ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 12

LA FORMULA DI TAYLOR

La formula di Taylor nasce dall'esigenza di trovare buone approssimazioni, facilmente calcolabili, per le funzioni elementari.

Si tratta essenzialmente dello sviluppo del concetto di approssimazione lineare che è stato introdotto con la definizione di derivata. Infatti se supponiamo che f sia una funzione derivabile in x_0; abbiamo visto che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0)$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0 = \omega(0).$$

Possiamo pertanto affermare che in tale occasione abbiamo trovato un polinomio di primo grado che approssima la funzione f con un errore che può essere espresso nella forma $(x - x_0)\omega(x - x_0)$, con $\omega(x - x_0) \to 0$ se $x \to x_0$, tale errore quindi risulta essere infinitesimo di ordine superiore ad 1 cioè di ordine superiore al grado del polinomio approssimante.

Poniamoci ora il problema di approssimare la funzione f con un polinomio di grado n, commettendo un errore che sia infinitesimo di ordine superiore ad n, cioè che possa essere espresso nella forma

$$(x - x_0)^n \omega(x - x_0) \qquad \text{ove} \qquad \lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0\ .$$

Sia pertanto

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i$$

un tale polinomio; dovrà aversi

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + (x - x_0)^n \omega(x - x_0) \tag{12.1}$$

con $\omega(x - x_0) \to 0$ se $x \to x_0$.

Se supponiamo f derivabile n volte, affinché la 12.1 sia vera dovrà essere

$$f(x_0) = a_0$$

per cui si avrà

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i (x - x_0)^i + (x - x_0)^n \omega(x - x_0)$$

e

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i(x-x_0)^{i-1} + (x-x_0)^{n-1}\omega(x-x_0).$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene

$$f'(x_0) = a_1$$

e si avrà

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \sum_{i=2}^{n} a_i(x-x_0)^{i} + (x-x_0)^{n}\omega(x-x_0)$$

da cui

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \tag{12.2}$$

$$= a_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i(x-x_0)^{i-2} + (x-x_0)^{n-2}\omega(x-x_0)$$

per cui, applicando la regola di De L'Hôpital, si ottiene che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} = a_2 \tag{12.3}$$

e

$$\frac{f''(x_0)}{2!} = a_2.$$

Così procedendo si ottiene che

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n$$

e pertanto, affinché il nostro scopo sia raggiunto, sarà necessario che

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Riassumendo possiamo dire che

Affinchè si abbia

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + (x-x_0)^n\omega(x-x_0) \tag{12.4}$$

con $\omega(x-x_0) \to 0$ **se** $x \to x_0$**. deve essere**

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{12.5}$$

Ci resta ora da provare che tale polinomio soddisfa effettivamente le condizioni richieste.

Ciò sarà fatto provando il seguente risultato:

TEOREMA 12.1. - *Formula di Taylor con il resto di Peano - Sia* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile n-1 volte in* (a,b) *ed* n *volte in* $x_0 \in (a,b)$*; allora*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + (x-x_0)^n \omega(x-x_0) \tag{12.6}$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x-x_0) = 0 = \omega(0) .$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

e chiamiamo

$$\omega(x-x_0) = \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n};$$

proviamo che

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x-x_0) = 0$$

Allo scopo di applicare la regola di De L'Hôpital calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} &= \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n(x-x_0)^{n-1}} &\left(f'(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-1)!}(x-x_0)^{i-1} \right) \end{aligned} \tag{12.7}$$

e proseguendo calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - P''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} &= \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} &\left(f''(x) - \sum_{i=2}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-2)!}(x-x_0)^{i-2} \right) \end{aligned} \tag{12.8}$$

fino ad arrivare a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} &= \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)} &= \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) &= 0 \end{aligned} \tag{12.9}$$

Si può pertanto dedurre che

$$\lim_{x\to x_0} \omega(x-x_0) = 0 \tag{12.10}$$

□

La formula di Taylor con il resto nella forma di Peano permette di estendere la possibilità di approssimare una funzione f con un polinomio di primo grado, fino ad ottenere la possibilità di approssimarla con un polinomio di grado n arbitrario.

Ovviamente il fatto più importante è la valutazione dell'errore commesso e, se consideriamo il resto nella forma di Peano, tale valutazione è di tipo qualitativo.

Se vogliamo una valutazione dell'errore di tipo quantitativo ci occorre seguire un procedimento diverso dalla definizione di differenziabilità. Un rapido sguardo ai risultati di calcolo differenziale fino ad ora provati ci convincerà ben presto che il risultato da estendere è il teorema di Lagrange.

Cercheremo in altre parole di valutare la differenza

$$f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

in funzione di maggioranti di $|f^{(n+1)}(x)|$.

