui unità è B.

Consideriamo ora la famiglia

$$\mathcal{U} = \{A \ : \ A \cap B_n \in \mathcal{M}_{B_n}, \ n \in \mathbb{N}\} = \{A \ : \ A \cap B_n \in \mathcal{M}, \ n \in \mathbb{N}\}$$

In altre parole $\mathcal{U}$ è costituita dagli insiemi A tali che

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad A_n \in \mathcal{M}_{B_n}$$

Si può verificare che $\mathcal{U}$ è una $\sigma-$algebra che chiameremo somma diretta delle $\sigma-$algebre $\mathcal{M}_{B_n}$.

Ad esempio se $A = \bigcup_k A_k$ con $A_k \in \mathcal{U}$, allora esistono degli insiemi $C_n^k = A_k \cap B_n \in \mathcal{M}_{B_n}$ tali che

$$A = \bigcup_k \bigcup_n C_n^k = \bigcup_n \bigcup_k C_n^k \qquad \bigcup_k C_n^k \in \mathcal{M}_{B_n}$$

e quindi $A \in \mathcal{U}$.

Chiameremo misurabili gli insiemi della $\sigma-$algebra $\mathcal{U}$ e definiremo

$$\tilde{\mu} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

mediante la

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

essendo

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad A_n \in \mathcal{M}_{B_n}$$

Poichè la serie a secondo membro è a termini positivi, possiamo affermare che la serie considerata è incondizionatamente convergente o positivamente divergente.

Per giustificare la definizione di $\tilde{\mu}$ occorre verificare che

Teorema 1.5.12 *La $\sigma-$algebra $\mathcal{U}$ e la misura $\tilde{\mu}$ non dipendono dalla famiglia di insiemi disgiunti $B_n \in \mathcal{M}$ tali che $\bigcup_n B_n = X$.*

Inoltre

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{M}$$

e $\tilde{\mu}$ è $\sigma-$additiva su $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che

$$A \in \mathcal{U} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap C \in \mathcal{M} \quad \forall\, C \in \mathcal{M} \qquad \mu(C) < +\infty$$

Infatti l'implicazione $\Leftarrow$ segue immediatamente dalla definizione di $\mathcal{U}$ in quanto $B_n \in \mathcal{M}$.

Se al contrario $A \in \mathcal{U}$ e se $C \in \mathcal{M}$, posto $C_k = C \cap B_k$ si ha

$$A \cap C = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \cap C_k)$$

e quindi

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} (A \cap C_k)\right) \leq \left(\bigcup_{k=1}^{N} C_k\right) \leq \mu(C)$$

e pertanto $A \cap C$ è misurabile per le proprietà di $\mathcal{M}$ (teorema 1.5.10).

Siano ora B_n e D_k due famiglie di insiemi disgiunti di $\mathcal{M}$ tali che

$$X = \bigcup_n B_n = \bigcup_k D_k$$

allora, se $A \in \mathcal{U}$, poichè la misura μ è non negativa, si ha

$$\sum_n \mu(A \cap B_n) = \sum_{n,k} \mu(A \cap B_n \cap D_k) = \sum_k \mu(A \cap D_k)$$

in quanto è possibile riordinare i termini delle serie che risultano assolutamente convergenti.

Pertanto è evidente che la misura $\tilde{\mu}$ non dipende dalla scelta della famiglia di insiemi B_n o D_k.

Ora se $A \in \mathcal{M}$, poichè $A = \bigcup_n (A \bigcap B_n)$ per la $\sigma-$additività di μ si ha

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A \cap B_n) = \tilde{\mu}(A)$$

Per verificare che $\tilde{\mu}$ è σ-additiva su $\mathcal{M}$ possiamo osservare che se

$$A, A_n \in \mathcal{M} \qquad A_n \cap A_m = \emptyset \qquad A = \bigcup_n A_n$$

allora $A, A_n \in \mathcal{M}_A$ e quindi, dalla definizione,

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) = \sum_n \mu(A_n)$$

□

Teorema 1.5.13 *La misura $\tilde{\mu}$ è $\sigma-$additiva su $\mathcal{U}$; inoltre*

$$\{A \in \mathcal{U} \ : \ \tilde{\mu}(A) < +\infty\} = \mathcal{M}$$

è un $\delta-$anello.

DIMOSTRAZIONE. Siano $A_n \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$ $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$ tali che

$$A = \bigcup_n A_n$$

Poichè la misura μ è $\sigma-$additiva su $\mathcal{M}$ si ha

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k \cap B_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_k \cap B_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{\mu}(A_k)$$

e quindi è provata la $\sigma-$additività.

La seconda affermazione deriva dal teorema 1.5.10 □

1.6 Funzioni misurabili

Definizione 1.6.1 *Siano X, Y due insiemi, e siano $\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Y$ due famiglie di insiemi in X ed Y rispettivamente e sia*

$$f : X \to Y$$

Diciamo che f è $(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Y)$- misurabile se

$$A \in \mathcal{S}_Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_X$$

Se ad esempio $\mathcal{S}_X$ ed $\mathcal{S}_Y$ sono le famiglie degli aperti di X ed Y rispettivamente una funzione f è $(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Y)$- misurabile se e solo se f è continua.

Definizione 1.6.2 *Nel caso in cui $\mathcal{S}_X = \mathcal{B}_X$ ed $\mathcal{S}_Y = \mathcal{B}_Y$ siano la famiglia degli insiemi Borelliani in X e Y rispettivamente, una funzione $(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Y)$- misurabile si dice $\mathcal{B}$-misurabile, o misurabile nel senso di Borel.*

Definizione 1.6.3 *Siano X un insieme, sia μ una misura $\sigma-$additiva su X e sia $\mathcal{B}$ la $\sigma-$algebra degli insiemi Borelliani in $\mathbb{R}$; diciamo che*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

è una funzione misurabile se

$$A \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_X$$

Analogamente diciamo che una funzione a valori complessi

$$\varphi : X \to \mathbb{C}$$

è misurabile se

$$A \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_X$$

ove $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ è la famiglia degli insiemi borelliani in $\mathbb{C}$.

Teorema 1.6.1 *Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Y, \mathcal{S}_Z$ tre famiglie di insiemi di X, Y, Z rispettivamente; siano*

$$f : X \to Y \qquad g : Y \to Z$$

due funzioni f $(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Y)$- misurabile e g $(\mathcal{S}_Y, \mathcal{S}_Z)$- misurabile, allora $g(f(\cdot))$ è $(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Z)$- misurabile.

In altre parole la composta di funzioni misurabili è misurabile.

La dimostrazione è immediata.

Corollario 1.6.1 *Siano*

$$f : X \to Y \qquad g : Y \to \mathbb{R}$$

Se g è borelliana e f è misurabile allora $g(f(\cdot))$ è misurabile; in particolare se f è continua e g è misurabile, allora $f(g(\cdot))$ è misurabile.

Teorema 1.6.2 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $\mathcal{S}_X$ una $\sigma-$algebra su X; allora f è misurabile se e solo se*

$$f^{-1}(\{-\infty, c\}) \in \mathcal{S}_X \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Poichè $(-\infty, c)$ è un insieme borelliano, la condizione indicata è chiaramente necessaria per la misurabilità di f.

D'altro canto la condizione è anche sufficiente in quanto la famiglia delle semirette $(-\infty, c)$ genera la $\sigma-$algebra dei borelliani in $\mathbb{R}$. □

Spesso, la condizione enunciata nel teorema precedente viene assunta come definizione di misurabilità.

Possiamo altresì provare che

Teorema 1.6.3 *La somma, la differenza, il prodotto di due funzioni misurabili è misurabile. Il quoziente di due funzioni misurabili è misurabile a condizione che il denominatore non sia nullo.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni misurabili rispetto alla misura m definita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_m$; cominciamo con l'osservare che la funzione

$$h : X \to \mathbb{R}^2 \qquad h(x) = (f(x), g(x))$$

è misurabile. Infatti se $R = (a, b) \times (c, d)$ è un rettangolo si ha

$$h^{-1}(R) = f^{-1}((a, b)) \cap g^{-1}((c, d))$$

che è misurabile in quanto intersezione di insiemi misurabili. Poichè ogni borelliano nel piano è unione misurabile di rettangoli aperti possiamo concludere che h è misurabile.

La dimostrazione del teorema si ottiene osservando che le funzioni

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto s + t \qquad (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto st \qquad s \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{s}$$

sono continue. □

Per quanto riguarda il limite di una successione di funzione misurabili possiamo provare che

Teorema 1.6.4 *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili e supponiamo che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$, allora f è una funzione misurabile.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\{x \in X \ : \ f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \left\{ x \in X \ : \ f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}$$

Sia infatti $x \in X$ tale che $f(x) < c$, allora esiste k tale che

$$f(x) < c - \frac{2}{k}$$

inoltre, poichè $f_n(x) \to f(x)$, esiste n tale che se $m \geq n$ si ha

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

e ciò significa che

$$x \in \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \left\{ x \in X \ : \ f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}$$

Viceversa se supponiamo che

$$x \in \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \left\{ x \in X \ : \ f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}$$

allora esiste k ed esiste n tale che se $m \geq n$ si ha

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

per cui per $m \to +\infty$ si ha

$$f(x) < c - \frac{1}{k} < c \quad \text{e} \quad x \in \{x \in X \ : \ f(x) < c\}$$

Ora, se le funzioni f_m sono misurabili allora gli insiemi

$$\{x \in X \ : \ f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$$

sono misurabili e così risulta

$$\{x \in X \ : \ f(x) < c\}$$

ed f è misurabile. □

Quando si studia la misurabilità di una funzione è comodo supporre, e nel seguito supporremo che sia verificato, che la misura usata sia $\sigma-$**additiva e completa**.

Abbiamo già visto che ogni sottoinsieme di misura nulla rispetto ad una misura completa è esso stesso misurabile. Pertanto è chiaro che la misurabilità di una funzione non è influenzata da insiemi di misura nulla. Pertanto è usuale porre la seguente definizione.

Definizione 1.6.4 *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni e supponiamo che μ sia una misura associata ad una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$, diciamo che f e g sono equivalenti se*

$$\mu\left(\{x \in X \ : \ f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$$

In altre parole diciamo che f e g sono equivalenti se differiscono su un insieme di misura nulla.

È abbastanza facile intuire che gli insiemi di misura nulla hanno un ruolo particolare dal punto di vista della misurabilità. È per questo che è opportuno porre la seguente definizione

Definizione 1.6.5 *Diciamo che una proprietà vale quasi ovunque in X rispetto alla misura μ se è vera su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.*

Teorema 1.6.5 *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni definite su uno spazio dotato di una misura μ e supponiamo che f e g siano equivalenti, cioè differiscano per un insieme di misura nulla, allora f è misurabile se solo se g è misurabile.*

Dimostrazione. Gli insiemi

$$\{x \in X \ : \ f(x) < c\} \qquad \{x \in X \ : \ g(x) < c\}$$

differiscono per un insieme di misura nulla, che (poichè supponiamo la misura completa) è misurabile. □

Teorema 1.6.6 *Siano f, g due funzioni reali di variabile reale continue, allora f e g sono equivalenti se e solo se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Se $f(x_0) \neq g(x_0)$ allora per la continuità di f e g avremo che $f(x) \neq g(x)$ in un intorno di x_0 di misura non nulla e quindi, in tal caso f e g non sono equivalenti. □

Definizione 1.6.6 *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni definite su X insieme dotato di una misura μ. Diciamo che la successione f_n è convergente ad f quasi ovunque se*

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \forall x \in X \setminus N \qquad \mu(N) = 0$$

Teorema 1.6.7 *Sia f_n una successione di funzioni misurabili quasi ovunque convergente ad una funzione f, allora f è misurabile.*

Dimostrazione. Sia N tale che $\mu(N) = 0$ e

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \forall x \in X \setminus N$$

Allora f_n sono funzioni misurabili su $X \setminus N$ e quindi f è una funzione misurabile su $X \setminus N$; poichè N ha misura nulla, f è misurabile in quanto

$$\{x \in X \ : \ f(x) < c\} = \{x \in X \setminus N \ : \ f(x) < c\}$$

□

Definizione 1.6.7 *Sia $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni definite su X insieme dotato di una misura μ. Diciamo che la successione f_n è convergente ad f in misura se per ogni $\delta > 0$*

$$\lim_n \mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) = 0$$

Teorema 1.6.8 -Severini - Egoroff - *Sia X un insieme di misura finita e sia f_n una successione di funzioni misurabili quasi ovunque convergente ad f su X allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme $X_\epsilon \subset X$ tale che*

- $\mu(X_\epsilon) > \mu(X) - \epsilon$ *cioè* $0 \leq \mu(X) - \mu(X_\epsilon) < \epsilon$
- *la successione f_n è uniformemente convergente ad f sull'insieme X_ϵ*

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che possiamo supporre

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \forall x \in X$$

e definiamo

$$E_m^k = \bigcap_{n>m} \{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\}$$

La successione

$$m \mapsto E_m^k$$

è crescente rispetto all'inclusione per cui

$$E_N^k = \bigcup_{n=1}^{N} E_n^k$$

ed inoltre

$$X = \bigcup_{m \geq 1} E_m^k$$

Infatti se $x \in X$ poichè $f_n(x) \to f(x)$ esiste $m_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall n \geq m_k$$

pertanto

$$x \in \left\{ x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\} \qquad \forall n \geq m_k \qquad \text{e} \qquad x \in E^k_{m_k}$$

Pertanto

$$\mu(E^k_N) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} E^k_n \right) \to \mu(X)$$

e

$$\mu\left((E^k_N)^{\mathbf{c}}\right) = \mu\left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{N} E^k_m \right) = \mu(X) - \mu\left(\bigcup_{m=1}^{N} E^k_m \right) \to 0 \qquad \text{per } N \to +\infty$$

Perciò esiste $N_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\left((E^k_{N_k})^{\mathbf{c}}\right) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

Poniamo

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E^k_{N_k})^{\mathbf{c}}$$

allora

$$\mu(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon$$

e si ha che f_n converge uniformemente ad f su

$$X \setminus E$$

infatti

$$X \setminus E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E^k_{N_k} = \bigcap_{k} \bigcap_{n > N_k} \{ x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \}$$

da cui, per ogni $k \in \mathbb{N}$ se $n > N_k$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

e

$$\sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

□

Teorema 1.6.9 *Sia X un insieme di misura finita e sia f_n una successione di funzioni misurabili, convergente quasi ovunque ad una funzione f. Allora f_n è convergente in misura ad f.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \forall x \in X \setminus A \qquad \mu(A) = 0$$

per il teorema di Egoroff esiste un insieme E tale che $\mu(X \setminus E) < \epsilon$ ed f_n converge uniformemente ad f su E.

D'altro canto

$$\begin{aligned}\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \delta\} = \\ = \{x \in E \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \cup \{x \in X \setminus E \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \delta\} = \\ = \quad A_n \cup B_n\end{aligned}$$

Poichè $B_n \subset X \setminus E$ avremo che $\mu(B_n) < \epsilon$, mentre, poichè f_n converge uniformemente su E avremo che per n abbastanza grande,

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta \qquad \forall x \in E$$

Pertanto, se n è abbastanza grande, $A_n = \emptyset$ e quindi

$$\mu(A_n \cup B_n) < \epsilon$$

□

Teorema 1.6.10 *Da ogni successione di funzioni f_n convergente in misura si può estrarre una successione convergente quasi ovunque.*

DIMOSTRAZIONE. Se f_n converge in misura ad f, allora

$$\mu\left(\left\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \to 0$$

Pertanto esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\left(\left\{x \in X \ : \ |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = \mu(E_k) < \frac{1}{k^2}$$

Ora $\mu\left(\bigcup_{k>m} E_k\right)$ è decrescente

$$\mu\left(\bigcup_{k>m} E_k\right) \leq \sum_{k>m} \frac{1}{k^2}$$

e posto

$$E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k>m} E_k$$

si ha

$$\mu(E) = 0 \qquad X \setminus E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{k>m} (E_k)^{\mathbf{c}}$$

Pertanto

$$x \in X \setminus E \quad \Longrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad : \quad x \in (E_k)^c \qquad \forall k > m$$

per cui

$$\forall x \in X \setminus E \qquad \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k < m$$

□

1.7 Integrazione

Nel seguito considereremo la situazione seguente:

X è uno spazio dotato di una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$ su cui è definita una misura $\sigma-$additiva, completa.

Definizione 1.7.1 *Diciamo che una funzione*

$$s : X \to \mathbb{R}$$

è una funzione semplice se è misurabile ed assume una quantità finita o numerabile di valori.

Teorema 1.7.1 *Una funzione s è semplice se e solo se*

$$s(x) = \sum_{k\in\mathbb{I}} y_k \chi_{A_k}(x)$$

dove $y_k \in \mathbb{R}$, $A_k \in \mathcal{S}_\mu$ a due a due disgiunti ed $\mathbb{I}$ è un insieme finito o numerabile di indici. dove χ_A indica la funzione caratteristica dell'insieme A.

Dimostrazione. È chiaro che se

$$s(x) = \sum_{k\in\mathbb{I}} y_k \chi_{A_k}(x)$$

allora s assume solo una quantità di valori distinti finita o numerabile e che s è misurabile in quanto se $B \in \mathcal{B}$

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y_k\in B} A_k$$

essendo l'unione estesa ad un insieme finito o numerabile di indici; la misurabilità di A_k permette di concludere.

Viceversa se s è una funzione semplice che assume i valori

$$\{y_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$$

possiamo porre

$$A_k = f^{-1}\left(\{y_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}\right)$$

ed otteniamo la rappresentazione richiesta. □

Teorema 1.7.2 *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se esiste una successione s_n di funzioni semplici uniformemente convergente ad f.*

Inoltre possiamo sempre supporre che la successione s_n sia crescente. e che, se f è positiva, la successione s_n sia costituita da funzioni positive.

Dimostrazione. Poichè le funzioni semplici sono misurabili e la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, la condizione è evidentemente sufficiente.

D'altro canto, data una funzione misurabile f è possibile costruire una successione s_n di funzione semplici definita mediante la

$$A_m^n = f^{-1}\left(\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)\right)$$

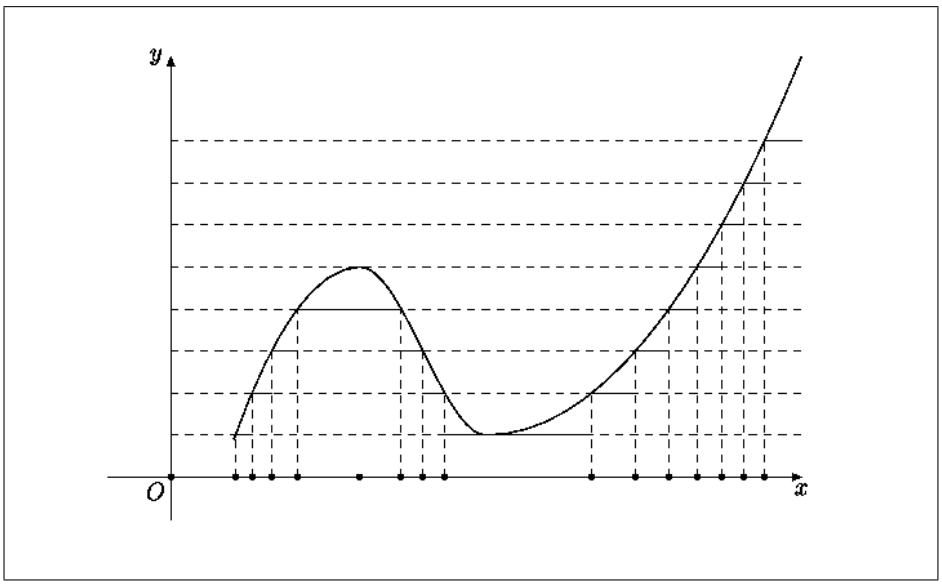

Figura 1.8: Approssimazione di una funzione mediante funzioni semplici.

$$s_n(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{m}{n}\chi_{A_m^n}(x)$$

dove $\chi_{A_m^n}$ indica la funzione caratteristica dell'insieme A_m^n. Evidentemente s_n è una funzione misurabile ed inoltre

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

per cui è ovvio che s_n è uniformemente convergente ad f.

Per fare in modo che s_n sia crescente possiamo poi operare una piccola modifica definendo

$$B_m^n = f^{-1}\left(\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)\right)$$

$$s_n(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{m}{2^n}\chi_{B_m^n}(x)$$

□

Definizione 1.7.2 *Se s è una funzione semplice definiamo*

$$\int_X s(x)d\mu = \sum_{k\in\mathbb{I}} y_k\mu(A_k)$$

Inoltre diciamo che s è integrabile, o sommabile se la serie è assolutamente convergente.

Teorema 1.7.3 *Sia s una funzione semplice, allora s è integrabile se e solo se $|s|$ è integrabile. Inoltre*

$$\left|\int_X sd\mu\right| \leq \int_X |s|d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione di integrabilità di una funzione semplice abbiamo che sia s che $|s|$ è integrabile se la serie

$$\sum_k |y_k|\mu(A_k) < +\infty$$

Inoltre

$$\left|\int_X s d\mu\right| \leq \left|\sum_k y_k \mu(A_k)\right| \leq \sum_k |y_k|\mu(A_k) = \int_X |s| d\mu$$

□

Osserviamo che nella definizione di integrale di una funzione semplice è stato implicitamente usato il fatto che i valori assunti siano tra di loro distinti. Qualora ciò non fosse, si potrebbe, per ogni valore y_k assunto, ad esempio su A_k^1 e su A_k^2, considerare l'insieme $A_k = A_k^1 \cup A_k^2$.

Ciò conduce alla necessità di eseguire la somma che definisce l'integrale della funzione semplice data usando un riordinamento dei termini. tuttavia non ne risultano ambiguità in quanto una funzione semplice è integrabile se la serie che definisce il suo integrale è assolutamente (e quindi anche incondizionatamente convergente).

Possiamo ora enunciare alcune proprietà degli integrali di una funzione semplice. Le relative dimostrazioni sono verifiche che discendono immediatamente dalla definizione.

Teorema 1.7.4 *Siano s e t due funzioni semplici integrabili su X e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha s + \beta t$ è una funzione semplice e risulta*

$$\int_X \alpha s(x) + \beta t(x) d\mu = \alpha \int_X s(x) d\mu + \beta \int_X s(x) d\mu$$

Inoltre se s è una funzione semplice tale che $|s(x)| \leq M$ allora s è integrabile e si ha

$$\left|\int_X s(x) d\mu\right| \leq M\mu(X)$$

DIMOSTRAZIONE. La linearità dell'integrale sulle funzioni semplici segue dalle proprietà delle serie assolutamente convergenti. Siano infatti

$$s = \sum_k y_k \chi_{A_k} \qquad t = \sum_h z_h \chi_{B_h} \qquad C_{k,h} = A_k \cap B_h$$

Allora

$$\begin{aligned}
\alpha \int_X s(x) d\mu + \beta \int_X s(x) d\mu &= \alpha \sum_k y_k \mu_{A_k} + \beta \sum_h z_h \chi_{B_h} = \\
&= \sum_k \alpha y_k \sum_h \mu_{C_{k,h}} + \sum_h \beta z_h \sum_k \chi_{C_{k,h}} = \\
&= \sum_k \sum_h (\alpha y_k + \beta z_h) \chi_{C_{k,h}} = \\
&= \int_X \alpha s(x) + \beta t(x) d\mu
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda affermazione possiamo semplicemente osservare che se $s = \sum_k y_k \chi_{A_k}$ allora

$$\sum_k |y_k| \mu(A_k) \leq M\mu(A)$$

è convergente. □

Definizione 1.7.3 *Sia f una funzione misurabile su X rispetto alla σ-algebra $\mathcal{S}_\mu$ associata alla misura μ. Diciamo che f è integrabile, o sommabile se esiste una successione di funzioni semplici integrabili s_n uniformemente convergenti ad f su X. In tal caso si definisce*

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n(x)d\mu$$

che esiste finito.

Osserviamo che se f è positiva, allora la successione s_n può essere scelta monotona crescente per cui

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n(x)d\mu = \sup_n \int_X s_n(x)d\mu$$

Osserviamo anche che f è integrabile se e solo se $\forall \epsilon > 0$ è possibile trovare una funzione semplice s, integrabile, tale che

$$|f(x) - s(x)| < \epsilon$$

Ovviamente la definizione precedente ha senso non appena si siano verificati i seguenti fatti:

1. Il limite che figura nella definizione esiste per ogni successione s_n di funzioni uniformemente convergenti ad f.
2. Il limite in questione non dipende dalla scelta della successione s_n.
3. Nel caso in cui f sia una funzione semplice la definizione precedente coincide con quella data per le funzioni semplici stesse.

La verifica dei fatti enumerati può essere fatta ricordando che

1. $$\left| \int_X s_n(x)d\mu - \int_X s_m(x)d\mu \right| \leq \mu(X) \sup_{x\in X} |s_n(x) - s_m(x)|$$
2. Se s_n e t_n sono due successioni di funzioni semplici uniformemente convergente ad f, allora anche la successione r_n definita da

   $$r_n = \begin{cases} s_n & n = 2k \\ t_n & n = 2k+1 \end{cases}$$

   è una successione di funzioni semplici uniformemente convergente ad f.

   Poichè per quanto abbiamo appena visto il limite di $\int_X s_n d\mu$ $\int_X t_n d\mu$ ed $\int_X r_n d\mu$ esistono, e poichè s_n, t_n dono successioni estratte da r_n i loro limiti devono essere tutti uguali.

3. Per dimostrare l'ultima affermazione possiamo osservare che se f è una funzione semplice possiamo scegliere la successione $s_n = f$

Usando le proprietà dei limiti e degli integrali delle funzioni semplici possiamo dimostrare che

Teorema 1.7.5 *Sia f una funzione misurabile su X allora f è integrabile se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione semplice integrabile s tale che*

$$|f(x) - s(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in X$$

.

Teorema 1.7.6 *1. Se $A \subset X$ è un insieme misurabile, allora*

$$\int_A d\mu = \mu(A)$$

2. Se f è una funzione integrabile e se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

3. Se f, g sono funzioni integrabili allora

$$\int_X (f+g)(x) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

4. Ogni funzione limitata e misurabile su X risulta ivi integrabile.

5. Se f è una funzione integrabile $f \geq 0$ allora

$$\int_X f d\mu \geq 0$$

6. Se f, g sono funzioni integrabili, $f \geq g$ allora

$$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$$

7. Se f è una funzione misurabile

$$m \leq f(x) \leq M$$

allora

$$m\mu(X) \leq \int_X f(x) d\mu \leq M\mu(X)$$

8. Se f è misurabile, A è misurabile e $\mu(A) = 0$ allora

$$\int_A f d\mu = 0$$

9. *Se f, g sono due funzioni misurabili quasi ovunque uguali allora f è integrabile se e solo se g è integrabile e risulta*

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

10. *Se f, φ sono funzioni misurabili tali che*

$$|f(x)| \leq \varphi(x)$$

quasi ovunque e se φ risulta integrabile allora anche f è integrabile su X

11. *Se f è una funzione misurabile allora f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile e risulta*

$$\left| \int_X f(x) d\mu \right| \leq \int_X |f(x)| d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Come già detto i fatti enunciati seguono dalle proprietà degli integrali di funzioni semplici e dal passaggio al limite. Ci limitiamo pertanto a discutere solo alcuni degli enunciati.

Per quel che concerne il punto 4, osserviamo che se f è limitata e misurabile allora esiste una successione di funzioni semplici s_n uniformemente convergente ad f; pertanto ogni funzione s_n risulta limitata e quindi integrabile per il teorema 1.7.4. Ne deduciamo che f è integrabile per la definizione di integrabilità.

Per quel che concerne il punto 5, osserviamo che se $f \geq 0$ allora possiamo trovare una successione s_n di funzioni semplici non negative, uniformemente convergenti ad f, si veda il teorema 1.7.2, e possiamo concludere.

Per il punto 9 è sufficiente ricordare che

$$f = g + (f - g)$$

Per provare il punto 10 si può osservare che qualora

$$f = \sum_n a_n \chi_{A_n} \quad , \quad \varphi = \sum_k b_k \chi_{B_k}$$

siano funzioni semplici, posto

$$C_n^k = A_n \cap B_k$$

si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \sum_n a_n \mu(A_n) \right| \leq \sum_n |a_n| \mu(A_n) = \sum_n |a_n| \sum_k \mu(C_n^k) \leq \\ &\sum_n \sum_k b_k \mu(C_n^k) = \sum_k \sum_n b_k \mu(C_n^k) = \sum_k b_k \mu(B_k) = \int_X \varphi d\mu \end{aligned}$$

e pertanto l'enunciato si può ottenere in generale per passaggio al limite.

Infatti se s_n è una successione di funzioni semplici uniformemente convergente ad f e se t_n è una successione di funzioni semplici integrabili uniformemente convergente a φ, dall'ipotesi si deduce che

$$|s_n| \leq t_n$$

pertanto le s_n, e di conseguenza f, sono integrabili.

Infine per provare l'ultima asserzione possiamo per quanto appena detto. affermare che se $|f|$ è integrabile, tale risulta anche f; inoltre se f è integrabile, per definizione esiste una successione s_n di funzioni semplici integrabili uniformemente convergenti ad f; poichè $|s_n|$ è a sua volta integrabile (si veda il teorema 1.7.3), e si ha

$$||s_n| - |f|| \leq |s_n - f|$$

allora $|s_n|$ è uniformemente convergente a $|f|$, che risulta integrabile.

La disuguaglianza deriva poi dal punto 6, tenuto conto che $-|f| \leq f \leq |f|$

□

Passiamo ora a provare la $\sigma-$additività dell'integrale. A questo proposito possiamo provare i seguenti risultati

Teorema 1.7.7 *Sia f una funzione misurabile su X e sia $A \subset X$ un insieme misurabile. Se*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

e se f è integrabile su A, allora anche

- $\int_{A_n} f(x)d\mu$ *esiste,*
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f(x)d\mu$ *è assolutamente convergente*

e risulta

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f(x)d\mu$$

Dimostrazione. Verifichiamo innanzi tutto che l'enunciato del teorema è vero nel caso in cui f sia una funzione semplice. In tal caso

$$f(x) = \sum_k y_k \chi_{B_k}(x)$$

Sia

$$B_k^n = B_k \cap A_n$$

allora

$$\begin{aligned} \int_A f(x)d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) &= \sum_k y_k \sum_n \mu(B_k^n) = \\ &= \sum_n \sum_k y_k \mu(B_k^n) = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu \end{aligned}$$

Poichè la funzione f è integrabile su A la serie

$$\sum_k y_k \mu(B_k)$$

è assolutamente convergente e quindi anche ogni altra serie tra quelle indicate precedentemente risulta assolutamente convergente.

Nel caso generale, se f è una funzione misurabile, esiste una funzione semplice s, integrabile su A tale che

$$|f(x) - s(x)| < \epsilon$$

Poichè s è semplice, si ha

$$\int_A s(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} s(x)d\mu$$

essendo la serie a secondo membro assolutamente convergente; risulta inoltre che s è integrabile anche su A_n e pertanto f è integrabile su A_n si ha

$$\left|\int_{A_n} f d\mu - \int_{A_n} s d\mu\right| \leq \int_{A_n} |f-s| d\mu \leq \epsilon\mu(A_n) \leq \epsilon\mu(A)$$

e

$$\sum_n \left|\int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} s(x)d\mu\right| \leq \sum_n \epsilon\mu(A_n) = \epsilon\mu(A)$$

Se ne deduce che

$$\begin{aligned}\sum_n \left|\int_{A_n} f(x)d\mu\right| &= \sum_n \left(\left|\int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} s(x)d\mu\right| + \left|\int_{A_n} s(x)d\mu\right|\right) \leq \\ &\leq \epsilon\mu(A) + \sum \left|\int_{A_n} s(x)d\mu\right|\end{aligned}$$

e quindi la serie a primo membro è convergente.

D'altro canto

$$\left|\int_A f(x)d\mu - \int_A s(x)d\mu\right| \leq \epsilon\mu(A)$$

e quindi

$$\begin{aligned}&\left|\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu\right| = \\ &\quad = \left|\sum_n \left(\int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} s(x)d\mu + \int_{A_n} s(x)d\mu\right) - \int_A f(x)d\mu\right| \leq \\ &\leq \left|\sum_n \left(\int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} s(x)d\mu\right)\right| + \left|\sum \left(\int_{A_n} s(x)d\mu\right) - \int_A f(x)d\mu\right| = \\ &\quad = \sum_n \left|\int_{A_n} f(x)d\mu - \int_{A_n} s(x)\right| d\mu + \left|\int_A s(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu\right| \leq \\ &\qquad\qquad \leq 2\epsilon\mu(A)\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si ottiene

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$$

□

Corollario 1.7.1 *Se f è una funzione misurabile, integrabile su X allora f è integrabile anche su ogni sottoinsieme Y misurabile $Y \subset X$.*

Possiamo anche provare una sorta di teorema reciproco del precedente.

Teorema 1.7.8 *Sia A un insieme misurabile tale che*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

e supponiamo che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} |f(x)|d\mu$$

sia convergente allora f è integrabile su A, e risulta

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f(x)d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Il presente teorema differisce dal precedente solo per l'affermazione che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} |f(x)|d\mu < +\infty$$

è condizione sufficiente per l'integrabilità di f su A.

Cominciamo a provare questa affermazione nel caso in cui f sia una funzione semplice

$$f(x) = \sum_k y_k \chi_{B_k}(x)$$

Sia

$$B_k^n = B_k \cap A_n$$

allora

$$\bigcup_n B_k^n = B_k \qquad \int_{A_n} |f(x)|d\mu = \sum_k |y_k|\mu(B_k^n)$$

La convergenza della serie in ipotesi assicura che le serie

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu = \sum_n \sum_k |y_k|\mu(B_k^n) =$$

$$= \sum_k \sum_n |y_k|\mu(B_k^n) = \sum_k |y_k|\mu(B_k) = \int_A |f(x)|d\mu$$

sono convergenti e quindi l'esistenza dell'integrale

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \int_A |f(x)|d\mu$$

Nel caso generale, se f è una funzione misurabile, allora esiste una funzione semplice s tale che

$$|f(x) - s(x)| < \epsilon$$

Allora

$$\int_{A_n} |s(x)|d\mu \leq \int_{A_n} |f(x)|d\mu + \epsilon\mu(A_n)$$

pertanto

$$\int_A |s(x)|d\mu = \sum_n \int_{A_n} |s(x)|d\mu \leq \sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu + \epsilon \sum_n \mu(A_n)$$

e quindi, essendo le serie ad ultimo membro convergenti, possiamo affermare che la funzione semplice s è integrabile e quindi tale risulta anche f. □

Passiamo ora a dimostrare un risultato di notevole rilievo.

Teorema 1.7.9 - **Tchebychev -** *Sia φ una funzione integrabile su A, $\varphi(x) \geq 0$ e sia $c \in \mathbb{R}_+$ allora*

$$\frac{1}{c} \int_A \varphi(x)d\mu \geq \mu\left(\{x \in A \ : \ \varphi(x) \geq c\}\right)$$

Dimostrazione. Definiamo

$$B = \{x \in A \ : \ \varphi(x) \geq c\}$$

Allora

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \int_B \varphi(x)d\mu + \int_{A\setminus B} \varphi(x)d\mu \geq \int_B \varphi(x)d\mu \geq c\mu(B)$$

□

Corollario 1.7.2 *Sia f una funzione misurabile tale che*

$$\int_A |f(x)|d\mu = 0$$

allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in A$.

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Tchebychev, si ha

$$\mu\left(\left\{x \in A \ : \ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_A |f(x)|d\mu = 0$$

Pertanto

$$\mu\left(\{x \in A \ : \ f(x) \neq 0\}\right) \leq \sum_n \mu\left(\left\{x \in A \ : \ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

□

Passiamo ora a verificare una importante proprietà dell'integrale secondo Lebesgue: la assoluta continuità.

Teorema 1.7.10 *Sia f una funzione integrabile su $A \subset X$, allora*

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \textit{tale che} \qquad \left| \int_E f(x) d\mu \right| < \epsilon \qquad \forall E \subset A \quad \mu(E) < \delta$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che il teorema è evidente nel caso in cui $|f(x)| \leq K$. In tal caso infatti è sufficiente considerare $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Sia pertanto f una funzione arbitraria e consideriamo gli insiemi

$$A_n = \{x \in A \ : \ n \leq |f(x)| \leq n+1\}$$

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n = \{x \in A : |f(x)| \leq N+1\} \qquad C_N = A \setminus B_N = \bigcup_{n \geq N+1} A_n$$

Allora si ha, per la $\sigma-$additività dell'integrale,

$$\int_A |f(x)| d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu$$

Poichè la serie a secondo membro è convergente si può trovare N , abbastanza grande, in modo che si abbia

$$\int_{C_N} |f(x)| d\mu = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

Consideriamo

$$0 < \delta < \frac{\epsilon}{2(N+1)} \qquad \text{e } E \subset A \qquad \mu(E) < \delta$$

allora si ha

$$\left| \int_E f(x) d\mu \right| \leq \int_E |f(x)| d\mu = \int_{E \cap B_N} |f(x)| d\mu + \int_{E \cap C_N} |f(x)| d\mu$$

Poichè

$$\int_{E \cap B_N} |f(x)| d\mu \leq (N+1)\delta < \frac{\epsilon}{2} \qquad \int_{E \cap C_N} |f(x)| d\mu \leq \int_{C_N} |f(x)| d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

possiamo concludere che

$$\left| \int_E f(x) d\mu \right| < \epsilon$$

□

Proviamo infine tre risultati di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 1.7.11 -Lebesgue - (Convergenza Dominata) *Sia f_n una successione di funzioni misurabili su A convergente ad f e supponiamo che esista φ integrabile tale che*

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Allora la funzione f è integrabile su A e si ha

$$\int_A f_n(x) d\mu \to \int_A f(x) d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi si verifica facilmente che

$$|f(x)| \leq \varphi(x)$$

e quindi si può dedurre che f è integrabile su A in quanto tale risulta φ. Per l'assoluta continuità dell'integrale, fissato $\epsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che se $\mu(E) < \delta$ si abbia

$$\int_E \varphi(x) d\mu < \frac{\epsilon}{4}$$

Poichè, per il teorema di Severini- Egoroff, esiste un insieme B tale che $\mu(B) < \delta$ ed f_n sia uniformemente convergente ad f su $C = A \setminus B$, avremo che esiste n_ϵ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2\mu(C)} \qquad \forall x \in C$$

non appena si consideri $n \geq n_\epsilon$. Pertanto

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x) d\mu - \int_A f_n(x) d\mu \right| &\leq \\ \leq \int_C |f(x) - f_n(x)| d\mu &+ \int_B |f(x)| d\mu + \int_B |f_n(x)| d\mu < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 1.7.12 - B. Levi - (Convergenza Monotona) *Sia f_n una successione monotona (crescente) di funzioni integrabili su A; sia cioè*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \ldots$$

e supponiamo che

$$\int_A f_n(x) d\mu \leq K$$

Allora la successione f_n è convergente quasi ovunque ad una funzione integrabile

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

ed inoltre

$$\int_A f_n(x) d\mu \to \int_A f(x) d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè la successione $f_n(x)$ è crescente, tranne che sull'unione N degli insiemi di misura nulla su cui ciascuna delle f_n non è definita avremo che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in A \setminus N$; osserviamo che i valori assunti da f su N sono inessenziali e pertanto possiamo supporre $f(x) = 0$ per $x \in N$.

Possiamo supporre inoltre, a meno di sostituire f_n con $f_n - f_1$, che $f_1 \geq 0$.

Consideriamo l'insieme

$$B = \{x \in A \ : \ f_n(x) \to +\infty\} \qquad B_n^i = \{x \in A \ : \ f_n(x) > i\}$$

È immediato verificare che

$$B = \bigcap_i \bigcup_n B_n^i$$

ed in virtù della disuguaglianza di Tchebychev e delle ipotesi si ottiene

$$K \geq \int_A f_n(x)d\mu \geq \int_{B_n^i} f_n(x)d\mu \geq i\mu(B_n^i)$$

Se ne deduce che

$$\mu(B_n^i) \leq \frac{K}{i}$$

e tenuto conto che

$$B_1^i \subset B_2^i \subset \cdots \subset B_n^i \subset \ldots$$

si ha

$$\mu\left(\bigcup_n B_n^i\right) \leq \frac{K}{i}$$

Poichè, d'altra parte,

$$B \subset \bigcup_n B_n^i$$

possiamo concludere che

$$\mu(B) \leq \frac{K}{i} \qquad \forall i$$

e quindi che $\mu(B) = 0$.

Con ciò abbiamo verificato che la successione $f_n(x)$ è quasi ovunque convergente ad un valore finito $f(x)$.

Nostro scopo è ora provare che esiste una funzione integrabile che maggiora la successione in esame; sia pertanto

$$A_h = \{x \in A \ : \ h-1 \leq f(x) < h\}$$

e consideramo la funzione semplice φ definita da

$$\varphi(x) = h \quad \forall h \in A_h \qquad \left(\varphi(x) = \sum_h h\chi_{A_h}(x)\right)$$

si ha

$$\varphi(x) - 1 \leq f(x) \leq \varphi(x) \qquad \varphi(x) \leq f(x) + 1$$

È evidente che $f_n(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ e pertanto sarà sufficiente provare che φ è integrabile per poter applicare il teorema di convergenza dominata appena dimostrato.