TEOREMA 12.2. *Formula di Taylor con il resto di Lagrange - Sia* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* $n+1$ *volte in* (a,b)*; siano* $x, x_0 \in (a,b)$*, allora esiste* c *tra* x_0 *ed* x*, tale che*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il teorema nel caso in cui $n=2$; dovremo in questo caso provare che esiste c tra x_0 ed x, tale che

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)^3 \tag{12.11}$$

Sia

(12.12)

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 - R(x-x_0)^3$$

Ovviamente R dipende dal fatto che abbiamo fissato $n=3$ oltre che da x e da x_0, che comunque sono essi pure fissati,

Se consideriamo F sull'intervallo di estremi x_0 ed x, possiamo affermare che è derivabile almeno tre volte e si ha

$$F'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - 3R(x-x_0)^2 \tag{12.13}$$

$$F''(x) = f''(x) - f''(x_0) - 6R(x-x_0) \tag{12.14}$$

$$F'''(x) = f'''(x) - 6R \tag{12.15}$$

Poichè $F(x) = F(x_0) = 0$ per il teorema di Rolle esiste un punto α tra x_0 ed x tale che

$$F'(\alpha) = 0$$

Poichè inoltre $F'(x_0) = 0$, sempre per il teorema di Rolle si ha che esiste un punto β tra x_0 ed α tale che

$$F''(\beta) = 0$$

Ed ancora per il teorema di Rolle, poichè ancora $F''(x_0) = 0$ esiste un punto c tra x_0 ed β tale che

$$F'''(c) = 0$$

Ne ricaviamo infine che

$$F'''(c) = f'''(c) - 6R = 0$$

e ne deduciamo che

$$R = \frac{f'''(c)}{6}$$

□

CAPITOLO 13

QUALCHE SVILUPPO DI TAYLOR NOTEVOLE

Alcuni sviluppi di funzioni elementari ricorrono spesso e quindi è molto comodo fare una breve raccolta di risultati in merito

Nel seguito indichiamo con ω una funzione infinitesima per $x \to x_0$

1. Lo sviluppo di McLaurin di e^x

Sia

$$f(x) = e^x$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ e si ha

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1 \tag{13.1}$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1 \tag{13.2}$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1 \tag{13.3}$$

$$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = 1 \tag{13.4}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \tag{13.5}$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1 \tag{13.6}$$

da cui si ricava che il polinomio di McLaurin P_n di e^x di grado n è

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

ed il resto di Lagrange R_n assume la forma

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad |c| \le |x|$$

Possiamo pertanto concludere che

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \omega(x) \tag{13.7}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad |c| \le |x| \tag{13.8}$$

2. Lo sviluppo di McLaurin di $\sin x$

Sia

$$f(x) = \sin x$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ e si ha

$$f(x) = \sin x \qquad f^{(iv)}(x) = \sin x \tag{13.9}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f^{(v)}(x) = \cos x \tag{13.10}$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f^{(vi)}(x) = -\sin x \tag{13.11}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f^{(vii)}(x) = -\cos x \tag{13.12}$$

Pertanto le derivate di f si ripetono di 4 in 4 e si ha

$$f(0) = 0 \qquad f^{(iv)}(0) = 0 \tag{13.13}$$

$$f'(0) = 1 \qquad f^{(v)}(0) = 1 \tag{13.14}$$

$$f''(0) = 0 \qquad f^{(vi)}(0) = 0 \tag{13.15}$$

$$f'''(0) = -1 \qquad f^{(vii)}(0) = -1 \tag{13.16}$$

da cui si ricava che il polinomio di McLaurin P_n di $\sin x$ di grado $2n+1$ è

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ed il resto di Lagrange R_{2n+1} assume la forma

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} \qquad |c| \le |x|$$

Ricordiamo che il termine di grado $2n+2$ è nullo.

Possiamo pertanto concludere che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+3}\omega(x) \tag{13.17}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!}x^{2n+3} \qquad |c| \le |x| \tag{13.18}$$

3. Lo sviluppo di McLaurin di $\cos x$

Sia

$$f(x) = \cos x$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ e si ha

$$f(x) = \cos x \qquad f^{(iv)}(x) = \cos x \tag{13.19}$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f^{(v)}(x) = -\sin x \tag{13.20}$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f^{(vi)}(x) = -\cos x \tag{13.21}$$

$$f'''(x) = \sin x \qquad f^{(vii)}(x) = \sin x \tag{13.22}$$

Pertanto le derivate di f si ripetono di 4 in 4 e si ha

$$f(0) = 1 \qquad f^{(iv)}(0) = 1 \tag{13.23}$$

$$f'(0) = 0 \qquad f^{(v)}(0) = 0 \tag{13.24}$$

$$f''(0) = -1 \qquad f^{(vi)}(0) = -1 \tag{13.25}$$

$$f'''(0) = 0 \qquad f^{(vii)}(0) = 0 \tag{13.26}$$

da cui si ricava che il polinomio di McLaurin P_n di $\cos x$ di grado $2n$ è

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

ed il resto di Lagrange R_{2n} assume la forma

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \qquad |c| \le |x|$$

Ricordiamo che il termine di grado $2n+1$ è nullo.

Possiamo pertanto concludere che

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\omega(x) && (13.27)\\ &\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+3} \qquad |c| \le |x| && (13.28)\end{aligned}}$$

4. Lo sviluppo di McLaurin di $\ln(1+x)$

Sia
$$f(x) = \ln(1+x)$$
Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}((-1,+\infty))$ e si ha

$$f(x) = \ln(1+x) \tag{13.29}$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \tag{13.30}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \tag{13.31}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \tag{13.32}$$
$$f^{(iv)}(x) = -\frac{3\cdot 2}{(1+x)^4} \tag{13.33}$$

Possiamo quindi congetturare che

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \tag{13.34}$$

La 13.36 si dimostra per induzione, infatti:

(1) per $n=1$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
e la 13.36 è vera.

(2) se la 13.36 è vera per n allora è vera anche per $n+1$ infatti:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} = \tag{13.35}$$
$$(-1)(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}(-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Pertanto

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \tag{13.36}$$

e quindi
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$
ed il resto di Lagrange R_{2n} assume la forma
$$R_n(x) = (-1)^{n+2}\frac{(n)!}{(1+c)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \qquad |c| \le |x|$$

Possiamo pertanto concludere che

(13.37)
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + x^n \omega(x)$$
(13.38)
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \qquad |c| \le |x|$$

5. Lo sviluppo di McLaurin di $\sqrt{1+x}$

Sia
$$f(x) = \sqrt{1+x}$$
. Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}((-1,+\infty))$ e si ha

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \tag{13.39}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \tag{13.40}$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \tag{13.41}$$
$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} \tag{13.42}$$
$$f^{(iv)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-7/2} \tag{13.43}$$

Possiamo quindi congetturare che

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} (1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} \tag{13.44}$$

La 13.44 si dimostra per induzione, infatti:

(1) per $n = 1$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$
e la 13.44 è vera.

(2) se la 13.44 è vera per n allora è vera anche per $n+1$ infatti:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} = \\ = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}-1} = \\ = (-1)^{n+2}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}} \tag{13.45}$$

Pertanto

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n} \tag{13.46}$$

e quindi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{2^k}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}x^k$$

ed il resto di Lagrange R_{2n} assume la forma

$$R_n(x) = (-1)^{n+2}\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}}(1+c)^{-\frac{2n+1}{2}} \qquad |c| \le |x|$$

Possiamo pertanto concludere che

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}x^k + x^n\omega(x) \tag{13.47}$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{2^k}\frac{x^k}{k!} + (-1)^{n+2}\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}}(1+c)^{-\frac{2n+1}{2}} \qquad |c| \le |x| \tag{13.48}$$

6. Lo sviluppo di McLaurin di $\frac{1}{1-x}$

Sia

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}((-1,1))$ e si ha

Definiamo

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

ed osserviamo che

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \tag{13.49}$$

$$xS_n(x) = x \sum_{k=0}^{n} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1} \tag{13.50}$$

Sommando le due uguaglianze otteniamo

$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1} \tag{13.51}$$

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \tag{13.52}$$

e

$$S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{13.53}$$

Ne deduciamo che

$$\frac{1}{1-x} = S_n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{13.54}$$

ed osservando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0 \tag{13.55}$$

di ordine $n+1 \in \mathbb{N}$ possiamo concludere ricordando la 12.4 che

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \tag{13.56}$$

è il polinomio di McLaurin di $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
Pertanto

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \omega(x) \tag{13.57}$$

e

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{13.58}$$

Allo stesso risultato si può pervenire dimostrando per induzione che

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \quad . \quad f^{(n)}(0) = 1 \tag{13.59}$$

In questo modo si trova che che

$$R_n = \frac{1}{(1-c)^{n+1}} \qquad |c| \leq |x| \tag{13.60}$$

7. Come ricavare altri sviluppi

Le precedenti formule possono essere utilizzate per ricavare nuovi sviluppi di Taylor mediante semplice sostituzione.

Ad esempio dalla 13.7 possiamo ricavare, sostituendo x con $-x^2$ che

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} + x^{2n}\omega(x) \tag{13.61}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} + (-1)^{n+1}\frac{e^c}{(n+1)!}x^{2n+2} \qquad |c| \leq |x^2| \tag{13.62}$$

Da quest'ultima, osservando che

$$x^{2n}\omega(x)$$

è un infinitesimo di ordine superiore ad $2n$ e ricordando la 12.4 possiamo affermare che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$

è il polinomio di McLaurin di e^{-x^2} di grado n.