Perciò consideriamo

$$C_m = \bigcup_{h=1}^{m} A_h$$

ed osserviamo che $f(x) \leq m$ su C_m ed inoltre

$$A = \bigcup_m C_m = \bigcup_n A_n \qquad \varphi(x) \leq f(x) + 1 < m + 1 \quad \forall x \in C_m$$

Possiamo quindi applicare il teorema di convergenza dominata su C_m ed ottenere

$$\int_{C_m} \varphi(x)d\mu \leq \int_{C_m} f(x)d\mu + \mu(A) = \lim_n \int_{C_m} f_n(x)d\mu + \mu(A) \leq K + \mu(A)$$

Infine

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \sum_h h\mu(A_h) = \lim_m \sum_{h=1}^{m} h\mu(A_h) = \lim_m \int_{C_m} \varphi(x)d\mu \leq K + \mu(A)$$

e ciò assicura l'integrabilità di φ.

□

Corollario 1.7.3 *Sia f_n una successione di funzioni misurabili $f_n(x) \geq 0$ e sia*

$$\sum_n \int_A f_n(x)d\mu < +\infty$$

sia inoltre

$$\sum_n f_n(x) = f(x)$$

quasi ovunque, allora

$$\int_A \sum_n f_n(x)d\mu = \sum_n \int_A f_n(x)d\mu$$

Teorema 1.7.13 - Fatou - *Sia f_n una successione di funzioni misurabili, non negative e quasi ovunque convergenti ad f su A; sia inoltre*

$$\int_A f_n(x)d\mu \leq K$$

Allora la funzione f è integrabile su A e risulta

$$\int_A f(x)d\mu \leq K$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$$

ed osserviamo che φ_n è misurabile in quanto

$$\{x \in A \ : \ \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geq n} \{x \in A \ : \ f_k(x) < c\}$$

inoltre

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$$

per cui φ_n è integrabile e si ha

$$\int_A \varphi_n(x)d\mu \leq \int_A f_n(x)d\mu \leq K$$

Infine

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \ldots \qquad \lim_n \varphi_n(x) = f(x)$$

Ciò permette di applicare il precedente teorema di convergenza monotona e di ottenere la tesi. □

Corollario 1.7.4 *Sia f_n una successione di funzioni misurabili, non negative e quasi ovunque convergenti ad f su A; se esiste reale*

$$\lim_n \int_A f_n(x)d\mu$$

allora la funzione f è integrabile su A e risulta

$$\int_A f(x)d\mu \leq \lim_n \int_A f_n(x)d\mu$$

Osserviamo che l'enunciato del teorema assicura la semicontinuità inferiore dell'integrale in quanto da esso si può dedurre che

$$\int_A \lim_n f_n(x)d\mu \leq \lim_n \int_A f_n(x)d\mu$$

e quindi, poichè tale disuguaglianza vale per ogni successione f_n, possiamo concludere che

$$\int_A \liminf f_n(x)d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n(x)d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\ell = \lim_n \int_A f_n(x)d\mu$ allora, per n sufficientemente grande, si ha

$$\int_A f_n(x)d\mu \leq \ell + \epsilon$$

e, per il lemma di Fatou,

$$\int_A f(x)d\mu \leq \ell + \epsilon.$$

La tesi si ottiene per $\epsilon \to 0$. □

1.8 Integrazione su insiemi di misura non limitata

Abbiamo fin qui considerato insiemi X su cui è assegnata una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ ed una misura μ per i quali risulta $\mu(X) < +\infty$, abbiamo cioè considerato solo insiemi di misura finita.

Tuttavia è immediato osservare che tale restrizione non è accettabile in quanto preclude la possibilità di considerare integrazione su insiemi come rette, semirette o il piano intero.

Al fine di evitare questo inconveniente occorre estendere la definizione di integrale anche su insiemi di misura non limitata. Allo scopo è opportuno dare una definizione di integrabilità un po' più generale; tale definizione consente anche di ammettere per la funzione integranda f valori infiniti, ma può essere data solo per funzioni positive. Siamo quindi condotti a considerare funzioni

$$f : X \to [0, +\infty]$$

A tali funzioni può essere estesa senza difficoltà la definizione di misurabilità ed i risultati enunciati in precedenza per le funzioni misurabili reali.

Osserviamo che le definizioni e gli enunciati che riguardano la sezione sulle funzioni misurabili restano veri e che le dimostrazioni funzionano ancora praticamente immutate, fatta eccezione per il teorema 1.6.8 di Severini- Egoroff ed il successivo teorema 1.6.9 che asserisce la necessità della convergenza in misura per la convergenza puntuale e che deriva dal teorema 1.6.8.

Possiamo anche provare, usando una piccola modificazione dell'argomento usato nel teorema 1.7.2, che

Teorema 1.8.1 *Se*

$$f : X \to [0, +\infty]$$

è misurabile allora esiste una successione s_n di funzioni semplici crescente e puntualmente convergente ad f.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente definire

$$A_m^n = f^{-1}\left(\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)\right) \qquad B_n = f^{-1}\left([n, +\infty]\right)$$

e

$$s_n(x) = \sum_{m=0}^{n2^n-1} \frac{m}{2^n}\chi_{A_m^n}(x) + n\chi_{B_n}(x)$$

□

È conveniente anche osservare che, nel caso in cui f assuma valori finiti si può trovare una successione uniformemente convergente ad f che sia anche crescente si veda il teorema 1.7.2.

Possiamo porre la seguente

Definizione 1.8.1 *Sia*

$$f : X \to [0, +\infty]$$

misurabile, definiamo l'integrale di f su X mediante la

$$\int_X f d\mu = \sup_{s \in \mathbb{S}_f} \int_X s d\mu$$

ove $\mathbb{S}_f$ è l'insieme delle funzioni semplici s tali che $s \leq f$.

Nel caso in cui f non abbia segno costante utilizziamo l'uguaglianza

$$f = f_+ + f_- \qquad f_+ = \max\{f, 0\} \quad f_- = \min\{f, 0\}$$

e poniamo

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu + \int_X f_- d\mu$$

non appena la somma a secondo membro ha senso.

Diciamo che f è integrabile tutte le volte che $\int_X f d\mu \in \mathbb{R}$ In tal caso è evidente che si ha anche $\int_X |f| d\mu \in \mathbb{R}$.

Osserviamo inoltre che nel caso in cui $f \geq 0$ ha sempre senso parlare di $\int_X f d\mu$ essendo il valore $+\infty$ un possibile valore, si ricordi il teorema 1.8.1.

Possiamo inoltre verificare che

Teorema 1.8.2 *Se*

$$f : X \to [0, +\infty)$$

è misurabile, $\mu(X)$ è finita e se $\int_X f d\mu < +\infty$ allora esiste una successione di funzioni semplici s_n uniformemente convergente ad f, integrabili tale che

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X s_n d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Esiste, per il teorema 1.8.1, tenuto conto della successiva osservazione, una successione di funzioni semplici s_n crescente uniformemente convergente ad f

$$0 \leq s_n \leq f$$

Per tali funzioni risulta

$$\int_X s_n d\mu \leq \int_X f d\mu < +\infty$$

e pertanto ciascuna delle s_n è integrabile.

Osserviamo che

$$I = \lim_n \int_X s_n$$

esiste in quanto la successione $n \mapsto \int_X s_n$ è crescente (ed uniformemente convergente ad f), e che pertanto

$$I = \sup_n \int_X s_n d\mu \leq \sup_{s \in \mathbb{S}_f} \int_X s d\mu = \int_X f d\mu$$

Poichè d'altro canto per ogni $\epsilon > 0$ se n è sufficientemente grande si ha

$$f(x) - \epsilon \leq s_n(x) \qquad \forall x \in X$$

possiamo dedurre che

$$\int_X f d\mu - \epsilon\mu(X) \leq \int_X s_n d\mu$$

Pertanto

$$\int_X f d\mu - \epsilon\mu(X) \leq I$$

e per $\epsilon \to 0$

$$\int_X f d\mu \leq I$$

Ne segue che

$$\int_X f d\mu = I$$

e la tesi □

I risultati provati nel paragrafo precedente a riguardo delle proprietà dell'integrale restano ancora veri, seppur con dimostrazioni adattate alla nuova definizione. Riportiamo di seguito gli enunciati di tali risultati.

Teorema 1.8.3 *1. Se $A \subset X$ è un insieme misurabile, allora*

$$\int_A d\mu = \mu(A)$$

2. Se f è una funzione integrabile e se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

3. Se f, g sono funzioni integrabili allora

$$\int_X (f+g)(x) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

4. Se f è una funzione misurabile $f \geq 0$ allora

$$\int_X f d\mu \geq 0$$

5. Se f, g sono funzioni integrabili, $f \geq g$ allora

$$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$$

6. Se f è misurabile, A è misurabile e $\mu(A) = 0$ allora

$$\int_A f d\mu = 0$$

7. Se f, g sono due funzioni misurabili quasi ovunque uguali allora f è integrabile se e solo se g è integrabile e risulta

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

8. Se f, φ sono funzioni misurabili tali che

$$|f(x)| \leq \varphi(x)$$

quasi ovunque e se φ risulta integrabile allora anche f è integrabile su X

9. Se f è una funzione misurabile allora f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile e risulta

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

Teorema 1.8.4 *Sia f una funzione misurabile su X e sia $A \subset X$ un insieme misurabile. Se*

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

risulta

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} f(x) d\mu$$

Teorema 1.8.5 - **Tchebychev -** *Sia φ una funzione integrabile su A, $\varphi(x) \geq 0$ e sia $c \in \mathbb{R}_+$ allora*

$$\frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu \geq \mu\left(\{x \in A \ : \ \varphi(x) \geq c\}\right)$$

Corollario 1.8.1 *Sia f una funzione misurabile tale che*

$$\int_A |f(x)|d\mu = 0$$

allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in A$.

Teorema 1.8.6 *Sia f una funzione integrabile su $A \subset X$, allora*

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \text{tale che} \qquad \left|\int_E f(x)d\mu\right| < \epsilon \qquad \forall E \subset A \quad \mu(E) < \delta$$

Teorema 1.8.7 - B. Levi - (Convergenza Monotona) *Sia $f_n : X \to [0, +\infty]$ una successione monotona (crescente) di funzioni misurabili positive su A; sia cioè*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \ldots$$

Allora la successione f_n è convergente quasi ovunque ad una funzione misurabile

$$f : X \to [0, +\infty] \qquad f(x) = \lim_n f_n(x)$$

ed inoltre

$$\int_A f_n(x)d\mu \to \int_A f(x)d\mu$$

Dimostrazione. Poichè $f_n \leq f_{n+1}$ si ha

$$\int_X f_n(x)d\mu \leq \int_X f_{n+1}d\mu \tag{1.4}$$

e quindi la successione numerica $n \mapsto \int_X f_n(x)d\mu$ è crescente per cui ammette limite $\alpha \in [0, +\infty]$, cioè

$$\int_X f_n(x)d\mu \to \alpha \in [0. + \infty]$$

Poichè f è misurabile, in quanto limite di funzioni misurabili, possiamo dedurre da $f_n \leq f_{n+1}$ che

$$\int_X f_n(x)d\mu \leq \int_X f d\mu \tag{1.5}$$

per cui si ha che

$$\alpha \leq \int_X f_{n+1}d\mu \tag{1.6}$$

Sia ora s una funzione semplice tale che $0 \leq s \leq f$ e sia $c \in (0, 1)$, e definiamo

$$E_n = \{x : f_n(x) \geq cs(x)\} \tag{1.7}$$

Avremo che

- E_n è misurabile (ovvia dalla misurabilità di f ed s)
- $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \ldots$ (dalla decrescenza di f_n)
- $X = \bigcup_n \in \mathbb{N} E_n$; infatti se $f(x) - 0$ allora $0 = cs(x) = s(x) = f_n(x) = f(x)$ mentre se $f(x) > 0$ allora $cs(x) < f(x)$ e per n abbastanza grande si ha $cs(x) \leq f_n(x)$ ed $x \in E_n$

Pertanto

$$\int_X f(x)d\mu \geq \int_{E_n} f(x)d\mu \geq c \int_{E_n} s(x)d\mu \tag{1.8}$$

Poichè s è una funzione semplice, avremo che

$$s = \sum_{k=1}^{N} y_k \chi_{A_k}$$

e quindi

$$\int_{E_n} s(x)d\mu = \sum_{k=1}^{N} y_k \mu(A_k \cup E_n) \to \sum_{k=1}^{N} y_k \mu(A_k \cup X) = \int_X s(x)d\mu$$

Ne deduciamo che

$$\alpha \geq c \int_X s(x)d\mu \tag{1.9}$$

e per $c \to 1$ otteniamo che

$$\alpha \geq \int_X s(x)d\mu$$

da cui

$$\alpha \geq \int_X f(x)d\mu$$

e possiamo concludere che

$$\alpha = \int_X f(x)d\mu$$

□

Corollario 1.8.2 *Sia f_n una successione di funzioni misurabili $f_n(x) \geq 0$ e sia*

$$\sum_n \int_A f_n(x)d\mu < +\infty$$

sia inoltre

$$\sum_n f_n(x) = f(x)$$

quasi ovunque, allora

$$\int_A \sum_n f_n(x)d\mu = \sum_n \int_A f_n(x)d\mu$$

Teorema 1.8.8 - Fatou - *Sia $f_n : X \to [0, +\infty]$ una successione di funzioni misurabili, non negative allora*

$$\int_X \liminf_n f_n(x)d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n(x)d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x) \tag{1.10}$$

risulta che $g_k(x) \leq f_i(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $k \leq i$ pertanto

$$\int_A g_k(x)d\mu \leq \int_A f_i(x)d\mu \qquad \forall k \leq i \int_A g_k(x)d\mu \leq \liminf_i \int_A f_i(x)d\mu \tag{1.11}$$

Poichè g_k è una successione crescente di funzioni non negative, per il teorema di convergenza monotona di Beppo Levi possiamo affermare che

$$\int_A \lim_k g_k(x)d\mu = \lim_k \int_A g_k(x)d\mu \leq \int_A g_k(x)d\mu \leq \liminf_i \int_A f_i(x)d\mu \tag{1.12}$$

e, vista la 1.10, possiamo concludere che

$$\int_A \liminf_i g_k(x)d\mu \leq \liminf_i \int_A f_i(x)d\mu \tag{1.13}$$

e la tesi.

□

Osserviamo che la condizione di non negatività delle funzioni f_n può ovviamente essere rimpiazzata con la condizione

$$f_n(x) \geq \varphi(x) \qquad q.o. - x \in A \tag{1.14}$$

con φ funzione integrabile.

Ovviamente potremo inoltre affermare che

$$\int_A \limsup_i g_k(x)d\mu \geq \limsup_i \int_A f_i(x)d\mu \tag{1.15}$$

non appena si possa supporre

$$f_n(x) \leq \psi(x) \qquad q.o. - x \in A \tag{1.16}$$

con ψ funzione integrabile.

Teorema 1.8.9 - Lebesgue - (Convergenza Dominata) *Sia $f_n : X \to [0, +\infty]$ una successione di funzioni misurabili su A convergente ad f e supponiamo che esista φ integrabile tale che*

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) \tag{1.17}$$

Allora la funzione f è integrabile su A e si ha

$$\lim_n \int_A |f_n - f|d\mu \to 0$$

da cui

$$\int_A f_n(x)d\mu \to \int_A f(x)d\mu$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè f è limite puntuale di funzioni misurabili è essa stessa misurabile e dalla 1.17 possiamo dedurre che

$$|f(x)| \leq \varphi(x) \tag{1.18}$$

e l'integrabilità di f.

Poichè $|f_n - f| \leq 2\varphi$ possiamo applicare il lemma di Fatou alla successione di funzioni $2\varphi - |f_n - f|$ ed ottenere che

$$\int_A 2\varphi d\mu \leq \liminf_n \int_A (2\varphi - |f_n - f|)\, d\mu =$$
$$\int_A 2\varphi d\mu + \liminf_n \int_A -|f_n - f| d\mu = \int_A 2\varphi d\mu - \limsup_n \int_A |f_n - f| d\mu \tag{1.19}$$

Poichè φ è integrabile otteniamo che

$$\limsup_n \int_A |f_n - f| d\mu \leq 0$$

e quindi

$$\limsup_n \int_A |f_n - f| d\mu = \lim_n \int_A |f_n - f| d\mu = 0$$

Pertanto si ha

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f_n - f| d\mu \to 0$$

ela tesi

□

Corollario 1.8.3 *Sia f_n una successione di funzioni misurabili $f_n(x) \geq 0$ e sia*

$$\sum_n \int_A f_n(x) d\mu < +\infty$$

sia inoltre

$$\sum_n f_n(x) = f(x)$$

quasi ovunque, allora

$$\int_A \sum_n f_n(x) d\mu = \sum_n \int_A f_n(x) d\mu$$

Teorema 1.8.10 - Fatou - *Sia $f_n : X \to [0, +\infty]$ una successione di funzioni misurabili, non negative allora*

$$\int_X \liminf_n f_n(x) d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n(x) d\mu$$

Per quanto riguarda i legami con la teoria dell'integrazione secondo Riemann, possiamo provare con sufficiente semplicità che

Teorema 1.8.11 *Se f è integrabile secondo Riemann, allora f è anche integrabile secondo Lebesgue e il valore dell'integrale non cambia.*

Inoltre f è integrabile secondo Riemann se e solo se è continua a meno di un insieme di misura nulla

1.9 Misure Prodotto

In analisi riveste una notevole importanza il teorema di riduzione di un integrale multiplo a più integrali semplici iterati.

Nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, tale risultato prende il nome di Teorema di Fubini e può essere dimostrato come segue. Allo scopo sarà necessario tutta una serie di nozioni e risultati preliminari.

Definizione 1.9.1 *Siano $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ famiglie di insiemi contenuti, rispettivamente, negli spazi $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Sia*

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

il prodotto cartesiano degli spazi considerati e sia

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_n$$

la famiglia di insiemi in X i cui elementi sono definiti da

$$A \in \mathcal{A} \iff A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \qquad A_k \in \mathcal{S}_k$$

Nel caso in cui $X_k = Y$, $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}$ scriveremo

$$X = Y^n \qquad \mathcal{A} = \mathcal{S}^n$$

Osserviamo che nel caso in cui $Y = \mathbb{R}$, ed $\mathcal{S}_m$ è il semianello degli intervalli in $\mathbb{R}$, allora $X = \mathbb{R}^n$ ed $\mathcal{A}$ è il semianello dei rettangoli in $\mathbb{R}^n$.

Possiamo provare con argomenti standard che

Teorema 1.9.1 *Se $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ sono semianelli allora anche*

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_n$$

è un semianello .

È bene tuttavia osservare che nel caso in cui le famiglie di insiemi $\mathcal{S}_k$ siano degli anelli o delle $\sigma-$algebre, non è detto che tale risulti anche il loro prodotto.

Infatti se $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, e se

$$A = [0,1] \times [0,2] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \qquad B = [1,2] \times [0,1] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

mentre

$$A \cup B \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Definizione 1.9.2 *Siano $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ semianelli su cui siano assegnate delle misure $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.*

Definiamo su $\mathcal{A}$ una misura

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n$$

mediante la

$$\mu(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2) \times \cdots \times \mu_n(A_n) \qquad per \qquad A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

La misura μ si dice misura prodotto delle misure $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$

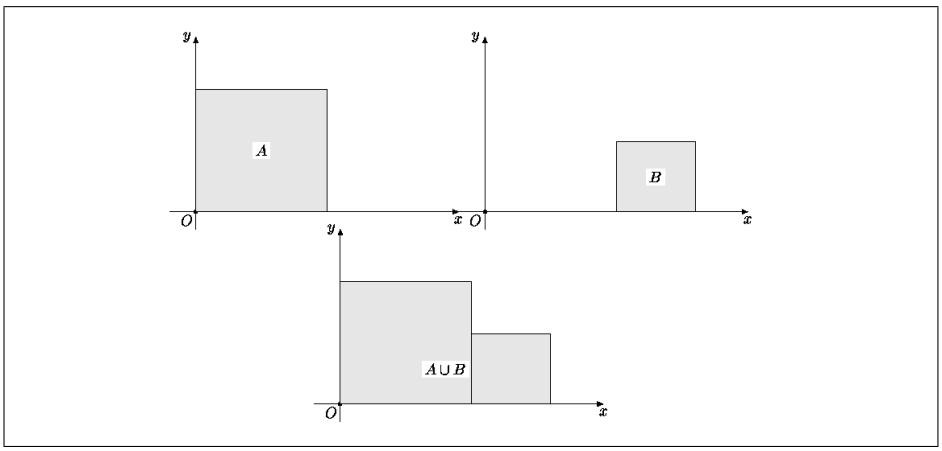

Figura 1.9: Il prodotto di σ-algebre può non essere una σ-algebra

Teorema 1.9.2 *La definizione precedente individua effettivamente una misura cioè una funzione di insieme additiva, che verrà indicata con il nome di prodotto delle misure* μ_k.

Teorema 1.9.3 *Se le misure* $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ *sono* $\sigma-$*additive, allora anche la misura prodotto* μ *è* $\sigma-$*additiva.*

Definizione 1.9.3 *Se* $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ *sono misure* $\sigma-$*additive sulle* $\sigma-$*algebre*

$$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots \mathcal{S}_n,$$

definiamo misura prodotto delle misure $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ *il prolungamento secondo Lebesgue della misura*

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n$$

Tale prolungamento sarà indicato come

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$$

È opportuno osservare che la misura prodotto si ottiene mediante un prolungamento secondo Lebesgue, e quindi essa risulta automaticamente completa anche se tali non sono i suoi fattori; essa inoltre risulta $\sigma-$additiva come è provato dal teorema 1.4.3.

Si può anche provare facilmente che

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$$

Infatti

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3(A) = \inf_{\cup B_i \supset A} \sum (\mu_1 \otimes \mu_2) \times \mu_3(B_i) = \inf_{\cup B_i \supset A} \sum \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3(B_i) =$$
$$\inf_{\cup_i B_i \subset A} \sum \mu_1 \times (\mu_2 \otimes \mu_3)(B_i) = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)(A)$$

in quanto se $B_i \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3$ si ha

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3(B_i) = (\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3(B_i) = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3(B_i) = \mu_1 \times (\mu_2) \times \mu_3(B_i)$$

1.10 Il teorema di Fubini

Per la dimostrazione del teorema di Fubini (di riduzione di un integrale multiplo ad n integrali semplici) abbiamo necessità di ricordare un risultato che concerne il prolungamento di misure secondo Lebesgue.

Lemma 1.10.1 *Sia m una misura definita su un semianello $\mathcal{S}_m$ e sia μ il suo prolungamento secondo Lebesgue, Allora per ogni insieme A $\mu-$misurabile esistono degli insiemi $B_n^k \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ tali che la successione $k \mapsto B_n^k$ è crescente rispetto all'inclusione, cioè*

$$B_n^1 \subset B_n^2 \subset \cdots \subset B_n^k \subset \dots$$

posto

$$B_n = \bigcup_k B_n^k$$

$n \mapsto B_n$ è decrescente rispetto all'inclusione, cioè

$$B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m) \qquad B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \dots$$

e definito

$$B = \bigcap_n B_n = \bigcap_n \bigcup_k B_n^k$$

si ha

$$\mu(B) = \mu(A) \qquad B \supset A$$

Dimostrazione. Per la definizione di misurabilità, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$C_n = \bigcup_j D_n^j \qquad D_n^j \in \mathcal{S}_m$$

tale che

$$C_n \supset A \qquad \mu(C_n) < \mu(A) + \frac{1}{n}$$

Sia

$$B_n = \bigcap_{h=1}^{n} C_h$$

avremo allora che

$$B_n \in \mathcal{S}_m \qquad B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots \supset A \qquad \mu(B_n) < \mu(A) + \frac{1}{n}$$

ed inoltre

$$B_n = \bigcap_{h=1}^{n} \bigcup_j D_h^j = \bigcup_j \bigcap_{h=1}^{n} D_h^j = \bigcup_j E_n^j$$

non appena si sia definito

$$E_n^j = \bigcap_{h=1}^{n} D_h^j \in \mathcal{S}_m$$

Sia ancora

$$B_n^k = \bigcup_{j=1}^{k} E_n^j = \bigcup_{j}^{k} \bigcap_{h=1}^{n} D_h^j \qquad \text{da cui} \quad B_n = \bigcup nB_n^k$$

avremo allora che $k \mapsto B_n^k$ è una successione crescente rispetto all'inclusione di elementi di $\mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ cioè

$$B_n^k \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_m) \qquad B_n^1 \subset B_n^2 \subset \cdots \subset B_n^k \subset \dots$$

Sia infine

$$B = \bigcap_n B_n = \bigcap_n \bigcup_k B_n^k$$

da $\mu(C_n) < \mu(A) + \frac{1}{n}$, poichè $B_n \subset C_n$, avremo

$$\mu(B_n) < \mu(A) + \frac{1}{n}$$

da cui, al limite su n, tenendo conto del fatto che $B = \bigcap_n B_n$ e della continuità della misura, (teorema 1.3.8)

$$\mu(B) \leq \mu(A)$$

D'altra parte $B \supset B_n \supset A$, per cui

$$\mu(B) \geq \mu(A)$$

e la tesi.

□

Considereremo d'ora innanzi solo il caso in cui il prodotto sia esteso a due soli fattori; ciò non pregiudica la generalità della trattazione.

Definizione 1.10.1 *Indichiamo ora la situazione in cui vogliamo muoverci per provare il teorema di riduzione. Sia*

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

la misura prodotto definita dalla misure μ_x, μ_y $\sigma-$additive e complete definite su una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi degli insiemi X ed Y rispettivamente..

Ricordiamo che μ è il prolungamento secondo Lebesgue del prodotto della misura $m = \mu_x \times \mu_y$.

Se A è un insieme del prodotto cartesiano definiamo

$$A_x = \{y \ : \ (x,y) \in A\} \qquad A_y = \{x \ : \ (x,y) \in A\}$$

Teorema 1.10.1 *Nella situazione indicata nella definizione precedente, per ogni insieme misurabile $A \subset X \times Y$ si ha*

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y) d\mu_y$$

(Osserviamo che gli $\int_X \mu_y(A_x) d\mu_x$ e $\int_Y \mu_x(A_y) d\mu_y$ sono in realtà estesi soltanto agli insiemi $U = \{x \in X \ : \ A_x \neq \emptyset\}$ e $V = \{y \in Y \ : \ A_y \neq \emptyset\}$, rispettivamente.)

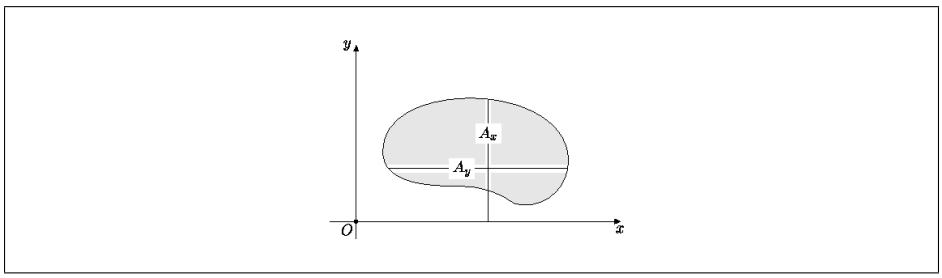

Figura 1.10: Sezionando un insieme misurabile

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di questo risultato si ottiene seguendo una serie di passi successivi. Chiaramente è necessario studiare solo la prima delle due uguaglianze in quanto la seconda è analoga.

Posto

$$\varphi_A(x) = \mu_y(A_x)$$

dovremo provare che

$$\mu(A) = \int_X \varphi_A(x) d\mu_x$$

1. Cominciamo con l'osservare che l'uguaglianza è vera per gli insiemi del tipo $A_{x_0} \times A_{y_0} \in \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_m$ (cioè per i rettangoli generati dal prodotto cartesiano di insiemi in $\mathcal{S}_m$).

   In tal caso infatti abbiamo

   $$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_y(A_{x_0}) & x \in A_{y_0} \\ 0 & x \notin A_{y_0} \end{cases}$$

2. L'uguaglianza è a questo punto vera anche per gli insiemi della famiglia $\mathcal{A}(\mathcal{S}_m)$ che sono decomponibili come unione finita di insiemi della famiglia $\mathcal{S}_m$ a due a due disgiunti.

3. Possiamo poi dimostrare l'uguaglianza per la classe di insiemi descritta nel lemma precedente applicato al semianello $\mathcal{S}_m^2$.

   Sia infatti

   $$B = \bigcap_n B_n = \bigcap_n \bigcup_k B_n^k \qquad B_n^k \in \mathcal{S}_m^2$$

   e definiamo

   $$\varphi_{B_n^k}(x) = \mu_y(B_{nx}^k)$$

   poichè $k \mapsto B_n^k$ è crescente rispetto all'inclusione e risulta $B_n = \bigcup_k B_n^k$, avremo che

   $$k \mapsto \varphi_{B_n^k}(x)$$

   risulta a sua volta crescente e

   $$\varphi_{B_n^k}(x) \to \varphi_{B_n}(x)$$

   inoltre

   $$\int_X \varphi_{B_n^k}(x) = \mu(B_n^k) \, (\leq \mu(B_n))$$

in quanto $B_m^k \in \mathcal{S}_m^2$ e si può applicare il punto precedente. (Osserviamo che la maggiorazione in parentesi serve solo nel caso in cui si voglia applicare il teorema 1.7.12 al posto del teorema 1.8.7, e ciò è possibile nel caso in cui $\mu(A) < +\infty$).

Si può pertanto applicare il teorema di convergenza monotona e le proprietà di continuità della misura(corollario 1.3.2), per concludere che

$$\int_X \varphi_{B_n}(x) d\mu_x = \mu(B_n)$$

D'altro canto si ha che $n \mapsto B_n$ è decrescente rispetto all'inclusione ed inoltre $B = \bigcap_n B_n$; pertanto

$$n \mapsto \varphi_{B_n}(x)$$

risulta a sua volta decrescente e

$$\varphi_{B_n}(x) \to \varphi_B(x)$$

inoltre, per quanto appena visto,

$$\int_X \varphi_{B_n}(x) = \mu(B_n) \geq 0$$

Possiamo allora applicare il teorema di convergenza monotona e le proprietà di continuità della misura (teorema 1.3.8) per concludere che

$$\int_X \varphi_B(x) d\mu_x = \mu(B)$$

4. Si prova poi che l'uguaglianza è vera per tutti gli insiemi di misura nulla.

   Se infatti $\mu(A) = 0$ allora, per il lemma 1.10.1 esiste un insieme $B \supset A$ del tipo considerato al passo precedente, tale che

   $$0 = \mu(B) = \int_X \varphi_B(x) d\mu_x$$

   per cui, dal corollario 1.7.2,

   $$\varphi_B(x) = \mu_y(B_x) = 0$$

   Poichè $A_x \subset B_x$ ed essendo la misura μ_y completa allora A_x è misurabile e

   $$\varphi_A(x) = \mu_y(A_x) = 0 \qquad \int_X \varphi_A(x) d\mu = 0 = \mu(A)$$

5. Il caso generale si può infine dedurre osservando che $A = B \setminus C$ con $\mu(C) = 0$ ed applicare i due punti precedenti.

□

Corollario 1.10.1 *Sia f una funzione non negativa integrabile su X e sia*

$$A = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \ : \ 0 \leq y \leq f(x)\} \qquad D \subset X$$

allora

$$\mu(A) = \int_D f(x) d\mu_x$$

DIMOSTRAZIONE. Il corollario si ottiene dal teorema precedente considerando $Y = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue lineare non appena si sia tenuto conto del fatto che

$$\mu_y(A_x) = \mu([0, f(x)]) = f(x)$$

□

Possiamo infine dimostrare il teorema di riduzione per integrali multipli.

Teorema 1.10.2 - Fubini - *Siano μ_x, μ_y misure definite su $\sigma-$algebre di sottoinsiemi degli spazi X ed Y, rispettivamente; supponiamo che μ_x e μ_y siano complete e $\sigma-$additive.*

Indichiamo con

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

la misura prodotto e supponiamo che $f(x, y)$ sia una funzione integrabile rispetto a μ sull'insieme

$$A \subset X \times Y$$

Allora

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y) d\mu_x \right) d\mu_y$$

(Osserviamo che gli integrali estesi ad X e ad Y sono in realtà estesi soltanto agli insiemi $\{x \in X \ : \ A_x \neq \emptyset\}$ e $\{y \in Y \ : \ A_y \neq \emptyset\}$, rispettivamente.)

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con il considerare il caso in cui $f \geq 0$.

Sia

$$U = X \times Y \times \mathbb{R}$$

e la misura prodotto

$$\lambda = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu_{\mathbb{R}} = \mu \otimes \mu_{\mathbb{R}}$$

essendo $\mu_{\mathbb{R}}$ la misura di Lebesgue sulla retta reale.

Definiamo

$$W = \{(x, y, z) \in U \ : \ (x, y) \in A, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

per il teorema precedente si ha

$$\lambda(W) = \int_A f(x, y) d\mu$$

D'altro canto, se

$$\xi = \mu_y \otimes \mu_{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad W_x = \{(y, z) \ : \ (x, y, z) \in W\} = \{(y, z) \ : \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

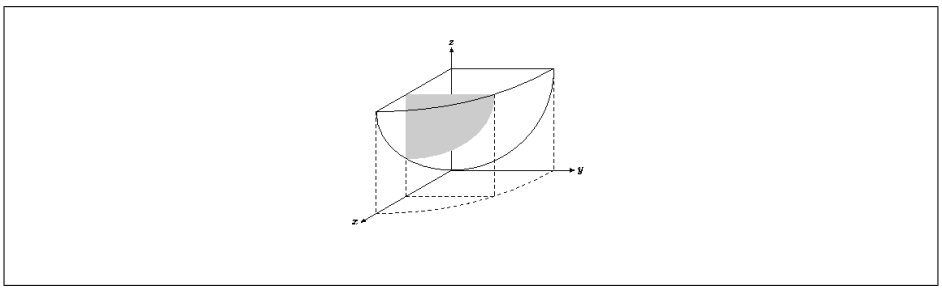

Figura 1.11: Teorema di Fubini

si ha $\lambda = \mu_x \times \xi$ e

$$\lambda(W) = \int_X \xi(W_x) d\mu_x$$

Inoltre

$$\xi(W_x) = \int_{A_x} f(x,y) d\mu_y$$

Confrontando le uguaglianze ottenute possiamo allora trovare che

$$\int_A f(x,y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x,y) d\mu_y \right) d\mu_x$$

e la tesi.

Il caso generale si ottiene ricordando che ogni funzione è la somma delle sue parti positiva e negativa

$$f = f_+ + f_-$$

□

1.11 Proprietà delle funzioni monotone

Prima di cominciare a studiare le proprietà delle funzioni monotone provvediamo a stabilire alcuni fatti che ci saranno utili nel seguito.

Definizione 1.11.1 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definiamo la derivata superiore da destra e da sinistra e la derivata inferiore da destra e da sinistra mediante le*

$$\begin{aligned}
\overline{f}_+(x_0) &= \limsup_{x \to x_0^+} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
\underline{f}_+(x_0) &= \liminf_{x \to x_0^+} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
\overline{f}_-(x_0) &= \limsup_{x \to x_0^-} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
\underline{f}_-(x_0) &= \liminf_{x \to x_0^-} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}$$

Chiaramente

- $$\underline{f}_-(x_0) \leq \overline{f}_-(x_0) \qquad \underline{f}_+(x_0) \leq \overline{f}_+(x_0)$$

- f è derivabile da destra in x_0 se e solo se

$$\overline{f}_+(x_0) = \underline{f}_+(x_0)$$

- f è derivabile da sinistra in x_0 se e solo se

$$\overline{f}_-(x_0) = \underline{f}_-(x_0)$$

- f è derivabile in x_0 se e solo se

$$\overline{f}_+(x_0) = \underline{f}_+(x_0) = \overline{f}_-(x_0) = \underline{f}_-(x_0)$$

Definizione 1.11.2 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiamo l'insieme dei punti invisibili da destra per f mediante la*

$$\mathcal{I}_f = \{x \in (a, b) \ : \ \exists \xi, \quad x < \xi \leq b, \quad f(x) < f(\xi)\}$$

Osserviamo esplicitamente che abbiamo escluso il punto a, che tuttavia può essere in $\mathcal{I}_f$ ed il punto b che invece non può mai essere elemento di $\mathcal{I}_f$.

Per i punti invisibili da destra per f possiamo provare il seguente risultato dovuto a F.Riesz.

Teorema 1.11.1 - F.Riesz - *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora l'insieme $\mathcal{I}_f$ dei punti invisibili da destra per f è un insieme aperto.*
Pertanto

$$\mathcal{I}_f = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

essendo l'unione al più numerabile e si ha

$$b_k < a_{k+1} \qquad f(a_k) \leq f(b_k)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $z \in \mathcal{I}_f$, allora esiste $\xi \in (z, b]$ tale che $f(z) < f(\xi)$.
Per il teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in (z - \delta, z + \delta) \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(\xi)$$

ciò significa che

$$x \in (z - \delta, z + \delta) \subset \mathcal{I}_f$$

quindi $\mathcal{I}_f$ è un insieme aperto e si può scrivere nella forma

$$\mathcal{I}_f = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

essendo l'unione al più numerabile con $b_k < a_{k+1}$. Proviamo ora che si ha

$$f(a_k) \leq f(b_k)$$

Sia infatti per assurdo $f(a_k) > f(b_k)$ allora, per il teorema dei valori intermedi esiste $\bar{x} \in (a_k, b_k)$ tale che

$$f(a_k) > f(\bar{x}) > f(b_k)$$

e si può considerare

$$x^* = \max\{x \in [a_k, b_k] \ : \ f(x) = f(\bar{x})\} = \max\{x \in (a_k, b_k) \ : \ f(x) = f(\bar{x})\}$$

Poichè $x^* \in (a_k, b_k)$ x^* è invisibile da destra per f e quindi esiste $\xi \in (x^*, b]$ tale che

$$f(b_k) < f(\bar{x}) = f(x^*) < f(\xi)$$

Osserviamo che se fosse $\xi \in (a_k, b_k)$, poichè $f(b_k) < f(\xi)$ per il teorema dei valori intermedi si potrebbe trovare $x^{**} \in (x^*, b_k)$ tale che $f(x^{**}) = f(\bar{x})$ e quindi x^* non sarebbe il più grande punto soddisfacente tale proprietà.

Se al contrario fosse $\xi > b_k$ allora $b_k \in \mathcal{I}_f$ e ciò contraddice il fatto che

$$\mathcal{I}_f = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

pertanto deve risultare

$$f(a_k) \leq f(b_k)$$

□

A proposito di derivata inferiore e superiore possiamo provare alcuni risultati.

Lemma 1.11.1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e monotona (crescente), e sia*

$$\mathcal{J} = \{x \in (a, b) \ : \ \overline{f}_+(x) = +\infty\}$$

allora $\mathcal{J}$ ha misura nulla.

Dimostrazione. Se $x_0 \in \mathcal{J}$ allora per ogni $M > 0$ esiste $\xi > x_0$ tale che

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > M$$

per cui si avrà

$$f(\xi) - M\xi > f(x_0) - Mx_0$$

e quindi x_0 risulta essere un punto invisibile da destra per la funzione

$$g(x) = f(x) - Mx$$

Per il teorema di Riesz l'insieme dei punti invisibili da destra per la funzione g può essere ricoperto mediante unione numerabile di intervalli aperti (a_k, b_k) ed è verificato che

$$f(a_k) - Ma_k \leq f(b_k) - Mb_k$$

per cui

$$f(b_k) - f(a_k) \geq M(b_k - a_k)$$

Otteniamo pertanto che per ogni $\epsilon > 0$

$$\sum_k (b_k - a_k) \leq \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{M} \leq \frac{f(b) - f(a)}{M} < \epsilon$$

poichè è possibile scegliere $M = \frac{f(b)-f(a)}{\epsilon}$ si può concludere che l'insieme dei punti invisibili da destra per g, e quindi anche $\mathcal{J}$ che è in esso contenuto, ha misura nulla.

□

Lemma 1.11.2 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua e monotona (crescente), siano* $C > c > 0$, $\rho = c/C$ *e sia*

$$E_c^C = \{x \in (a,b) \ : \quad \underline{f}_-(x) < c < C < \overline{f}_+(x)\}$$

allora

$$\mu(E_c^C \cap (\alpha,\beta)) \leq \rho(\beta-\alpha) = \frac{c}{C}(\beta-\alpha)$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che se

$$x_0 \in \mathcal{K} = \{x \in (\alpha,\beta) \qquad \underline{f}_-(x) < c\}$$

allora esiste $\xi < x_0$ tale che

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} < c$$

da cui

$$f(\xi) - c\xi > f(x_0) - cx_0$$

e quindi x_0 risulta essere un punto invisibile da sinistra per la funzione

$$g(x) = f(x) - cx$$

.

Pertanto per il teorema di Riesz appena dimostrato $\mathcal{K}$ può essere ricoperto con un insieme al più numerabile di intervalli (α_k, β_k) a due a due disgiunti; in corrispondenza degli estremi si ha inoltre

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k)$$

Consideriamo ora

$$\mathcal{H} = \{x \in (\alpha_k, \beta_k) \ : \ \overline{f}_+(x) > C\}$$

Applicando di nuovo il teorema di Riesz, possiamo ottenere come nel lemma precedente che $\mathcal{H}$ è contenuto nell'insieme dei punti invisibili da destra per la funzione $f(x) - Cx$ e pertanto può essere ricoperto con una famiglia al più numerabile di intervalli $(\alpha_{k_h}, \beta_{k_h})$ in corrispondenza dei quali si ha

$$\beta_{k_h} - \alpha_{k_h} \leq \frac{1}{C}\left[f(\beta_{k_h}) - f(\alpha_{k_h})\right]$$

Possiamo infine concludere che l'insieme $E_c^C \cap (\alpha,\beta)$ può essere ricoperto mediante il sistema di intervalli $(\alpha_{k_h}, \beta_{k_h})$ ed in virtù delle stime precedentemente fatte possiamo allora affermare che

$$\begin{aligned}
\mu(E_c^C \cap (\alpha,\beta)) &\leq \sum_k \sum_h (\beta_{k_h} - \alpha_{k_h}) \leq \\
&\leq \frac{1}{C} \sum_k \sum_h \left[f(\beta_{k_h}) - f(\alpha_{k_h})\right] \leq \\
&\leq \frac{1}{C} \sum_k f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq \frac{c}{C} \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \\
&\leq \rho(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

□

Per concludere proviamo ancora un lemma che ci sarà utile per studiare la derivabilità di una funzione monotona

Lemma 1.11.3 *Sia $A \subset [a,b]$ un insieme misurabile tale che per ogni intervallo $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ si abbia*

$$\mu(A \cap (\alpha,\beta)) \leq \rho(\beta - \alpha) \qquad 0 < \rho < 1$$

Allora

$$\mu(A) = 0$$

Dimostrazione. Sia $\mu(A) = \delta$; per la definizione 1.3.1 per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme

$$G = \bigcup_m (a_m, b_m) \qquad A \subset G \qquad \sum_m (b_m - a_m) < \delta + \epsilon$$

Ora se poniamo

$$\delta_m = \mu(A \cap (a_m, b_m))$$

si ha

$$\delta = \sum_m \delta_m$$

e poichè le ipotesi del lemma ci consentono di affermare che

$$\delta_m \leq \rho(b_m - a_m)$$

possiamo concludere che

$$\delta \leq \rho \sum_m (b_m - a_m) < \rho(\delta + \epsilon)$$

e per $\epsilon \to 0$

$$\delta \leq \rho\delta$$

Poichè $0 < \rho < 1$ possiamo infine concludere $\delta = 0$ □

Passiamo ora a studiare le proprietà caratteristiche delle funzioni monotone.

Definizione 1.11.3 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diciamo che f è monotona in $[a,b]$ se*

$$[f(x) - f(y)]\,(x - y) \qquad \text{ha segno costante} \qquad \forall x, y \in [a,b]$$

Possiamo facilmente provare che per le funzioni monotone valgono alcuni importanti risultati che riassumiamo qui di seguito.

Teorema 1.11.2 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora per ogni $x_0 \in [a,b]$ f ammette limite da sinistra e da destra*

$$f(x_0-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \qquad f(x_0+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

e, se ad esempio supponiamo f crescente, si ha

$$f(x_0-) \leq f(x_0+)$$

Dal teorema precedente è evidente che

Teorema 1.11.3 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona allora f può essere discontinua in x_0 solo nel caso in cui*

$$f(x_0-) \neq f(x_0+)$$

Diciamo, in questo caso, che f ammette in x_0 un "salto". Diciamo altresì che f è continua da destra, o da sinistra in x_0 se accade che

$$f(x_0+) = f(x_0) \qquad f(x_0-) = f(x_0)$$

rispettivamente.

Teorema 1.11.4 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona allora f è continua su $[a, b]$ tranne un insieme al più numerabile di punti.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè ogni funzione monotona ammette al più discontinuità di tipo salto, e poichè ad ogni discontinuità di tipo salto può essere associato un intervallo di estremi $f(x_0+)$ ed $f(x_0-)$, possiamo associare ad ogni tale intervallo un numero razionale in esso contenuto.

Poichè gli intervalli sono disgiunti i numeri razionali associati son tutti distinti e quindi al più numerabili. Tali risultano quindi anche gli intervalli. □

Teorema 1.11.5 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona (crescente), allora f è limitata e misurabile su $[a, b]$ e quindi risulta ivi integrabile.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha infatti

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad \forall x \in [a, b]$$

ed inoltre

$$L_c = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) < c\}$$

è un intervallo o il vuoto.

Osserviamo anche che è ben noto che le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann e quindi tali risultano anche secondo Lebesgue

□

Definizione 1.11.4 *Diciamo che $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione di salto se esiste un sottoinsieme D al più numerabile di $[a, b]$*

$$D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

che supponiamo ordinato

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \dots$$

cui è associato un insieme di valori positivi

$$h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$$

in modo che

$$h(x) = \sum_{\{k : x_k < x\}} h_k$$

Teorema 1.11.6 *Sia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di salto, allora h è una funzione monotona crescente continua da sinistra in ogni punto ed è continua in ogni punto di $[a,b] \setminus D$.*

A fronte delle funzioni di salto possiamo considerare le funzioni monotone e continue su $[a,b]$.

Possiamo dimostrare che

Teorema 1.11.7 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona (crescente) continua da sinistra allora f può essere decomposta nella somma di una funzione φ monotona crescente e continua e di una funzione h di salto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti h definita associando ad ognuno dei punti

$$\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

di discontinuità di f i valori

$$\{h_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \qquad h_n = f(x_n+) - f(x_n-)$$

e consideriamo la funzione di salto definita da

$$h(x) = \sum_{\{k:x_k<x\}} h_k$$

e la funzione

$$\varphi = f - h$$

Si verifica subito che la funzione φ è crescente e continua in quanto si ha

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = f(x'') - f(x') + h(x'') - h(x') \leq 0$$

perchè è la differenza tra l'accrescimento totale della funzione f e l'accrescimento dovuto ai soli salti. Inoltre se $x^* \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \varphi(x^*-) = f(x^*-) - h(x^*-) &= f(x^*-) - \sum_{\{k:x_k<x^*\}} h_k \\ \varphi(x^*+) = f(x^*+) - h(x^*+) &= f(x^*+) - \sum_{\{k:x_k\leq x^*\}} h_k \end{aligned}$$

per cui

$$\varphi(x^*+) - \varphi(x^*-) = f(x^*+) - f(x^*-) - h^*$$

dove h^* indica il salto della funzione h nel punto x^*.

Ne segue che

$$\varphi(x^*+) - \varphi(x^*-) = f(x^*+) - f(x^*-) - h^* = 0$$

e la continuità di φ. □

Abbiamo a questo punto a disposizione tutti i risultati che ci sono necessari per provare che

Teorema 1.11.8 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona continua, allora f è derivabile quasi ovunque su $[a, b]$. In altre parole è possibile trovare un insieme di misura nulla $N \subset [a, b]$ tale che f è derivabile per ogni $x \in [a, b] \setminus N$.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè f è una funzione continua e monotona (crescente), i precedenti lemmi ci consentono di affermare che

$$\overline{f}_+(x_0) < +\infty \qquad \underline{f}_-(x_0) \geq \overline{f}_+(x_0) \quad \text{quasi ovunque in } [a, b]$$

Se poniamo

$$g(x) = -f(-x) \qquad x \in [a, b]$$

per la definizione di derivata superiore ed inferiore da destra e da sinistra avremo che

$$\overline{f}_-(x) = \overline{g}_+(-x) \qquad \underline{f}_+(x) = \underline{g}_-(-x) \qquad x \in [-b, -a]$$

ed inoltre possiamo affermare che la funzione g è continua e monotona (crescente) su $[-b, -a]$, per cui si ha

$$\overline{g}_+(x) < +\infty \qquad \underline{g}_-(x) \geq \overline{g}_+(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in [-b, -a]$$

Pertanto per quasi ogni $x \in [a, b]$

$$\overline{f}_+(x) \leq \underline{f}_-(x) \leq \overline{f}_-(x) = \overline{g}_+(-x) \leq \underline{g}_-(-x) = \underline{f}_+(x) \leq \overline{f}_+(x)$$

e possiamo dedurre che

$$\overline{f}_+(x) = \underline{f}_-(x) = \overline{f}_-(x) = \underline{f}_+(x) = \overline{f}_+(x)$$

quasi ovunque in $[a, b]$.

Ciò significa che f è quasi ovunque derivabile in $[a, b]$ □

Abbiamo con ciò mostrato che una funzione monotona e continua è quasi ovunque derivabile; la dimostrazione si può estendere al caso di una funzione monotona arbitraria, che quindi presenta discontinuità di tipo "salto", modificando la definizione di punto invisibile da destra ed estendendo la dimostrazione del teorema di Riesz.

Più precisamente, se g è una funzione che ammette discontinuità di tipo "salto", possiamo estendere la definizione di punto invisibile da destra per g dicendo che x è un punto invisibile da destra per g se esiste $\xi > x$ tale che

$$\max\{g(x+), g(x), g(x-)\} \leq g(\xi)$$

Usando tale definizione si può estendere il teorema 1.11.1 di Riesz e tutte le sue successive conseguenze.

Proviamo infine un teorema che riguarda la derivazione per serie che viene talvolta riportato come "piccolo teorema di Fubini". Tale teorema risulta di notevole utilità nello studio delle funzioni di salto.

Teorema 1.11.9 *Sia*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$$

una serie convergente di funzioni f_n monotone crescenti su un intervallo $[a, b]$. Allora f è derivabile e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

DIMOSTRAZIONE. A meno di sostituire $f_n(x)$ con $f_n(x) - f_n(a)$ possiamo supporre che

$$f_n(x) \geq 0 \qquad f_n(a) = 0$$

Poichè le f_n sono crescenti tale risulta anche f e quindi possiamo affermare che a meno di un insieme T di misura nulla (unione numerabile di insiemi di misura nulla, uno per ogni f_n) $f_n'(x)$ ed $f'(x)$ esistono.

Sia ora $x \in [a, b] \setminus T$ per $\xi \in [a, b]$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(\xi) - f_n(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

Sfruttando la monotonia di f_n possiamo affermare che

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{f_n(\xi) - f_n(x)}{\xi - x} \leq \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

e passando al limite per $\xi \to x$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{N} f_n'(x) \leq f'(x)$$

Ora $f_n'(x) \geq 0$ per cui la serie è a termine positivi, è convergente e si può affermare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \leq f'(x) \qquad \forall x \in [a, b] \setminus N$$

Per le ipotesi, se poniamo

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

possiamo affermare che $S_n(b) \to f(b)$ e pertanto è possibile trovare una estratta n_k in corrispondenza della quale

$$0 \leq f(b) - S_{n_k}(b) \leq \frac{1}{2^k}$$

Se osserviamo che

$$f(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{n \geq n_k} f_n(x)$$

è una funzione crescente, otteniamo che

$$0 \leq f(x) - S_{n_k}(x) \leq f(b) - S_{n_k}(b) \leq \frac{1}{2^k}$$

e quindi ci assicuriamo la convergenza totale e quindi uniforme della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(x) - S_{n_k}(x)$$

su tutto l'intervallo $[a, b]$.

Ora la serie appena considerata soddisfa le stesse condizioni imposte nelle ipotesi e quindi, come prima, possiamo affermare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f'(x) - S'_{n_k}(x)$$

è una serie convergente quasi ovunque.

Di conseguenza il termine generale della serie

$$f'(x) - S'_{n_k}(x) \to 0$$

quasi ovunque in $[a, b]$ Ciò permette di concludere che se k è abbastanza grande allora

$$f'(x) - \epsilon \leq S'_{n_k}(x) \leq f'(x)$$

e, tenendo conto che $n \mapsto S'_n(x)$ è crescente, possiamo concludere che, per tutti gli $n > n_k$

$$f'(x) - \epsilon \leq S'_n(x) \leq f'(x)$$

□

Corollario 1.11.1 *Una funzione di salto ha quasi ovunque derivata nulla*

DIMOSTRAZIONE. Una funzione di salto può essere espressa come serie di funzioni del tipo

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_n \\ h_n & x \geq x_n \end{cases}$$

ciascuna delle quali ha derivata quasi ovunque nulla. □

Cominciamo ora a considerare lo studio della funzione integrale associata ad una funzione integrabile.

Definizione 1.11.5 *Sia f una funzione integrabile su $[a, b]$ e definiamo*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Se osserviamo che qualora $f \geq 0$ allora F è crescente, e se ricordiamo anche che

$$f = f_+ - f_-$$

è facile convincersi che F può essere espressa come differenza di funzioni crescenti.

Ad f quindi possono essere applicati tutti i risultati provati per le funzioni monotone ed in particolare si può affermare che

Teorema 1.11.10 *Se f è una funzione integrabile su $[a,b]$ allora*

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt$$

esiste quasi ovunque su $[a,b]$.

Osserviamo esplicitamente che abbiamo fino a questo momento provato che F' esiste quasi ovunque e non ancora che $F'(x) = f(x)$. ciò sarà oggetto del lavoro che segue.

1.12 Funzioni di variazione limitata

Definizione 1.12.1 *Diciamo che una funzione f è di variazione limitata su $[a,b]$ se esiste una costante C tale che per ogni partizione dell'intervallo $[a,b]$*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

si abbia

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$$

Osserviamo che ogni funzione monotona è di variazione limitata in quanto la somma considerata è in tal caso sempre uguale a $|f(b) - f(a)|$,

Definizione 1.12.2 *Sia f una funzione di variazione limitata su $[a,b]$, allora chiamiamo variazione totale di f su $[a,b]$*

$$\mathcal{V}_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

l'estremo superiore essendo esteso a tutte le possibili partizioni di $[a,b]$

Se f è una funzione data su $\mathbb{R}$, diciamo che è di variazione limitata se

$$\mathcal{V}_{-\infty}^{+\infty}[f] = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \mathcal{V}_a^b[f]$$

è finita.

Teorema 1.12.1 *Se f, g sono funzioni definite su $[a,b]$ e se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora*

1. $$\mathcal{V}_a^b[\alpha f] = |\alpha| \mathcal{V}_a^b[f]$$

2. $$\mathcal{V}_a^b[f+g] \leq \mathcal{V}_a^b[f] + \mathcal{V}_a^b[g]$$

3. *se $a < b < c$ allora*
$$\mathcal{V}_a^c[f] = \mathcal{V}_a^b[f] + \mathcal{V}_b^c[f]$$

DIMOSTRAZIONE. Le proprietà (1) e (2) si possono facilmente verificare usando la definizione di variazione totale e la subadditività dell'estremo superiore.

Per quanto concerne (3) siano $a < b < c$ e consideriamo una partizione

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = c$$

dell'intervallo $[a, c]$.

Denotiamo con

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots \xi_r = b < \xi_{r+1} < \cdots < \xi_{n+1} = c$$

la partizione ottenuta aggiungendo il punto $\xi_r = b$, avremo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &\leq \sum_{k=1}^{r} |f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})| + \sum_{k=r+1}^{n+1} |f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})| \leq \\ &\leq \mathcal{V}_a^b[f] + \mathcal{V}_b^c[f] \end{aligned}$$

Considerando l'estremo superiore del primo membro al variare di tutte le possibili partizioni dell'intervallo $[a, c]$ possiamo allora concludere che

$$\mathcal{V}_a^c[f] \leq \mathcal{V}_a^b[f] + \mathcal{V}_b^c[f]$$

D'altro canto per ogni $\epsilon > 0$ esiste una partizione dell'intervallo $[a, b]$ ed una partizione dell'intervallo $[b, c]$ tali che

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n} |f(x_k^1) - f(x_{k-1}^2)| &> \mathcal{V}_a^b[f] - \tfrac{\epsilon}{2} \\ \textstyle\sum_{k=1}^{m} |f(x_k^2) - f(x_{k-1}^2)| &> \mathcal{V}_b^c[f] - \tfrac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Pertanto, se consideriamo una partizione dell'intervallo $[a, c]$ ottenuta dall'unione delle due, avremo che

$$\begin{aligned} \sum_{k} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k} |f(x_k^1) - f(x_{k-1}^1)| + \sum_{k} |f(x_k^2) - f(x_{k-1}^2)| \\ &> \mathcal{V}_a^b[f] + \mathcal{V}_b^c[f] - \epsilon \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ possiamo alfine concludere che

$$\mathcal{V}_a^c[f] \geq \mathcal{V}_a^b[f] + \mathcal{V}_b^c[f]$$

e quindi che

$$\mathcal{V}_a^c[f] = \mathcal{V}_a^b[f] + \mathcal{V}_b^c[f]$$

□

Teorema 1.12.2 *Sia f una funzione definita su $[a, b]$, allora la funzione*

$$v(x) = \mathcal{V}_a^x[f] \tag{1.20}$$

è monotona crescente; inoltre se f è continua da sinistra o da destra in un punto x^* tale risulta anche v.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\epsilon > 0$ e consideriamo $\delta > 0$ tale che

$$x^* - \delta < x < x^* \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x^*)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x^*$$

una partizione dell'intervallo $[a, x^*]$ tale che

$$\mathcal{V}_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.21}$$

Osserviamo che possiamo sempre supporre che

$$x^* - x_{n-1} < \delta$$

in quanto, se così non fosse, potremmo aggiungere un punto alla partizione scelta, aumentando così il valore della somma a primo membro della 1.21.

Pertanto se ne deduce che

$$|f(x_{n-1}) - f(x^*)| < \frac{\epsilon}{2}$$

e di conseguenza

$$\mathcal{V}_a^{x^*}[f] \qquad - \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \tag{1.22}$$

$$\mathcal{V}_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{n-1}) - f(x^*)| < \epsilon \tag{1.23}$$

e per la definizione di variazione totale si ottiene a fortiori che

$$\mathcal{V}_a^{x^*}[f] - \mathcal{V}_a^{x_{n-1}}[f] < \epsilon. \tag{1.24}$$

Poichè v è una funzione monotona crescente possiamo infine asserire che

$$\mathcal{V}_a^{x^*}[f] - \mathcal{V}_a^{x}[f] < \epsilon \qquad \forall x \ : \ x_{n-1} \leq x \leq x^* \tag{1.25}$$

e la continuità da sinistra di v.

Similmente si prova la continuità da destra di v nel caso in cui sussista la continuità da destra di f

□

Definizione 1.12.3 *Sia f una funzione definita su $[a, b]$ a variazione limitata allora possiamo considerare la funzione w definita da*

$$w(x) = v(x) - f(x) \tag{1.26}$$

dove $v(x) = \mathcal{V}_a^x[f]$ è la variazione totale di f sull'intervallo $[a, x]$.

È evidente che f può essere decomposta nella somma

$$f = v + w$$

ed abbiamo già verificato che v è crescente. possiamo ora verificare anche che w è decrescente.

Teorema 1.12.3 *Se f è una funzione di variazione limitata su $[a,b]$ e se w è la funzione definita dalla 1.26, allora w è decrescente. Quindi f può essere rappresentata come differenza di funzioni monotone crescenti.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha per $x < y$

$$w(x) - w(y) = [v(x) - v(y)] - [f(x) - f(y)] \tag{1.27}$$

d'altro canto

$$|f(x) - f(y)| \leq v(x) - v(y) = \mathcal{V}_x^y[f] \tag{1.28}$$

Pertanto il secondo membro della 1.27 è non negativo e w è decrescente. □

Corollario 1.12.1 *Ogni funzione di variazione limitata ammette quasi ovunque derivata finita*

Per le funzioni di variazione limitata è opportuno considerare una generalizzazione della nozione di funzione di salto.

Definizione 1.12.4 *Sia $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \ldots$ un insieme finito o numerabile di punti dell'intervallo $[a,b]$; e siano assegnati in corrispondenza di ogni x_n due numeri h_n e k_n tali che*

$$\sum_n (|k_n| + |h_n|) < +\infty$$

Supponiamo che se $x_n = a$ allora $k_n = 0$ e che se $x_n = b$ allora $h_n = 0$. e chiamiamo funzione di salto la funzione σ definita da

$$\sigma(x) = \sum_{x_n \leq x} k_n + \sum_{x_n < x} h_n \tag{1.29}$$

Chiaramente la variazione totale della funzione σ è

$$\mathcal{V}_a^b[\sigma] = \sum_n (|k_n| + |h_n|) < +\infty$$

la funzione σ è continua in ogni punto tranne che per quegli x_n per i quali k_n oppure h_n risultano non nulli. In tal caso è facile convincersi che

$$k_n = \sigma(x_n) - \sigma(x_n-) \qquad h_n = \sigma(x_n+) - \sigma(x_n)$$

Così come abbiamo fatto per le funzioni monotone possiamo anche per le funzioni a variazione limitata (che sono differenze di funzioni monotone) enunciare il seguente risultato.

Teorema 1.12.4 *Se f è una funzione a variazione limitata tra $[a,b]$, allora f può essere decomposta in modo unico nella forma*

$$f = \varphi + \sigma$$

dove σ è una funzione di salto e φ è una funzione continua.

Osserviamo infine che le funzioni costanti sono le uniche funzioni la cui variazione totale è nulla.

Osserviamo anche che se poniamo

$$\|f\| = \mathcal{V}_a^b[f]$$

definiamo sullo spazio delle funzioni di variazione limitata (che risulta spazio vettoriale) una quasi-norma.

Non risulta verificata che

$$\|f\| = 0 \equiv f = 0$$

in quanto tutte le costanti hanno variazione totale nulla, tuttavia è possibile normare, per mezzo della variazione totale lo spazio delle funzioni di variazione limitata tali che $f(a) = 0$.

Lo spazio delle funzioni di variazione limitata può invece essere normato mediante la

$$\|f\| = |f(a)| + \mathcal{V}_a^b[f]$$

1.13 Derivazione dell'integrale di Lebesgue

È già stato verificato che la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

ammette quasi ovunque derivata finita. Non abbiamo tuttavia ancora provato che tale derivata coincide quasi ovunque con la funzione integranda. Questo sarà lo scopo del teorema che segue.

Teorema 1.13.1 *Sia f una funzione sommabile su $[a, b]$ e definiamo*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

allora

$$F'(x) = f(x) \qquad \textit{quasi ovunque in } \ [a.b]$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostare che

$$f(x) \geq F'(x)$$

e allo scopo supponiamo per assurdo che

$$f(x) < F'(x)$$

Allora esistono $c, C \in \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x) < c < C < F'(x)$$

Definiamo

$$E_c^C = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) < c < C < F'(x)\}$$

E_c^C è misurabile in quanto f e F' sono funzioni misurabili e dimostriamo che tale insieme ha misura nulla. (Ricordiamo che la misurabilità di F ed F' si può ottenere ricordando che $F(x)$ è limite di funzioni semplici misurabili così come $F'(x) = \lim_n \frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}$ e che tali funzioni sono misurabili.)

Sia $\epsilon > 0$, per l'assoluta continuità dell'integrale possiamo trovare δ tale che se E è un insieme misurabile tale che $\mu(E) < \delta$ si ha

$$\int_E f(t)dt < \epsilon$$

Per la definizione di misurabilità possiamo trovare un insieme aperto (unione numerabile di intervalli aperti) G tale che

$$G \supset E_c^C \qquad \mu(G) < \mu(E_c^C) + \delta$$

Se $x \in E_c^C$, per $\xi > x$, ξ abbastanza vicino ad x si ha

$$\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} > C$$

e quindi

$$F(\xi) - C\xi > F(x) - Cx$$

per cui x è un punto invisibile da destra per la funzione $F(x) - Cx$.

Possiamo allora utilizzare il lemma di Riesz su ciascuno degli intervalli che costituiscono G,per trovare un insieme aperto

$$S = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

ottenuto mediante unione disgiunta di intervalli aperti, tale che

$$E_c^C \subset S \subset G$$

e si abbia

$$F(b_k) - Cb_k \geq F(a_k) - Ca_k$$

da cui

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = F(b_k) - F(a_k) \geq C(b_k - a_k)$$

Sommando su k si deduce che

$$\int_S f(t)dt \geq C \sum_k (b_k - a_k) = C\mu(S)$$

D'altro canto

$$\begin{aligned} \int_S f(t)dt &= \int_{E_c^C} f(t)dt + \int_{S \setminus E_c^C} f(t)dt \leq \\ &\leq c\mu(E_c^C) + \epsilon \leq \begin{cases} c\mu(S) + \epsilon & c \geq 0 \\ c\mu(S) + \epsilon - c\delta & c < 0 \end{cases} \leq c\mu(S) + \epsilon + |c|\delta \end{aligned}$$

Dalle due ultime disuguaglianze otteniamo pertanto che

$$c\mu(S) + \epsilon + |c|\delta \geq C\mu(S)$$

e quindi

$$\mu(S) \leq \frac{\epsilon + |c|\delta}{C - c}$$

Ne deduciamo che E_c^C può essere incluso in un insieme S la cui misura è arbitrariamente piccola (si può ad esempio scegliere $|c|\delta \leq \epsilon$) e quindi che $\mu(E_c^C) = 0$.

Poichè gli insiemi E_c^C sono una quantità al più numerabile, possiamo asserire anche che

$$\{x \in [a, b] \ : \ f(x) < F'(x)\}$$

ha misura nulla.

Pertanto $f(x) \geq F'(x)$ quasi ovunque e considerando $-f$ in luogo di f possiamo altresì affermare che $-f(x) \geq -F'(x)$; ne deduciamo che

$$f(x) = F'(x)$$

. □

1.14 Assoluta continuità

Abbiamo a questo punto stabilito che ogni funzione integrale è derivabile ed ha come derivata la sua integranda a meno di un insieme di misura nulla.

Vogliamo ora estendere al caso dell'integrale di Lebesgue la formula del teorema fondamentale del calcolo integrale di Newton-Leibnitz

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Teorema 1.14.1 *Sia f una funzione monotona crescente allora f' esiste quasi ovunque inoltre f' è sommabile e si ha*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

Dimostrazione. Supponiamo f estesa ad $f(b)$ a destra di b e consideriamo

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.30}$$

Poichè f è monotona essa è anche sommabile e quindi tale risulta anche φ_h. possiamo pertanto integrare ambo i membri della 1.30 per ottenere

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_h(x)dx &= \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx \end{aligned}$$

Poichè è facile verificare direttamente che l'ultimo membro della disuguaglianza precedente tende, per $h \to 0^+$ ad $f(b) - f(a+)$, (si ricordi che f è monotona, per cui

$$f(b)\frac{h}{h} \leq \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx \leq f(b+h)\frac{h}{h}$$

$$f(b)\frac{h}{h} \leq \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx \leq f(b+h)\frac{h}{h} \quad (1.31)$$

e che f ammette limite da destra e da sinistra ed è estesa costante fuori da $[a, b]$). Possiamo allora applicare il lemma di Fatou al primo membro per ottenere che

$$\int_a^b f'(x) \leq \lim_{h\to 0}\int_a^b \varphi_h(x)dx = f(b) - f(a+) \leq f(b) - f(a) \quad (1.32)$$

□

Definizione 1.14.1 *Diciamo che una funzione f definita su un intervallo $[a, b]$ è assolutamente continua se comunque si scelga $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni famiglia finita di intervalli in $[a, b]$ a due a due disgiunti, che indicheremo con*

$$\{(x_k, y_k) \ : \ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

tale che

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k) < \delta$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{n}[f(y_k) - f(x_k)] < \epsilon$$

È banale verificare che ogni funzione assolutamente continua è anche uniformemente continua, mentre si trovano esempi di funzioni uniformememnte continue non assolutamente continue.

Consideriamo ora le proprietà fondamentali delle funzioni assolutamente continue.

Teorema 1.14.2 *1. f è assolutamente continua se e solo se comunque si scelga $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni famiglia* **numerabile** *di intervalli in $[a, b]$ a due a due disgiunti, che indicheremo con*

$$\{(x_k, y_k) \ : \ k \in \mathbb{N}\}$$

tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k - a_k) < \delta$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty}[f(b_k) - f(a_k)] < \epsilon$$

2. Ogni funzione assolutamente continua è anche di variazione limitata.

3. *Se f, g sono assolutamente continue ed $\alpha \in \mathbb{R}$, allora anche $f+g$ ed αf sono assolutamente continue.*

4. *L'insieme delle funzioni assolutamente continue risulta un spazio vettoriale sottospazio dello spazio delle funzioni di variazione limitata.*

5. *se f è una funzione assolutamente continua allora*

$$f = v - w$$

dove

$$v(x) = \mathcal{V}_a^x[f] \qquad w(x) = f(x) - v(x)$$

e sia v che w risultano assolutamente continue e crescenti.

DIMOSTRAZIONE.

1. Sia $\{(x_k, y_k) \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di intervalli a due a due disgiunti tali che

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(y_k - x_k) < \delta$$

allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k) < \delta$$

e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}[f(y_k) - f(x_k)] < \epsilon$$

Ne deduciamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(x_k)] < \epsilon$$

2. Per la definizione di assoluta continuità la variazione totale di una funzione assolutamente continua su un intervallo di lunghezza inferiore a δ è minore di ϵ. Poichè ogni intervallo $[a, b]$ può essere ricoperto mediante un numero finito di intervalli di lunghezza inferiore a δ, si può affermare che la variazione totale di f è anch'essa finita.

3. La verifica segue applicando direttamente la definizione.

4. Questo punto deriva dal punto precedente.

5. Posto

$$f = v - w$$

dove

$$v(x) = \mathcal{V}_a^x[f] \qquad w(x) = f(x) - v(x)$$

poichè f è in particolare a variazione limitata sia v che w risultano crescenti. Inoltre possiamo dimostrare che v è assolutamente continua.

Infatti sia $\{(x_k, y_k) \ : \ k = 1, 2, \ldots, n\}$ è una famiglia finita di intervalli a due a due disgiunti tali che

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k) < \delta$$

e consideriamo

$$\sum_{k=1}^{n}[v(y_k) - v(x_k)] = \sum_{k=1}^{n}\sup\sum_{h=1}^{m_k}|f(\xi_k^h) - f(\xi_k^{h-1})| \leq$$

$$\leq \sup\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m_k}|f(\xi_k^h) - f(\xi_k^{h-1})| \quad (1.33)$$

Poichè la somma delle lunghezze degli intervalli

$$\sum_k\sum_h(\xi_k^h - x_k^{h-1}) = \sum_k(y_k - x_k) < \delta$$

su cui è calcolata la somma è inferiore a δ, possiamo affermare, per l'assoluta continuità di f che l'ultimo membro della 1.33 è inferiore ad ϵ.

□

Teorema 1.14.3 *Sia f una funzione sommabile su $[a, b]$ allora la funzione*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è una funzione assolutamente continua. Possiamo chiamare F integrale indefinito di f.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{(a_k, b_k) \ : \ k = 1, 2, 3, \ldots, n\}$ una famiglia finita di intervalli a due a due disgiunti; si ha

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|f(t)|dt = \int_{\bigcup_k(a_k,b_k)}|f(t)|dt$$

ed in virtù della assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue si può affermare che l'ultimo integrale è arbitrariamente piccolo non appena la misura di $\bigcup_k(a_k, b_k)$ sia scelta sufficientemente piccola.

□

Per dimostrare l'ultimo risultato di questa sezione premettiamo il seguente lemma.

Lemma 1.14.1 *Sia f una funzione monotona (crescente), assolutamente continua su $[a, b]$. Allora se $f'(x) = 0$ quasi ovunque si può affermare che f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Per le ipotesi f è monotona e continua su $[a,b]$ pertanto il suo rango si può caratterizzare come

$$R(f) = [f(a), f(b)]$$

Per provare che f è costante sarà sufficiente provare che la lunghezza dell'intevallo $[f(a), f(b)]$ è nulla, cosicchè esso si riduce ad un solo punto.

Siano pertanto

$$E = \{x \in [a,b] \ : \ f'(x) = 0\} \qquad Z = [a,b] \setminus E$$

Poichè per ipotesi $\mu(Z) = 0$, per ogni $\delta > 0$ Z può essre ricoperto da una famiglia al più numerabile di intervalli aperti $\{(a_k, b_k)\}$ la cui lunghezza totale è inferiore ad δ.

Pertanto, $f(Z)$ può essere ricoperto dalla famiglia di intervalli aperti

$$\mu(Z) \leq \{(f(a_k), f(b_k))\} \qquad k \in \mathbb{N}$$

per l'assoluta continuità di f si può fare in modo che

$$\sum_k f(b_k) - f(a_k) < \epsilon$$

non appena si sia scelto δ opportunamente piccolo.

Ne risulta che

$$\mu(f(Z)) = 0 \tag{1.34}$$

Consideriamo ora $x \in E$, $f'(x) = 0$ per cui se ξ è sufficientemente vicino ad x, si ha

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < \epsilon$$

Consideriamo ad esempio $\xi > x$; in tal caso si ha

$$f(\xi) - f(x) < \epsilon(\xi - x)$$

e

$$\epsilon x - f(x) < \epsilon\xi - f(\xi)$$

per cui x risulta essere un punto invisibile da destra per $\epsilon x - f(x)$.

Per il teorema di Riesz possiamo allora affermare che esiste un ricoprimento finito o al più numerabile di E costituito da intervalli aperti

$$\{(a_k, b_k) \ : \ k \in \mathbb{N}\}$$

per i quali risulta

$$\epsilon b_k - f(b_k) \geq \epsilon a_k - f(a_k)$$

e

$$f(b_k) - f(a_k) \leq \epsilon(b_k - a_k)$$

da cui

$$\sum_k [f(b_k) - f(a_k)] \leq \epsilon \sum_k (b_k - a_k) \leq \epsilon(b - a)$$

Poichè ϵ può essere scelto arbitrariamente, possiamo allora concludere che

$$\mu\left(f(E)\right) = 0$$

e quindi si può concludere, usando anche la 1.34 che

$$\mu\left([f(a), f(b)]\right) = 0 \quad \text{e} \quad f(b) = f(a)$$

□

Possiamo infine dimostrare il seguente teorema

Teorema 1.14.4 - Lebesgue - *Sia f una funzione assolutamente continua su $[a, b]$, allora f' esiste quasi ovunque, è sommabile e si ha*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt \qquad x \in [a, b]$$

Dimostrazione. Poichè ogni funzione assolutamente continua è anche di variazione limitata possiamo limitarci a considerare solo il caso in cui f sia monotona crescente.

Sia

$$F(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)dt$$

e verifichiamo che F è essa pure crescente.

Infatti per il lemma 1.14.1 si ha

$$F(y) - F(x) = f(y) - f(x) - \int_x^y f'(t)dt \geq 0$$

Inoltre F è assolutamente continua in quanto è somma di funzioni assolutamente continue e si ottiene facilmente che

$$F'(x) = 0$$

Ne deduciamo che F è costante per il teorema precedente e quindi, poichè $F(a) = f(a)$ si ha $F(x) = f(a)$ e la tesi □

Possiamo a questo punto esaminare più precisamente la decomposizione di una funzione di variazione limitata.

Abbiamo già visto che ogni funzione di variazione limitata f può essere scritta come somma

$$f = \varphi + \sigma$$

dove σ è una funzione di salto e φ è una funzione continua (ovviamente a variazione limitata).

Ora poichè φ è a variazione limitata essa risulta derivabile quasi ovunque e possiamo considerare le funzioni

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi'(t)dt \qquad \chi(x) - \varphi(x) - \psi(x)$$

Ovviamente χ è una funzione a variazione limitata, continua la cui derivata

$$\chi'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x) = 0$$

è quasi ovunque nulla.

Osserviamo anche che χ non è identicamente nulla se φ non è assolutamente continua.

possiamo porre a questo punti la seguente definizione.

Definizione 1.14.2 *Diciamo che una funzione non identicamente nulla χ continua e di variazione limitata è singolare se la sua derivata χ' è nulla quasi ovunque.*

Quanto abbiamo appena esposto ci consente di enunciare il seguente teorema.

Teorema 1.14.5 *Ogni funzione di variazione limitata f può essere decomposta nella somma di tre funzioni*

$$f = \psi + \chi + \sigma \tag{1.35}$$

la prima assolutamente continua, la seconda continua e singolare, la terza di salto.

Ogni funzione che compare nella somma 1.35 risulta essere univocamente determinata a meno di una costante. possiamo normalizzare la rappresentazione rendendo univocamente determinate le tre componenti chiedendo che due di esse si annullino nell'origine.

1.15 Misure con segno

Abbiamo finora considerato solo misure che siano positive, vogliamo ora prendere in esame anche il concetto di misura con segno. Sia X uno spazio di misura (finita) e sia μ una misura definita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$; sia f una funzione su X sommabile rispetto a μ.

Allora possiamo considerare una funzione Φ definita su $\mathcal{S}_\mu$ mediante la

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu$$

Si può verificare che la funzione Φ è una funzione $\sigma-$additiva sugli insiemi della $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$.

Definizione 1.15.1 *Chiamiamo misura con segno o più brevemente carica su X ogni funzione Φ finita, definita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$ di sottoinsiemi di X che risulta $\sigma-$additiva.*

Definizione 1.15.2 *Sia Φ una carica su X, diciamo che E è negativo per Φ se comunque si consideri un insieme $F \in \mathcal{S}_\mu$ si ha*

$$\Phi(E \cap F) \leq 0$$

In altre parole un insieme E è negativo per Φ se $\Phi(C) \leq 0$ per ogni sottoinsieme $C \subset E$

È possibile dimostrare il seguente risultato

Teorema 1.15.1 *Se Φ è una carica definita su X allora è possibile trovare due insiemi P ed N tali che*

$$P = X \setminus N \qquad P \text{ è negativo per } \Phi \qquad N \text{ è positivo per } \Phi$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo

$$a = \inf_{\substack{A\in\mathcal{S}_\mu \\ \Phi(A)\leq 0}} \Phi(A)$$

Essendo l'estremo inferiore esteso agli insiemi negativi per Φ e consideriamo una successione $\{A_n\}$ di sottoinsiemi di $\mathcal{S}_\mu$ negativi per Φ per la quale

$$\lim_n \Phi(A_n) = a$$

Poniamo

$$N = \bigcup_n A_n \qquad P = X \setminus N$$

ed osserviamo che facilmente risulta

$$a \leq \Phi(N) \leq \Phi(A_n) \to a$$

Inoltre N è negativo per Φ in quanto poichè $\Phi(A_n) \leq 0$ si ha $\Phi(A_n \cap F) < 0$ per ogni $F \in \mathcal{S}_\mu$ e di conseguenza $\Phi(N \cap F) = \Phi(\cup(A_n \cap F)) = \sum \Phi(A_n \cap F) \leq 0$, da cui $\Phi(N) < 0$.

Verifichiamo che ora che P è positivo per Φ.

Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme misurabile $C_0 \subset P$ tale che $\Phi(C_0) < 0$.

C_0 non può essere negativo per Φ in quanto se così fosse potremmo considerare $N' = N \cup C_0$ e avremmo che $\Phi(N') < a$, il che non è possibile.

Pertanto deve esistere un minimo intero $k_1 \in \mathbb{N}$ ed un sottoinsieme

$$C_1 \subset C_0 \quad \text{tale che} \quad \Phi(C_1) \geq 1/k_1$$

.

Con argomentazioni simili alla precedente si vede che C_1 non può essere negativo per Φ e quindi si trova un minimo intero $k_2 \geq k_1$ ed un insieme $C_2 \subset C_1$ tale che

$$\Phi(C_2) \geq 1/k_2$$

Ora, se definiamo

$$F_0 = C_0 \setminus \cup_{i=1}^{+\infty} C_i$$

otteniamo un insieme non vuoto e negativo per Φ, in quanto

$$\Phi(C_0) < 0 \qquad , \qquad \Phi(C_i) > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e, se fosse $F_0 = \emptyset$, si avrebbe $\Phi(F_0) = 0$ e

$$\Phi(C_0) = \sum_i \Phi(C_i)$$

il che non è possibile.

Quindi si potrebbe considerare $F_0 \cup N$ e si avrebbe $\mu(F_0 \cup N) < a$ il che è assurdo.

Pertanto $\Phi(E) \geq 0$ per ogni insieme misurabile contenuto in P e quindi P è positivo per Φ.

□

Definizione 1.15.3 *Sia X uno spazio di misura (finita) e sia μ una misura definita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$; Sia Φ una carica su X e siano P ed N due sottoinsiemi di X, rispettivamente positivo e negativo per Φ tali che $P \cup N = X$.*

Diremo, in tal caso, che la coppia di insiemi (P, N) costituisce una decomposizione di Hahn dello spazio X rispetto alla carica Φ.

La decomposizione di Hahn di uno spazio X non risulta univocamente determinata, tuttavia se (P, N) e (Q, M) sono due decomposizioni dello spazio X rispetto alla carica Φ, si ha, per ogni $E \in \mathcal{S}_\mu$

$$\Phi(E \cap P) = \Phi(E \cap Q) \qquad \Phi(E \cap N) = \Phi(E \cap M) \tag{1.36}$$

Infatti poichè si può verificare che

$$E \cap (N \setminus M) \subset E \cap N \qquad E \cap (N \setminus M) \subset E \cap Q$$

ne segue, rispettivamente che

$$\Phi(E \cap (N \setminus M)) \leq 0 \qquad \Phi(E \cap (N \setminus M)) \geq 0$$

per cui

$$\Phi(E \cap (N \setminus M)) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi(E \cap N) = \Phi(E \cap M)$$

In maniera analoga si dimostra la seconda uguaglianza delle 1.36

Definizione 1.15.4 *Se (P, N) è una decomposizione di Hahn dello spazio X, possiamo definire*

$$\Phi_+(E) = \Phi(E \cap P) \qquad \Phi_-(E) = -\Phi(E \cap N) \tag{1.37}$$

Φ_-, Φ_+ si dicono, rispettivamente, variazione inferiore e superiore della carica Φ e risulta evidente che

1. $$\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$$

2. *Φ_+, Φ_- sono funzioni di insieme $\sigma-$additive e positive, cioè misure.*

Inoltre

$$|\Phi| = \Phi_+ + \Phi_-$$

risulta essa pure una misura ed è detta variazione totale della carica Φ.