L'affermazione è giustificata dal fatto che $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$ differisce da e^{-x^2} per infinitesimi di ordine superiore a $2n$.

Si capisce quindi che può essere utile disporre di criteri che consentano di affermare che la differenza tra un polinomio ed una funzione è infinitesima di ordine superiore al grado del polinomio.

Possiamo a questo proposito dire che

Se f è derivabile e se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{13.63}$$

allora

$$f'(x) = (P_n(x))' + (R_n(x))' \tag{13.64}$$

(R_n è derivabile perchè $R_n = f - P_n$ e quindi è la differenza di due funzioni derivabili.)
Ora se $(R_n(x))'$ è un infinitesimo di ordine superiore ad $n-1$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(R_n(x))'}{x^{n-1}} = 0 \tag{13.65}$$

e, per la regola di De l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{(R_n(x))}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{(R_n(x))'}{nx^{n-1}} = 0 \tag{13.66}$$

CAPITOLO 14

LA CONVESSITÀ

Con le definizioni e gli strumenti che abbiamo introdotto fino a questo punto siamo in grado di distinguere una funzione il cui grafico sia del tipo illustrato in figura 1(a) da una il cui grafico sia quello illustrato nella figura 1(b)

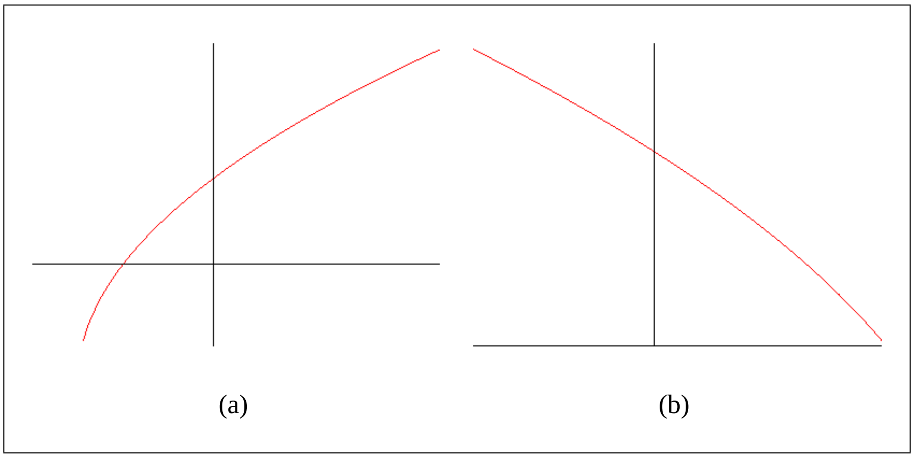

FIGURA 14.1.

Possiamo infatti osservare che il primo è il grafico di una funzione crescente mentre il secondo rappresenta una funzione decrescente.

Abbiamo inoltre già sviluppato strumenti (studio del segno della derivata prima) che ci consentono di stabilire se una funzione è crescente o decrescente.

Non siamo tuttavia ancora in grado di distinguere tra i grafici delle tre seguenti funzioni in quanto, ad un primo esame, possiamo osservare che tutte e tre sono funzioni crescenti; è tuttavia chiaro che si tratta di funzioni il cui grafico presenta caratteristiche molto diverse, così come è evidente quale è la differenza tra una scodella ed un ombrello.

Onde cercare di definire una proprietà che ci consenta di distinguere tra i tre grafici cominciamo ad esaminare il più semplice dei tre cioè il secondo. Chiaramente si tratta di una retta e quindi il suo grafico è individuato da due punti.

Indichiamo con ℓ la funzione e con $(x, \ell(x))$, $(y, \ell(y))$ due punti del suo grafico. Possiamo individuare il valore di ℓ in z semplicemente usando la proporzionalità tra i triangoli indicati in figura.

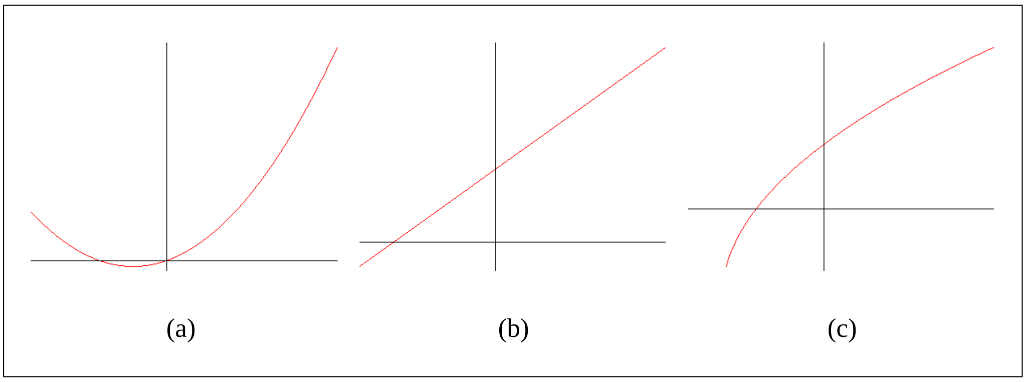

FIGURA 14.2.