La coppia (Φ_+, Φ_-) è detta decomposizione di Jordan della carica Φ.

Definizione 1.15.5 *Sia X uno spazio di misura (finita) e sia μ una misura definita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$. Sia Φ una carica su X.*

Diciamo che

1. *Φ è una carica concentrata su un insieme $A \in \mathcal{S}_\mu$ se*

$$E \in \mathcal{S}_\mu \ , \quad E \subset X \setminus A \quad \Longrightarrow \quad \Phi(E) = 0$$

2. *Φ è una carica continua se*

$$E = \{x_0\} \quad \Longrightarrow \quad \Phi(E) = 0$$

(in altre parole $\Phi(E)$ è nullo se E è costituito da un solo punto.)

3. Φ *è discreta se è concentrata su un insieme finito o numerabile di punti* $\{x_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$.
   In tal caso si ha
   $$\Phi(E) = \sum_{x_k \in E} \Phi(x_k)$$

4. Φ *si dice assolutamente continua rispetto a una misura* μ *se*
   $$\mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(A) = 0$$

5. Φ *si dice singolare rispetto a una misura* μ *se è concentrata su un insieme* A *tale che* $\mu(A) = 0$.

È evidente che una carica Φ singolare ed assolutamente continua rispetto a μ è identicamente nulla.

Possiamo trovare un esempio di carica assolutamente continua rispetto ad una misura μ considerando una funzione f sommabile su X e definendo
$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu$$

Si può altresì verificare che tale tipo di cariche esaurisce l'insieme delle cariche assolutamente continue come è mostrato dal teorema di Radon-Nikodim che segue.

Lemma 1.15.1 *Sia* Φ *una carica positiva su* X*, assolutamente continua rispetto alla misura* μ *e non identicamente nulla.*

Allora esiste un insieme $B \in \mathcal{S}_\mu$ *ed esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tali che* $\mu(B) > 0$ *e* B *è positivo per la carica* $\Phi - \frac{1}{n}\mu$*. In particolare* $\Phi(B) - \frac{1}{n}\mu(B) > 0$.

Dimostrazione. Possiamo considerare la decomposizione di Hahn dello spazio X rispetto alla carica $\Phi - \frac{1}{n}\mu$; sia (P_n, N_n) tale decomposizione e definiamo
$$N_0 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} N_n \qquad P_0 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n$$

Ne segue che
$$\Phi(N_0) \leq \frac{1}{n}\mu(N_0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
e pertanto risulta
$$\Phi(N_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi(P_0) > 0$$
in quanto se fosse $\Phi(P_0) = 0$ avremmo che
$$\Phi(X) = \Phi(P_0 \cup N_0) = \Phi(P_0) + \Phi(N_0) = 0$$
e Φ sarebbe identicamente nulla.

Poichè Φ è assolutamente continua rispetto a μ possiamo allora affermare che anche
$$\mu(P_0) > 0$$

Esisterà allora un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(P_n) > 0$ ed è sufficiente considerare tale n e $B = P_n$ per verificare l'asserzione del teorema.

□

Proviamo infine il seguente

Teorema 1.15.2 -Radon - Nikodim *Sia X uno spazio di misura su cui è assegnata una misura finita μ ed una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$. Sia Φ una carica definita su $\mathcal{S}_\mu$, assolutamente continua rispetto a μ.*

Allora esiste una funzione sommabile f definita su X tale che.

$$\Phi(A) = \int_A f(x)d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{S}_\mu$$

Dimostrazione. Poichè Φ può essere decomposta nella differenza di due cariche positive, (decomposizione di Jordan) possiamo supporre che Φ stessa sia positiva, cioè sia una misura.

Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{K} = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \ : \ f \geq 0 \ , \ \int_A f(x)d\mu \leq \Phi(A), \ \ \forall A \in \mathcal{S}_\mu \right\}$$

ed osserviamo che $\mathcal{K}$ non è vuoto in quanto contiene almeno la funzione identicamente nulla.

Sia

$$M = \sup_{f\in\mathcal{K}} \int_X f(x)d\mu \leq \Phi(X)$$

Consideriamo una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{K}$ tale che

$$\lim_n \int_X f_n(x)d\mu = M$$

e poniamo

$$g_n(x) = \max_{k=1,2,..,n} f_k(x)$$

Sia $E \in \mathcal{S}_\mu$ e rappresentiamolo nella forma

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k^n \qquad \text{con} \ \ g_n(x) = f_k(x) \ \ \forall x \in E_k^n$$

Risulterà

$$\int_E g_n(x)d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k^n} f_k(x)d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \Phi(E_k^n) = \Phi(E)$$

e pertanto $g_n \in \mathcal{K}$.

Sia ancora

$$f(x) = \sup_n f_n(x)$$

si avrà

$$f(x) = \lim_n g_n(x)$$

e pertanto, per il teorema di convergenza monotona di B.Levi,

$$\int_X f(x) = \lim_n \int_X g_n(x) = M$$

Proviamo a questo punto che

$$\Phi(E) - \int_E f(x)d\mu = 0$$

Sia

$$\lambda(E) = \Phi(E) - \int_E f(x)d\mu$$

per come è stata costruita λ è una misura non negativa, assolutamente continua rispetto alla misura μ.

Se fosse $\lambda \not\equiv 0$ potremmo applicare il precedente lemma e trovare $\frac{1}{m} > 0$ e $B \in \mathcal{S}_\mu$ tali che

$$\mu(B) > 0 \qquad \frac{1}{m}\mu(E \cap B) \leq \lambda(E \cap B) \quad \forall E \in \mathcal{S}_\mu$$

Poniamo infine

$$h(x) = f(x) + \frac{1}{m}\chi_B(x)$$

dove con χ_B si sia indicata la funzione caratteristica dell'insieme B; si ha

$$\begin{aligned}
\int_E h(x)d\mu &= \int_E f(x)d\mu + \frac{1}{m}\mu(E \cap B) \leq \\
&\leq \int_{E\setminus B} f(x)d\mu + \int_{E\cap B} f(x)d\mu + \lambda(E \cap B) \leq \\
&\leq \int_{E\setminus B} f(x)d\mu + \Phi(E \cap B) \leq \\
&\leq \varphi(E \cap B) \leq \Phi(E)
\end{aligned}$$

Pertanto $h \in \mathcal{K}$ ma si ha anche

$$\int_E h(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu + \frac{1}{m}\mu(B) > M$$

e ciò è in contrasto con la definizione di M.

Ne risulta che

$$\Phi(E) - \int_E f(x)d\mu = 0$$

per cui l'esistenza di una funzione f tale che

$$\Phi(E) = \int_E f(x)d\mu$$

è provata.

Per quanto concerne l'unicità, supponiamo che esistano f,g, tali che

$$\Phi(E) = \int_E f(x)d\mu = \int_E g(x)d\mu$$

e sia

$$A_n = \{x \in X \ : \ f(x) - g(x) > \frac{1}{n}\}$$

Per la disuguaglianza di Tchebychev avremo

$$\mu(A_n) \leq n \int_{A_n} (f(x) - g(x))d\mu = 0$$

Analogamente se

$$B_n = \{x \in X \ : \ g(x) - f(x) > \frac{1}{n}\}$$

avremo

$$\mu(B_n) \leq n \int_{B_n} (g(x) - f(x)) d\mu = 0$$

Ne deduciamo che se

$$C = \{x \in X \ : \ f(x) - g(x) \neq 0\}$$

si ha

$$C = \left(\bigcup_n A_n \right) \cup \left(\bigcup_n B_n \right)$$

e

$$\mu(C) = 0$$

Pertanto $f(x) = g(x)$ per quasi ogni x e la tesi

□

Capitolo 2

Spazi lineari, normati e con prodotto scalare

Il concetto di linearità riveste primaria importanza nell'ambito di tutte le questioni riguardanti l'analisi matematica.

2.1 Spazi lineari

Definizione 2.1.1 *Sia X un insieme e denotiamo con K l'insieme dei numeri reali o dei numeri complessi.*

Diciamo che X è uno spazio vettoriale su K se sono definite due operazioni

- *di somma* $x, y \in X \mapsto x + y \in X$

  e

- *di prodotto scalare* $(x, \alpha) \in X \times K \mapsto \alpha x \in X$

aventi le seguenti proprietà

1. $(x + y) = (y + x)$ *proprietà commutativa della somma;*
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *proprietà associativa della somma;*
3. *esiste un elemento detto* $0_X \in X$ *tale che* $x\,0 = 0_X$ *(nel seguito scriveremo semplicemente* 0 *per* 0_X*) ;*
4. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$*;*
5. $1\,x = x$*;*
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$*;*
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$*;*

A seconda che $K = \mathbb{R}$ oppure che $K = \mathbb{C}$, diciamo che X è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali o uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi e parleremo semplicemente di spazi vettoriali reali o complessi.

Possiamo dimostrare con semplici argomentazioni che

1. $x + 0 = 0 \quad \forall x \in X$ Infatti
$$x + 0 = 1x + 0x = (1 + 0)x = x$$
2. per ogni $x \in X$ esiste $x' \in X$ tale che
$$x + x' = 0$$
si ha $x' = (-1)\, x$, x' è unico e si indica con $x' = -x$ Infatti
$$x + (-1)x = (1 - 1)x = 0$$
3. $-(\alpha\, x) = (-\alpha)\, x = \alpha\, (-x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\alpha \in K$
4. si definisce $x - y = x + (-y)$
5. $x = y$ se e solo se $x - y = 0$
6. $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\alpha \in K$
7. $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in K$
8. $\alpha 0 = 0$ per ogni $\alpha \in K$ Infatti
$$\alpha 0 = \alpha(x - x) = \alpha x - \alpha x = (\alpha - \alpha)x = 0$$
9. $\alpha x = 0$ se e solo se $\alpha = 0$ per ogni $x \in X \setminus \{0\}$
10. $\alpha x = 0$ se e solo se $x = 0$ per ogni $\alpha \in K \setminus \{0\}$

Sono esempi di spazi vettoriali

1. l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e $\mathbb{C}$ dei numeri complessi;
2. gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$;
3. lo spazio $\mathcal{C}^{(k)}((a, b))$ delle funzioni continue con derivate continue fino al $k-$esimo ordine su un intervallo (a, b).
   In particolare sono spazi vettoriali gli spazi
   $$\mathcal{C}^0((a, b)) \qquad \mathcal{C}^\infty((a, b))$$
   delle funzioni continue o derivabili con derivate continue di ogni ordine su un intervallo (a, b);
4. lo spazio ℓ^2 delle successioni a_n di numeri reali o complessi tali che
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$$
5. lo spazio c delle successioni convergenti di numeri reali o complessi;
6. lo spazio c_0 delle successioni convergenti a 0 di numeri reali o complessi;
7. lo spazio m delle successioni limitate di numeri reali o complessi;

8. lo spazio $\mathbb{R}^\infty$ delle successioni di numeri reali o complessi;

Definizione 2.1.2 *Siano X ed Y due spazi vettoriali, diciamo che una funzione, o applicazione,*

$$F : X \to Y$$

è lineare se

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y) \qquad \forall x, y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

Se esiste una applicazione lineare F tra X ed Y che sia iniettiva e surgettiva, cioè bigettiva, diciamo che gli spazi X ed Y sono isomorfi.

Chiamiamo funzionale lineare una funzione lineare

$$f : X \to K$$

dove come al solito K è lo spazio dei numeri reali o dei numeri complessi.

Definizione 2.1.3 *Se X è uno spazio vettoriale e se*

$$\{x_i \ : \ i = 1 \dots n\} \subset X$$

diciamo che gli elementi x_i sono linearmente indipendenti se

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0 \quad \iff \quad \alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots n$$

Diciamo che un insieme infinito di elementi $\{x_i\} \subset X$ è linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente.

Definizione 2.1.4 *Diciamo che $Y \subset X$ è un sottospazio vettoriale se esso stesso è uno spazio vettoriale, diciamo che Y è proprio se $Y \neq X$ e diciamo che è massimale se per ogni sottospazio Z proprio, $Y \subset Z \subset X$, si ha $Z = X$.*

Definizione 2.1.5 *Chiamiamo iperpiano di X ogni sottospazio H massimale.*

Definizione 2.1.6 *Se $\{x_\alpha\}$ è un sottoinsieme di elementi di X, chiamiamo sottospazio generato da $\{x_\alpha\}$ il più piccolo sottospazio vettoriale che lo contiene.*

(Per giustificare quest'ultima definizione osserviamo che certamente esiste un sottospazio vettoriale che contiene $\{x_\alpha\}$, in quanto basta considerare il sottospazio di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di $\{x_\alpha\}$, e che inoltre l'intersezione di sottospazi vettoriali che contengono $\{x_\alpha\}$ è ancora un sottospazio vettoriale che contiene $\{x_\alpha\}$)

Possiamo a questo punto ricordare che si definisce base di Hamel di uno spazio X un sottoinsieme $\{x_\alpha\}$ di elementi di X tali che il sottospazio da essi generato coincida con X stesso.

A tale proposito si può dimostrare che per ogni spazio vettoriale X esiste una base di Hamel (dipende dal lemma di Zorn), che se $\{x_\alpha\}$ è una base di Hamel ogni vettore di X può essere rappresentato in maniera univoca mediante combinazione linare finita di elementi di $\{x_\alpha\}$, che due basi di Hamel hanno la stessa cardinalità (cioè lo stesso numero di elementi) che si definisce dimensione dello spazio e che due spazi sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Teorema 2.1.1 *Se f è un funzionale lineare il suo nucleo (kernel)*

$$\ker f = \{x \in X \ : \ f(x) = 0\}$$

è un iperpiano in X.

Viceversa se H è un iperpiano in X allora esiste un funzionale lineare f tale che

$$H = \ker f$$

Inoltre si può provare che tale funzionale è unico a meno di una costante moltiplicativa.

DIMOSTRAZIONE. È banale provare che $\ker f$ è uno spazio vettoriale, pertanto sarà sufficiente provare che $\ker f$ è un sottospazio massimale.

Sia pertanto Y un sottospazio lineare tale che $\ker f \subset Y$ strettamente; allora esiste $y_0 \in Y \setminus \ker f$ per cui

$$y_0 \in Y \qquad f(y_0) \neq 0$$

Poichè per ogni $x \in X$

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0\right) + \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 = u + \lambda y_0$$

e poichè

$$u = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} y_0 \in \ker f \subset Y$$

possiamo affermare che $x \in Y$ e quindi $Y = X$ e $\ker f$ è un sottospazio massimale.

Sia viceversa H un iperpiano e sia $z_0 \in X \setminus H$; sia Z il sottospazio generato da $H \cup \{z_0\}$. Ovviamente Z contiene strettamente H e quindi, essendo H un iperpiano, cioè un sottospazio massimale, possiamo affermare che $Z = X$.

Pertanto se $x \in X = Z$ avremo che

$$x = u + \lambda z_0 \qquad u \in H \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Si può allora definire

$$f(x) = \lambda$$

e verificare che f è lineare e che

$$\ker f = H$$

Quanto all'unicità, siano f_1 e f_2 due funzionali non identicamente nulli tali che

$$\ker f_1 = \ker f_2$$

Infatti se $x_0 \notin \ker f_1$, per ogni $x \in X$ si ha

$$x - \frac{f_1(x)}{f_1(x_0)} x_0 \in \ker f_1 = \ker f_2$$

per cui

$$f_2\left(x - \frac{f_1(x)}{f_1(x_0)} x_0\right) = 0$$

e quindi

$$f_2(x) = f_1(x)\left(\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}\right) = kf_1(x)$$

Ciò assicura l'unicità del funzionale f a meno di una costante moltiplicativa.

□

Definizione 2.1.7 *Sia $K \subset X$, diciamo che K è un insieme convesso se*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K \qquad \forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

Definizione 2.1.8 *Sia $K \subset X$ diciamo che $x \in K$ è un punto dell'interno algebrico di K, che denotiamo con* $\operatorname{aint} K$*, se*

$$\forall y \in X \quad \exists \epsilon > 0 \qquad : \qquad x + ty \in K \quad \forall\, |t| < \epsilon$$

Diciamo inoltre che x è un punto della chiusura algebrica di K e scriviamo $x \in \operatorname{acl} K$ se esiste $u \in K$ tale che

$$[u, x) = \{u + t(x-u) \ : \ 0 \le t < 1\} = \{x + t(u-x) \ : \ 0 < t \le 1\} \subset K$$

Osserviamo che $[u, x)$ è il segmento di estremi u incluso ed x escluso.

È facile verificare che, se A è convesso e non ridotto ad un solo punto,

$$\operatorname{aint} A \subset A \subset \operatorname{acl} A$$

Definizione 2.1.9 *Sia $A \subset X$ chiamiamo inviluppo convesso di A l'insieme*

$$\operatorname{co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad x_i \in A \quad \lambda_i \ge 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Chiamiamo simplesso di vertici $\{x_i\}$ l'inviluppo convesso dell'insieme $\{e_i\}$.

Definizione 2.1.10 *Sia*

$$p : X \to \mathbb{R}$$

diciamo che p è un funzionale convesso se

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) \qquad \forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

Diciamo che p è positivamente omogeneo se

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad \forall x \in X \quad \forall \alpha > 0$$

Diciamo che p è subadditivo se

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X$$

Osserviamo che

- ogni funzionale lineare è anche un funzionale convesso, positivamente omogeneo e subaddittivo;
- ogni funzionale positivamente omogeneo soddisfa la condizione $p(0) = 0$;

- se p è un funzionale positivamente omogeneo e convesso si ha

$$p(x+y) = 2p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\left(p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(\frac{y}{2}\right)\right) = p(x) + p(y)$$

  Cioè p è un funzionale subadditivo.

- se p è positivamente omogeneo e subadditivo allora p è convesso.

Ad ogni insieme convesso K può essere associato un funzionale convesso che lo caratterizza.

Definizione 2.1.11 *Se $A \subset X$ è un insieme convesso con $0 \in \operatorname{aint} A$, chiamiamo funzionale di Minkowsky relativo all'insieme A il funzionale*

$$p_A : X \to \mathbb{R}$$

definito mediante la

$$p_A(x) = \inf\left\{t > 0 \quad : \quad \frac{x}{t} \in A\right\}$$

Teorema 2.1.2 *Sia X uno spazio vettoriale e sia $A \subset X$ un insieme convesso tale che $0 \in \operatorname{aint} A$. Allora se p_A è il funzionale di Minkowsky associato ad A si ha*

1. *$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ per ogni $x, y \in X$;*
2. *$p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$ per ogni $x \in X$ per ogni $\alpha > 0$;*
3. *$\{x \ : \ p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \ : \ p_A(x) \leq 1\}$;*
4. *$x \in \operatorname{aint} A$ se e solo se $p_A(x) < 1$;*
5. *$x \in \operatorname{acl} A$ se e solo se $p_A(x) \leq 1$;*

Osserviamo che i primi due punti assicurano che p_A è un funzionale subadditivo e positivamente omogeneo, quindi convesso.

DIMOSTRAZIONE.

1. Siano $t, s \in \mathbb{R}_+$ tali che

$$\begin{aligned} p_A(x) < t < p_A(x) + \epsilon \qquad & \frac{x}{t} \in A \\ p_A(y) < s p_A(y) + \epsilon \qquad & \frac{y}{s} \in A \end{aligned}$$

   Si ha, posto $u = t + s$

$$\frac{x+y}{u} = \frac{tx}{tu} + \frac{sy}{su} = \frac{t}{u}\frac{x}{t} + \frac{s}{u}\frac{y}{s} \in A$$

   in quanto

$$\frac{t}{u} + \frac{s}{u} = 1$$

Ne segue che

$$p_A(x+y) \le u = t+s \le p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon$$

e per $\epsilon \to 0$

$$p_A(x+y) \le u = t+s \le p_A(x) + p_A(y)$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} p_A(\alpha x) &= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \ : \ \frac{\alpha x}{t} \in A\} = \\ &= \inf\{\alpha t \in \mathbb{R}_+ \ : \ \frac{\alpha x}{\alpha t} \in A\} = \\ &= \alpha \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \ : \ \frac{x}{t} \in A\} \end{aligned}$$

3. Se $\frac{x}{1} = x \in A$ ovviamente $p_A(x) \le 1$. Se invece $p_A(x) < 1$ è possibile trovare $t < 1$ tale che $\frac{x}{t} \in A$ e quindi

$$x = (1-t)0 + t\frac{x}{t} \in A$$

per la convessità di A e per il fatto che $0 \in A$.

4. Se $x \in \operatorname{aint} A$ allora $x + tx \in A$ purchè t sia scelto convenientemente piccolo. Quindi $(1+t)x \in A$ e

$$p_A(x) \le \frac{1}{1+t} < 1$$

Viceversa se $p_A(x) < 1$, possiamo porre $\epsilon = 1 - p_A(x) > 0$ e si ha

$$p_A(x+ty) \le \begin{cases} p_A(x) + tp_A(y) = 1 - \epsilon + tp_A(y) \\ p_A(x) - tp_A(-y) = 1 - \epsilon - tp_A(-y) \end{cases} < 1 - \epsilon + \epsilon = 1$$

non appena si sia scelto t in modo che

$$|t| \max\{p(y), p(-y)\} < \epsilon$$

Se ne deduce che $x + ty \in A$ per t abbastanza piccolo e $x \in \operatorname{aint} A$.

Se $x \in \operatorname{acl} A$ allora esiste $u \in A$ tale che $x + tu \in A$ per $0 < t \le 1$. Pertanto

$$p_A(x) = p_A(x + tu - tu) \le p_A(x + tu) + tp_A(-u) \le 1 + tp(-u)$$

e per $t \to 0$

$$p_A(x) \le 1$$

Se viceversa $p_A(x) \le 1$ avremo che se $p_A(x) < 1$ allora $x \in \operatorname{aint} A \subset A \subset \operatorname{acl} A$, e ci resta da considerare solo il caso in cui $p_A(x) = 1$. In tal caso possiamo considerare una successione

$$t_n \ge 1 \quad t_n \to 1 \quad \text{tale che} \quad \frac{x}{t_n} \in A$$

Poichè $0 \in A$ avremo allora

$$\frac{\lambda}{t_n}x = \frac{\lambda}{t_n}x + (1-\lambda)0 \in A$$

e cioè

$$\left[0, \frac{x}{t_n}\right] \subset A$$

Ne deduciamo che

$$[0, x) = \bigcup_n \left[0, \frac{x}{t_n}\right] \subset A$$

e $x \in \operatorname{acl} A$.

□

Definizione 2.1.12 *Sia X uno spazio vettoriale e supponiamo che $Y \subset X$ sia un suo sottospazio lineare; Sia*

$$f : Y \to \mathbb{R}$$

un funzionale lineare; diciamo che

$$g : X \to \mathbb{R}$$

è un prolungamento di f se

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in Y$$

Teorema 2.1.3 *Sia $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale convesso e positivamente omogeneo e definiamo*

$$A = \{x \in X \ : \ p(x) \leq 1\}$$

Allora A è un insieme convesso e ed inoltre $p_A = p$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè p è convesso, ovviamente si ha che A, che è un suo livello, è convesso.

Inoltre

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 \ : \ \frac{x}{t} \in A\} = \inf\{t > 0 \ : \ p\left(\frac{x}{t}\right) \leq 1\} = \inf\{t > 0 \ : \ p(x) \leq t\} = p(x) \quad (2.1)$$

□

2.2 Il teorema di Hahn Banach

A proposito di prolungamento di funzionali lineari possiamo provare il seguente teorema che gioca un ruolo fondamentale nella teoria della linearità e della convessità.

A questo scopo è opportuno ricordare il lemma di Zorn, il cui enunciato è equivalente all'assioma di scelta, che verrà utilizzato nella dimostrazione del seguente teorema.

Lemma 2.2.1 - Zorn - *Se ogni sottoinsieme totalmente ordinato di un insieme ordinato $\mathcal{M}$ ammette un maggiorante, allora esiste in $\mathcal{M}$ un elemento massimale (cioè un elemento che segue tutti gli altri elementi di $\mathcal{M}$ rispetto all'ordine dato).*

Teorema 2.2.1 *Siano X uno spazio vettoriale, Y un suo sottospazio, $f : Y \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale convesso, positivamente omogeneo tale che*

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in Y$$

Allora esiste un funzionale $g : X \to \mathbb{R}$ lineare, prolungamento di f tale che

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in X$$

Dimostrazione. Sia $z_0 \in X \setminus Y$. Proviamo, innanzi tutto, che il funzionale f può essere prolungato allo spazio Z generato da $Y \cup \{z_0\}$.

Infatti

$$z \in Z \iff z = x + tz_0 \qquad x \in Y \ , \ t \in \mathbb{R}$$

h è un prolungamento lineare del funzionale f se e solo se

$$h(x + tx_0) = h(x) + th(z_0) = f(x) + tc \qquad c = h(z_0)$$

essendo la scelta di c del tutto arbitraria.

Vediamo ora che c può essere scelto in modo che si abbia

$$f(x) + tc \leq p(x + tz_0) \tag{2.2}$$

Infatti la 2.2 è equivalente a

$$\begin{aligned} c &\leq p\left(\frac{x}{t} + z_0\right) - f\left(\frac{x}{t}\right) \qquad t > 0 \\ c &\geq -p\left(-\frac{x}{t} - z_0\right) - f\left(\frac{x}{t}\right) \qquad t < 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

e possiamo adesso provare che è possibile trovare almeno un c tale che le 2.3 siano soddisfatte. Infatti siano $u, v \in Y$, si ha

$$f(u) - f(v) = f(u - v) \leq p(u - v) = p((u + z_0) - (v + z_0)) \leq p(u + z_0) + p(-v - z_0)$$

per cui

$$p(u + z_0) - f(u) \geq -p(-v - z_0) - f(v)$$

Avremo pertanto che

$$\inf_{u \in Y} \{p(u + z_0) - f(u)\} \geq \sup_{v \in Y} \{-p(-v - z_0) - f(v)\}$$

e pertanto esiste c tale che

$$\inf_{u \in Y} \{p(u + z_0) - f(u)\} \geq c \geq \sup_{v \in Y} \{-p(-v - z_0) - f(v)\}$$

Ne concludiamo che tale c soddisfa le condizioni 2.3 e quindi l'estensione di f a Z è così ottenuta.

Per concludere possiamo ora ricorrere al principio di induzione, nel caso in cui esista un insieme numerabile di vettori che genera lo spazio X, mentre nel caso generale occorre ricorrere al lemma di Zorn.

A tale scopo definiamo nella famiglia $\mathcal{L}$ delle estensioni lineari h di f per le quali si ha $h \leq p$, una relazione di ordine dicendo che $k \succ h$ se k è una estensione di h.

La relazione permette di ordinare parzialmente $\mathcal{L}$ ed ogni catena totalmente ordinata di elementi di $\mathcal{L}$ ammette un maggiorante. Infatti se $\mathcal{C} = \{h_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}\}$ è una catena totalmente ordinata di elementi di $\mathcal{L}$ possiamo considerare un funzionale h definito sull'unione dei domini dei funzionali di $\mathcal{C}$ che coincide con ciascuno dei funzionali h_α sul dominio di h_α.

È evidente che tale definizione non presenta ambiguità in virtù del fatto che $\mathcal{C}$ è totalmente ordinata.

Per il lemma di Zorn possiamo allora concludere che esiste un elemento massimale g per la catena c.

Se il dominio di g non fosse tutto X potremmo ulteriormente estendere il funzionale g e ciò contraddirebbe la massimalità di g

□

Definizione 2.2.1 *Siano $A, B \subset X$ due sottoinsiemi convessi di uno spazio vettoriale X. Diciamo che il funzionale lineare $h : X \to \mathbb{R}$ separa A da B se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\begin{aligned} h(x) &\geq k \qquad \forall x \in A \\ h(x) &\leq k \qquad \forall x \in B \end{aligned}$$

Si verifica subito che

1. h separa A da B se e solo se separa $A - B$ da 0;
2. h separa A da B se e solo se separa $A - x_0$ da $B - x_0$ per ogni $x_0 \in X$.

Come conseguenza del teorema di Hanh-Banach, possiamo allora dimostrare che

Teorema 2.2.2 *Siano $A, B \subset X$ due insiemi convessi tali che* $\operatorname{aint} A \neq \emptyset$*; allora esiste un funzionale lineare h su X che separa A da B.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \operatorname{aint} A$; abbiamo già osservato che separare A da B è equivalente a separare $A - x_0$ da $B - x_0$; inoltre si ha $0 \in \operatorname{aint}(A - x_0)$, infatti si ha $x_0 + ty \in A$ se e solo se $ty \in A - x_0$.

Pertanto possiamo, a meno di una traslazione supporre che $0 \in \operatorname{aint} A$,

Sia ora $y_0 \in B$; avremo per t opportuno e per ogni $y \in X$

$$\begin{gathered} ty \in A \\ ty - y_0 \in A - B \\ ty \in (A - B - y_0) \end{gathered}$$

e posto $K = A - B + y_0$

$$0 \in \operatorname{aint}(A - B - y_0) = \operatorname{aint} K$$

ed inoltre K risulta convesso. Consideriamo ora il funzionale di Minkowski p_K dell'insieme K; avremo che $y_0 \notin K$ (se $y_0 \in K$ allora $0 \in A - B$ e si ha $A \cap B \neq \emptyset$) e pertanto

$$p_K(y_0) \geq 1$$

Definiamo

$$h(\alpha y_0) = \alpha p_K(y_0)$$

si ha

$$h(\alpha y_0) \leq \begin{cases} p_K(\alpha y_0) & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha \leq 0 \end{cases} \leq p_K(\alpha y_0)$$

Allora possiamo usare il teorema di Hahn-Banach per estendere il funzionale h mantenendo la disuguaglianza

$$h(x) \leq p_K(x)$$

Si avrà allora che

$$\begin{aligned} h(y) \leq p_K(y) &\leq 1 \quad \forall y \in K \\ h(y_0) = p_K(y_0) &\geq 1 \end{aligned}$$

Ciò significa che $A - B + y_0$ è separato da y_0 e quindi che $A - B$ è separato da 0 ed infine che A è separato da B.

□

Possiamo inoltre provare il seguente corollario che è noto con il nome di forma gometrica del teorema di Hahn-Banach.

Corollario 2.2.1 *Se $A \subset X$ è un insieme convesso tale che $x_0 \in \operatorname{aint} A$ e se $Y \subset X$ uno spazio lineare tali che $A \cap Y = \emptyset$. Allora esiste un iperpiano affine H che contiene Y e non interseca A.*

Dimostrazione. Sia h il funzionale che separa l'insieme A dallo spazio lineare Y Si avrà allora che

$$A \subset \{x \ : \ h(x) \leq \alpha\} \qquad Y \subset \{x \ : \ h(x) \geq \alpha\}$$

Proviamo ora che il funzionale h è costante su Y; se infatti esistessero $y_1, y_2 \in Y$ tali che

$$h(y_1) \neq h(y_2)$$

avremmo che allora

$$Y \ni y_1 = y_2 + (y_1 - y_2) = y_2 + u \in Y + u \qquad u = y_1 - y_2 \qquad h(u) = h(y_1) - h(y_2) \neq 0$$

Pertanto si avrebbe $y_2, y_2 + u \in Y$ e quindi, poichè Y è uno spazio vettoriale, $y_2 + \lambda u \in Y$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ne potremmo dedurre che

$$h(y_2 + \lambda u) = h(y_2) + \lambda h(u) < \alpha$$

e, scegliendo λ opportunamente, ciò è in contraddizione con il fatto che $Y \subset \{x \ : \ h(x) \geq \alpha\}$.

Ne concludiamo che

$$h(x) \leq \alpha \leq h(y_1) = \gamma$$

Pertanto l'iperpiano $H = \{x \ : \ h(x) = \gamma\}$ contiene Y e separa A da Y.

□

2.3 Spazi normati

Definiamo ora in uno spazio vettoriale X la distanza di un elemento dall'origine e, come conseguenza della linearità anche la distanza tra due elementi dello spazio. Ciò consente di definire gli intorni dell'origine o di un punto arbitrario in uno spazio vettoriale e di definire una topologia compatibile con la struttura lineare dello spazio X.

Definizione 2.3.1 *Sia X uno spazio vettoriale, diciamo che $\|\cdot\|$ è una norma in X se*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

è una funzione tale che

1. $\|x\| \geq 0 \qquad \forall x \in X$
2. $\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \qquad \forall x \in X \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$

Osserviamo che, come immediata conseguenza della definizione di norma, si ottiene

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \qquad \forall x, y, z \in X \tag{2.4}$$

Inoltre si ha

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X \tag{2.5}$$

La 2.4 è nota come disuguaglianza triangolare della norma, mentre la 2.5 ha come conseguenza la continuità della norma.

Definizione 2.3.2 *Sia X uno spazio normato, possiamo definiire in X una distanza mediante la*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

e possiamo considerare la topologia indotta in X dalla metrica d.

In altre parole definiamo una base di intorni dell'origine mediante la

$$I_\delta = \{x \in X \ : \ \|x\| < \delta\}$$

ed una famiglia di intorni di un punto arbitrario si può ottenere mediante traslazione.

Si può facilmente provare che

Teorema 2.3.1 *Se X è uno spazio normato, allora le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare sono continue rispetto alla topologia indotta dalla norma.*

Definizione 2.3.3 *Diciamo che uno spazio vettoriale normato X è uno spazio di Banach se X è uno spazio completo, cioè se ogni successione di Cauchy in X risulta essere convergente ad un elemento di X.*

In altre parole X è uno spazio di Banach se X è uno spazio vettoriale normato per cui sono equivalenti le seguenti condizioni.

1. *per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tale che, se* $n, m \leq n_\epsilon$ *si ha*

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

2. *esiste* $x \in X$ *tale che* $x_n \to x$

Nel caso di uno spazio normato il teorema 2.1.2 si estende come segue

Teorema 2.3.2 *Sia* X *uno spazio vettoriale normato e sia* $A \subset X$ *un insieme convesso tale che* $0 \in \operatorname{aint} A$. *Allora se* p_A *è il funzionale di Minkowsky associato ad* A *si ha*

1. $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ *per ogni* $x, y \in X$;
2. $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$ *per ogni* $x \in X$ *per ogni* $\alpha > 0$;
3. $\{x \ : \ p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \ : \ p_A(x) \leq 1\}$;
4. $x \in \operatorname{aint} A$ *se e solo se* $p_A(x) < 1$;
5. $x \in \operatorname{acl} A$ *se e solo se* $p_A(x) \leq 1$;
6. p_A *è continuo in* 0 *se e solo se* $0 \in \operatorname{int} A$

Dimostrazione. Tranne che per l'ultima affermazione, il teorema è già stato dimostrato per gli spazi vettoriali anche non normati. Proviamo pertanto l'ultima affermazione.

Si ha $p_A(0) = 0$ e pertanto p_A è continuo in 0 se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta_\epsilon > 0 \ \text{ tale che } \ \|x\| < \delta_\epsilon \quad \Longrightarrow \quad p_A(x) < \epsilon$$

e ciò accade se e solo se

$$\exists \delta_1 > 0 \ \text{ tale che } \ \|x\| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad p_A(x) < 1$$

(infatti basta considerare, nel caso in cui sia dato δ_1, $\delta_\epsilon = \epsilon\delta_1$ e verificare che sia la norma che il funzionale P_A sono positivamente omogenei)

ancora se e solo se

$$\exists \delta_1 > 0 \ \text{ tale che } \ \|x\| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad x \in A$$

se e solo se

$$x \in \operatorname{int} A$$

□

Proviamo a questo punto un interessante risultato che lega l'interno algebrico e l'interno di un insieme convesso.

Teorema 2.3.3 *Sia* X *uno spazio di Banach e sia* $A \subset X$ *un insieme convesso; allora si ha che* $\operatorname{int} A = \emptyset$ *oppure che* $\operatorname{int} A = \operatorname{aint} A$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, possiamo allora supporre, a meno di una traslazione che $0 \in \operatorname{int} A$.

Allora

$$x \in A \qquad \text{se } \|x\| < \delta$$

e

$$p_A(x) \leq 1 \qquad \text{se } \|x\| < \delta$$

Sia $x_0 \in \operatorname{aint} A$, allora $p_A(x_0) < 1$ ed esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che

$$p_A(x_0) + \epsilon_0 < 1$$

Ne deduciamo che

$$p_A(x_0 + \epsilon_0 x) \leq p_A(x_0) + \epsilon_0 p_A(x) < p_A(x_0) + \epsilon_0 < 1 \quad \text{se } \|x\| < \delta$$

e ne segue che

$$x_0 + \epsilon_0 x \in A \qquad \text{se } \|x\| < \delta$$

Possiamo quindi concludere che $x \in \operatorname{int} A$ e

$$\operatorname{aint} A \subset \operatorname{int} A$$

La tesi segue dall'osservare che l'inclusione opposta è ovvia. □

2.4 Spazi di funzioni misurabili

Tra gli spazi normati sono di particolare importanza gli spazi di funzioni misurabili aventi potenza $p-$esima integrabile che sono usualmente indicati come spazi $\mathcal{L}^p(X)$.

Allo scopo di studiare tali spazi cominciamo con lo stabilire due fondamentali disuguaglianze.

Definizione 2.4.1 *Diciamo che $p, q \in [1, +\infty]$ sono esponenti coniugati se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Osserviamo esplicitamente che il caso $p = 1$ e $q = +\infty$ fornisce una coppia di esponenti coniugati.

Teorema 2.4.1 *Siano p, q esponenti coniugati $1 \leq p, q \leq +\infty$ e sia X uno spazio dotato di una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$ e di una misura μ. Siano*

$$f, g : X \to [0, +\infty]$$

due funzioni misurabili; allora

$$\int_X f(x)g(x)d\mu \leq \left(\int_X (f(x))^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (g(x))^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.6}$$

(Disuguaglianza di Hölder)

ed inoltre

$$\left(\int_X (f(x) + g(x))^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X (f(x))^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X (g(x))^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

(Disuguaglianza di Minkowsky).

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$A^p = \int_X (f(x))^p d\mu \qquad B^q = \int_X (g(x))^q d\mu$$

Se $A = 0$ allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in X$ e quindi $f(x)g(x) = 0$ quasi ovunque e la disuguaglianza 2.6 è banale.

Se $A > 0$ e $B = +\infty$ 2.6 è di nuovo banale.

Possiamo allora limitarci a considerare il solo caso in cui $A, B \in (0, +\infty)$.

Poniamo

$$F(x) = \frac{f(x)}{A} \qquad G(x) = \frac{g(x)}{B} \tag{2.8}$$

ed osserviamo che si ha

$$\int_X (F(x))^p d\mu = \frac{\int_X (f(x))^p d\mu}{A^p} = 1$$
$$\int_X (G(x))^q d\mu = \frac{\int_X (g(x))^q d\mu}{B^q} = 1$$

Sia ora x tale che $F(x), G(x) \in (0, +\infty)$ (gli x per cui ciò non è vero costituiscono un insieme di misura nulla) e poniamo

$$F(x) = e^{\frac{s}{p}} \qquad G(x) = e^{\frac{t}{q}}$$

per s, t opportuni.

Poichè

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e poichè l'esponenziale è una funzione convessa, si ha

$$e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{1}{p} e^s + \frac{1}{q} e^t$$

da cui

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q$$

Integrando ambo i membri e tenendo conto che la disuguaglianza precedente non è vera al più su un insieme di misura nulla, abbiamo

$$\int_X F(x)G(x)d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X (F(x))^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X (G(x))^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Pertanto tenendo conto della 2.8 si ottiene

$$\int_X f(x)g(x)d\mu \leq AB = \left(\int_X (f(x))^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (g(x))^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.9}$$

Per provare la disuguaglianza di Minkowsky è sufficiente considerare che

$$(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

Per la disuguaglianza di Holder si può affermare che

$$\int_X f(f+g)^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\int_X g(f+g)^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Sommando membro a membro e tenendo conto che $q(p-1)=p$ si ottiene

$$\int_X (f+g)^p d\mu \leq \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}}) \quad (2.10)$$

da cui

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}}) \quad (2.11)$$

cioè

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}}) \quad (2.12)$$

A completamento della dimostrazione osserviamo che dalla covessità di t^p si ha

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(f^p + g^p\right)$$

per cui si ha che il primo membro della disuguaglianza di Minkowsky è finito non appena sia finito il secondo.

□

Definizione 2.4.2 *Sia X uno spazio dotato di una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$ e di una misura μ e sia $p \in [1,+\infty)$. Definiamo per ogni funzione misurabile*

$$f : X \to [0,+\infty]$$

la norma $p-$esima come

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

e la norma infinito come

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$$

essendo

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} g(x) = \inf\{\alpha \ : \ \mu\left(g^{-1}((\alpha,+\infty))\right) = 0\}$$

Osserviamo che nel definire la norma infinito di f abbiamo anche indicato la definizione di ess $\sup_{x\in X} f(x)$, l'estremo superiore essenziale di f su X. In parole povere ess $\sup_{x\in X} f(x)$ è l'estremo inferiore dei maggioranti di f significativi dal punto di vista della misura μ.

Definizione 2.4.3 *Sia X uno spazio dotato di una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_\mu$ e di una misura μ e sia $p \in [1, +\infty]$. Definiamo*

$$\mathcal{L}^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ : \ \|f\|_p < +\infty\}$$

Teorema 2.4.2 *Si ha che $\mathcal{L}^p(X)$ è uno spazio vettoriale normato.*

Dimostrazione. È ovvio che si può definire in $\mathcal{L}^p(X)$ una struttura vettoriale definendo la somma mediante la

$$x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ed il prodotto per uno scalare mediante la

$$x \mapsto (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

È altresì ovvio che possiamo normare $\mathcal{L}^p(X)$ mediante la norma $p-$esima precedentemente definita che risulta essere una norma in quanto è facile verificare, usando la disuguaglianza di Minkowsky 2.7 che

1. $\|f\|_p \geq 0$
2. $\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \quad$ q.o.-$x \in X$
3. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
4. $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Resta da osservare che in $\mathcal{L}^p(X)$ si identificano due funzioni che sono quasi ovunque uguali.

□

Teorema 2.4.3 *Lo spazio $\mathcal{L}^p(X)$ è uno spazio di Banach, cioè è uno spazio vettoriale normato completo.*

Dimostrazione. Sia f_n una successione di funzioni che soddisfi la condizione di Cauchy ripetto alla norma $p-$esima.

Possiamo allora trovare una successione n_k di indici in corrispondenza dei quali risulta

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Definiamo

$$g_k(x) = \sum_{h=1}^{k} |f_{n_{h+1}}(x) - f_{n_h}(x)|$$

$$g(x) = \sum_{h=1}^{+\infty} |f_{n_{h+1}}(x) - f_{n_h}(x)|$$

Per la disuguaglianza 2.7 di Minkowsky, avremo

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{h=1}^{k} \|f_{n_{h+1}} - f_{n_h}\|_p \leq \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{2^h} \leq 1$$

e, usando il lemma di Fatou,

$$\|g\|_p = \|\lim_k g_k\|_p = \left(\int_X |\lim_k g_k(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X \lim_k |g_k(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_k \left(\int_X |g_k(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \quad (2.13)$$

quindi si può affermare che $g(x) < +\infty$ quasi ovunque in X.

Poniamo ora

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$$

La serie a secondo membro è assolutamente convergente per quasi ogni $x \in X$ e possiamo definire $f(x) = 0$ per i restanti valori di x.

Ora se

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{h=1}^{k-1} f_{n_{h+1}}(x) - f_{n_h}(x)$$

si ha

$$\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)$$

per quasi ogni $x \in X$ e, se $m > n_\epsilon$ e k è abbastanza grande, avremo anche che

$$\|f_m - f_{n_k}\|_p < \epsilon$$

D'altro canto, per il lemma di Fatou,

$$\int_X |f(x) - f_m(x)|^p d\mu \leq \liminf_k \int_X |f_{n_k}(x) - f_m(x)|^p d\mu \leq \epsilon^p$$

e quindi si ottiene che

$$(f - f_m) \in \mathcal{L}^p(X) \qquad f \in \mathcal{L}^p(X) \qquad f_m \to f \in \mathcal{L}^p(X)$$

Nel caso in cui $f_n \in \mathcal{L}^\infty(X)$ sia una successione di Cauchy allora posto

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in X : |f_k(x)| \geq \|f_k\|_\infty\} \\ B_{n,m} &= \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \|f_n - f_m\|_\infty\} \end{aligned}$$

si ha che $\mu(A_k) = \mu(B_{n,m}) = 0$ e se $E = (\cup A_k) \cup (\cup B_{n,m})$ anche $\mu(E) = 0$.

Per la definizione di norma infinito avremo allora che f_n è una successione di Cauchy uniforme su $X \setminus E$ e quindi possiamo affermare che f_n è uniformemente convergente ad f su $X \setminus E$.

Ne segue ovviamente che

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

□

Dalla dimostrazione del teorema precedente possiamo anche dedurre il seguente corollario di notevole importanza.

Corollario 2.4.1 *Se $f_n \in \mathcal{L}^p(X)$ è una successione di Cauchy (cioè se f_n è una successione convergente ad f in $\mathcal{L}^p(X)$) allora ammette una successione estratta f_{n_k} puntualmente convergente (ad f) quasi ovunque su X.*

Proviamo infine un paio di risultati di densità in $\mathcal{L}^p(X)$.

Teorema 2.4.4 *Sia $p \in [1, +\infty)$; per ogni funzione $f \in \mathcal{L}^p(X)$ esiste una successione di funzioni semplici s_n su X tale che*

$$\|f - s_n\|_p \to 0$$

In altre parole l'insieme delle funzioni semplici è denso il $\mathcal{L}^p(X)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $f \geq 0$, $f \in \mathcal{L}^p(X)$ e sia s_n una sucessione crescente di funzioni semplici misurabili tali che

$$0 \leq s_n \leq f \qquad s_n(x) \to f(x) \quad \text{q.o.-}x \in X$$

Poichè

$$0 \leq (f(x) - s_n(x))^p \leq f^p$$

possiamo applicare il teorema di convergenza dominata per affermare che

$$\|f - s_n\|_p \to 0$$

□

Definizione 2.4.4 *Se X è uno spazio metrico e se μ è una misura su X rispetto alla quale gli aperti ed i chiusi sono misurabili e tale che per ogni insieme misurabile M esiste un aperto $G \supset M$ tale che*

$$\mu(G \setminus M) \leq \epsilon$$

diciamo che la misura μ è regolare.

Osserviamo che, tenendo conto che se M è misurabile anche il suo complementare $M^{\mathbf{c}}$ risulta tale, possiamo allora affermare che, se μ è una misura regolare, esiste un aperto G ed un chiuso F tali che

$$F \subset M \subset G \qquad \mu(G \setminus F) \leq \epsilon$$

Osserviamo inoltre che la misura di Lenesgue è una misura regolare, come assicura il teorema 1.3.5.

Definizione 2.4.5 *Sia X uno spazio metrico e siano $x \in X$, $A \subset X$; sia d la distanza definita in X. Definiamo allora distanza di x da A la quantità*

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Teorema 2.4.5 *Sia X uno spazio metrico e siano $x, y \in X$, $A \subset X$; allora*

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq d(x, y)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia ha

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

da cui

$$\rho(x, A) \leq d(x, y) + \rho(y, A)$$

e

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leq d(x, y)$$

Analogamente, scambiando x con y, avremo che

$$\rho(y, A) - \rho(x, A) \leq d(x, y)$$

e possiamo concludere che

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq d(x, y)$$

□

È immediata conseguenza del teorema precedente il seguente risultato

Corollario 2.4.2 *Sia X uno spazio metrico e sia $A \subset X$; allora la funzione $\rho(\cdot, A)$ è continua e lipschitziana in X.*

Teorema 2.4.6 *Sia X uno spazio metrico dotato di una misura regolare. Lo spazio delle funzioni continue su X è denso in $\mathcal{L}^p(X)$ per $p \in [1, +\infty)$*

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è immediata conseguenza della densità in $\mathcal{L}^p(X)$ delle funzioni semplici.

Infatti è sempre possibile approssimare una funzione semplice con una funzione continua rispetto alla norma $p-$esima.

A tal fine è sufficiente osservare che se s è una funzione semplice

$$s(x) = \sum_k y_k \chi_{M_k}(x)$$

e se indichiamo con M un generico insieme misurabile tra gli M_k, possiamo trovare due insiemi F_M e G_M rispettivamente chiuso ed aperto tali che

$$F_M \subset M \subset G_M \qquad \mu(G_M) - \mu(F_M) \leq \epsilon$$

Ora, se

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$$

indica la distanza di x dall'insieme A, possiamo definire

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G_M)}{\rho(x, X \setminus G_M) + \rho(x, F_m)} = \begin{cases} 0 & x \in X \setminus G_M \\ 1 & x \in F_M \end{cases}$$

e possiamo affermare che ϕ_ϵ è continua in quanto tali risultano $\rho(x, F_M)$ e $\rho(x, X \setminus G_M)$ ed il denominatore non è mai nullo.

Infine possiamo osservare che

$$|\chi_M(x) - \phi_\epsilon(x)| \leq 1 \quad \forall x \in G_M \setminus F_M$$
$$|\chi_M(x) - \phi_\epsilon(x)| = 0 \quad \forall x \in F_M \cup (X \setminus G_M)$$

per concludere che

$$\int_X |\chi_M(x) - \phi_\epsilon(x)|^p d\mu \leq \epsilon^p$$

□

2.5 Spazi con prodotto scalare

Introduciamo ora la definizione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale X; si tratta di considerare una applicazione bilineare su X, simmetrica, positiva sulla diagonale. Più precisamente possiamo procedere come segue

Definizione 2.5.1 *Sia X uno spazio vettoriale, diciamo che è dato un prodotto scalare su X se è assegnata una funzione*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

soddisfacente le seguenti condizioni:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *per ogni* $x, y \in X$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ *per ogni* $x, y, z \in X$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ *per ogni* $x \in X$ *e per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *per ogni* $x \in X$
5. $\langle x, x \rangle = 0$ *se e solo se* $x = 0$

Se X è uno spazio dotato di un prodotto scalare definiamo inoltre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Teorema 2.5.1 **-Disuguaglianza di Cauchy-Bunjakowskij-Schwartz-** *Sia X uno spazio dotato di un prodotto scalare, allora*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\| \tag{2.14}$$

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\| \tag{2.15}$$

Pertanto il trinomio di secondo grado a secondo membro risulta sempre positivo e deve perciò avere discriminante negativo.

Ne deduciamo che

$$(\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

e la tesi. □

Teorema 2.5.2 *Sia X uno spazio dotato di un prodotto scalare, allora $\|\cdot\|$ risulta soddisfare le proprietà di una norma e pertanto si può considerare come la norma canonica in X.*

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla definizione di norma 2.3.1, è ovvio che le condizioni 1, 2, 3 sono immediate conseguenze delle proprietà imposte su $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Dobbiamo quindi occuparci solo della disuguaglianza triangolare 4. Allo scopo è sufficiente osservare che

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad (2.16)$$

□

Definizione 2.5.2 *Sia X uno spazio dotato di un prodotto scalare, possiamo definire la misura dell'angolo ϕ tra due vettori $x, y \in X$ mediante la*

$$\cos\phi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

Due vettori $x, y \in X$ sono ortogonali, e scriviamo $x \perp y$ se formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$ e pertanto

$$x \perp y \iff \langle x,y\rangle = 0$$

Definizione 2.5.3 *Sia X uno spazio dotato di un prodotto scalare e sia*

$$B = \{x_\alpha \ : \ \alpha \in \mathbb{I}\}$$

diciamo che B costituisce un sistema di vettori ortogonali, o un sistema ortogonale, se

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0 \qquad \forall \alpha,\beta \in I$$

Teorema 2.5.3 *Sia X uno spazio dotato di un prodotto scalare, e sia*

$$B = \{x_\alpha \ : \ \alpha \in \mathbb{I}\}$$

un sistema di vettori ortogonali allora B è costituito da vettori linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Se

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i} x_{\alpha_i} = 0$$

allora per ogni indice $\alpha_j \in \mathbb{I}$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i} x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j} \right\rangle = \lambda_{\alpha_j} \|x_{\alpha_j}\|^2 = 0$$

□

Definizione 2.5.4 *Sia X uno spazio dotato di un prodotto scalare, e sia*

$$B = \{x_\alpha \ : \ \alpha \in \mathbb{I}\}$$

un sistema di vettori ortogonali, diciamo che B è un sistema ortogonale completo se genera tutto lo spazio X, cioè se la chiusura dello spazio delle combinazioni lineari finite di elementi di B coincide con X.

In altre parole B è un sistema ortogonale completo se è possibile esprimere ogni elemento $x \in X$ nella forma

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_{\alpha_i} x_{\alpha_i}$$

Diciamo altresì che B è un sistema ortonormale se B è un sistema ortogonale ed inoltre

$$\|x_\alpha\| = 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{I}$$

Chiamiamo base ortonormale un sistema B di vettori ortonormale completo.

Osserviamo che se è dato un sistema ortogonale

$$B = \{x_\alpha \ : \ \alpha \in \mathbb{I}\}$$

è possibile ricavare un sistema ortonormale semplicemente considerando

$$B^* = \{\frac{x_\alpha}{\|x_{\alpha_i}\|} \ : \ \alpha \in \mathbb{I}\}$$

Osserviamo anche che se è dato un sistema ortonormale, si ha

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases} = \delta_{\alpha,\beta}$$

Ricordiamo che il simbolo $\delta_{\alpha,\beta}$ definito nella precedente unguaglianza è noto come simbolo di Krönecker.

Diamo qui di seguito qualche esempio di prodotto scalare e di sistema ortonormale completo.

1. Si consideri l'usuale spazio euclideo ad n dimensioni $\mathbb{R}^n$; allora

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

è un prodotto scalare e l'insieme

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

dove

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots 0) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots 1) \end{aligned}$$

costituisce un sistema ortonormale completo.

2. Si consideri lo spazio di successioni ℓ^2; allora

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i$$

è un prodotto scalare e l'insieme

$$B = \{e_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

dove

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, \dots) \\ \dots\dots\dots \\ e_n = (0, 0, 0, \dots, 1, \dots) \\ \dots\dots\dots \end{gathered}$$

costituisce un sistema ortonormnale completo.

3. Si consideri lo spazio di funzioni $\mathcal{L}^2((a, b))$; allora

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

(indichiamo con dx l'integrazione rispetto alla misura di Lebesgue in (a, b)) è un prodotto scalare.

Inoltre l'insieme

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\frac{2\pi x}{b-a}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\frac{2\pi x}{b-a} \right\}$$

costituisce un sistema di vettori di $\mathcal{L}^2((a, b))$ ortonormale completo.

(È banale verifcarne la ortonormnalità, mentre è più complicato provarne la completezza.)

Definizione 2.5.5 *Se X è uno spazio vettoriale diciamo che X è separabile se esiste un sottoinsieme numerabile $D \subset X$ denso in X.*

Teorema 2.5.4 *Sia X uno spazio vettoriale separabile dotato di un prodotto scalare e sia*

$$B = \{x_\alpha \ : \ \alpha \in \mathbb{I}\}$$

un sistema ortonormale in X. (Ricordiamo ancora una volta che se B fosse soltanto otrogonale potremmo banalmente normalizzarlo).

Allora B è al più numerabile.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le sfere

$$S_\alpha = \left\{ x \in X \ : \ \|x - x_\alpha\| < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Poichè

$$\|x_\alpha - x_\beta\| = \|x_\alpha\|^2 + 2\langle x_\alpha, x_\beta \rangle + \|x_\beta\|^2 = 2$$

i centri di tali sfere distano almeno per $\sqrt{2}$ e quindi

$$S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$$

D'altro canto se $D = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme numerabile e denso di X, per ogni sfera S_α esiste almeno un elemento $\xi_n \in D$ tale che $\xi_n \in S_\alpha$.

Poichè le sfere sono a due a due disgiunte e quindi da $\xi_n \in S_\alpha$ e $\xi_m \in S_\beta$ si ottiene $\xi_n \neq \xi_m$, possiamo infine dedurre che esiste una quantità al più numerabile di sfere S_α e quindi che B è al più numerabile.

□

Possiamo altresì dimostrare i seguenti risultati che riguardano gli spazi vettoriali su cui è definito un prodotto scalare.

Ricordiamo che d'ora innanzi supporremo sempre che gli spazi vettoriali che trattiamo siano separabili.

Teorema 2.5.5 *Sia X uno spazio vettoriale separabile su cui è definito un prodotto scalare e sia*

$$B = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema di vettori linearmente indipendenti in X.

Allora esiste in X un sistema di vettori ortogonale

$$C = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

tale che ogni vettore $\xi_k \in C$ può essere espresso mediante combinazione lineare di elementi $x_k \in B$ ed ogni elemento $x_k \in B$ può essere espresso mediante combinazione lineare di elementi $\xi_k \in C$.

È inoltre ovvio che gli elementi di C possono essere normalizzati in modo da costituire un insieme ortonormale di vettori in X.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 \\ \xi_{n+1} = x_{x+1} - \sum_{h=1}^{n} \left\langle x_{n+1}, \frac{\xi_h}{\|\xi_h\|} \right\rangle \frac{\xi_h}{\|\xi_h\|} \end{cases}$$

Mediante tale definizione assicuriamo che ogni elemento ξ_k può essere espresso mediante combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli di elementi $x_k \in B$, per cui, essendo B un sistema di vettori linearmente indipendenti, possiamo affermare che $\xi_k \neq 0$.

Osserviamo inoltre che le uguaglianze imposte definiscono un sistema associato ad una matrice triangolare in cui ogni ξ_n è funzione degli x_k per $k \leq n$ ed il coefficiente relativo ad x_n è 1; ciò consente di affermare che tali uguaglianze possono essere invertite per ottenere ogni x_n come combinazione lineare di elementi ξ_k per $k \leq n$ con coefficiente relativo ad ξ_n uguale ad 1.

Per concludere la dimostrazione del teorema sarà pertanto sufficiente provare che l'insieme

$$C = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

è ortogonale. ciò può essere fatto usando il principio di induzione.

Si ha che

1. $\{\xi_1, \xi_2\}$ costituisce un sistema di vettori ortogonali;

   Infatti

$$\langle \xi_2, \xi_1 \rangle = \left\langle x_2 - \left\langle x_2, \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \right\rangle \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \xi_1 \right\rangle = \langle x_2, \xi_1 \rangle - \left\langle x_2, \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \right\rangle \frac{\|\xi_1\|^2}{\|\xi_1\|} = 0 \tag{2.17}$$

2. Se supponiamo che $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n\}$ sia un sistema di vettori ortogonale, allora anche $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n, \xi_{n+1}\}$ è un sistema di vettori ortogonale.

   Allo scopo sarà sufficiente verificare che

$$\langle \xi_{n+1}, \xi_k \rangle = 0 \qquad \forall k \leq n$$

   Si ha

$$\langle \xi_{n+1}, \xi_k \rangle = \left\langle x_{n+1} - \sum_{h=1}^{n} \left\langle x_{n+1}, \frac{\xi_h}{\|\xi_h\|} \right\rangle \frac{\xi_h}{\|\xi_h\|}, \xi_k \right\rangle = \langle x_{n+1}, \xi_k \rangle - \left\langle x_{n+1}, \frac{\xi_k}{\|\xi_k\|} \right\rangle \frac{\|\xi_k\|^2}{\|\xi_k\|} = 0 \tag{2.18}$$

   non appena si sia tenuto conto che $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n\}$ è un sistema di vettori ortogonale, per cui

$$\langle \xi_h, \xi_k \rangle = 0 \qquad \text{per } h \neq \quad h, k \leq n$$

□

Definizione 2.5.6 *Sia X uno spazio vettoriale separabile su cui è definito un prodotto scalare e sia*

$$B = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema di vettori ortonormali in X.

Chiamiamo polinomio di ordine n rispetto alla base B ogni epressione del tipo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k \qquad \alpha_k \in \mathbb{R} \quad \xi_k \in B$$

Con $\mathbb{P}_n$ indichiamo lo spazio dei polinomi di ordine n rispetto alla base B.
Definiamo inoltre, per $x \in X$

$$c_k = \langle x, \xi_k \rangle$$

e chiamiamo $\{c_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ coefficienti di Fourier di x rispetto a B.
Definiamo infine, per ogni $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \xi_k$$

serie di Fourier di x rispetto alla base B.

Osserviamo che le ridotte

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k$$

della serie di Fourier di x sono particolari polinomi di ordine n rispetto alla base B.

Osserviamo anche che

$$\|S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

ed in particolare che

$$\|F_n\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

I polinomi di Fourier godono di una interessante proprietà descritta nel teorema seguente.

Teorema 2.5.6 *Sia X uno spazio vettoriale separabile su cui è definito un prodotto scalare e sia*

$$B = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema di vettori ortonormali in X.
Allora per ogni $x \in X$ si ha

$$\min_{S_n \in \mathbb{P}_n} \|x - S_n\|^2 = \|x - F_n\|^2 = \|x\|^2 - \|F_n\|^2$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
\|x - S_n\|^2 = \langle x - S_n, x - S_n \rangle &= \|x\|^2 - 2\langle x, S_n \rangle + \|S_n\|^2 = \\
&= \|x\|^2 - \|F_n\|^2 + \|F_n\|^2 - 2\langle F_n, S_n \rangle + \|S_n\|^2 = \\
&= \|x\|^2 - \|F_n\|^2 + \langle x - F_n, x - F_n \rangle = \\
&= \|x\|^2 - \|F_n\|^2 + \|x - F_n\|^2 = \\
&= \|x\|^2 - \|F_n\|^2 + \sum_{k-1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Non appena si sia tenuto conto che

$$\langle F_n, S_n\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\xi_k \right\rangle = \\ = \sum_{k=1}^{n} c_k\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \xi_k\rangle \alpha_k = \\ = \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\xi_k \right\rangle = \langle x, S_n\rangle \quad (2.20)$$

Le affermazioni del teorema seguono dunque non appena si osservi che il minimo di

$$\|x - S_n\|^2 = \langle x - S_n, x - S_n\rangle = \|x\|^2 - \|F_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - c_k)^2$$

si ottiene per $\alpha_k = c_k$, nel qual caso il polinomio S_n in cui il minimo è assunto coincide con il polinomio di Fourier F_n.

□

Corollario 2.5.1 - Disuguaglianza di Bessel - *Sia X uno spazio vettoriale separabile dotato di un prodotto scalare e sia*

$$B = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema di vettori ortonormali in X.

Allora per ogni $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \leq \|x\|^2$$

Dimostrazione. Si ha infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \|x - F_n\|^2 = \|x\|^2 - \|F_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|x\|^2$$

e al limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \leq \|x\|^2$$

□

Definizione 2.5.7 *Sia X uno spazio vettoriale separabile dotato di un prodotto scalare e sia*

$$B = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema di vettori ortonormali in X.

Diciamo che il sistema di vettori B è chiuso se per ogni $x \in X$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\xi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \xi_k\rangle \xi_k$$

Teorema 2.5.7 *Sia X uno spazio vettoriale separabile dotato di un prodotto scalare e sia*

$$B = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema di vettori ortonormali in X.

Allora

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \xi_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2$$

Dimostrazione. Per il teorema 2.5.6 si ha

$$\|x - F_n\|^2 = \|x\|^2 - \|F_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Pertanto l'asserto è evidente non appena si tenga conto che F_n e $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ sono le ridotte delle serie che compaiono nell'enunciato. □

Passiamo ora a dimostrare che i concetti di sistema ortonormale chiuso e di sistema ortonormale completo sono equivalenti.

Teorema 2.5.8 *Sia X uno spazio separabile dotato di un prodotto scalare; allora ogni sistema ortonormale completo in X è anche chiuso e viceversa ogni sistema ortonormale chiuso è anche completo.*

Dimostrazione. Sia

$$B = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema di vettori ortonormali chiuso in X. Allora

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \xi_k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k$$

e quindi ogni elemento $x \in X$ è limite di una successione i cui elementi sono combinazioni lineari di elementi di B. Ne segue che B è completo.

Se viceversa B è completo, allora

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Ma, per il teorema 2.5.6

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k \right\| \to 0$$

per cui

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \xi_k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k$$

e B è chiuso. □

Definizione 2.5.8 *Sia X uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Diciamo che X è uno spazio di Hilbert se risulta completo rispetto alla norma associata al prodotto scalare definito in X.*

Teorema 2.5.9 - Riesz-Fischer- *Sia X uno spazio di Hilbert e sia*

$$B = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema ortonormale completo in X.

Sia $\{c_k\} \in \ell^2$, supponiamo cioè che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 < +\infty$$

Allora esiste $x \in X$ tale che

$$\langle x, \xi_k \rangle = c_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

e risulta

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \tag{2.21}$$

Quest'ultima uguaglianza è noto con il nome di **Uguaglianza di Parseval**.

Dimostrazione. Definiamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k$$

si ha

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \epsilon \quad \text{se } n > n_\epsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

non appena si sia ricordata l'ortogonalità del sistema degli ξ_k ed il fatto che $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 < +\infty$.

Pertanto S_n è una successione di Cauchy ed ammette quindi un limite $x \in X$; ne risulta

$$x = \lim_n S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \xi_k$$

Si ha

$$\langle x, \xi_k \rangle = \langle S_n, \xi_k \rangle - \langle x - S_n, \xi_k \rangle$$

e, per $n \geq k$,

$$c_k = \langle S_n, \xi_k \rangle$$

mentre

$$| \langle x - S_n, \xi_k \rangle | \leq \|x - S_n\| \, \|\xi_k\| \to 0$$

per $n \to +\infty$.

Ne deduciamo che

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \xi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \xi_k \rangle \, \xi_k$$

Infine

$$\|x - S_n\|^2 = \langle x - S_n, x - S_n\rangle = \|x\|^2 + \|S_n\|^2 - 2\langle x, S_n\rangle =$$
$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\left\langle x, \sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k \right\rangle =$$
$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k \langle x, \xi_k\rangle =$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \quad (2.22)$$

per cui, da $\lim_n S_n = x$, si ricava che

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2$$

□

Definizione 2.5.9 *Siano X ed Y due spazi di Banach; diciamo che X ed Y sono isomorfi se esiste una applicazione lineare continua iniettiva e surgettiva da X in Y.*

Teorema 2.5.10 *Ogni spazio X di Hilbert separabile è isomorfo allo spazio ℓ^2.*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$B = \{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

un sistema ortonormale completo in X e definiamo

$$T : X \to \mathbb{R}$$

mediante la

$$x \in X \mapsto T(x) = \{c_k = \langle x, \xi_k\rangle \ , \ k \in \mathbb{N}\} \in \ell^2$$

Evidentemente T è lineare, inoltre

1. T è surgettiva in quanto se $\{\alpha_k\} \in \ell^2$ il teorema 2.5.9, di Riesz-Fischer, assicura che
$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\xi_k \in X$$
e che
$$\langle x, \xi_k\rangle = \alpha_k$$
per cui
$$T(x) = \{\alpha_k\}$$
2. T è iniettiva in quanto se $x, y \in X$
$$\|T(x) - T(y)\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x - y, \xi_k\rangle^2 = \|x - y\|^2$$
per l'uguaglianza di Parseval, e quindi
$$T(x) = T(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

3. T è continua in quanto se $x \to y \in X$

$$\|T(x) - T(y)\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x - y, \xi_k \rangle^2 = \|x - y\|^2 \to 0$$

□

A completamento di quanto fin qui esposto ricordiamo un importante risultato riguardante gli spazi di funzioni misurabili.

Teorema 2.5.11 *Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato che supponiamo dotato della misura di Lebesguee consideriamo lo spazio*

$$\mathcal{L}^2((a,b)) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \ : \ \|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

Allora si può definire un prodotto scalare in $\mathcal{L}^2((a,b))$ nediante la

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

che induce in $\mathcal{L}^2((a,b))$ la norma $\|\cdot\|_2$.

Inoltre il sistema di vettori

$$B = \left\{ \frac{1}{sqrt2\pi} \ , \ \frac{1}{sqrt\pi} \sin \frac{2\pi nx}{b-a} \ , \ \frac{1}{sqrt\pi} \cos \frac{2\pi nx}{b-a} \right\}$$

risulta ortonormale completo.

2.6 Dualità negli spazi di Banach

Diamo ora un brevissimo cenno a qualche risultato che si inquadra nella teoria della dualità negli spazi di Banach.

Definizione 2.6.1 *Sia X uno spazio di Banach, chiamiamo spazio duale di X e lo indichiamo con X^*lo spazio dei funzionali lineari continui da X in $\mathbb{R}$.*

Per ogni $f \in X^*$ definiamo

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} f(x)$$

(Osserviamo che se $\lambda = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|$ e se $\mu = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$, ovviamente si ha $\lambda \geq \mu$ ed inoltre, poichè $|f(x)| = \|(\|\, x) f\left(\frac{x}{\|(\|x)}\right) \leq f\left(\frac{x}{\|(\|x)}\right)$ per ogni x tale che $\|(\|\, x) \leq 1$, possiamo anche dedurre che $\lambda \leq \mu$.

A proposito di funzionali lineari continui possiamo provare il seguente risultato

Teorema 2.6.1 *Sia X uno spazio di Banach e sia $f : X \to \mathbb{R}$. Allora f è continuo se e solo se f è limitato cioè se e solo se*

$$\|f\| < +\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Se f è un funzionale lineare e continuo allora

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \delta_\epsilon > 0 \quad \text{tale che se} \quad \|x\| < \delta_\epsilon \quad \text{allora} \quad |f(x)| < \epsilon$$

Pertanto se $\|x\| \leq 1$ avremo $\|\delta x\| \leq \delta$ e

$$|f(\delta x)| \leq \epsilon \quad \text{da cui} \quad |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$$

Se ne deduce

$$\|f\| \leq \frac{\epsilon}{\delta} < +\infty$$

Se viceversa f è limitato allora

$$+\infty > \|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} f(x)$$

per cui

$$f(x) = \|x\| \, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \|f\| \, \|x\|$$

L'ultima disuguaglianza assicura la continuità di f in 0.

La linearità permette allora di concludere che f è continua ovunque. (Si ricordi che

$$f(x) - f(x_0) = f(x - x_0)$$

per cui la continutità in x_0 si riconduce banalmente alla continuità in 0) □

Possono essere dimostrati i seguenti risultati

Teorema 2.6.2 *Se X è uno spazio di Hilbert e se $f \in X^*$ allora esiste uno ed un solo $x^* \in X$ tale che*

$$f(x) = \langle x, x^* \rangle \qquad \forall x \in X$$

Pertanto, se X è uno spazio di Hilbert, X^* è isomorfo ad X.

Teorema 2.6.3 *Se X è uno spazio su cui è definita una misura μ e se p, q sono esponenti coniugati ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), allora*

$$\left(\mathcal{L}^p(X)\right)^* = \mathcal{L}^q(X)$$

In particolare

$$\left(\mathcal{L}^2(X)\right)^* = \mathcal{L}^2(X) \qquad \left(\mathcal{L}^1(X)\right)^* = \mathcal{L}^{+\infty}(X)$$

Non è invece semplice caratterizzare lo spazio duale $(\mathcal{L}^{+\infty}(X))^*$.

Ricordiamo infine alcuni risultati che sono di fondamentale importanza nello studio degli spazi di Banach. Innanzi tutto, poichè ogni spazio di Banach è uno spazio metrico completo, ricordiamo che negli spazi metrici completi vale il seguente teorema.

Teorema 2.6.4 - Baire - *Sia X uno spazio metrico completo e sia $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di insiemi aperti densi in X.*

Allora $G_\delta = \cap_n G_n$ è denso in X.

DIMOSTRAZIONE. Per provare che G_δ è denso in X occorre e basta provare che se A è un aperto in X allora

$$A \cap G_\delta \neq \emptyset$$

Sia infatti A un aperto, se $A \cap G_\delta = \emptyset$ allora $G_\delta \subset A^c \neq X$ e quindi $\mathrm{cl}\, G_\delta \neq X$; se viceversa esistesse un chiuso $F \neq X$ tale che $G_\delta \subset F \subset X$, avremmo $g_\delta^c \supset F^c = A$ con $A \neq \emptyset$ aperto e quindi $A \cap G_\delta = \emptyset$.

Sia ρ la metrica in X ed indichiamo con

$$S(x, r) = \{y \in X \ : \ \rho(x, y) \leq r\}$$

la sfera chiusa di centro x e raggio r in X.

Poichè G_1 è denso in X esiste $x_1 \in X$ ed $1 > r_1 > 0$ tale che

$$\begin{cases} S(x_1, r_1) \subset G_1 \cap A \\ r_1 < 1 \end{cases}$$

Ora, se $x_n \in X$ ed $\frac{1}{n} > r_n > 0$ sono dati in modo che

$$\begin{cases} S(x_n, r_n) \subset G_n \cap S(x_{n-1}, r_{n-1}) \\ r_n < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Usando la densità di G_{n+1} possiamo trovare $x_{n+1} \in X$ ed $\frac{1}{n+1} > r_{n+1} > 0$ in modo che

$$\begin{cases} S(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset G_{n+1} \cap S(x_n, r_n) \\ r_{n+1} < \frac{1}{n+1} \end{cases} \tag{2.23}$$

Pertanto, per il principio di induzione possiamo affermare che esistono una successione di elementi $x_n \in X$ ed una successione di numeri reali tali che

$$S(x_n, r_n) \subset S(x_{n-1}, r_{n-1}) \qquad 0 < r_n < \frac{1}{n}$$

ed avremo che, per

$$h, k > n \quad \Longrightarrow \quad x_h, x_k \in S(x_n, r_n) \quad \Longrightarrow \quad \rho(x_h, x_k) < 2r_n < \frac{2}{n}$$

per cui x_n risulta essere una successione di Cauchy, quindi convergente ad un elemento $x \in X$.

D'altro canto avremo anche che

$$x_n \in S(x_m, r_m) \qquad \forall n > m$$

per cui

$$x \in S(x_m, r_m) \qquad \forall m$$

e per la 2.23

$$x \in G_m \qquad \forall m$$

quindi

$$x \in \cap_n G_n$$

e, poichè $x \in S(x_1, r_1) \subset G_1 \cap A$, si ha $x \in A$ ed anche

$$x \in A \cap G_\delta$$

□

Spesso è comodo enunciare il teorema di Baire, passando ai complementari; a tal fine ricordiamo alcuni risultati.

Definizione 2.6.2 *Sia X uno spazio topologico, diciamo che un insieme $A \subset X$ è mai denso se*

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} A = \emptyset$$

Se ricordiamo che

$$(\operatorname{int} A)^{\mathbf{c}} = \operatorname{cl} A^{\mathbf{c}}$$

e che di conseguenza

$$(\operatorname{cl} A)^{\mathbf{c}} = \operatorname{int} A^{\mathbf{c}}$$

avremo che

Teorema 2.6.5 *Sia X uno spazio topologico e sia $A \subset X$, allora A è mai denso in X se e solo se*

$$(\operatorname{cl} A)^{\mathbf{c}}$$

è denso in X.

Dimostrazione. Se A è mai denso in X allora

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} A = \emptyset$$

per cui

$$X = X \setminus \operatorname{int}\operatorname{cl} A = (\operatorname{int}\operatorname{cl} A)^{\mathbf{c}} = \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)^{\mathbf{c}}$$

e quindi $(\operatorname{cl} A)^{\mathbf{c}}$ è denso in X. □

Ne consegue che il teorema di Baire può essere riformulato come segue.

Teorema 2.6.6 - Baire 3 - *Sia X uno spazio metrico completo e sia $X = \cup_n A_n$; allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che A_m non è mai denso in X, cioè*

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} A_m \neq \emptyset$$

In altre parole esiste $m \in \mathbb{N}$ ed esiste $G \subset X$ aperto, $G \neq \emptyset$ tale che

$$G \subset \operatorname{cl} A_m$$

Dimostrazione. Se fosse $\operatorname{int}\operatorname{cl} A_n = \emptyset$ per ogni n allora dovrebbe essere anche

$$(\operatorname{int}\operatorname{cl} A_n)^c = X$$

e quindi, posto $G_n = (\operatorname{cl} A_n)^c$, si avrebbe che G_n è aperto e denso in X; dal teorema 2.23 di Baire, si ottiene che $\cap G_n$ è denso in X, cioè $\operatorname{cl} \cap G_n = X$ e $(\operatorname{cl} \cap G_n)^c = \emptyset$. Ne deduciamo che $\operatorname{int}(\cap G_n)^c = \emptyset$ e $\operatorname{int} \cup G_n^c = \emptyset$. Infine $\operatorname{int} \cup \operatorname{cl} A_n = \emptyset$ e $\operatorname{int} \cup A_n = \emptyset$, da cui $\operatorname{int} X = \emptyset$ il che è impossibile.

$$\emptyset = \operatorname{int}\operatorname{cl} \cup_n A_n = \operatorname{int}\operatorname{cl} X = X$$

non appena si sia ricordato che X è sia aperto che chiuso.

□

Una conseguenza notevole del teorema di Baire è il teorema dell'uniforme limitatezza di Banach- Steinhaus.

Teorema 2.6.7 -dell'uniforme limitatezza di Banach - Steinhaus - *Siano X uno spazio di Banach ed Y uno spazio normato; consideriamo una famiglia di funzioni lineari*

$$\Lambda_\alpha : X \to Y \qquad \alpha \in A$$

Allora è verificata una delle seguenti alternative.

1. *esiste $M > 0$ tale che*

$$\|\Lambda_\alpha\| \leq M \qquad \forall \alpha \in A$$

2. *esiste una famiglia di insiemi aperti $\{G_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tali che $G_\delta = \cap_n G_n$ è denso in X e tale che*

$$\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha(x)\| = +\infty \qquad \forall x \in G_\delta$$

Dimostrazione. Sia

$$\phi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha(x)\|$$

e sia

$$G_n = \{x \in X \ : \ \phi(x) > n\}$$

G_n è un insieme aperto; se infatti $x_0 \in G_n$ allora

$$\phi(x_0) = \sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha(x_0)\| > n$$

e quindi esiste $\alpha_0 \in A$ tale che

$$\|\Lambda_{\alpha_0}(x_0)\| > n + \epsilon \qquad \text{con} \qquad \epsilon > 0$$

Ora, poichè

$$x \mapsto \|\Lambda_{\alpha_0}(x)\|$$

è continua, possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|\|\Lambda_{\alpha_0}(x)\| - \|\Lambda_{\alpha_0}(x_0)\|\big| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\|\Lambda_{\alpha_0}(x)\| > \|\Lambda_{\alpha_0}(x_0)\| - \frac{\epsilon}{2} > n + \epsilon - \frac{\epsilon}{2} > n$$

Se ne deduce che, per $\|x - x_0\| < \delta$ si ha

$$\phi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha(x)\| > n \quad \text{e} \quad x \in G_n$$

per cui G_n è aperto.

Ora, se G_n è denso in X per ogni n allora, per il teorema 2.6.4 di Baire, si ha che $G_\delta = \cap_n G_n$ è denso in X ed inoltre

$$x \in G_\delta \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) > n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha(x)\| = +\infty$$

Se al contrario esiste almeno un $m \in \mathbb{N}$ tale che G_m non è denso in X, allora si può trovare un $x_0 \in X$ ed $r > 0$ tale che

$$x_0 + h \notin G_m \qquad \forall h \quad \text{tale che} \quad \|h\| < r$$

Ma allora

$$\sup_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha(x_0+h)\| = \phi(x_0+h) \le m \qquad \forall h \quad \text{tale che} \quad \|h\| < r$$

e

$$\|\Lambda_\alpha(h)\| \le \|\Lambda_\alpha(x_0+h)\| + \|\Lambda_\alpha(x_0)\| \le 2m \qquad \forall h \quad \text{tale che} \quad \|h\| < r$$

Se ne deduce che, per $\|x\| \le 1$, si ha $\|rx\| = r\,\|x\| \le r$, da cui

$$\|\Lambda_\alpha(rx)\| \le 2m$$

e

$$\|\Lambda_\alpha(x)\| \le \frac{2m}{r}$$

□

Ricordiamo in ultimo anche l'enunciato del teorema della mappa aperta.

Teorema 2.6.8 - della mappa aperta - *Siano U e V le sfere unitarie aperte di due spazi di Banach X ed Y e sia*

$$\Lambda : X \to Y$$

una funzione lineare continua, surgettiva; allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$\Lambda(U) \supset \delta V$$

Dimostrazione.
Da $X = \bigcup_n nU$, deduciamo che

$$Y = \Lambda(X) = \bigcup_n \Lambda(nU)$$

Poichè Y è spazio metrico completo possiamo allora usare il teorema 2.6.6 di Baire per affermare che esistono $m \in \mathbb{N}$ ed un aperto non vuoto $G \subset Y$ tali che

$$G \subset \operatorname{cl}\Lambda(mU) \tag{2.24}$$

Siano ora, (ricordiamo che G è aperto),

$$y_0 \in G \qquad y \in Y \quad \|y\| < \eta \quad y_0 + y \in G$$

Per la 2.24, possiamo trovare due successioni $x'_k, x''_k \in \Lambda(mU)$ tali che

$$\Lambda(x'_k) \to y_0 \qquad \Lambda(x''_k) \to y_0 + y$$

per cui, se poniamo $x_k = x''_k - x'_k$ avremo

$$\Lambda(x_k) \to y \qquad \|x_k\| \le 2m$$

Sia ora $y \in Y$, avremo che

$$\left\| \frac{\eta}{\|y\|} y \right\| < \eta$$

per cui esiste x_k tale che

$$\|x_k\| \leq 2m \qquad \text{ed inoltre} \qquad \Lambda(x_k) \to \frac{\eta}{\|y\|} y$$

da cui, per la linearità di Λ

$$\Lambda(\frac{\|y\|}{\eta} x_k) \to y \quad \text{ed inoltre} \quad \left\| \frac{\|y\|}{\eta} x_k \right\| \leq \frac{\|y\|}{\eta} 2m$$

Posto $\delta = \frac{\eta}{2m}$ possiamo allora affermare che

$$\forall y \in Y \quad \exists z_k \quad \text{tale che} \quad \|z_k\| \leq \frac{1}{\delta} \|y\| \qquad \Lambda(z_k) \to y \tag{2.25}$$

Ora sia $y \in \delta V$, sia cioè $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$, e procediamo, per induzione in ordine a costruire una successione di punti $\xi_n \in X$ come segue.