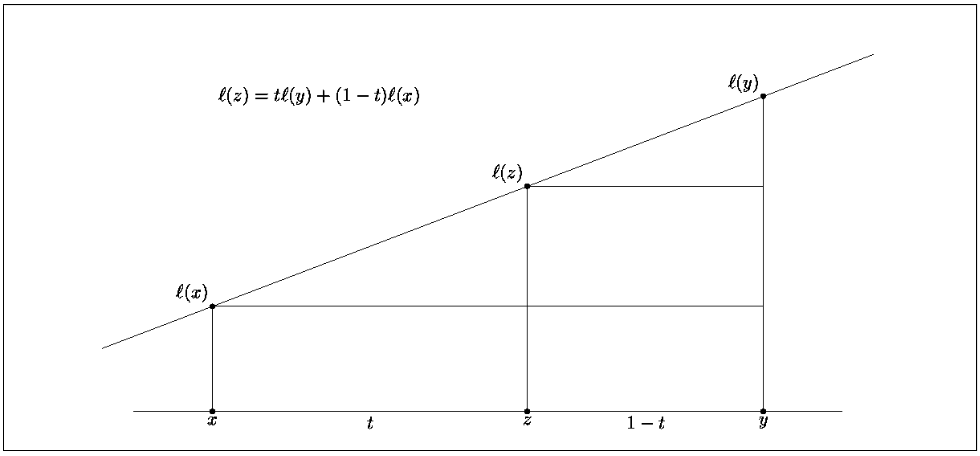

FIGURA 14.3.

Avremo infatti che

$$\frac{\ell(z)-\ell(x)}{z-x} = \frac{\ell(y)-\ell(x)}{y-x} \tag{14.1}$$

Poichè

$$\frac{\ell(z)-\ell(x)}{z-x} = \frac{\ell(x)-\ell(z)}{x-z} \qquad , \qquad \frac{\ell(x)-\ell(y)}{x-y} = \frac{\ell(y)-\ell(x)}{y-x}$$

la 14.1 non cambia anche nel caso in cui z non sia, come in figura, interno all'intervallo di estremi x ed y. Inoltre non è restrittivo considerare $x < y$.

Avremo pertanto che il valore di ℓ in z è dato da

$$\ell(z) = \ell(x) + (z-x)\frac{\ell(y)-\ell(x)}{y-x} \tag{14.2}$$

La 14.2 è semplicemente l'equazione di una retta che passa per il punto $(x, \ell(x)$ ed ha coefficiente angolare $\frac{\ell(y)-\ell(x)}{y-x}$.

È utile osservare che, se poniamo

$$t = \frac{z - x}{y - x}$$

esprimiamo, nel contempo, la proporzionalità

$$\frac{t}{1} = \frac{z - x}{y - x}$$

tra le lunghezze dei segmenti di $[x, z]$ e $[x, y]$ ed i valori t ed 1.

Pertanto il rapporto tra i segmenti $[z, y]$ e $[x, y]$, sarà uguale a $1 - t$.

Un semplice calcolo mostra infatti che

$$1 - t = 1 - \frac{z - x}{y - x} = \frac{y - x - z + x}{y - x} = \frac{y - z}{y - x}$$

Inoltre se poniamo

$$t = \frac{z - x}{y - x} \tag{14.3}$$

avremo

$$z - x = t(y - x) \tag{14.4}$$

e quindi

$$z = x + t(y - x)x = ty + (1 - t)x \tag{14.5}$$

Per $t \in (0, 1)$ la 14.5 individua un punto z che si trova all'interno dell'intervallo di estremi x ed y, mentre per $t > 1$ si hanno punti a destra di y e per $t < 0$ si hanno punti a sinistra di x.

Similmente possiamo scrivere la 14.2 come

$$\begin{aligned} \ell(z) = \ell(x) + (z - x)\frac{\ell(y) - \ell(x)}{y - x} &= \ell(x) + (\ell(y) - \ell(x))\frac{z - x}{y - x} \\ \ell(x) + t(\ell(y) - \ell(x)) &= t\ell(y) + (1 - t)\ell(x) \end{aligned} \tag{14.6}$$

ed infine possiamo scrivere

$$\ell(ty + (1 - t)x) = t\ell(y) + (1 - t)\ell(x) \tag{14.7}$$

ed osservare che al variare di t la 14.7 consente di esprimere il fatto che tutti i valori $\ell(z) = \ell(ty + (1 - t)x)$ si trovano sulla retta di cui abbiamo studiato il grafico.