Sia $\xi_1 \in X$ tale che

$$\|\xi_1\| \leq 1 \qquad \|y - \Lambda(\xi_1)\| < \frac{1}{2}\delta\epsilon$$

(ξ_1 esiste in virtù della 2.25);

Supponiamo ora dati $\{\xi_i \ : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ tali che, posto $s_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ si abbia

$$\|\xi_i\| \leq \frac{1}{2^{i-1}}\epsilon \qquad \|y - \Lambda(s_n)\| \leq \frac{1}{2^n}\delta\epsilon \tag{2.26}$$

Sempre per la 2.25 usatat con $y - \Lambda(\xi_1)$ in luogo di y possiamo allora trovare ξ_{n+1} tale che

$$\|\xi_{n+1}\| \leq \frac{1}{\delta} \|y - \Lambda(s_n)\| \leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{2^n}\delta\epsilon = \frac{1}{2^n}\epsilon \quad \|y - \Lambda(s_n) - \Lambda(\xi_{n+1})\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\delta\epsilon \tag{2.27}$$

Poniamo poi $s_{n+1} = s_n + \xi_{n+1}$.

Abbiamo così costruito una successione s_n tale che

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|\xi_{n+p} + \ldots \xi_{n+1}\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^{i-1}}\epsilon \leq \epsilon$$

per cui s_n risulta una successione di Cauchy ed esiste $x \in X$ tale che $s_n \to x$.

Avremo poi

$$\|s_n\| \leq \|\xi_1\| + \sum_{i=1}^{+\infty} \|\xi_i\| \leq \|\xi_1\| + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}}\epsilon = 1 + \epsilon$$

per cui

$$\|x\| \leq 1 + \epsilon$$

Ma, per la continuità di Λ si ha $\Lambda(s_n) \to \Lambda(x)$, mentre dalla 2.26 si ottiene che $\Lambda(s_n) \to y$, per cui $y = \Lambda(x)$.

Possiamo infine concludere che

$$\forall y \in \delta V \quad \exists x \in (1 + \epsilon)U \quad \text{tale che} \quad \Lambda(x) = y$$

e

$$\Lambda((1+\epsilon)U) \supset \delta V \qquad \Lambda(U) \supset \frac{\delta}{1+\epsilon} V$$

da cui

$$\Lambda(U) \supset \bigcup_{\epsilon} \frac{\delta}{1+\epsilon} V = \delta V$$

□

Osserviamo che il teorema della mappa aperta afferma che per ogni $y \in Y$ tale che $\|y\| < \delta$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| < 1$ e $\Lambda x = y$.

Quindi se $A \subset X$ è un aperto, e se $y_0 \in \Lambda(A)$, avremo che

$$y_0 = \Lambda(x_0) \quad x_0 \in A \quad x_0 + \eta U \subset A$$

Pertanto per il teorema della mappa aperta si ha

$$\Lambda(A) \supset \Lambda(x_0 + \eta U) = y_0 + \eta \Lambda(U) \supset y_0 + \delta \eta V$$

Ne deduciamo che $\Lambda(A)$ contiene una sfera aperta di centro y_0 e raggio $\delta\eta$ per cui y_0 è interno a $\Lambda(A)$. Poichè y_0 è scelto arbitrariamente in $\Lambda(A)$ possiamo allora concludere che $\Lambda(A)$ è aperta.

In altre parole il teorema della mappa aperta giustifica il suo nome in quanto trasforma aperti in aperti.

Corollario 2.6.1 *Siano X e Y due spazi di Banach e sia*

$$\Lambda : X \to Y$$

una funzione lineare continua bigettiva; allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|\Lambda(x)\| \geq \delta \|x\|$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema della mappa aperta, ricordando che Λ è bigettiva, otteniamo che

$$\|\Lambda(x)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x\| < 1$$

Infatti se $y = \Lambda(x)$ con $\|(\|\, x) < \delta$, allora $y \in \Lambda(U)$ e quindi $y = \Lambda(x')$ con $\|(\|\, x') = 1$; ma poichè Λ è iniettiva $x' = x$.

per cui

$$\|x\| \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \|\Lambda(x)\| \geq \delta$$

Ne deduciamo che

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|\Lambda(x)\| \geq \delta$$

e la tesi □

Osserviamo che il corollario assicura, vista la bigetiività di Λ, che

$$\left\|\Lambda^{-1}(x)\right\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|$$

e quindi che

$$\left\|\Lambda^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\delta}$$

Capitolo 3

Funzioni di una variabile complessa

3.1 L'insieme dei numeri complessi

Un numero complesso può essere identificato mediante una coppia di numeri reali e pertanto risulta evidente una stretta relazione con l'insieme $\mathbb{R}^2$.

È però molto importante sottolineare la netta distinzione esistente tra $\mathbb{R}^2$ e l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$, distinzione che è essenzialmente dovuta al fatto che in $\mathbb{C}$ sono definite operazioni e valgono proprietà che non rivestono alcun significato nel piano cartesiano.

Definizione 3.1.1 *Definiamo l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi come l'insieme delle coppie ordinate $z = (x, y)$ munito delle seguenti operazioni di somma e di prodotto*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Un'altra maniera per definire le stesse operazioni consiste nel definire un elemento, detto unità immaginaria, $\imath$ con la proprietà che

$$\imath^2 = -1$$

ed usare come base dello spazio vettoriale delle coppie ordinate (x, y) di numeri reali gli elementi

$$(1, 0) \qquad \text{e} \qquad (0, \imath) \tag{3.1}$$

In tal caso possiamo rappresentare ogni elemento $z \in \mathbb{C}$ mediante le

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, \imath) = x + \imath y$$

e rappresentare $\mathbb{C}$ mediante un piano in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche, che viene usualmente indicato come piano di Argand-Gauss.

Chiamiamo $x = \Re z$ ed $y = \Im z$ parte reale e parte immaginaria del numero complesso z.

Si verifica facilmente che le operazioni di somma e di prodotto definite in precedenza sono riconducibili alle usuali regole di calcolo algebrico semplicemente tenendo conto della 3.1.

A titolo di esempio osserviamo che

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 = x_1 + \imath y_1 + x_2 + \imath y_2 &= (x_1 + x_2) + \imath(y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 = (x_1 + \imath y_1)(x_2 + \imath y_2) &= x_1 x_2 + \imath^2 y_1 y_2 + \imath(x_1 y_2 + y_1 x_2) = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \imath(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

Definizione 3.1.2 *Se $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ definiamo il suo complesso coniugato $\bar{z}$ mediante la*

$$\bar{z} = x - \imath y$$

Definiamo inoltre il modulo ρ di un numero complesso z mediante la

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ed il suo argomento $\theta = \arg z$ mediante la

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

in accordo con i segni di x e di y.

Poichè $\arg z$ è definito a meno di multipli di 2π, definiamo inoltre $\operatorname{Arg} z$, l'argomento principale di $\arg z$, come quel valore di θ che è compreso in $[0, 2\pi)$.

Osserviamo che il problema della definizione di $\arg z$ è lo stesso incontrato quando si considerano le coordinate polari nel piano. In particolare non è sufficiente definire

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

in quanto, in tal modo, si otterrebbero soltanto valori compresi in $(-\pi/2, \pi/2)$.

È allora necessario tenere anche conto del segno di x e di y, aggiungendo π ad $\arctan \frac{y}{x}$ nel caso in cui $x < 0$ e definendo $\theta = \pm\pi/2$ nel caso in cui $x = 0$ e, rispettivamente, $y \gtrless 0$

È immediato verificare che

$$z\bar{z} = |z|^2$$

ed inoltre è semplice osservare che per calcolare il quoziente di due numeri complessi si può ricorrere alla formula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|}$$

A proposito del modulo di un numero complesso si può verificare facilmente che

$$\begin{gathered} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \end{gathered}$$

Da quanto abbiamo fin qui esposto risulta immediatamente che un numero complesso z può essere rappresentato anche nella forma

$$z = |z|\,(\cos(\arg z) + \imath \sin(\arg z)) = \rho(\cos\theta + \imath \sin\theta)$$

Tale rappresentazione si dice forma polare di un numero complesso.

Teorema 3.1.1 - De Moivre - *Se* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + \imath \sin\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + \imath \sin\theta_2)$$

allora

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \imath \sin(\theta_1+\theta_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + \imath \sin(\theta_1-\theta_2)) \end{aligned}$$

La dimostrazione del teorema di De Moivre si riduce ad un semplice calcolo che coinvolge le usuali identità trigonometriche.

Definizione 3.1.3 *Se* $z \in \mathbb{C}$ *diciamo che* $w \in \mathbb{C}$ *è una radice* $n-$*esima di* z *se*

$$w^n = z$$

Scriviamo in tal caso

$$w = z^{1/n}$$

Dal teorema di De Moivre, si ha che

$$w^n = \rho^n(\cos(n\theta) + \imath \sin(n\theta))$$

e pertanto si può affermare che se

$$z = \rho(\cos\theta + \imath \sin\theta)$$

allora

$$z^{1/n} = \rho^{1/n}\left(\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + \imath \cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Chiaramente nella formula precedente avremo valori distinti solo se $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Definiamo infine, e verificheremo che tale definizione può essere facilmente giustificata

$$e^z = e^{x+\imath y} = e^x(\cos y + \imath \sin y) = e^x e^{\imath y}$$

quanto abbiamo finora visto ci permette di definire in $\mathbb{C}$

- una struttura di spazio vettoriale la cui base canonica è data da

$$(1,0) \qquad (0,\imath)$$

- una struttura di algebra
- una struttura di spazio normato

Ne consegue la possibilità di definire un topologia in $\mathbb{C}$ legata alla distanza indotta dalla norma in $\mathbb{C}$, e si vede senza problemi che tale topologia coincide con quella euclidea nel piano.

Non ci sono pertanto difficoltà ad estendere al piano complesso la definizione di limite e di successione convergente di numeri complessi.

Vogliamo solo ricordare che, da questo punto di vista, la struttura di $\mathbb{C}$ non è molto diversa dalla struttura di $\mathbb{R}^2$ e che è immediato verificare che una successione di numeri complessi z_n è convergente a z_0 se e solo se $\Re z_n$ e $\Im z_n$ risultano convergenti a $\Re z_0$ e $\Im z_0$ rispettivamente.

3.2 Derivabilità di una funzione complessa

Intendiamo occuparci ora dello studio della derivazione di una funzione complessa di una variabile complessa.

Allo scopo stabiliamo alcune notazioni cui faremo costantemente ricorso.

Sia

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) = u(x,y) + \imath v(x,y) \in \mathbb{C}$$

una funzione complessa di una variabile complessa.

Evidentemente supponiamo che

$$z = x + \imath y$$

ed abbiamo

$$\Re f = u \qquad \Im f = v$$

Chiaramente tanto f quanto u e v possono essere considerate funzioni di z oppure di (x,y). Inoltre è evidentemente possibile considerare proprietà di differenziabilità di f, u, v rispetto alle variabili reali (x,y).

Definizione 3.2.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, diciamo che $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ se (u,v) sono funzioni continue con derivate parziali continue su Ω. rispetto alle variabili (x,y). Esprimeremo questa proprietà anche dicendo che f ammette derivate parziali prime continue rispetto alle variabili (x,y).*

Diciamo inoltre che f soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann se

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definizione 3.2.2 *Diciamo che f ha derivata complessa nel punto z_0 se esiste*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

se Ω è un aperto di $\mathbb{C}$ diciamo che f è derivabile in Ω se $f'(z)$ esiste in senso complesso per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Inoltre se $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ (in senso reale) e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann 3.2, diciamo che la funzione $f = u + \imath v$ è olomorfa su Ω.

Indichiamo con $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni olomorfe sull'aperto Ω.

È facile provare che

Teorema 3.2.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, f è derivabile in senso complesso su Ω ed ammette derivata complessa continua se e solo se f è olomorfa su Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo a supporre che f sia derivabile in senso complesso su Ω, allora, per ogni $z_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{x+\imath y \to x_0+\imath y_0} \frac{(u(x,y) - u(x_0,y_0)) + \imath(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{(x - x_0 + \imath(y - y_0))} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ora se in 3.3 consideriamo un incremento solo reale o solo immaginario, ponendo una volta $y = y_0$ e successivamente $x = x_0$ otteniamo

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(u(x,y_0) - u(x_0,y_0)) + \imath(v(x,y_0) - v(x_0,y_0))}{(x - x_0)} = \\ &= u_x(x_0,y_0) + \imath v_x(x_0,y_0) \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{(u(x_0,y) - u(x_0,y_0)) + \imath(v(x_0,y) - v(x_0,y_0))}{\imath(y - y_0)} = \\ &= \frac{1}{\imath}[u_y(x_0,y_0) + \imath v_y(x_0,y_0)] = v_y(x_0,y_0) - \imath u_y(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene allora che le condizioni di Cauchy-Riemann 3.2 sono soddisfatte; inoltre, poichè f' è continua, avremo che $u, v, \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Supponiamo viceversa che le condizioni di Cauchy-Riemann siano verificate e che la funzione f sia di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, allora

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u(x,y_0) - u(x_0,y_0)) + \imath(v(x,y_0) - v(x_0,y_0))}{(z - z_0)} = \\ &= \frac{u_x(x_0,y_0)[x - x_0] + u_y(x_0,y_0)[y - y_0] + |z - z_0|\omega_1(|z - z_0|)}{z - z_0} + \\ &+ \imath \frac{v_x(x_0,y_0)[x - x_0] + (v_y(x_0,y_0)[y - y_0] + |z - z_0|\omega_2(|z - z_0|)}{z - z_0} \end{aligned} \tag{3.4}$$

dove ω_1 e ω_2 sono funzioni infinitesime per $z \to z_0$.

Ora, se le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate potremo affermare che

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u_x([x-x_0]+\imath[y-y_0]) + \imath v_x([x-x_0]+\imath[y-y_0]}{z-z_0} + \\ + \frac{|z-z_0|\omega_1(|z-z_0|)+|z-z_0|\omega_2(|z-z_0|)}{z-z_0} = \\ = u_x + \imath v_x + \frac{|z-z_0|}{z-z_0}(\omega_1(|z-z_0|)\omega_2(|z-z_0|)) \quad (3.5)$$

e quindi

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = u_x(x_0,y_0) + \imath v_x(x_0,y_0) \quad (3.6)$$

□

Occorre ora introdurre il concetto di curva in $\mathbb{C}$ e di integrale di linea di una funzione complessa.

Definizione 3.2.3 *Diciamo che è assegnata una curva regolare semplice in* $\mathbb{C}$ *se è data una funzione*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

di classe $\mathcal{C}^1([a,b])$ *iniettiva e tale che* $|\gamma'(t)| \neq 0$

Supporremo di identificare la parte reale e la parte immaginaria di γ *come*

$$\gamma = \phi + \imath\psi$$

Diremo che γ *è chiusa se* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Se γ *è una curva regolare semplice ed* $f = u + \imath v$ *è una funzione complessa di una variabile complessa definiamo*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \\ = \int_a^b (u(\phi(t),\psi(t)) + \imath v(\phi(t),\psi(t)))(\phi'(t)+\imath\psi'(t))dt = \\ = \int_a^b (u(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) - v(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)))dt + \\ + \imath\int_a^b (u(\phi(t),\psi(t))\psi'(t) + v(\phi(t),\psi(t))\phi'(t)))dt = \\ = \int_\gamma (u+\imath v)(dx+\imath dy) \quad (3.7)$$

Definizione 3.2.4 *Se* γ *è una curva chiusa e regolare in un aperto* $\Omega \setminus \mathbb{C}$ *e se* $z \in \Omega \setminus \gamma$, *definiamo l'indice di* γ *rispetto a* z *(winding number) mediante la*

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (3.8)$$

Possiamo a questo proposito provare che

Teorema 3.2.2 *La funzione* $\mathrm{Ind}_z(\gamma)$ *assume solo valori interi e pertanto è una funzione costante sulle componenti connesse di* $\Omega \setminus \gamma$.

DIMOSTRAZIONE. Se consideriamo per $z_0 \neq \gamma$ la funzione

$$\phi(t) = e^{\int_a^t \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt} \tag{3.9}$$

allora

$$\phi'(t) = \phi(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0} \tag{3.10}$$

e pertanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z_0}\right) = \frac{(\gamma(t)-z_0)\phi'(t)-\phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z_0)^2} = 0 \tag{3.11}$$

Otteniamo quindi che

$$\frac{\phi(a)}{\gamma(a)-z_0} = \frac{\phi(b)}{\gamma(b)-z_0} \tag{3.12}$$

e poichè γ è una curva chiusa, cioè $\gamma(a) = \gamma(b)$, deduciamo che

$$\phi(a) = \phi(b)$$

Pertanto

$$e^{\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(b)-z_0}dt} = 1$$

e quindi si può concludere che

$$\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt = 2k\pi\imath$$

per qualche valore di $k \in \mathbb{Z}$.

□

La funzione $\mathrm{Ind}_z(\gamma)$ esprime il numero di giri, contati con segno, che la curva γ compie attorno al punto z. Ciò può essere verificato facilmente nel caso in cui si consideri

$$\gamma(t) = z + re^{2k\pi\imath t} \qquad t \in [0,1]$$

che rappresenta una circonferenza di centro z di raggio r percorsa k volte.

Usando il teorema di Green possiamo facilmente provare che

Teorema 3.2.3 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $\partial\Omega = \gamma$ la sua frontiera. Supponiamo che γ sia una curva semplice chiusa e regolare e che f sia una funzione complessa di variabile complessa di classe $\mathcal{C}^1$ allora*

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f(z)dz &= \int_\gamma (udx - vdy) + \imath(vdy + udx) = \\ &= \int_\Omega (-u_y - v_x)dxdy + \imath\int_\Omega (u_x - v_y)dxdy\end{aligned}$$

È immediata conseguenza del teorema precedente il seguente

Corollario 3.2.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $\partial\Omega = \gamma$ la sua frontiera. Supponiamo che γ sia una curva semplice chiusa e regolare e che f sia una funzione olomorfa allora*

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0 \tag{3.13}$$

In particolare

$$\mathrm{Ind}_z(\partial\Omega) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

Possiamo ora provare un risultato fondamentale dovuto a Cauchy.

Teorema 3.2.4 - Formula di Cauchy - *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $\gamma = \partial\Omega$ la sua frontiera. Sia f una funzione olomorfa di classe $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Allora per ogni $z \in \Omega$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Consideriamo la sfera S_ϵ definita da

$$S_\epsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ |\zeta - z| < \epsilon\} \tag{3.15}$$

e poniamo

$$\Omega^\epsilon = \Omega \setminus S_\epsilon \tag{3.16}$$

Poniamo inoltre

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \tag{3.17}$$

Osserviamo che g è una funzione olomorfa su Ω_ϵ, che è di classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega_\epsilon})$ e che

$$\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega - \partial S_\epsilon \tag{3.18}$$

possiamo applicare il teorema 3.2.3 per concludere che

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{\partial S_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0 \tag{3.19}$$

Poichè ∂S_ϵ può essere parametrizzata mediante la funzione

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto z + \epsilon e^{\imath\theta}$$

oteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial S_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \epsilon e^{\imath\theta})}{\epsilon e^{\imath\theta}}\imath\epsilon e^{\imath\theta}d\theta = \\ &= 2\pi\imath f(\xi_\epsilon)\end{aligned}$$

dove $\xi_\epsilon \in \partial S_\epsilon$ è scelto opportunamente.

Pertanto se consideriamo il limite per $\epsilon \to 0$ otteniamo che

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \lim_{\epsilon\to 0} 2\pi\imath f(\xi_\epsilon) = 2\pi\imath f(z) \tag{3.20}$$

e concludiamo. □

3.3 Serie di potenze e funzioni olomorfe

Procediamo con alcuni richiami sulle serie di potenze

Definizione 3.3.1 *Indichiamo con*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

una serie di potenze centrata in z_0 con coefficienti a_n.

Definiamo raggio di convergenza della serie

$$r = \sup \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \ : \ \alpha \geq 0 \ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \alpha^n < +\infty \right\}$$

definiamo inoltre cerchio di convergenza della serie il cerchio aperto C_r di centro z_0 e raggio r

È ben noto che la precedente definizione è giustificata dal fatto che una serie di potenze è assolutamente convergente entro il suo cerchio di convergenza e non è convergente fuori del suo cerchio di convergenza, mentre nulla può dirsi a priori sulla circonferenza. Più precisamente possiamo affermare che

Teorema 3.3.1 *Una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

avente raggio di convergenza r

1. *è assolutamente convergente per ogni $z \in C_r$*
2. *non è neppure semplicemente convergente se $z \notin C_r$*
3. *converge totalmente (e quindi anche uniformemente) in ogni insieme chiuso e limitato $A \subset C_r$*
4. **- Abel -***se converge in un punto $\bar{z}$ della circonferenza che delimita C_r allora è uniformemente convergente in ogni settore circolare di centro $\bar{z}$ contenuto in C_r*
5. **- Picard -** *se $r = 1$, $a_n \in \mathbb{R}$ è decrescente ed infinitesima, allora la serie converge su tutta la circonferenza unitaria centrata in z_0 eccetto al più il punto $z_0 = 1$*

Definizione 3.3.2 *Chiamiamo serie derivata di*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

È ben noto che

Teorema 3.3.2 *Una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Inoltre se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ha raggio di convergenza r, allora f è derivabile infinite volte in C_r è olomorfa e si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Pertanto la serie di Taylor di f coincide con f e quindi f è sviluppabile in serie di Taylor.

Definizione 3.3.3 *Diciamo che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è analitica su Ω se è localmente sviluppabile in serie di potenze di $(z - z_0)$ per ogni punto $z_0 \in \Omega$.*

Quanto finora esposto non differisce, se non in particolari da quanto normalmente viene detto quando si studiano le serie di potenze reali, possiamo ora aggiungere che

Teorema 3.3.3 *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una funzione olomorfa su un aperto Ω e sia $z_0 \in \Omega$ allora f è sviluppabile in serie di potenze, e quindi in serie di Taylor, centrata in z_0.*

In altre parole f è olomorfa su Ω se e solo se f è ivi analitica.

Dimostrazione.

Sia $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ e sia C_r il cerchio di centro z_0 e raggio r; sia $\Gamma_r = \partial C_r$

Usando la formula di Cauchy possiamo affermare che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \forall z \in C_r \tag{3.21}$$

D'altro canto si ha, per $\zeta \in \Gamma_r$ e per $z \in C_r$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)} \right) = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \tag{3.22}$$

Osserviamo che la serie a secondo membro è convergente se

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 - \delta \qquad 0 < \delta < 1$$

e che se consideriamo

$$|z - z_0| < (1 - \delta) r$$

poichè $|\zeta - z_0| = r$ avremo

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 - \delta$$

e quindi la serie in questione è totalmente e quindi uniformemente convergente ripetto a $z \in C_{(1-\delta)r}, \zeta \in \Gamma_r$.

Dalla 3.21 ricaviamo allora che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\imath}\left(\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z - z_0)^n \quad (3.23)$$

Ponendo ora

$$a_n = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (3.24)$$

si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

e la tesi □

Possiamo ora osservare alcuni fatti di un certo rilievo.

1. dai due teoremi precedenti deriva che $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se e solo se f si può esprimere come somma di una serie di potenze (di Taylor).
2. la 3.24 consente di ottenere una rappresentazione integrale dei coefficienti della serie di Taylor della funzione f centrata in z_0. avremo infatti
$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (3.25)$$
3. è opportuno sottolineare come sia indifferente usare i termini olomorfa e analitica, essendo il significato di quest'ultimo sviluppabile localmente in serie di potenze.

Corollario 3.3.1 - Teorema del valor medio di Gauss - *Se f è una funzione analitica sul cerchio C_r di centro z_0 e raggio r allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath\theta})d\theta \quad (3.26)$$

Dimostrazione. Segue dalla formula di Cauchy 3.14 applicata al cerchio C_r semplicemente calcolando l'integrale che vi compare □

Corollario 3.3.2 - Disuguaglianza di Cauchy - *Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, e C_r il cerchio di centro z_0 e raggio r; sia $f \in \mathcal{H}(C_r)$ allora*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n}\max_{\zeta\in\Gamma_r}|f(\zeta)| \quad (3.27)$$

Dimostrazione. Si ha dalla 3.25

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z_0 + re^{\imath\theta})|}{r^n}d\theta \leq \frac{n!}{r^n}|f(\zeta_r)| \leq \frac{n!}{r^n}\max_{\zeta\in\Gamma_r}|f(\zeta)| \quad (3.28)$$

□

Corollario 3.3.3 - Teorema di Liouville - *Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (cioè se f è intera) e $|f|$ è limitata, allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ possiamo fissare r arbitrariamente ed applicare il corollario precedente per ottenere

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n}|f(\zeta_r)| \leq \frac{n!}{r^n}\max_{\zeta\in\Gamma_r}|f(\zeta)| \leq \frac{n!}{r^n}M \tag{3.29}$$

Facendo $r \to +\infty$ si ottiene

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

e quindi lo sviluppo di Taylor di f ed f stessa si riducono al solo primo termine che è costante per cui il grado di P è nullo. □

Corollario 3.3.4 - Teorema fondamentale dell'algebra - *Ogni polinomio $P(z)$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$ ammette almeno uno zero in $\mathbb{C}$*

DIMOSTRAZIONE. Se infatti P non avesse zeri, allora $\frac{1}{P}$ sarebbe una funzione intera; poichè si può verificare che

$$\lim_{|z|\to+\infty}|P(z)| = +\infty$$

avremo che $\frac{1}{P}$ è limitata e quindi che $\frac{1}{P}$è costante. □

Teorema 3.3.4 - Teorema del massimo modulo *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ la parte interna ad una curva semplice regolare e chiusa $\gamma = \partial\Omega$. Sia f analitica su $\overline{\Omega}$, allora il massimo valore di $|f(z)|$ è assunto sulla curva $\gamma = \partial\Omega$*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$M = \max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)| = |f(z_0)|$$

(Il massimo considerato esiste in quanto f è continua e $\overline{\Omega}$ è chiuso e limitato.)

Sia C_r un cerchio di centro z_0 e di raggio r;

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z = z_0 + \rho e^{\imath\theta} \ , \ 0 \leq \rho \leq r \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Sia infine

$$R = \sup_{C_r\subset\overline{\Omega}} r$$

Osserviamo che

$$\partial C_R \cap \partial\Omega = \Gamma_R \cap \gamma \neq \emptyset$$

in quanto se così non fosse avremmo $C_R \subset \operatorname{int}\Omega$ e ciò consentirebbe di trovare $R' > R$ con $C_{R'} \subset \operatorname{int}\Omega \subset \operatorname{cl}\Omega$.

Per il teorema del valor medio 3.3.1, avremo che

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0 + Re^{\imath\theta})|d\theta \tag{3.30}$$

Se esistesse $\bar{\theta}$ tale che

$$|f(z_0 + re^{\imath\bar{\theta}})| < M \tag{3.31}$$

per la continuità di f potremmo trovare un intervallo (θ_1, θ_2) tale che

$$|f(z_0 + re^{\imath\theta})| < M \qquad \forall\theta \in (\theta_1, \theta_2) \tag{3.32}$$

e avremmo

$$\begin{aligned} |f(z_0)| \quad &\leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{\imath\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta_1} |f(z_0 + Re^{\imath\theta})|d\theta + \\ &+ \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(z_0 + Re^{\imath\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_2}^{2\pi} |f(z_0 + Re^{\imath\theta})|d\theta < M = |f(z_0)| \end{aligned}$$

e ciò non è possibile.

Pertanto $|f(z)| = M$ per ogni $z \in \Gamma_R$ e se $z_1 \in \Gamma_R \cap \gamma$, possiamo concludere che il massimo di $|f|$ è assunto anche su $\partial\Omega$. □

Teorema 3.3.5 - Teorema del minimo modulo *Se f è analitica sull'interno Ω di una curva γ semplice chiusa, $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ allora il minimo valore di $|f(z)|$ è assunto sulla curva $\gamma = \partial\Omega$*

DIMOSTRAZIONE. Poichè f è analitica in Ω ed $f(z) \neq 0$ allora $\frac{1}{|f(z)|}$ è a sua volta analitica in Ω. Per il teorema del massimo modulo $\frac{1}{|f(z)|}$ assume il suo massimo su $\partial\Omega$ e pertanto $|f(z)|$ assume il suo minimo su $\partial\Omega$. □

3.4 Funzioni analitiche e forme differenziali

Studiamo in questa parte il collegamento esistente tra funzioni analitiche e forme differenziali del primo ordine.

Definizione 3.4.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, una funzione; possiamo associare ad f due $1-$ forme differenziali su $\mathbb{R}^2$ mediante le*

$$\omega_R = udx - vdy \qquad \omega_I = vdx + udy \tag{3.33}$$

È immediato verificare, usando la definizione 3.2.3 di integrale su una linea di integrale complesso e mediante la definizione di integrale di line adi una $1-$forma (si veda l'appendice), che, se γ è una curva semplice e regolare contenuta in Ω

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \omega_R + i\int_\gamma \omega_I$$

Ricordando le condizioni di olomorfia espresse da teorema 3.2.1 (condizioni di Cauchy-Riemann), possiamo allora affermare che

Teorema 3.4.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, allora f è olomorfa se e solo se ω_R ed ω_I sono forme differenziali chiuse.*

Definizione 3.4.2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $F : \Omega \to \mathbb{C}$; diciamo che F è una primitiva su Ω di f se*

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Si può facilmente provare che

Teorema 3.4.2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, e sia $F : \Omega \to \mathbb{C}$, $F = U + \imath V$. Allora F è una primitiva di f su Ω se e solo se*

$$\nabla U = (u, -v) \qquad \nabla V = (v, u)$$

In altre parole F è una primitiva di f se e solo se la sua parte reale U e la sua parte immaginaria V sono primitive (potenziali) delle forme differenziali ω_R ed ω_I delle forme differenziali associate ad f, rispettivamente.

Dimostrazione. Si ha

$$F'z = U_x(x,y) + \imath V_x(x,y) = V_y(x,y) - \imath U_y(x,y) = u(x,y) + \imath v(x,y) \quad (3.34)$$

Pertanto

$$\begin{cases} U_x(x,y) = u(x,y) \\ U_y(x,y) = -v(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x(x,y) = v(x,y) \\ V_y(x,y) = u(x,y) \end{cases} \quad (3.35)$$

e

$$\nabla U(x,y) = (u(x,y), -v(x,y)) \qquad \nabla V(x,y) = (v(x,y), u(x,y)) \quad (3.36)$$

□

Possiamo quindi affermare che

Teorema 3.4.3 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, f ammette primitive su Ω se e solo se Ω_R ed Ω_I ivi ammettono potenziale, cioè risultano ivi $1-$forme differenziali esatte.*

Teorema 3.4.4 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, f continua; allora se f ammette primitive f è olomorfa.*

Ricordando i risultati sull'esistenza di un potenziale per le $1-$forme, (si veda l'appendice), possiamo allora concludere che

Teorema 3.4.5 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, continua; allora f ha primitive se e solo se f è olomorfa.*

Dimostrazione. Le condizioni di olomorfia di Cauchy-Riemann sono equivalenti alle condizioni di chiusura delle $1-$forme differenziali ω_R ed ω_I associate ad f per cui, vista la semplice connessione di Ω, f è olomorfa se e solo se ω_R ed ω_I ammettono potenziale, cioè se e solo se f ammette primitiva. □

Ricordando che se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un aperto, per ogni punto $z_0 \in \Omega$ esiste un cerchio

$$c_\delta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < \delta\} \subset \Omega$$

e che C_δ è semplicemente connesso, si può affermare che

Teorema 3.4.6 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, allora f ammette primitive locali (definite in un intorno di ogni punto) se e solo se f è olomorfa.*

Usando poi le formule di Green (si veda appendice) possiamo anche affermare che

Teorema 3.4.7 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, sono condizioni equivalenti:*

1. *f ammette primitive in Ω*
2. *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni curva semplice regolare e chiusa contenuta in Ω.*

Possiamo pertanto affermare che se

$$\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$$

è una cura semplice regolare tale che

$$\gamma(a) = z_0 \qquad \gamma(b) = z \qquad z_0, z \in \Omega$$

allora possiamo definire

$$F(z_0, z) = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$$

in quanto l'integrale a secondo membro dipende solo dagli estremi $z_0, z \in \Omega$.

Possiamo pertanto scrivere semplicemente

$$F(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

Quanto abbiamo appena detta consente infine di verificare facilmente che per ogni punto z_0 fissato in Ω la funzione

$$F(z) = F(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

è una primitiva di f. (Si faccia riferimento agli integrali di linea delle $1-$forme differenziali ω_R ed ω_I in $\mathbb{R}^2$).

Possiamo infine provare in questo ambito il seguente teorema.

Teorema 3.4.8 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + \imath v$, continua; allora se $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni curva semplice regolare e chiusa contenuta in Ω si ha che f ammette primitiva in Ω e quindi che f è olomorfa in Ω.*

Consideriamo infine un interessante esempio.

Sia

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

la funzione definita da

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

avremo che

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - \imath y}{x^2 + y^2}$$

per cui risulta che

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

e

$$\omega_R = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy \qquad \omega_I = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Si verifica facilmente che f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, che non è semplicemente connesso, per cui f ammette primitive locali ma non globali.

Infatti si ha che se

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$$

allora

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{\imath e^{\imath\theta}}{e^{\imath\theta}}d\theta = 2\pi\imath \neq 0$$

e, per il teorema di Morera, f non può ammettere primitive globali su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Possiamo in effetti osservare che delle due $1-$forme differenziali associate ad f, una ω_R è esatta ed ammette come potenziale la funzione

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln|z|$$

mentre la seconda ha integrale di linea non nullo su Γ_1 infatti

$$\int_{\Gamma_1} \omega_I = 2\pi$$

.

Quanto detto finora consente di costruire in $\mathbb{C}$ privato del semiasse reale positivo una famiglia di primitive locali per $\frac{1}{z}$ che possiamo indentificare nelle funzioni

$$F(z) = \ln|z| + \imath \arg z$$

Tali funzioni se opportunamente incollate per continuità danno origine ad una funzione analitica a più valori (polidroma).

3.5 Prolungamento analitico

Proviamo innanzi tutto alcuni risultati sugli zeri di una funzione analitica

Lemma 3.5.1 *Sia f una funzione analitica su un insieme $\Omega \subset \mathbb{C}$ e supponiamo che esista un punto $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = 0$ ed f non sia identicamente nulla in nessun cerchio C_ϵ di raggio ϵ centrato in z_0. Allora esiste un cerchio C_δ in cui f non si annulla in punti diversi da z_0.*

Dimostrazione. Poichè f è analitica e si annulla in z_0, il suo sviluppo di Taylor assumerà la forma

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad g(z_0) = a_0 \neq 0$$

Per la continuità di g possiamo allora affermare che $g(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 e quindi che f non si annulla in altri punti di tale intorno. □

Lemma 3.5.2 *Sia f una funzione analitica su un insieme aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$. Definiamo*

$$A = \{z \in \Omega \ : \ \exists C_\delta \subset \Omega \ , \ f(z) = 0 \ \ \forall z \in C_\delta\} \tag{3.37}$$

Sia inoltre $B = \Omega \setminus A$.

$$B = \{z \in \Omega \ : \ \forall \delta \ , \ \exists z_\delta \in C_\delta \ , \ f(z_\delta) \neq 0\} \tag{3.38}$$

Allora A e B sono uno vuoto e l'altro coincidente con Ω.

Dimostrazione. È chiaro che

$$A \cup B = \Omega \qquad A \cap B = \emptyset$$

Inoltre A è aperto per come stato definito, mentre B è aperto in quanto se $z_0 \in B$ si possono avere due possibilità:

1. $f(z_0) \neq 0$ e in questo caso $f(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 per il teorema della permanenza del segno e tale intorno è contenuto in $B = \Omega \setminus A$
2. $f(z_0) = 0$ e in questo caso il lemma precedente (3.5.1) assicura l'esistenza di un intorno in cui f non ha altri zeri (diversi da z_0), per cui ancora tale intorno è contenuto in B.

Pertanto poichè abbiamo supposto che Ω sia connesso, possiamo concludere che tra A e B uno è vuoto e l'altro è coincide con Ω □

Possiamo infine provare un teorema di identità per le funzioni analitiche.

Teorema 3.5.1 *Sia f una funzione analitica su un insieme $\Omega \subset \mathbb{C}$ e supponiamo che esista un insieme $T \subset \Omega$ che ammetta un punto di accumulazione in Ω, con $f(z) = 0$ per ogni $z \in T$. Allora*

$$f(z) = 0 \qquad \forall z \in \Omega$$

Dimostrazione. Possiamo affermare in virtù delle ipotesi fatte che esiste una successione

$$z_n \in \Omega \qquad z_n \to z_0 \in \Omega$$

e per la continuità avremo che

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = 0$$

Proviamo ora che esiste un cerchio C_δ centrato in z_0 tale che

$$f(z) = 0 \qquad \forall z \in C_\delta$$

Infatti se così non fosse avremmo, per il lemma 3.5.1, che esiste un cerchio C_ϵ centrato in z_0 in cui f non ha zeri diversi da z_0 stesso, ma ciò è impossibile in quanto $z_n \to z_0$.

Allora, per il lemma 3.5.2

$$A = \{z \in \Omega \ : \ \exists C_\delta \subset \Omega \ , \ f(z) = 0 \ \ \forall z \in C_\delta\} = \Omega \tag{3.39}$$

□

Corollario 3.5.1 *Siano Ω un aperto connesso non vuoto di $\mathbb{C}$ e sia f una funzione olomorfa in Ω; supponiamo inoltre che per ogni aperto $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ f non sia analitica in $\tilde{\Omega}$.*

Allora se $r(z_0)$ è il raggio di convergenza della serie di Taylor centrata in z_0 che rappresenta f, si ha

$$r(z_0) = \text{ dist}\,(z_0, \partial\Omega)$$

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del teorema 3.3.3 possiamo dedurre che il raggio di convergenza R della serie di Taylor di f centrata in z_0 è dato da

$$R = (1-\delta)r \qquad r < \text{dist}\,(z_0, \partial\Omega) \qquad 0 < \delta < 1$$

Poichè δ è arbitrario possiamo affermare che, tenendo conto solo del fatto che f è analitica in Ω, che almeno

$$R = r = \text{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$$

D'altro canto se

$$R > r = \text{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$$

potremmo trovare una estensione di f ad $\Omega \cup C_R$ e ciò contraddice l'ipotesi fatta. □

Definizione 3.5.1 *Siano $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ $f_2 : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, due funzioni analitiche su Ω_1, Ω_2 aperti. Sia $\Omega_{1,2} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ connesso.*

Sia

$$f : \Omega_1 \cup \Omega_2 :\to \mathbb{C}$$

definita da

$$\begin{cases} f_1(z) & z \in \Omega_1 \\ f_2(z) & z \in \Omega_2 \end{cases} \tag{3.40}$$

Per il teorema precedente, poichè è un aperto connesso, possiamo affermare che

$$f_1(z) = f_2(z) \qquad \forall z \in \Omega 1, 2$$

Diremo pertanto che F è il prolungamento analitico ad un sol valore (monodromo) sia di f_1 che di f_2.

Ora, se consideriamo la stessa situazione ma supponiamo che

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_{1,2} \cup \Omega_{2,1}$$

con $\Omega_{1,2}, \Omega 2, 1$ aperti non vuoti, no saremo più in grado di applicare il precedente risultato in quanto $\Omega_1 \cap \Omega_2$ non è più un insieme connesso.

In tal caso infatti non è più assicurato che $f_1(z) = f_2(z)$ sull'intersezione dei domini.

Se però ciascuno, tra Ω_1 ed Ω_2 è connesso, potremo ottenere due distini prolungamenti su

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \setminus \Omega_{1,2}$$

oppure su

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \setminus \Omega_{2,1}$$

per cui su $\Omega_{2,1}$ nel primo caso e su $\Omega_{1,2}$ nel secondo la funzione ottenuta assumerà due valori.

Si è in questo modo condotti alla necessità di considerare funzioni analitiche che assumano più valori nel loro dominio di definizione. Chiameremo tali funzioni polidrome per contrasto con le funzioni monodrome, ad un sol valore.

Sono esempi di funzioni polidrome le funzioni

$$f(z) = z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\imath \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$f(z) = \ln|z| + \imath arg(z) = \ln\rho + \imath(\theta + 2k\pi)$$

È altresì importante considerare il concetto di prolungamento analitico attraverso una frontiera.

La situazione che si considera è la seguente: siano Ω_1 ed Ω_2 due insiemi aperti connessi aventi in comune una parte $\Gamma_{1,2}$ di frontiera.

Siano poi

$$f_1 : \overline{\Omega_1} \to \mathbb{C} \qquad f_2 : \overline{\Omega_2} \to \mathbb{C}$$

due funzioni analitiche continue; allora la funzione F definita da

$$\begin{cases} f_1(z) & z \in \Omega_1 \cup \Gamma_{1,2} \\ f_2(z) & z \in \Omega_2 \cup \Gamma_{1,2} \end{cases} \tag{3.41}$$

è ovviamente continua esi può verificare che è analitica su $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{1,2}$.

Infatti se definiamo

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \in_{\Gamma_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{3.42}$$

ove

$$\Gamma_0 = \partial C_0 \qquad C_0 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leq \delta\} \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{1,2}$$

possiamo verificare facilmente i seguenti fatti:

1. Φ è analitica sull'interno di C_0; infatti Φ è definita da un integrale che si può trattare, considerandone separatamente parte reale e parte immaginaria, mediante i ben noti risultati sugli integrali dipendenti da un parametro in $\mathbb{R}^2$.

2. Sia ha

   $$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \in_{\Gamma_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi\imath} \in_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{1,2}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi\imath} \in_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{1,2}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

   essendo $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cap \Omega_1$ e $\Gamma_2 = \Gamma_0 \cap \Omega_2$ ed essendo $\Gamma_{1,2}$ percorsa in versi opposti nei due percorsi di integrazione.

   Pertanto, per il teorema di Cauchy uno dei due integrali è nullo e l'altro è uguale ad $f_1(z)$ o ad $f_2(z)$ a seconda che $z \in \Omega_1$ oppure che $z \in \Omega_2$

Ne possiamo concludere che Φ è il prolungamento analitico di f_1 e di f_2.

La possibilità di prolungare analiticamente un funzione consente di estendere la definizione di funzioni elementari come

$$e^x \qquad \sin x \qquad \cos x \qquad \ln x$$

anche al piano complesso.

Si può ad esempio vedere che le funzioni

$$e^x \qquad \sin x \qquad \cos x$$

possono essere estese all'intero piano complesso semplicemente adottando come loro definizione il loro sviluppo in serie di potenze.

Poichè tale sviluppo ha raggio di convergenza infinito se ne deduce che tali funzioni sono funzioni intere.

Non così accade, ad esempio per $\ln x$ la cui estensione è una funzione analitica a più valori.

3.6 Serie di Laurent

Abbiamo già visto che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

rappresenta una funzione analitica in un cerchio C_R di centro z_0 e raggio R.

D'altro canto se consideriamo

$$g(z) = f\left(z_0 + \frac{1}{z - z_0}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

otteniamo una funzione analitica nell'insieme D_R complementare di C_R in $\mathbb{C}$.

Delle due funzioni, f è regolare su un insieme limitato che contiene z_0, mentre g è regolare su insieme D_R che non contiene z_0 ma è non limitato.

Possiamo a questo punto pensare di rappresentare una funzione f mediante la somma di due funzioni del tipo f e g.

Ciò può essere fatto provando il seguente teorema.

Teorema 3.6.1 *Sia f una funzione analitica su una corona circolare*

$$A_r^R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r < |z - z_0| < R\}$$

e sia $\partial A_r^R = \Gamma_R - \Gamma_r$ dove l'orientamento delle circonferenze Γ_R e Γ_r è espresso dal segno che le precede; allora

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

dove

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ a_{-n} &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\xi - z_0)^{-n-1}} d\xi \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo applicare la formula di Cauchy 3.14 alla funzione f sulla corona circolare A_r^R per ottenere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\left(\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right) \tag{3.43}$$

$$= \frac{1}{2\pi\imath}\left(\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)}{z - \xi}d\xi\right) \tag{3.44}$$

$$\tag{3.45}$$

Poichè

$$|\xi - z_0| = r < |z - z_0| < R = |\zeta - z_0|$$

possiamo affermare che

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}\right) = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \tag{3.46}$$

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{z - z_0}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)}\right) = \frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n \tag{3.47}$$

$$\tag{3.48}$$

e quindi che

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z - \xi} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\xi - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Se osserviamo , come nel teorema 3.3.3 le serie considerate sono convergenti per

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1 - \delta \qquad \left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1 - \delta \qquad 0 < \delta < 1$$

e che se consideriamo

$$\frac{1}{1 - \delta}r < |z - z_0| < (1 - \delta)R$$

avremo che, essendo

$$|\zeta - z_0| = R \qquad |\xi - z_0| = r$$

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1 - \delta \qquad \left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1 - \delta \tag{3.49}$$

e quindi la serie in questione è totalmente e quindi uniformemente convergente ripetto a z, ζ, ξ.

Sostituendo nella 3.43 ricaviamo allora che

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\Gamma_R} f(\zeta) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n \\
\int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi &= \int_{\Gamma_r} f(\xi) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
&= \sum_{n-\infty}^{-1} \left(\int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n
\end{aligned}$$

Ponendo ora

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathcal{D}\zeta \\
a_{-n} &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi
\end{aligned}$$

si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

e la tesi □

Passiamo ad esaminare ora i punti in cui f non risulta regolare; chiameremo tali punti punti di singolarità. più precisamente si ha

Definizione 3.6.1 *Diciamo che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una singolarità isolata per una funzione complessa di una variabile complessa f se*

1. *f è analitica in un intorno bucato di z_0*
2. *f non è analitica in z_0*

Inoltre, se z_0 è una singolarità isolata per la funzione f, allora, detti a_n i coefficienti di Laurent di f relativi ad una corona circolare A_r^R centrata in z_0.

1. *z_0 è una singolarità eliminabile se*

   $$a_{-n} = 0 \qquad \forall n > 0$$

   ad esempio $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

2. *z_0 è un polo di ordine m se*

   $$a_{-m} \neq 0 \qquad a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$$

   In questo caso la funzione

   $$g(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

   si indica col nome di parte principale di f. Chiaramente $f = g$ è una funzione analitica. Ad esempio $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$.

3. *z_0 è una singolarità essenziale se*

$$a_{-n} \neq 0 \quad \forall n > 0$$

ad esempio $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.

Possiamo anche enunciare i seguenti criteri per la classificazione delle singolarità isolate.

Se $z_0 \in \mathbb{C}$ è una singolarità isolata per una funzione complessa di una variabile complessa f allora

1. z_0 'e una singolarità eliminabile se e solo se

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

esiste finito.

2. z_0 è un polo di ordine m se e solo se

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

esiste finito

3. affinchè z_0 sia una singolarità eliminabile è sufficiente che f sia limitata in un intorno di z_0; infatti se esistesse $n > 0$ tale che $a_{-n} \neq 0$ f non potrebbe essere limitata

4. se f è una funzione continua da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ olomorfa in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{C}$ allora f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ cioè è una funzione intera.

   Per provare questa affermazione è sufficiente verificare che l'integrale di f sulla frontiera di un rettangolo R nel piano complesso è nullo.

   Ciò è evidente se il rettangolo è interamente contenuto in uno dei due semipiani individuati dall'asse reale e si può verificare mediante un passaggio al limite su due rettangoli con lati paralleli agli assi a distanza ϵ dall'asse reale.

Definizione 3.6.2 *Chiamiamo residuo di f in z_0 il valore*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_r} f(\xi) d\xi$$

Teorema 3.6.2 *Possiamo enunciare i seguenti fatti:*

1. *se z_0 è una singolarità eliminabile allora*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$$

2. *se z_0 è un polo di ordine 1 allora*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

3. *se*
$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$
e se z_0 è un polo semplice per f con $\psi(z_0) = 0$ zero, semplicee $\phi(z_0) \neq 0$ allora
$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

4. *se z_0 è un polo di ordine $m \geq 1$ per f, posto*
$$h(z) = (z - z_0)^m f(z)$$
con h olomorfa e non nulla in z_0 si ha
$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{h^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

DIMOSTRAZIONE. Le prime due affermazioni sono completamente evidenti; per provare la terza è sufficiente scrivere gli sviluppi di ϕ e ψ, mentre la quarta si prova non appena si osservi che
$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_r} f(\xi)d\xi = \int_{\Gamma_r} \frac{h(\xi)}{(\xi - z_0)^m}d\xi = \frac{h^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$
essendo l'ultima uguaglianza conseguenza della 3.25. □

Possiamo infine provare il teorema dei residui.

Teorema 3.6.3 - dei Residui - *Sia f una funzione su un insieme $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso, e supponiamo che f sia analitica su Ω tranne che per un numero finito di singolarità isolate*
$$S = \{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n\}$$
Supponiamo che γ sia la frontiera di un compatto $K \subset \Omega$ con $S \subset K$. Allora
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_{z_k}(\gamma)\mathrm{Res}\,(f, z_k) \tag{3.50}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si basa sulla seguente uguaglianza
$$\int_\gamma (z - z_k)^m dz = \begin{cases} 2\pi\imath \mathrm{Ind}_{z_k}(\gamma) & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases} \tag{3.51}$$

La 3.51 si riduce alla pura definizione di numero indice della curva γ nel caso in cui $m = -1$, mentre per $m \neq -1$ basta osservare che, posto
$$g(t) = (\gamma(t) - z_k)^{m+1}$$
si ha
$$\begin{aligned} \int_\gamma (z - z_k)^m dz &= \int_a^b (\gamma(t) - z_k)^m \gamma'(t)dt = \frac{1}{m+1}\int_a^b g'(t)dt = \\ &= \frac{1}{m+1}[g(b) - g(a)] = 0 \end{aligned}$$

Per dimostrare il teorema dei residui è sufficiente ora osservare che, se f_k indica la parte principale di f in z_k, allora f_k è analitica tranne che in z_k; pertanto $f - f_1$ è analitica tranne che in $z_2, z_3, \dots z_n$, $f - f_1 - f_2$ è analitica tranne che in $z_3, z_4, \dots z_n$, ed $f - \sum_k f_k$ è analitica ovunque.

Per la formula di Cauchy si ottiene allora che

$$\int_\gamma (f(z) - \sum_k f_k(z))dz = 0$$

e

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_k \int_\gamma f_k(z)dz$$

Esprimendo ciascuna delle f_k in serie di Laurent centrata in z_k ed usando la 3.51 possiamo concludere. □

3.7 Qualche applicazione del teorema dei residui

Diamo ora alcuni esempi di come il teorema dei residui permetta di calcolare alcuni integrali significativi.

Esempio 3.7.1 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$$

- Si consideri la curva $\Gamma_R = \gamma_R \cup [-R, R]$ dove γ_R è la ssemicirconferenza di centro l'origine e raggio R percorsa in senso antiorario e $[-R, R]$ è il segmento di retta reale. Si ha

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6+1}dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^6+1}dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{z^6+1}dz$$

Ma

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^6+1}dz = \int_0^\pi \frac{1}{R^6 e^{\imath 6\theta}+1} R\imath e^{\imath\theta} d\theta$$

e, tenuto conto che, $|a+b| \geq |a| + |b|$,

$$\left|\frac{1}{R^6 e^{\imath 6\theta}+1}\right| \leq \frac{1}{R^6-1} \leq \frac{2}{R^6} \to 0 \qquad \text{se} \quad R \to +\infty$$

si ha

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^6+1}dz\right| \leq \pi R \frac{2}{R^6} \to 0 \qquad \text{se} \quad R \to +\infty$$

Ne deduciamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}dx = \lim_R \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^6+1}dx = \lim_R \int_{-R}^{R} \frac{1}{z^6+1}dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^6+1}dz = 2\pi\imath \sum_k Res\left(\frac{1}{z^6+1}, z_k\right) \quad (3.52)$$

dove z_k descrive l'insieme delle singolarità di $\frac{1}{z^6+1}$.

Considerato che $z^6+1=0$ se $z=\pm\imath$ e che gli altri zeri sono posti sui vertici di un esagono regolare con vertici in $\pm\imath$, possiamo facilmente osservare che le singolarità contenute nella regione di piano complesso delimitata dalla curva Γ_R sono

$$z_1 = e^{\imath\pi/6} \qquad z_2 = e^{\imath\pi/2} \qquad z_3 = e^{\imath 5\pi/6}$$

e che tali singolarità sono poli semplici.

Per calcolare i residui relativi a tali singolarità possiamo usare il teorema 3.6.2 e la regola di De l'Hôpital per ottenere che

$$Res\left(\tfrac{1}{z^6+1}, z_1\right) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\tfrac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to z_1}\tfrac{1}{6z^5} = \tfrac{1}{6}e^{-\imath 5\pi/6} \quad (3.53)$$

$$Res\left(\tfrac{1}{z^6+1}, z_2\right) = \tfrac{1}{6}e^{-\imath 5\pi/2} \quad (3.54)$$

$$Res\left(\tfrac{1}{z^6+1}, z_2\right) = \tfrac{1}{6}e^{-\imath 25\pi/2} \quad (3.55)$$

Tenendo conto della forma trigonometrica dei numeri complessi è immediato ottenere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = \int_{\gamma_R}\frac{1}{z^6+1}dz = 2\pi\imath\sum_k Res\left(\frac{1}{z^6+1}, z_k\right) = \frac{2}{3}\pi$$

□

Possiamo anche osservare che dallo svolgimento dei calcoli di cui sopra possiamo enucleare un eneunciato che consente di estendere il procedimento usato anche ad altre situazioni.

- Se

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^k} \qquad \text{per} \qquad z = Re^{\imath\theta} \quad M>0 \quad k>1$$

allora

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

dove γ_R è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio R orientata in senso antiorario.

Infatti si ha

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

□

Esempio 3.7.2 *Calcolare*

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta} \qquad a>b>0$$

- Posto $z=e^{\imath\theta}$ ed osservato che

$$\sin\theta = \frac{z-1/z}{2\imath} \qquad \cos\theta = \frac{z+1/z}{2}$$

si ha

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \int_\Gamma \frac{dz/\imath z}{a+\frac{b(z-1/z)}{2\imath}} = \int_\Gamma \frac{2}{bz^2+2a\imath z-b}dz$$

dove Γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

La funzione integranda ha due poli semplici

$$z_1 = \imath\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \qquad z_2 = \imath\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

dei quali per $a > b > 0$ solo il primo è contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio unitario.

Si calcola facilmente che

$$Res\left(\frac{2}{bz^2+2a\imath z-b}, z_1\right) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{2}{bz^2+2a\imath z-b} = \frac{1}{\imath\sqrt{a_2-b^2}}$$

per cui

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\imath\pi}{\imath}\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

□

Esempio 3.7.3 *Se* $|f(z)| \le \frac{M}{R^k}$ $\quad M > 0 \quad k > 0$ *allora*

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{\imath mz}dz\right| \to 0 \qquad se \qquad R \to +\infty$$

- Si ha

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{\imath mz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{\imath Rme^{\imath\theta}}\imath Re^{\imath\theta}d\theta\right| \le$$

$$\le \int_0^{\pi}\frac{M}{R^k}\left|e^{\imath Rm\cos\theta - mR\sin\theta}\imath Re^{\imath\theta}\right|d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{M}{R^k}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta \le \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin\theta}d\theta \le$$

$$\le \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2}e^{-mR2\theta/\pi}d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}}[1-e^{-mR}]\frac{\pi}{2mR} \to 0 \quad (3.56)$$

per $R \to +\infty$, non appena si ricordi che

$$\sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi} \qquad \theta \in [0, \pi/2]$$

□

Usando il precedente risultato si verifica subito che

Esempio 3.7.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\imath mx}}{x^2+1}dx = \pi e^{-m}$$

- Se come prima $\Gamma_R = \gamma_R \cup [-R, R]$ dove γ_R è la ssemicirconferenza di centro l'origine e raggio R percorsa in senso antiorario e $[-R, R]$ è il segmento di retta reale, avremo che

$$\int_{\Gamma_R}\frac{e^{\imath mz}}{z^2+1}dz = 2\pi\imath Res\left(\frac{e^{\imath mz}}{z^2+1}, \imath\right) =$$

$$= 2\pi\imath\lim_{z\to\imath}(z-\imath)\frac{e^{\imath mz}}{z^2+1} = 2\pi\imath\lim_{z\to\imath}\frac{e^{\imath mz}}{z+\imath} = 2\pi\imath\frac{e^{-m}}{2\imath} = e^{-m}\pi \quad (3.57)$$

Pertanto

$$e^{-m}\pi = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{\imath mx}}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{\imath mz}}{z^2+1}dz$$

e per l'esempio 3.7.3 si ha che il secondo integrale è infinitesimo per $R \to +\infty$ □

Esempio 3.7.5

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

- Consideriamo il percorso di integrazione Γ composto dalla semicirconferenza γ_R di raggio R centrato nell'origine del piano complesso, orientata in senso antiorario, dal segmento $[-R, -\epsilon]$, dalla semicirconferenza γ_ϵ di centro l'origine e raggio ϵ percorsa in senso orario, e dal segmento $[\epsilon, R]$.

Avremo che

$$\int_\Gamma \frac{e^{\imath z}}{z}dz = 0$$

per cui

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{\imath x}}{x}dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{\imath z}}{z}dz + \int_\epsilon^R \frac{e^{\imath x}}{x}dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{\imath z}}{z}dz = \\ + \int_\epsilon^R \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{x}dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{\imath z}}{z}dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{\imath z}}{z}dz = \\ = 2\imath \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}dx - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{\imath z}}{z}dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{\imath z}}{z}dz \end{aligned} \quad (3.58)$$

Se $R \to +\infty$ allora

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{\imath z}}{z}dz \to 0$$

mentre

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{\imath z}}{z}dz = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\pi^0 e^{\imath \epsilon e^{\imath\theta}} \imath d\theta = -\pi\imath$$

Ne deduciamo che

$$0 = 2\imath \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}dx - \pi\imath \quad (3.59)$$

e quindi la tesi. □

Esempio 3.7.6 -Teorema dell'argomento- *Sia f una funzione analitica in un insieme Ω aperto semplicemente connesso ed ivi ammetta un polo $z = \alpha$ di ordine p ed uno zero $z = \beta$ di ordine n.*

Allora

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - p$$

- Siano Γ_α e Γ_β due circonferenze centrate in α e β, rispettivamente, di raggio abbastanza piccolo da assicurare che siano interamente contenute in Ω.

Avremo

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{\Gamma_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\Gamma_\beta} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

Ora poichè f ammette in $z = \alpha$ un polo di ordine p, avremo che

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p}$$

e possiamo ricavare che

$$\ln \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p} = \ln F(z) - p\ln(z-\alpha)$$

da cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}$$

e

$$\int_{\Gamma_\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{\Gamma_\alpha} \frac{F'(z)}{F(z)} - \int_{\Gamma_\alpha} \frac{p}{z-\alpha} = -2\pi\imath p$$

D'altro canto f ammette in $z = \beta$ uno zero di ordine n per cui avremo che

$$f(z) = G(z)(z-\beta)^n$$

e possiamo ricavare che

$$\ln G(z)(z-\beta)^n = \ln G(z) + n\ln(z-\beta)$$

da cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{n}{z-\beta}$$

e

$$\int_{\Gamma_\beta} \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{\Gamma_\beta} \frac{G'(z)}{G(z)} + \int_{\Gamma_\beta} \frac{n}{z-\beta} = 2\pi\imath n$$

Ne segue banalmente l'asserto. □

Appendice A

Serie di Potenze

A.1 Serie di Taylor

Vogliamo qui considerare un particolare tipo di serie di funzioni che permette di estendere il concetto di polinomio di Taylor.

Definizione A.1.1 *Sia $f_n \in \mathcal{C}^\infty((a,b))$ e sia $x_0 \in (a,b)$; possiamo allora considerare la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{A.1}$$

Se esiste $\delta > 0$ tale che in $I_\delta = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ la serie A.1 è puntualmente convergente ed inoltre la sua somma è ivi coincidente con f, allora f si dice sviluppabile in serie di Taylor in I_δ e la A.1 si dice sviluppo in serie di Taylor della funzione f nel punto x_0, in I_δ

Osserviamo che può accadere che la serie A.1 sia convergente senza che f sia sviluppabile in serie di Taylor. Se infatti consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si ha che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$, e pertanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0 \neq f(x) \forall x \neq 0.$$

Diamo ora alcuni criteri di sviluppabilità in serie di Taylor.

Teorema A.1.1 *Sia $f \in \mathcal{C}^\infty((a,b))$ e sia $x_0 \in (a,b)$; allora*

1. *se $|f^{(k)}(x)| \leq HM^k \forall x \in (a,b)$, $\forall k \in \mathbf{N}$ f è sviluppabile in serie di Taylor in (a,b);*
2. *se $|f^{(k)}(x)| \leq HM^k k! \ \forall x \in (a,b)$, $\forall k \in \mathbf{N}$ f è sviluppabile in serie di Taylor in $(x_0 - 1/M, x_0 + 1/M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Detta S_n la ridotta di ordine n della serie di Taylor ed osservando che essa coincide col polinomio di Taylor di ordine n si ha

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \quad \textit{dove } \xi \in (a, b).$$

Pertanto, nel primo caso si ha

$$|f(x) - S_n(x)| \leq H \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall x \in (a, b)$$

mentre, nel secondo caso

$$|f(x) - S_n(x)| \leq H(M|x - x_0|)^{n+1} \qquad \forall x \in (a, b).$$

Si può concludere osservando che in entrambi i casi i secondi membri tendono a zero, nelle ipotesi considerate. □

I criteri di cui sopra permettono di trovare facilmente gli sviluppi di e^x, $\sin x$, $\cos x$.

È anche possibile fornire un criterio di sviluppabilità in serie di Taylor facendo uso della formula di Taylor con il resto in forma integrale. È importante però osservare che tale criterio fornisce una informazione solo unilaterale e cioè solo a destra del punto x_0, centro della serie di Taylor.

Teorema A.1.2 - Bernstein - *Sia $f \in C^\infty((a, b))$ e siano $x_0, \alpha \in (a, b), x_0 < \alpha$. Se supponiamo che $f^{(k)}(x) \geq 0$ e se $x_0 \leq x \leq \alpha$. Allora f è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 in $[x_0, \alpha]$*

DIMOSTRAZIONE. Dalla formula di Taylor con il resto integrale si ottiene

$$f(x) = S_n + R(x)$$

con

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt = \\ &= \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - S)^n f^{(n+1)}(x_0 + S(x - x_0))ds \end{aligned} \tag{A.2}$$

Pertanto, tenendo conto che ogni $f^{(k)}$ è positiva e crescente in $[x_0, \alpha]$ si ha per $x_0 \leq x \leq \alpha$

$$\begin{aligned} f(\alpha) \geq R_n(\alpha) &= \frac{(\alpha - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - S)^n f^{(n+1)}(x_0 + S(\alpha - x_0))ds \geq \\ &\geq \left(\frac{\alpha - x_0}{x - x_0}\right)^{n+1} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - S)^n f^{n+1}(x_0 + s(x - x_0))ds = \\ &= \left(\frac{\alpha - x_0}{x - x_0}\right)^{n+1} R_n(x). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Se ne deduce che

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x - x_0}{\alpha - x_0}\right)^{n+1} f(\alpha)$$

e $\lim R_n(x) = 0$

□

Usando il teorema precedente si può provare che la serie binomiale converge in $[-1, 0]$.

A.2 Le serie di potenze

In questo paragrafo considereremo le serie i cui termini generali sono nella forma

$$f_k(x) = a_k(x - x_0)^k \qquad a_k, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che f_k è una potenza, le serie aventi termine generale siffatto si indicano usualmente con il nome di serie di potenze.

Supporremo che le funzioni considerate siano definite in $\mathbb{C}$ a valori in $\mathbb{C}$, ma ciò non comporta sensibili aggravi rispetto al caso reale mentre permette di far luce anche su aspetti meno noti riguardanti le serie di potenze.

Osserviamo, innanzi tutto, che se

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

è una funzione complessa di una variabile complessa, si ha

$$f(z) = f(x + iy) = \phi(z) + i\psi(z).$$

Si definirà pertanto

$$\sum f_k(z) = \sum \phi_k(z) + i \sum \psi_k(z)$$

ed è facile vedere che

$\sum f_k$ converge (puntualmente, assolutamente, uniformemente, totalmente) se e solo se $\sum \phi_k$ e $\sum \psi_k$ convergono (puntualmente, assolutamente, uniformemente, totalmente).

Osserviamo anche che si ha

$$|f_k(z)| \leq [\phi_k^2(z) + \psi_k^2(z)]$$

e che pertanto il concetto di convergenza assoluta è adeguato alla definizione di modulo di un numero complesso. Tuttavia, tenuto conto che

$$|\phi_k(z)| \leq |f_k(z)| \quad , \quad |\psi_k(z)| \leq |f_k(z)|$$

non è difficile convincersi che, anche in questo caso, la convergenza assoluta implica la convergenza puntuale, ma non viceversa.

Osserviamo infine che i concetti di convergenza uniforme e totale restano invariati con la sola differenza che l'uniformità è da intendersi rispetto alla variabile z o rispetto alla coppia (x, y).

Fatte queste premesse possiamo porre la seguente definizione.

Definizione A.2.1 *Sia $a_k \in \mathbb{C}$ e consideriamo la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{A.4}$$

dove $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

La serie A.4 si chiama serie di potenze con centro nel punto z_0 e gli a_k si dicono coefficienti della serie.

E' chiaro che a meno di una traslazione possiamo sempre supporre che $z_0 = 0$ e pertanto considereremo soltanto serie di potenze centrate nell'origine e cioè della forma:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

con la tacita convenzione che quanto proveremo per tali serie è provato anche per la serie della forma A.4.

Per le serie di potenze è sempre possibile trovare un cerchio entro il quale la serie converge assolutamente e al di fuori del quale la serie non converge; nulla si può tuttavia asserire a riguardo del carattere della serie nei punti della circonferenza di tale cerchio.

Teorema A.2.1 *Consideriamo*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k;$$

esiste $R \in [0, +\infty]$ *tale che*

- $\sum a_k z^k$ *converge assolutamente se* $|z| < R$*;*
- $\sum a_k z^k$ *non converge se* $|z| > R$ *.*

L'insieme $C_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\}$ *si chiama cerchio di convergenza della serie di potenze;* R *è il raggio di convergenza della serie stessa.*

Dimostrazione. Definiamo

$$R = \sup\{\alpha \geq 0 : \sum |a_k|\alpha^k < +\infty\} = \sup I_R.$$

Sia ora $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, allora esiste $\alpha \in I_R$ tale che

$$|z| < \alpha < R$$

e pertanto

$$|a_k z^k| \leq |a_k|\alpha^k$$

e $\sum a_k z^k$ è assolutamente convergente.

Sia invece $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ e supponiamo per assurdo che $\sum a_k z^k$ sia convergente. Allora, se $w \in \mathbb{C}$ è scelto in modo che $R < |w| < |z|$, si ha

$$a_k w^k = a_k z^k (w/z)^k.$$

Ora dal momento che $\sum a_k z^k$ è convergente, si ha $\lim a_k z^k = 0$ e

$$|a_k z^k| \leq M$$

per cui

$$|a_k||w|^k = |a_k w^k| \leq M(|w|/|z|)^k$$

e, poiché $|w|/|z| < 1$, la serie dell'ultimo membro è convergente, da cui $|w| \in I_R$.

Ciò è contro la definizione di sup . □

Teorema A.2.2 *Consideriamo $\sum a_k z^k$ e sia C_R il suo cerchio di convergenza, allora la serie converge totalmente, e quindi uniformemente in ogni cerchio chiuso contenuto in C_R .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 < R_1 < R$ e sia $\alpha \in I_R$ tale che $R_1 < \alpha < R$; se $|z| \leq R_1$ si ha

$$|a_k z^k| \leq |a_k| R_1^k < |a_k| \alpha^k \quad ,$$

e si conclude usando il teorema □

Osserviamo che nulla si può dire sul comportamento della serie quando $|z| = R$.

Consideriamo infatti

$$\sum z^k \quad , \quad \sum \frac{z^k}{k} \quad , \quad \sum \frac{z^k}{k^2}.$$

E' facile vedere che in tutti i casi $R = 1$, ma nel primo caso la serie non è convergente $\forall z$, $|z| = 1$; nel secondo caso se $z = -1$ converge e se $z = 1$ diverge; nel terzo caso la serie converge $\forall z$, $|z| = 1$.

Nel secondo caso è possibile vedere, facendo uso di un teorema che dimostreremo tra poco, che c'è convergenza in tutti i punti del cerchio $|z| = 1$ diversi da $z = 1$.

Passiamo ora a provare, usando il lemma 19.22, che può essere riscritto senza difficoltà anche se $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, un notevole risultato di convergenza uniforme per le serie di potenze.

Teorema A.2.3 - Abel - *Consideriamo $\sum a_k z^k$ e sia $R \in \mathbb{R}_+$ il suo raggio di convergenza.*

Se la serie converge in z_0 con $|z_0| = R$ e se T è un settore circolare di centro z_0, delimitato da due raggi uscenti da z_0 e interni al cerchio di convergenza, allora $\sum a_k z^k$ converge uniformemente in T.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con il supporre $R = 1$, in quanto è sempre possibile ricondursi a questo caso a meno di considerare z/R in luogo di z, e supponiamo anche $z_0 = 1$; cosa sempre possibile a meno di una rotazione.

Il settore T sarà pertanto costituito dai punti

$$z = 1 - \rho e^{i\theta} \quad , \quad con \quad \rho \leq r_0 \quad e \quad |\theta| \leq \sigma$$

essendo σ ed r_0, ampiezza e raggio del settore, scelti in modo che

$$0 \leq \sigma < \pi/2 \quad , \quad 0 < r_0 < 2 \cos \sigma \quad ,$$

Per l'uguaglianza del lemma 19.22 si ha, posto

$$A_{n,p} = \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \quad ,$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \; = A_{n,p} \; z^{n+p} \; + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n,k-n} \; (z^k - z^{k+1}) \; =$$

$$= A_{n,p} \; z^{n+p} \; + \; (1 - z) \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n,k-n} \; z^k \quad \text{(A.5)}$$

Ora, dal momento che $\sum a_k$ è convergente, se $n > n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$, si ha $A_{n,p} < \varepsilon$ e pertanto, se $n > n_\varepsilon$ e $z \in T$, si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \right| \leq \varepsilon + \varepsilon|1-z| \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^k = \varepsilon \left(1 + \frac{|1-z|}{1-|z|}\right) = \\ = \varepsilon \left(1 + (1+|z|)\frac{|1-z|}{1-|z|^2}\right) \quad \text{(A.6)}$$

Poiché $z \in T$

$$1 - z = \rho e^{i\theta} \quad con \quad |\theta| < \sigma \quad e \quad \rho < r_0$$

da cui

$$|1-z| = \rho.$$

D'altra parte

$$|z|^2 = |1 - \rho\cos\theta - \rho i \sin\theta\ |^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta$$

e

$$1 - |z|^2 = -\rho^2 + 2\rho\cos\theta = \rho(2\cos\theta - \rho)$$

per cui

$$\frac{|1-z|}{1-|z|^2} = \frac{1}{2\cos\theta - \rho} \leq \frac{1}{2\cos\sigma - r_0}.$$

Ne viene che, se $z \in T$ e se $n > n_\varepsilon$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \right| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{2\cos\sigma - r_0}\right)$$

e pertanto è provato che $\sum a_k z^k$ converge uniformemente in T. □

Vale anche il seguente risultato dovuto a Picard che fa luce sul comportamento delle serie di potenze sulla circonferenza che delimita il cerchio di convergenza.

A questo scopo è sufficiente usare il criterio di Dirichlet ed osservare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{\cos\theta/2 - \cos(n\theta+\theta/2)}{2\sin\theta/2} \\ \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\theta/2 + \sin(n\theta+\theta/2)}{2\sin\theta/2} \end{cases} \qquad 0 < \theta < 2\pi \qquad \text{(A.7)}$$

Si ha infatti

$$\cos(k\theta + \theta/2) - \cos(k\theta - \theta/2) = -2\sin k\theta \sin\theta/2$$

e

$$\sin(k\theta + \theta/2) - \sin(k\theta - \theta/2) = 2\cos k\theta \sin\theta/2$$

da cui sommando per $k = 0, .., n$, si ottengono le uguaglianze descritte.

Si può con ciò provare il seguente teorema

Teorema A.2.4 - Picard - *Sia $\sum a_k z^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza uguale ad 1; se a_k è decrescente e $\lim a_k = 0$ si ha che $\sum a_k z^k$ è convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$, escluso al più il punto $z = 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha, per $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$,

$$\sum a_k z^k = \sum a_k \cos k\theta \ + i \sum a_k \sin k\theta$$

e si può concludere tenendo presenti le A.7 e la disuguaglianza di Brunacci-Abel. □

Considerando $a_k = 1/k$ ci si convince facilmente, come era già stato precedentemente affermato, che

$$\sum \frac{z^k}{k} \quad \textit{converge per } |z| = 1,\ z \neq 1$$

ed inoltre si vede che se $z = 1$ la serie non converge.

Passiamo ora a caratterizzare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Teorema A.2.5 *Sia* $\sum a_k z^k$ *e supponiamo che* R *sia il suo raggio di convergenza; allora*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

$$R = \frac{1}{\limsup \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}}$$

DIMOSTRAZIONE. Se

$$|z| < R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

possiamo affermare che, definitivamente,

$$\limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leq \alpha < 1$$

e pertanto

$$|a_k z^k| < \alpha^k$$

e

$$\sum_k |a_k z^k| < \alpha^k < +\infty$$

Se viceversa

$$|z| > R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

possiamo affermare che esiste una successione k_h per cui

$$\limsup \sqrt[k_h]{|a_{k_h}|} \geq \alpha > 1$$

e pertanto

$$|a_{k_h} z^{k_h}| > \alpha^{k_h}$$

e

$$|a_{k_h} z^{k_h}| > \alpha^{k_h} \to +\infty$$

□

Vediamo ora di dare alcuni risultati di regolarità per la somma di una serie di potenze. Più precisamente dimostriamo che la somma di una serie di potenze è derivabile infinite volte in senso complesso, che è sviluppabile in serie di Taylor

nel punto in cui è centrata la serie e che il suo sviluppo di Taylor coincide con la serie stessa.

Ciò consente tra l'altro di affermare, qualora si conosca lo sviluppo in serie di potenze di una funzione, che tale sviluppo è anche lo sviluppo di Taylor della serie stessa.

Ricordiamo ancora che stiamo operando su funzioni definite sui complessi a valori nei complessi e ricordiamo brevemente che

Teorema A.2.6 *Consideriamo $\sum a_k z^k$ e supponiamo che R sia il suo raggio di convergenza, definiamo inoltre*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Allora f è derivabile e si ha

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1} \quad , \ per \ |z| < R;$$

inoltre il raggio di convergenza della serie delle derivate è uguale ad R.

Dimostrazione. Proviamo che, detti C e C' i cerchi in cui la serie e la sua derivata rispettivamente convergono, si ha $C = C'$.

Intanto, dal momento che

$$|a_k z^k| \leq |k a_k z^{k-1}| \quad per \quad k \geq |z| \ ,$$

si ha $C' \subset C$.

Sia viceversa $z \in C$, allora esiste $w \in C$ tale che $|w| > |z|$ e pertanto

$$|k a_k z^{k-1}| \leq |a_k w^{k-1}| k \left(\frac{|z|}{|w|} \right)^{k-1}$$

e si può concludere, come nel teorema 22.2 che $z \in C'$. □

Teorema A.2.7 *Consideriamo*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

allora si ha

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

Pertanto f è sviluppabile in serie di Taylor ed inoltre il suo sviluppo di Taylor è dato dalla serie $\sum a_k z^k$.

Dimostrazione. Si ha

$$f^{(p)}(z) = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-p)!} \, a_k z^{k-p} \tag{A.8}$$

infatti la A.8 è vera per $p = 1$ ed è facile vedere che, se la stessa vale per l'indice p, allora vale anche per $p + 1$.

Pertanto

$$f^{(p)}(0) = \frac{p!}{(p-p)!}\ a_p = p!\ a_p.$$

Ne viene che lo sviluppo di f è dato dalla serie $\sum a_k\ z^k$ e pertanto f è sviluppabile in serie di Taylor. □

Corollario A.2.1 $\sum a_k z^k = \sum b_k z^k$ *se e solo se* $a_k = b_k\ \forall k$.

Concludiamo illustrando brevemente come possono essere ricavati gli sviluppi di Taylor delle funzioni (reali) $\ln(1 + x)$ e $\arctan(x)$; osserviamo che lo sviluppo della prima funzione può essere ricavato anche elementarmente e qui ne estendiamo solo il campo di sviluppabilità, mentre lo sviluppo della seconda funzione non è facilmente ricavabile in maniera diversa da quella più sotto illustrata.

Tali sviluppi sono ottenuti per integrazione da particolari serie geometriche. Ci limitiamo ad indicare le operazioni da compiere precisando solo che tali operazioni sono giustificate dai precedenti teoremi di integrazione per serie.

Si ha

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\ dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k\ \ dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad -1 < x < 1 \quad \text{(A.9)}$$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty}(-t^2)^k\ dt$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad -1 < x < 1 \quad \text{(A.10)}$$

Appendice B

Calcolo differenziale

B.1 Forme Differenziali in $\mathbb{R}^n$.

Lo studio delle forme differenziali in $\mathbb{R}^n$ nasce dalla necessità di sistemare in ambito opportuno i concetti di integrale di linea e di integrale di superficie di un campo vettoriale che esprimono a loro volta i concetti fisici di lavoro lungo una linea e di flusso attraverso una superficie.

Contemporaneamente, e nello stesso ambito, devono essere sistemati i concetti di potenziale ed alcuni importanti risultati quali il teorema di Stokes, che genera nella sua versione più estesa teoremi come quelli di Green, di Gauss, della divergenza.

Osserviamo che $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ sono gli spazi in cui vengono fatte le più numerose applicazioni dei concetti citati.

Cominciamo con il definire il concetto di funzione multilineare su $\mathbb{R}^k$.

Definizione B.1.1 *Sia $f : (\mathbb{R}^k)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è una funzione $n-$ lineare su $\mathbb{R}^k$ se*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

è lineare su $\mathbb{R}^k$ $\forall x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^k$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Una funzione $n-$lineare in $\mathbb{R}^k$ si dice anche $n-$tensore in $\mathbb{R}^k$; indicheremo con $\mathbb{T}_k^n$ l'insieme degli $n-$tensori in $\mathbb{R}^k$.

Osserviamo che $\mathbb{T}_k^1$ è l'insieme delle applicazioni lineari su $\mathbb{R}^k$; in altre parole $\mathcal{T}_k^1$ coincide con lo spazio duale di $\mathbb{R}^k$

Definizione B.1.2 *Siano $f \in \mathcal{T}_k^n$ e $g \in \mathcal{T}_k^m$, definiamo il prodotto tensoriale di f per g, e scriviamo $f \otimes g$, nella seguente maniera:*

$$f \otimes g : (\mathbb{R}^k)^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \otimes g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n) g(y_1, \ldots, y_m)$$

essendo il prodotto a secondo membro l'usuale prodotto tra numeri reali.

Osserviamo che il prodotto tensoriale di due funzioni $n-$lineari di ordine n ed m produce una funzione n-lineare di ordine $n + m$, ciò permette di rappresentare

ogni elemento dello spazio $\mathcal{T}_k^n$ mediante il prodotto di k^n elementi dello spazio $\mathcal{T}_1^n$.

Un notevole esempio di applicazione lineare che verrà spesso usata nel seguito è dato dall'applicazione

$$\pi_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita mediante la

$$\pi_i(x) = x_i \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Osserviamo che si ha $d\pi_i = \pi_i$ e che pertanto

$$d\pi_i(x) = x_i \quad ;$$

onde conservare notazioni classiche e intuitivamente agevoli, converremo di indicare l'applicazione $d\pi_i = \pi_i$ con il simbolo dx_i.

Da quanto detto è anche immediato rilevare che

$$dx_i(h) = h_i$$

$$(dx_i \otimes dx_j)(h, k) = h_i k_j$$

Con queste notazioni si può facilmente verificare che

Teorema B.1.1 *Sia $f \in \mathcal{T}_k^n$, allora esistono k^n numeri reali $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ tali che*

$$f = \sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \cdots \sum_{i_n=1}^{k} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \cdots \otimes dx_{i_n}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{k} x_{i_1}^1 e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{k} x_{i_2}^2 e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{k} x_{i_n}^n e_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \cdots \sum_{i_n=1}^{k} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_n}^n \quad \text{(B.1)}$$

□

Definizione B.1.3 *Sia $f \in \mathcal{T}_k^n$, diciamo che f è alternante se*

$$f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)$$

$\forall x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^k$

Indichiamo con Λ_k^n l'insieme delle applicazioni $n-$lineari alternanti.

Osserviamo subito che $\mathcal{T}_k^n \supset \Lambda_k^n$ e che $\mathcal{T}_k^1 = \Lambda_k^1$ è lo spazio duale di $\mathbb{R}^k$.

Teorema B.1.2 *Se $f \in \Lambda_k^n$, $n > k$, allora $f = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$f = \sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \dots \sum_{i_n=1}^{k} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_n}$$

e $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ in quanto, essendo $n > k$, almeno due degli argomenti di f sono uguali tra loro; siano essi e_{i_j} ed e_{i_h}, si ha

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_h}, \dots, e_{i_n}) = -f(e_{i_1}, \dots, e_{i_h}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_n})$$

e

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_h}, \dots, e_{i_n}) = 0$$

□

Pertanto sarà lecito considerare solamente Λ_k^1, $\Lambda_k^2, \dots, \Lambda_k^k$.
Esaminiamo brevemente gli elementi di Λ_3^1, Λ_3^2, Λ_3^3.
Λ_3^1 coincide con $\mathcal{T}_3^1$ e con lo spazio duale di $\mathbb{R}^3$; se $f \in \Lambda_3^1$ si ha

$$f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3, \quad (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$$

Sottolineiamo che

$$f(h) = f_1 dx_1(h) + f_2 dx_2(h) + f_3 dx_3(h) = f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3$$

Se $f \in \Lambda_3^2$ si ha $f \in \mathcal{T}_3^2$ e pertanto

$$\begin{aligned} f = {} & f_{11} dx_1 \otimes dx_1 + f_{12} dx_1 \otimes dx_2 + f_{13} dx_1 \otimes dx_3 + \\ & + f_{21} dx_2 \otimes dx_1 + f_{22} dx_2 \otimes dx_2 + f_{23} dx_2 \otimes dx_3 + \\ & + f_{31} dx_3 \otimes dx_1 + f_{32} dx_3 \otimes dx_2 + f_{33} dx_3 \otimes dx_3 \end{aligned} \quad \text{(B.2)}$$

Dal momento che

$$f_{ij} = f(e_i, e_j) \quad \text{e} \quad f(e_i, e_j) = -f(e_j, e_i)$$

si ha

$$f_{ii} = 0 \quad e \quad f_{ij} = -f_{ji}$$

per cui

$$\begin{aligned} f = {} & f_{12} \ (dx_1 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1) + \\ & + f_{13} \ (dx_1 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_1) + \\ & + f_{23} \ (dx_2 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_2) \end{aligned} \quad \text{(B.3)}$$

e se definiamo

$$dx_i \wedge dx_j = (dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i)$$

possiamo scrivere

$$f = f_1 \ dx_1 \wedge dx_2 + f_2 \ dx_2 \wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_3$$

che pertanto è la forma di una qualunque applicazione 2-lineare alternante in $\mathbb{R}^3$, al variare di $(f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$.