Se ora sovrapponiamo i primi due grafici della figura 14.2 risulta evidente che, se chiamiamo f la funzione del primo grafico ed x e y i punti di intersezione tra il grafico e la retta, avremo che, all'interno dell'intervallo $[x, y]$, il grafico di f sta sotto il grafico della retta.

Chiamiamo una tale funzione **convessa** ed esprimiamo il fatto che abbiamo appena individuato semplicemente chiedendo che

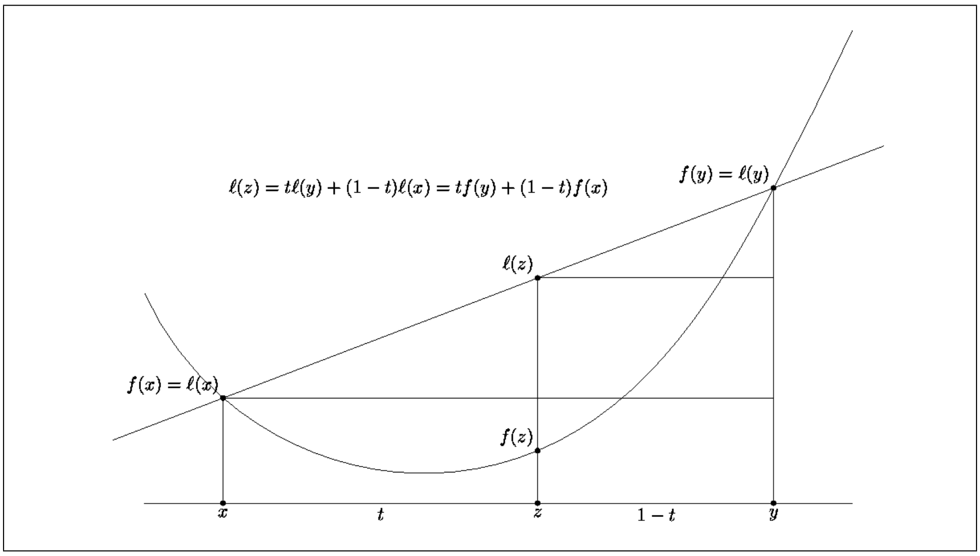

FIGURA 14.4.

$$f(ty + (1-t)x) \le tf(y) + (1-t)f(x) \qquad \forall t \in (0,1)$$

Poniamo in altre parole la seguente definizione

Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$**;** f **si dice convessa in** (a,b) **se**

$$f(ty + (1-t)x) \le tf(y) + (1-t)f(x) \tag{14.8}$$

per ogni $x, y \in (a,b)$ **e per ogni** $t \in (0,1)$

Inoltre

Diciamo che f **è strettamente convessa**

$$f(ty + (1-t)x) < tf(y) + (1-t)f(x) \tag{14.9}$$

per ogni $x, y \in (a,b)$ **e per ogni** $t \in (0,1)$

È utile osservare che la 14.8 può essere scritta in diversi modi tutti utili per comprendere le proprietà delle funzioni convesse.

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{14.10}$$

$$f(z) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{14.11}$$

$$f(z) \leq f(x) + (z-x)\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \tag{14.12}$$

Dalla definizione di convessità si ricava sottraendo ad ambo i membri $f(y)$

$$f(z) - f(y) \leq (t-1)(f(y)-f(x)) \tag{14.13}$$

$$f(z) - f(y) \leq \frac{z-y}{y-x}(f(y)-f(x)) \tag{14.14}$$

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \tag{14.15}$$

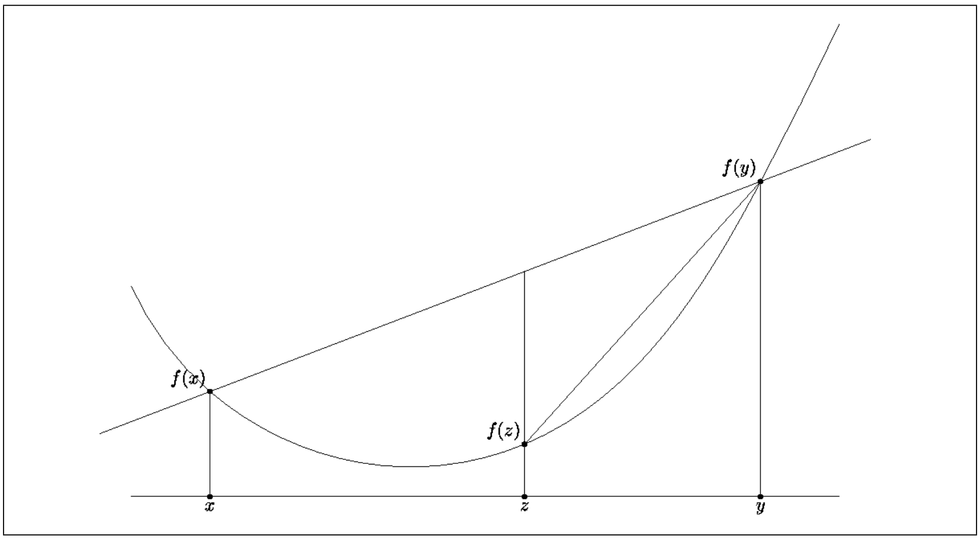

FIGURA 14.5.

Possiamo pertanto concludere, osservando che abbiamo sempre operato trasformando una disuguaglianza in una equivalente, che

Sono fatti equivalenti (si veda la figura 14.5):

- f **è convessa in** (a, b)
- **In ogni punto** $y \in (a, b)$ **il rapporto incrementale**

$$t \mapsto \frac{f(t)-f(y)}{t-y}$$

è una funzione crescente

D'altro canto, se f è convessa si ha:

$$f(z) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{14.16}$$

$$f(z)(t + (1-t)) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{14.17}$$

$$t(f(z) - f(y)) \leq (1-t)(f(x) - f(z)) \tag{14.18}$$

$$(z-x)(f(z) - f(y)) \leq (y-z)(f(x) - f(z)) \tag{14.19}$$

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \tag{14.20}$$

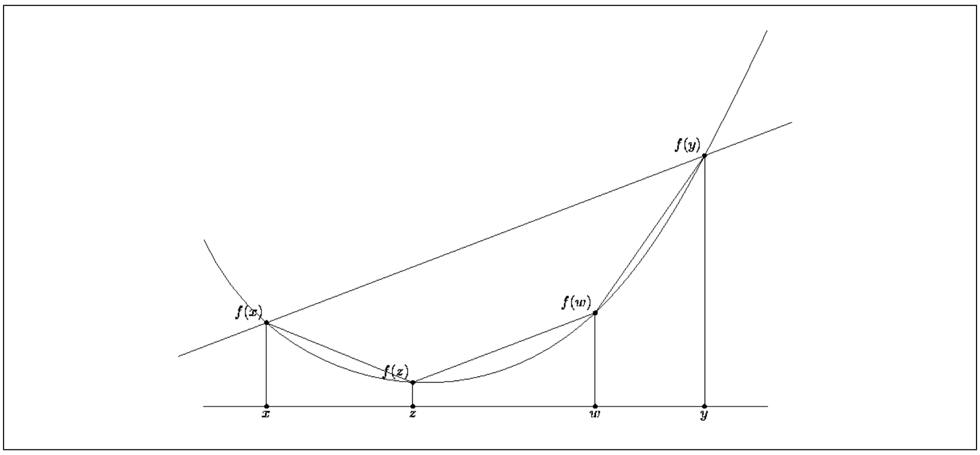

FIGURA 14.6.

Ora, se $x < z < w < y$ si ha

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \leq \frac{f(y) - f(w)}{y - w} \tag{14.21}$$

Passando al limite per $x \to z^-$ e per $y \to w^+$ se f è convessa e derivabile allora

$$f'(z) \leq f'(w) \tag{14.22}$$

e quindi f' è crescente.

Viceversa se f è derivabile ed f' è crescente allora, usando il teorema di Lagrange si può affermare che

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi) \geq f'(\eta) = \frac{f(y) - f(w)}{y - w} \tag{14.23}$$

e quindi f è convessa.

Ne concludiamo che se f è derivabile, allora

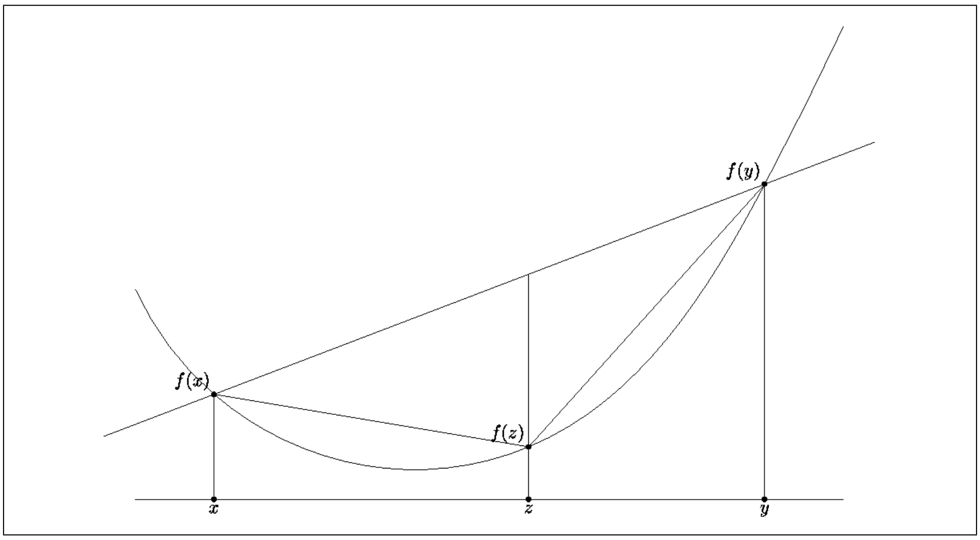

FIGURA 14.7.