Si può facilmente verificare che

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

e che

$$dx_i \wedge dx_i = 0$$

Inoltre si ha

$$(dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k = dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k)$$

Se $f \in \Lambda_3^3$ si ha

$$\begin{aligned} f = f_{123} dx_1 \otimes dx_2 \otimes dx_3 + f_{132} dx_1 \otimes dx_3 \otimes dx_2 + \\ + f_{213} dx_2 \otimes dx_1 \otimes dx_3 + f_{231} dx_2 \otimes dx_3 \otimes dx_1 + \\ + f_{312} dx_3 \otimes dx_1 \otimes dx_2 + f_{321} dx_3 \otimes dx_2 \otimes dx_1 \end{aligned} \quad \text{(B.4)}$$

Ma

$$f_{123} = f_{231} = f_{312} = -f_{132} = -f_{213} = -f_{321} = f_1$$

ed

$$\begin{aligned} f = f_1 (dx_1 \otimes dx_2 \otimes dx_3 + dx_2 \otimes dx_3 \otimes dx_1 + dx_3 \otimes dx_1 \otimes dx_2 - \\ - dx_1 \otimes dx_3 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_2 \otimes dx_1) = \\ = f \; dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned} \quad \text{(B.5)}$$

Si può infatti verificare che

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \\ = dx_1 \otimes dx_2 \otimes dx_3 + dx_2 \otimes dx_3 \otimes dx_1 + dx_3 \otimes dx_1 \otimes dx_2 - \\ - dx_1 \otimes dx_3 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_2 \otimes dx_1 \end{aligned} \quad \text{(B.6)}$$

Osserviamo che si può ricavare un aiuto mnemonico per la composizione del prodotto $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ ricordando che la quantità a secondo membro è formata dagli stessi prodotti che si ottengono svolgendo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix}$$

Sottolineiamo, a scanso di equivoci, che il prodotto tensoriale non è commutativo.

Si può in generale definire

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \; (dx_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes dx_{\sigma(k)})$$

dove S_k è l'insieme delle permutazioni dei numeri $1, \ldots, k$ e $\operatorname{sgn} \sigma$ è $+1$ o -1 a seconda che σ si ottenga con un numero pari o dispari di scambi da $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Definizione B.1.4 *Sia $A \subset \mathbb{R}^k$, A aperto, chiamiamo $n-forma$ differenziale in A una funzione*

$$\omega_n : A \longrightarrow \Lambda_k^n \quad , \quad n \leq k.$$

Osserviamo esplicitamente che assegnare una $n-forma$ differenziale in A, significa ivi definire un certo numero di funzioni reali (ad esempio, 3 per le 1-forme e le 2-forme in $\mathbb{R}^3$).

In altre parole una 1-forma in $\mathbb{R}^3$ sarà del tipo

$$\omega_1(x) = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + f_3(x)dx_3$$

mentre una 2-forma si scriverà

$$\omega_2(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 + f_2(x)dx_2 \wedge dx_3 + f_3(x)dx_1 \wedge dx_3$$

e una 3-forma sarà

$$\omega_3(x) = f(x)\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Aggiungiamo che per 0-forma intenderemo semplicemente una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$; indicheremo con ω_0 una 0-forma su A e si avrà pertanto

$$\omega_0(x) = f(x)$$

Passiamo a questo punto a definire una operazione di differenziazione che trasforma una $n-forma$ in una $(n+1)-forma$ su A.

A questo scopo è necessario operare differenziazioni sui coefficienti della forma.

Per evitare inutili ed inessenziali appesantimenti degli enunciati che seguono nel resto del paragrafo supporremo sempre che le funzioni che trattiamo siano di classe $\mathcal{C}^2(A)$.

Sia ω_n una $n-forma$ in $\mathbb{R}^k$, $n \leq k$ avremo allora

$$\omega_n(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

La formula di cui sopra è stata ampiamente illustrata nel caso $n = 1, 2, 3$ e $k = 3$; è ovviamente estendibile se $k = 2$ e $n = 1, 2$, e se $k > 3$ si può estendere con più fatica, ma facendo uso delle sole nozioni fin qui introdotte.

Ciò premesso poniamo la seguente:

Definizione B.1.5 *Sia ω_n una $n-forma$ differenziale in $A \subset \mathbb{R}^k$ e sia*

$$\omega_n(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

Definiamo

$$d\omega_n(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

$d\omega_n$ risulta essere una $(n+1)-forma$ differenziale in A.

E' immediato verificare che se ω_0 è una 0-forma in A, $\omega_0 = f(x)$, si ha

$$d\omega_0(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3$$

ed è evidente l'analogia con il differenziale di f.

E' altrettanto ovvio che, se ω_k è una k-forma in $\mathbb{R}^k$ si ha $d\omega_k = 0$.

Si può inoltre provare che

Teorema B.1.3 *Sia ω_n una $n-forma$ in A, allora*

$$d(d\omega_n) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$d\omega_n(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} \sum_{h=1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_h} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) dx_h \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

$$d(d\omega_n)(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_h} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) \cdot dx_j \wedge dx_h \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

e, tenuto conto del teorema di Schwarz, i termini

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) dx_\beta \wedge dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

si annullano a due a due. □ A titolo di esempio e di delucidazione dei calcoli effettuati vediamo che, se ω_1 è una 1-forma in $\mathbb{R}^3$

$$\omega_1 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

si ha

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + && \text{(B.7)} \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + && \text{(B.8)} \\ &+ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 && \text{(B.9)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(d\omega_1) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + && \text{(B.10)} \\ &+ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + && \text{(B.11)} \\ &+ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 && \text{(B.12)} \end{aligned}$$

e ogni termine elide il successivo.

Definizione B.1.6 *Sia ω_n una $n-forma$ differenziale in $A \subset \mathbb{R}^k$, diciamo che ω_n è esatta se esiste una $(n-1)-forma$ su A, η_{n-1} tale che*

$$d\eta_{n-1} = \omega_n$$

η_{n-1} si chiama primitiva di ω_n.

Diciamo che ω_n è chiusa se

$$d\omega_n = 0.$$

E' immediata conseguenza del precedente teorema il seguente risultato.

Teorema B.1.4 *Sia ω_n una $n-forma$ su A. Se ω_n è esatta, allora ω_n è chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. Se ω_n è esatta, $\omega_n = d\eta_{n-1}$ e

$$d\omega_n = d(d\eta_{n-1}) = 0.$$

□

Osserviamo altresì che ogni $k-forma$ in $\mathbb{R}^k$ è chiusa.

A questo punto è importante riconoscere tra le $n-forme$ su $\mathbb{R}^k$ quelle esatte e determinarne le primitive. Questo problema infatti ha notevoli riscontri sia dal punto di vista matematico che dal punto di vista fisico.

A tale scopo definiamo una operazione I che è in grado, quando l'insieme A su cui si opera soddisfa opportune proprietà, di trasformare una $n-forma$ in una $(n-1)-forma$ primitiva della forma data.

Definizione B.1.7 *Sia $A \subset \mathbb{R}^k$, diciamo che A è stellato se esiste $x_0 \in A$ tale che*

$$(1-t)x_0 + tx \in A \quad , \ \forall x \in A, \ \forall t \in [0,1].$$

E' immediato riconoscere che se A è convesso, allora A è stellato, mentre non è vero il viceversa. E' altrettanto ovvio convincersi che, a meno di traslazioni, il punto x_0 può essere sempre assunto coincidente con l'origine di $\mathbb{R}^k$.

Definizione B.1.8 *Sia ω_n una $n-forma$ su $A \subset \mathbb{R}^k$, e supponiamo A stellato (rispetto all'origine) e aperto. Sia*

$$\omega_n(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

Definiamo $I(\omega_n)$ come la $(n-1)-forma$ ottenuta mediante la

$$I(\omega_n)(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} \eta_{i_1 i_2 \ldots i_n} dx_{i_1} \wedge \ldots (dx_{i_j}) \cdots \wedge dx_{i_n}$$

dove

$$\eta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{n-1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(tx) dt \right) x_{i_j}$$

e si sia indicato con (dx_{i_j}) che il prodotto per dx_{i_j} deve essere omesso.

Osserviamo che nella definizione B.1.8 non è essenziale supporre che gli indici siano ordinati: infatti se indichiamo con σ la permutazione che trasforma

$$\{1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{in} \qquad \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$$

si ha

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1} dx_{i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots (dx_{i_k}) \cdots \wedge dx_{i_n} = \\ = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} = \operatorname{sgn}\sigma \ dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{\sigma(n)}} = \\ = \operatorname{sgn}\sigma (-1)^{\sigma^{-1}(k)-1} dx_{i_k} \wedge dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots (dx_{i_k}) \cdots \wedge dx_{i_{\sigma(n)}} \quad \text{(B.13)}\end{aligned}$$

Possiamo a questo punto provare il seguente fondamentale risultato.

Lemma B.1.1 - Poincarè - *Sia $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto e stellato (ripetto all'origine) e sia ω_n una $n-forma$ su A. Allora*

$$\omega_n = I(d\omega_n) + d(I\omega_n)$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù della linearità delle operazioni di integrazione I e differenziazione d di una forma, possiamo limitarci a provare il teorema per la forma

$$\omega_n(x) = f(x)\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Si ha

$$d\omega_n(x) = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_h}(x)\ dx_h \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

e

$$I(\omega_n)(x) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\int_0^1 t^{n-1} f(tx)dt\right) x_j dx_1 \wedge \ldots (dx_j) \cdots \wedge dx_n$$

Inoltre

$$\begin{aligned} d(I(\omega_n))(x) = \\ = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{h=1}^{k}\left(x_j \int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx)dt + \frac{\partial x_j}{\partial x_h}\int_0^1 t^{n-1} f(tx)dt\right)\cdot \\ \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \ldots (dx_j) \cdots \wedge dx_n = \\ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx)dt\right) x_j \cdot \\ \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \ldots (dx_j) \cdots \wedge dx_n + \\ + n\int_0^1 t^{n-1} f(tx)dt\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned} \quad \text{(B.14)}$$

D'altro canto, se $J = \{h, 1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} I(d\omega_n)(x) = \sum_{h=1}^{k}\sum_{j\in J}(-1)^{j-1}\int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx)dtx_j \cdot \\ \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \ldots (dx_j) \cdots \wedge dx_n = \\ = \sum_{h=1}^{k}\int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx)dtx_h dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + \\ + \sum_{h=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx)dtx_j \cdot \\ \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \ldots (dx_j) \cdots \wedge dx_n \end{aligned} \quad \text{(B.15)}$$

Pertanto

$$I(d\omega_n)(x) + d(I\omega_n)(x) =$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{h=1}^{k} t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx)x_h + nt^{n-1} f(tx) \right) dt dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^n f(tx)) dt dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =$$
$$= f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \omega_n \quad \text{(B.16)}$$

□

Il lemma B.1.1 prova che se A è un insieme stellato allora ogni forma chiusa è anche una forma esatta. Se infatti supponiamo che $d\omega_n = 0$ possiamo dedurre la lemma in questione che

$$\omega_n = d(I\omega_n)$$

e pertanto possiamo trovare che $(I\omega_n)$ è una primitiva di ω_n.

Possiamo cioè enunciare il seguente importante risultato.

Teorema B.1.5 *Sia ω_n una $n-$forma differenziale su un insieme A aperto e stellato; allora se ω_n è chiusa si ha che ω_n è esatta.*

Ci occupiamo a questo punto di un importante risultato che estende il teorema fondamentale del calcolo integrale ed è di grandissima importanza nelle applicazioni.

A questo scopo è necessario definire l'integrale di una n-forma differenziale esteso ad un sottoinsieme "n-dimensionale" di $\mathbb{R}^k$, $n \leq k$ scelto in una opportuna classe. E' pertanto prioritario definire tale classe.

Definizione B.1.9 *Chiamiamo k-cubo in $\mathbb{R}^k$ l'insieme $[0,1]^k$; osserviamo che, in particolare, lo 0-cubo di $\mathbb{R}^0$ è costituito dal solo elemento $\{0\}$.*

Chiamiamo n-varietà in $\mathbb{R}^k$ una funzione, di classe $\mathcal{C}^2$

$$C : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, 0 \leq n \leq k$$
$$C(u) = (x_1(u), \ldots\ldots, x_k(u))$$
$$x_j : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad j = 1, \ldots, k,$$
$$x_j(u) = x_j(u_1, \ldots, u_n).$$

Rileviamo esplicitamente che il termine n-varietà è qui usato in una accezione molto particolare, senza pretesa di generalità; ricordiamo anche che una 0-varietà si riduce ad un singolo punto, una 1-varietà è una curva, una 2-varietà è una superficie, una 3-varietà è un volume ed in generale una n-varietà è un sottoinsieme "n-dimensionale" in $\mathbb{R}^k$, eventualmente degenere.

Chiamiamo n-varietà standard in $\mathbb{R}^n$ la funzione

$$I^n : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$I^n(x) = x$$

Dato un n-cubo in $\mathbb{R}^n$ è naturale definire la sua frontiera come l'insieme delle sue facce opportunamente orientate.

Se, ad esempio, consideriamo il 2-cubo in $\mathbb{R}^2$, $[0,1]\times[0,1]$, è naturale definire la sua frontiera come l'unione dei quattro segmenti

$[0,1]\times\{0\}$, $\{1\}\times[0,1]$, $[0,1]\times\{1\}$, $\{0\}\times[0,1]$.

E' altrettanto ovvio, dato il convenzionale orientamento degli angoli, che il primo ed il secondo segmento siano orientati come gli assi x ed y, rispettivamente, mentre il terzo ed il quarto siano orientati in senso contrario agli assi x ed y, rispettivamente.

Ora, se rappresentiamo il 2-cubo di $\mathbb{R}^2$ come 2-varietà standard

$$I^2 : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

possiamo descrivere la sua frontiera, che indicheremo con ∂I^2 mediante le seguenti 1-varietà:

$$I^2_{(1,\alpha)}(t) = (\alpha, t)\ ,\quad I^2_{(2,\alpha)}(t) = (t,\alpha) \quad ,\quad \alpha = 0,1$$

e possiamo esprimerne l'orientamento attribuendo ad $I^2_{(i,\alpha)}$ il coefficiente $(-1)^{i+\alpha}$.

Pertanto possiamo descrivere la frontiera del 2-cubo come

$$\partial I^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=o}^{1}(-1)^{i+\alpha} I^2_{(i,\alpha)}$$

Ciò suggerisce la seguente definizione di frontiera per una n-varietà:

Definizione B.1.10 *Sia $C : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una n-varietà in $\mathbb{R}^k$; definiamo*

$$C_{(i,\alpha)} : [0,1]^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

mediante la

$$C_{(i,\alpha)}(t_1 \ldots\ldots, t_{n-1}) = C(t_1 \ldots, t_{i-1}, \alpha, t_i, \ldots, t_{n-1})$$

e definiamo ancora

$$\partial C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha} C_{(i,\alpha)}$$

Allo scopo di alleggerire le notazioni del seguente teorema poniamo anche le seguenti definizioni.

Definizione B.1.11 *Sia C una n-varietà in $\mathbb{R}^k$, definiamo*

$$JC\begin{pmatrix} i_1, \ldots\ldots, i_h \\ j_1, \ldots\ldots, j_h \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_{i_h}}{\partial u_{j_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_h}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_{i_h}}{\partial u_{j_h}} \end{pmatrix}$$

essendo $i_1, \ldots, i_h$ e $j_1, \ldots j_h$ una $h-$upla di indici scelti in $\{1,2,\ldots,k\}$.

Osserviamo che

$$JC\begin{pmatrix} i_1, \ldots\ldots, i_h \\ j_1, \ldots\ldots, j_h \end{pmatrix}$$

è noto come jacobiano della trasformazione definita da $\mathbb{R}^h$ a valori in $\mathbb{R}^h$ dalle funzioni $x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_h}$ delle variabili $u_{j_1}, \ldots\ldots, u_{j_h}$; esso è spesso indicato con il simbolo

$$\frac{\partial x_{i_1} \ldots\ldots x_{i_h}}{\partial u_{j_1} \ldots\ldots u_{j_h}}$$

Possiamo provare a questo proposito il seguente risultato:

Lemma B.1.2 *Sia C una n-varietà in $\mathbb{R}^k$, $n \geq 2$, allora si ha*

$$(1) \qquad JC\left(\frac{j, i_1, \ldots\ldots, i_{n-1}}{1, \ldots\ldots, n}\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} JC\left(\frac{i_1, \ldots\ldots, i_{n-1}}{1, \ldots (i) \ldots, n}\right)$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} JC\left(\frac{i_1, \ldots\ldots, i_{n-1}}{1, \ldots (i) \ldots, n}\right) = 0$$

essendo $i_1, \ldots, i_{n-1}$ una $(n-1)-$upla di indici scelti in $\{1, 2, \ldots, k\}$ ed essendosi indicato con $1, \ldots (i) \ldots, n$ la $(n-1)-$upla costituita dai valori $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$.

Dimostrazione. (1) è immediata conseguenza dello sviluppo di

$$JC\left(\frac{j, i_1, \ldots\ldots, i_{n-1}}{1, \ldots\ldots, n}\right)$$

rispetto alla prima colonna.

Passiamo pertanto a provare (2) per induzione.

Se $n = 2$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} = 0$$

per il teorema di Schwarz.

Supponiamo pertanto (2) vera per n e proviamola per $n+1$; si ha

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} JC\left(\frac{i_1, \ldots\ldots, i_n}{1, \ldots (i) \ldots, n+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{j=1, j\neq i}^{n+1} (-1)^{j+1+(j>i)} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_j} JC\left(\frac{i_2, \ldots\ldots, i_n}{1, .(i).(j)., n+1}\right) \quad \text{(B.17)}$$

essendo

$$(j > i) = \begin{cases} 0, & j \leq i \\ 1, & j > i \end{cases}$$

non appena si sviluppi

$$JC\left(\frac{i_1, \ldots\ldots, i_n}{1, \ldots (i) \ldots, n+1}\right)$$

rispetto alla prima colonna e si tengaconto che la $i-esima$ riga non c'è; (ciò causa l'ingresso dell'addendo $(j > i)$ ad esponente di -1).

Pertanto

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i}JC\left(\frac{i_1,\ldots\ldots,i_n}{1,\ldots(i)\ldots,n+1}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}(-1)^{i+j+(j>i)}\frac{\partial^2 x_{i_1}}{\partial u_i\partial u_j}JC\left(\frac{i_2,\ldots,\ldots,i_n}{1,.(i).(j).,n+1}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1,i\neq j}^{n+1}(-1)^{i+j+(j>i)}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial u_i}JC\left(\frac{i_2,\ldots\ldots,i_n}{1,.(i).(j).,n+1}\right)\quad\text{(B.18)}$$

La seconda somma è nulla per l'ipotesi induttiva, mentre la prima è nulla perché ivi compaiono in corrispondenza di $i=\alpha$ e $j=\beta$, e viceversa, i termini

$$\frac{\partial^2 x_{i_1}}{\partial u_\alpha\partial u_\beta}JC\left(\frac{i_2,\ldots\ldots,i_n}{1,.(\alpha).(\beta).,n+1}\right)$$

e

$$\frac{\partial^2 x_{i_1}}{\partial u_\beta\partial u_\alpha}JC\left(\frac{i_2,\ldots\ldots,i_n}{1,.(\beta).(\alpha).,n+1}\right)$$

con segni opposti. □

Definizione B.1.12 *Sia ω_n una $n-$ forma differenziale su $\mathbb{R}^k$ e sia C una n-varietà in $\mathbb{R}^k$; se*

$$\omega_n=f(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n}$$

definiamo

$$\int_C\omega_n=\int_{[0,1]^n}f(C(u))JC\left(\frac{i_1,\ldots\ldots,i_n}{1,\ldots\ldots,n}\right)du_1\ldots du_n.$$

Usando questa definizione ed il precedente lemma si può facilmente provare il seguente importante risultato.

Teorema B.1.6 - Stokes - *Sia ω_{n-1} una $(n-1)-$ forma differenziale su $\mathbb{R}^k$ e sia C una n-varietà in $\mathbb{R}^k$; allora*

$$\int_{\partial C}\omega_{n-1}=\int_C d\omega_{n-1}.$$

Dimostrazione. Proviamo il teorema per ω_{n-1} della forma

$$\omega_{n-1}=f(x)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_{n-1};$$

la formulazione generale segue dalla linearità dell'integrale e dalla inessenzialità dell'ordine delle variabili.

Si ha

$$\int_{\partial C}\omega_{n-1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha}\int_{[0,1]^{n-1}}f(C_{(i,\alpha)}(u))JC_{(i,\alpha)}\left(\frac{1,\dots,n-1}{1,.(i).,n}\right)\cdot$$

$$\cdot du_1\dots(du_i)\dots du_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{\alpha+1}\int_{[0,1]^{n-1}}f(C_{(i,\alpha)}(u))JC_{(i,\alpha)}\left(\frac{1,\dots,n-1}{1,.(i).,n}\right)\cdot$$

$$\cdot du_1\dots(du_i)\dots du_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_{[0,1]^{n-1}}\int_0^1\frac{\partial}{\partial u_i}\left(f(C(u))JC\left(\frac{1,\dots,n-1}{1,.(i).,n}\right)\right)\cdot$$

$$=\qquad\qquad\cdot du_1du_2\dots du_n$$

$$=\int_{[0,1]^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(JC\left(\frac{1,\dots,n-1}{1,.(i).,n}\right)\frac{\partial}{\partial u_i}f(C(u))+\right.$$

$$\left.+f(C(u))\frac{\partial}{\partial u_i}JC\left(\frac{1,\dots,n-1}{1,.(i).,n}\right)\right)du_1du_2\dots du_n= \quad \text{(B.19)}$$

per il lemma 29.17.2

$$=\int_{[0,1]^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{k}JC\left(\frac{1,\dots,n-1}{1,.(i).,n}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}f(C(u))\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\cdot$$

$$\cdot du_1du_2\dots du_n=$$

$$=\int_{[0,1]^n}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}f(C(u))\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}JC\left(\frac{1,\dots,n-1}{1,.(i).,n}\right)\cdot$$

$$\cdot du_1du_2\dots du_n= \quad \text{(B.20)}$$

per il lemma 29.17.1

$$=\int_{[0,1]^n}\sum_{j=1}^{k}JC\left(\frac{j,1,\dots,n-1}{1,\dots,n}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}f(C(u))du_1du_2\dots du_n=$$

$$=\int_C d\omega_{n-1} \quad \text{(B.21)}$$

□

Il teorema di Stokes è suscettibile di significative conseguenze che possono essere facilmente messe in evidenza considerandolo in $\mathbb{R}^2$ ed in $\mathbb{R}^3$. A questo scopo ricordiamo che si dice che è assegnato un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ se è data una funzione

$$F:A\longrightarrow\mathbb{R}^3\ ,\quad A\subset\mathbb{R}^3$$
$$F(x,y,z)=(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z))$$
$$f,g,h:A\longrightarrow\mathbb{R}$$

(Per $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ usiamo qui (x, y) ed (x, y, z) in luogo di (x_1, x_2) e (x_1, x_2, x_3)).

Si definisce divergenza di un campo vettoriale F la funzione scalare

$$divF = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

mentre si definisce rotore di un campo vettoriale F la funzione vettoriale

$$rotF = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$$

ove si sia indicata con un indice la derivazione rispetto alla corrispondente variabile.

Se introduciamo il vettore formale

$$D = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

possiamo scrivere che

$$divF = \langle D, F \rangle$$

$$rotF = D \times F$$

Ricordiamo anche che se F ha per componenti le derivate parziali di una funzione $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$, cioè se $F = \nabla\phi$, si ha

$$div\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \Delta\phi$$

$$rot\nabla\phi = 0$$

$\Delta\phi$ si chiama laplaciano della funzione ϕ ed è di fondamentale importanza in svariati campi della matematica e della fisica.

Osserviamo che analoghe definizioni possono essere date in $\mathbb{R}^2$ ed analoghe considerazioni possono essere fatte.

Osserviamo ancora che ad un campo vettoriale $F = (f, g, h)$ è spesso usuale associare le forme differenziali

$$\omega_1 = fdx + gdy + hdz$$

e

$$\omega_2 = fdy \wedge dz - gdx \wedge dz + hdx \wedge dy$$

i cui integrali di linea e di superficie rappresentano, rispettivamente il lavoro lungo una linea ed il flusso attraverso una superficie di F.

Cominciamo pertanto a considerare la $1 - forma$ in $\mathbb{R}^2$

$$\omega_1(x, y) = -g(x, y)dx + f(x, y)dy$$

ed il campo vettoriale

$$F = (f, g) su \mathbb{R}^2$$

Avremo

$$d\omega_1 = (f_x + g_y)dx \wedge dy$$

e se C è una 2-varietà in $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera è rappresentata mediante la parametrizzazione ($\mathcal{C}^1$ a tratti)

$$\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)), \ t \in [a, b]$$

si ha

$$\int_{\partial C} -gdx + fdy = \int_C (f_x + g_y)dx \wedge dy. \tag{B.22}$$

Ora, se N è il versore normale a ∂C,

$$N = (\eta, -\xi)/(\eta^2 + \xi^2)$$

e pertanto

$$\int_{\partial C} -gdx + fdy = \int_a^b (-g\xi + f\eta)dt = \\ = \int_a^b \langle F, N\rangle(\eta^2 + \xi^2)dt = \int_{\partial C} \langle F, N\rangle ds \tag{B.23}$$

Ricordando che $divF = f_x + g_y$ si ottiene allora

$$\int_{\partial C} \langle F, N_e\rangle ds = \int\int_C divF dxdy \tag{B.24}$$

ove $N_e = N \operatorname{sgn} JC$ indica il versore normale a ∂C orientato verso l'esterno di C.

La B.22 è nota come teorema di Green, mentre la B.24 è la formulazione nel piano, del teorema della divergenza.

Consideriamo ora una 2-forma in $\mathbb{R}^3$

$$\omega_2(x, y, z) = f(x, y, z)dy \wedge dz - g(x, y, z)dx \wedge dz + h(x, y, z)dx \wedge dy$$

ed il campo vettoriale ad essa associato

$$F = (f, g, h)$$

Si ha

$$d\omega_2 = (f_x + g_y + h_z)dx \wedge dy \wedge dz$$

e se C è una 3-varietà con frontiera ∂C, rappresentata dalla parametrizzazione

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ (u, v) \in D$$

si ha

$$\int_{\partial C} fdy \wedge dz - gdx \wedge dz + hdx \wedge dy = \int_C (f_x + g_y + h_z)dx \wedge dy \wedge dz \tag{B.25}$$

Ma, non appena si tenga conto che la normale a ∂C è data da

$$N = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial y, z}{\partial u, v}, -\frac{\partial x, z}{\partial u, v}, \frac{\partial x, y}{\partial u, v}\right)$$

$$\nu = \left(\left(\frac{\partial y, z}{\partial u, v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x, z}{\partial u, v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x, y}{\partial u, v}\right)^2\right)$$

si ottiene

$$\int_{\partial C} f dy \wedge dz - g dx \wedge dz + h dx \wedge dy =$$
$$= \int\int_D \frac{1}{\nu}\left(f\frac{\partial y,z}{\partial u,v} - g\frac{\partial x,z}{\partial u,v} + h\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\nu du dv =$$
$$= \int\int_D \langle F, N\rangle \nu du dv = \int\int_{\partial C}\langle F, N\rangle d\sigma$$

Pertanto si ha

$$\int\int_{\partial C}\langle F, N_e\rangle d\sigma = \int\int\int_C div F dx dy dz \tag{B.26}$$

ove $N_e = N \operatorname{sgn} JC$ è il versore normale a ∂C orientato verso l'esterno di C.

La B.25 è nota come teorema di Gauss e la B.26 è la formulazione nello spazio del teorema della divergenza.

Occupiamoci infine di una 1-forma in $\mathbb{R}^3$

$$\omega_1 = f dx + g dy + h dz$$

e del campo vettoriale ad essa associato

$$F = (f, g, h)$$

Si ha

$$d\omega_1 = (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (h_x - f_z) dx \wedge dz$$

e, se

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

è una 2-varietà in $\mathbb{R}^3$ la cui frontiera ∂C è rappresentata da

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad , \quad t \in [a, b]$$

si ha

$$\int_{\partial C} f dx + g dy + h dz =$$
$$= \int_C (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (h_x - f_z) dx \wedge dz \tag{B.27}$$

Ma, ricordando che il versore tangente a ∂C è dato da

$$T = (x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)$$

si ha

$$\int_{\partial C} f dx + g dy + h dz = \int_a^b (fx + gy + hz) dt =$$
$$= \int_a^b \langle F, T\rangle (x^2 + y^2 + z^2) dt = \int_{\partial C}\langle F, T\rangle ds \tag{B.28}$$

mentre

$$\int_C (g_x - f_y)dx \wedge dy + (h_y - g_z)dy \wedge dz + (h_x - f_z)dx \wedge dz =$$
$$= \int\int_D \frac{1}{\nu}\left((g_x - f_y)\frac{\partial x, y}{\partial u, v} + (h_y - g_z)\frac{\partial y, z}{\partial u, v} + (h_x - f_z)\frac{\partial x, z}{\partial u, v}\right)\nu du dv =$$
$$= \int\int_D \langle rotF, N\rangle \nu du dv = \int\int_C \langle rotF, N\rangle d\sigma \quad \text{(B.29)}$$

Si ottiene perciò che

$$\int_{\partial C} \langle F, T\rangle ds = \int\int_C \langle rotF, N\rangle d\sigma \quad \text{(B.30)}$$

La B.30 è nota come teorema del rotore.

Osserviamo che nella formula compare N e non N_e.

Le formule B.30 e B.26 assumono un'interessante aspetto nel caso in cui $F = \nabla\phi$.

Si ha infatti in tal caso che, se C_2 è una 2-varietà e C_3 è una 3-varietà

$$\int_{\partial C_2} \langle \nabla\phi, T\rangle ds = 0 \quad \text{(B.31)}$$

$$\int\int_{\partial C_3} \langle \nabla\phi, N_e\rangle ds = \int\int\int_{C_3} \Delta\phi dx dy dz$$

Concludiamo questo paragrafo precisando i risultati ottenuti per le 1-forme in $\mathbb{R}^k$ nell'ambito dello studio dei campi vettoriali.

Definizione B.1.13 *Sia $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto e siano*

$$f_i : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_i \in C^2(A) \ , \quad i = 1, \ldots, k$$

Sia

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i dx_i$$

e

$$F = (f_1, \ldots, f_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i e_i;$$

diremo che ω è la 1-forma differenziale corrispondente al campo vettoriale F e reciprocamente F è il campo vettoriale che corrisponde alla 1-forma ω.

Diamo ora alcune definizioni che sono la controparte relativa al campo F delle definizioni date in precedenza, per le 1-forme ω.

Definizione B.1.14 *Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto, un campo vettoriale $F = (f_1, \ldots, f_k)$. Diciamo che F è un campo chiuso se*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad , \ \forall i, j = 1, \ldots, k, \ i \neq j$$

Diciamo che F è conservativo, oppure che F ammette potenziale, se esiste

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\nabla\phi = F$$

In tal caso ϕ si chiama potenziale di F.

Osserviamo che, evidentemente, un campo vettoriale è chiuso o conservativo se e solo se la corrispondente 1-forma ω è chiusa o esatta, rispettivamente.

E' pertanto conseguenza dei precedenti risultati che

Teorema B.1.7 *Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto; se F è conservativo allora F è chiuso.*

Rileviamo che il teorema è immediata conseguenza del teorema di Schwarz; meno banale (conseguenza del lemma di Poincarè) è che

Teorema B.1.8 *Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto, stellato. Se F è chiuso, allora F è conservativo.*

Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mediante la

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

mostra che la condizione A stellato non è inessenziale. Essa può tuttavia essere un po' attenuata.

A questo scopo definiamo

Definizione B.1.15 *Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto, e sia C una 1-varietà in $\mathbb{R}^k, C(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$, $t \in [0,1]$; definiamo*

$$\int_C F = \int_C \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^k f_i(x(t))x_i(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \langle F(x(t)), T(t)\rangle (\sum_{i=1}^k x_i^2)dt = \int_C \langle F, T\rangle ds \quad \text{(B.32)}$$

Allo scopo di provare il seguente risultato è opportuno ricordare che una 1-varietà è una curva in $\mathbb{R}^k$ e che pertanto ad essa si possono riferire le definizioni date per le curve in $\mathbb{R}^k$.

Teorema B.1.9 *Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto e connesso, un campo vettoriale; sono condizioni equivalenti*

1. *F è conservativo;*
2. *$\int_\gamma F = 0$ su ogni curva chiusa γ contenuta in A;*
3. *$\int_\gamma F$ dipende solo dagli estremi di γ.*

(Si osservi che a causa del contesto in cui si opera le componenti della funzione F e la funzione γ sono supposte di classe $\mathcal{C}^2$, ma è sufficiente $F \in \mathcal{C}^0$ e γ regolare a tratti.)

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Se $F = \nabla\phi$ con $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$, si ha

$$\int_\gamma F = \int_a^b \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(\gamma(t))x_j(t)dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\gamma(t))dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = 0 \quad \text{(B.33)}$$

2) $\Rightarrow$ 3). Siano γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi; allora $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ è chiusa e

$$\int_\gamma F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F = 0$$

3) $\Rightarrow$ 1). Poiché vale 3) possiamo definire, per $x \in A$

$$\phi(x) = \int_\gamma F$$

dove γ è una qualunque curva avente per estremi x ed $x_0 \in A$, fissato.

Si ha allora

$$\frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_{\gamma^*} F$$

essendo $\gamma^*(s) = x + se_i$, $0 \le s \le t$.

Pertanto

$$\frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t f_i(x + se_i)ds = f_i(x + \sigma_t e_i)$$

$0 \le \sigma_t \le t$ e

$$lim_{t\to o}\frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = lim_{t\to o} f_i(x + \sigma_t e_i) = f_i(x)$$

□

Osserviamo che, nell'enunciato del precedente teorema le curve possono sempre essere supposte di classe $\mathcal{C}^2$: infatti, dal momento che A è aperto e connesso è sempre possibile, trovare una funzione continua, lineare a tratti, il cui grafico è costituito da segmenti paralleli agli assi, che congiunge due punti arbitrariamente scelti in A. Tale spezzata può essere resa di classe $\mathcal{C}^2$; illustriamo come ciò può essere fatto nel caso in cui la funzione lineare a tratti sia data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, t), & t \in [-1, 0] \\ (t, 0), & t \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{(B.34)}$$

Osserviamo che Γ, traccia di γ è compatto, quindi per il lemma 30.7 esiste $\delta > 0$ tale che $\Gamma + S(0, \delta) \subset A$ pertanto, ridefiniamo γ in $(-\delta, \delta)$ nella seguente maniera

$$\left(\frac{t+\delta}{2} - \frac{\delta}{\pi}cos\frac{\pi t}{2\delta}, \frac{t-\delta}{2} + \frac{\delta}{\pi}cos\frac{\pi t}{2\delta}\right)$$

E' infine notevole il seguente risultato che estende il precedente teorema 29.23.

Definizione B.1.16 *Sia $A \subset \mathbb{R}^k$, se $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow A$ sono due 1-varietà chiuse, diciamo che γ_0 e γ_1 sono omotope se esiste $\psi \in \mathcal{C}^2$, $\psi : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow A$ tale che, se $t, s \in [0,1]$*

$$\psi(0,t) = \gamma_0(t) \ , \quad \psi(1,t) = \gamma_1(t), \quad \psi(s,0) = \psi(s,1)$$

Diciamo che A è semplicemente connesso se ogni 1-varietà chiusa a valori in A è omotopa ad un punto di A.

Teorema B.1.10 *Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale chiuso, $A \subset \mathbb{R}^k$, e siano γ_0 e γ_1 due 1-varietà chiuse a valori in A, omotope, allora*

$$\int_{\gamma_0} F \ = \int_{\gamma_1} F.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia C la funzione che rende omotope le due curve e definiamo

$$\gamma_2(t) = C(t,0) = C(t,1) \ , \ t \in [0,1]$$

Per il teorema di Stokes

$$\int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F - \int_{\gamma_0} F \ = \ \int_{\partial C} \omega \ = \\ = \int_C d\omega = 0 \quad \text{(B.35)}$$

□

Corollario B.1.1 *Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale, $A \subset \mathbb{R}^k$ semplicemente connesso, allora F è conservativo se e solo se F è chiuso.*

B.2 La formula di Green nel piano

Diamo qui la dimostrazione di un enunciato della formula di Green nel piano che se da un lato è molto semplice, dall'altro copre uangrande quantità di situazioni ed in particolare può essere applicata nella maggior parte dei casi più comuni.

Teorema B.2.1 *Sia Ω una varietà $2-$dimensionale nel piano, esista cioè una funzione*

$$\begin{aligned} \phi : [a,b] \times [c,d] \quad &\rightarrow \quad \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ (t,s) \in [a,b] \times [c,d] \quad &\mapsto \quad \phi(t,s) = (x(t,s), y(t,s)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

di classe $\mathcal{C}^1$ tale che lo jacobiano di ϕ sia non singolare in Ω sia cioè

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right) > 0 \qquad \forall (t,s) \in [a,b] \times [c,d]$$

Sia inoltre

$$\omega = f dx + g dy \qquad f, g \in \mathcal{C}^1$$

una forma differenziale di ordine 1 nel piano.

Allora

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

cioè

$$\int_{\partial\Omega} f dx + g dy = \int_{\Omega} (g_x - f_y) dx dy$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo ad esempio

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} g_x(x,y)dxdy &= \int_a^b \int_c^d g_x(x(t,s),y(t,s)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right| dtds = \\
&= \int_a^b \int_c^d g_x(x,y)[x_t y_s - x_s y_t]dtds \\
&= \int_a^b \int_c^d \Big[g_x(x,y)x_t y_s - g_x(x,y)x_s y_t + \\
&\quad + g_y(x,y)y_t y_s - g_y(x,y)y_s y_t\Big]dtds \\
&= \int_a^b \int_c^d \Big[g_x(x,y)x_t + g_y(x,y)y_t\Big]y_s - \\
&\quad - \int_a^b \int_c^d \Big[g_x(x,y)x_s + g_y(x,y)y_s\Big]y_t dtds \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\frac{d}{dt} g(\phi(t,s))\right) y_s(t,s)dt\right) ds - \\
&\quad - \int_a^b \left(\int_c^d \left(\frac{d}{ds} g(\phi(t,s))\right) y_s(t,s)ds\right) dt \\
&= \int_c^d \left(\Big[g(\phi(t,s))y_s(t,s)\Big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b g(\phi(t,s))y_{st}(t,s)dt\right) ds - \\
&- \int_a^b \left(\Big[g(\phi(t,s))y_t(t,s)\Big]_{s=c}^{s=d} - \int_c^d g(\phi(t,s))y_{ts}(t,s)ds\right) dt = \\
&= \int_c^d \Big[g(\phi(b,s))y_s(b,s) - g(\phi(a,s))y_s(a,s)\Big]ds - \\
&\quad - \int_a^b \Big[g(\phi(t,d))y_t(t,d) - g(\phi(t,c))y_t(t,c)\Big]dt = \\
&= \int_{\partial\Omega} g(x,y)dy \quad \text{(B.36)}
\end{aligned}$$

□

Bibliografia

[1] V.Barbu - Th.Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces.* Sijthoff & Nordhoff, Alphen aan Rijn The Netherlands, 1974.

[2] N. Dinculeanu, *Vector measures.* Pergamon Press, Oxford, 1967.

[3] A.Kolmogoroff - S.Fomine, *Èlèments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Èditions MIR, Moscou. 1974.

[4] R.Larsen, *Functional analysis an introduction.* M.Dekker, New York, 1973.

[5] L. Kantorovich - G. Akilov, *Analyse Fonctionnelle. Tome I, II* Èditions MIR, Moscou. 1981.

[6] W. Rudin, *Real and complex analysis.* Mc Graw Hill, Glasgow. 1970.

[7] F. Bottacin - G. Zampieri, *Analisi 2.* Bollati Boringhieri, Torino. 1970.

[8] A. Markuševič, *Elementi di teoria delle funzioni analitiche.* Editori Riuniti, Roma. 1988.

[9] A. Sveshnikov - A. Tikhonov, *The theory of functions of a complex variable* MIR Publishers, Moscow. 1978.

[10] M. Spivak, *Calculus on manifolds* Benjamin, New York. 1965.