Sono fatti equivalenti (si veda 14.7):

- **f è convessa in (a,b)**
- **f' è una funzione crescente in (a,b)**

Osserviamo infine che, se f è convessa, allora

$$f(y) - f(z) \geq (y-z)\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \tag{14.24}$$

$$f(y) \geq f(z) + (y-z)\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \tag{14.25}$$

e passando al limite per $x \to z$

$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z) \tag{14.26}$$

(14.27)

e pertanto il grafico di f sta' sopra al grafico di ogni sua retta tangente,
Se viceversa il grafico di f sta' sopra al grafico di ogni sua retta tangente, allora

$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z) \tag{14.28}$$

e

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z) \tag{14.29}$$

da cui, tenendo conto che $y - z > 0$, e $x - z < 0$

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq f'(z) \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \tag{14.30}$$

e

$$f(y) - f(z) \geq (y - z)\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \tag{14.31}$$

e quindi f è convessa.

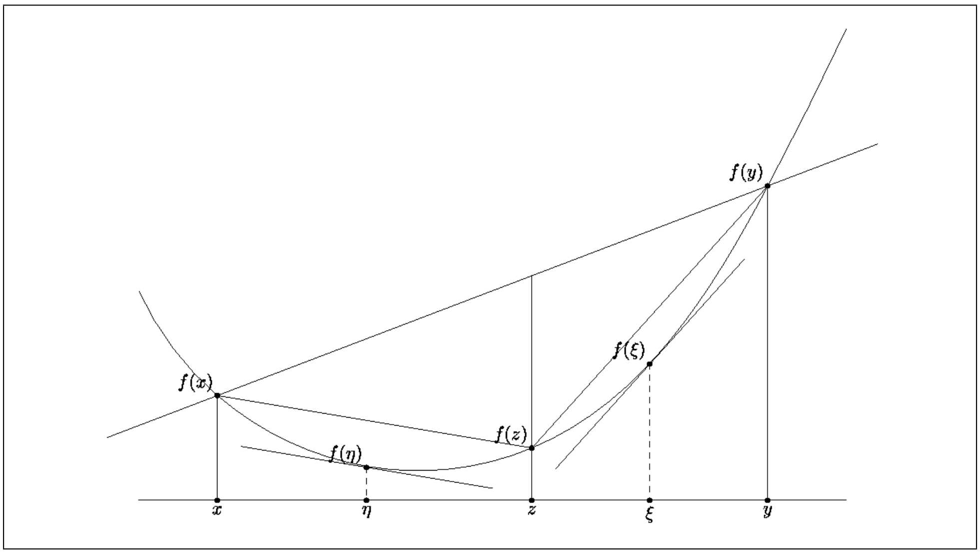

FIGURA 14.8.

Ne concludiamo che se f è derivabile, allora

Sono fatti equivalenti (si veda la figura 14.8):

- **f è convessa in (a, b)**
- **il grafico di f sta' sopra al grafico di ogni sua retta tangente**

I risultati che legano segno della derivata e crescenza della funzione permettono poi di concludere che

Sia f una funzione derivabile due volte in (a, b); sono condizioni equivalenti:

- **f è convessa in (a, b);**
- **f' è crescente in (a, b);**
- **f'' è non negativa in (a, b).**

DEFINIZIONE 14.1. *Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*, diciamo che* f *è concava in* (a, b) *se* $-f$ *è convessa in* (a, b).

DEFINIZIONE 14.2. *Diciamo che* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ha un punto di flesso in* $x_0 \in (a, b)$ *se esiste* $\delta > 0$ *tale che* f *è convessa (concava) in* $(x_0 - \delta, x_0)$ *e concava (convessa) in* $(x_0, x_0 + \delta)$.

Semplici esempi mostrano come sia possibile per una funzione avere un punto di flesso in 0 e

- non essere derivabile in 0 ($f(x) = \sqrt[3]{x}$)
- avere derivata non nulla in 0 ($f(x) = \sin x$)
- avere derivata nulla in 0 ($f(x) = x^3$).

TEOREMA 14.1. *Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in (a, b)$*, supponiamo* f *derivabile in* (a, b)*; allora* x_0 *è un punto di flesso se e solo se* f' *è crescente (decrescente) in un intorno destro di* x_0 *e decrescente (crescente) in un intorno sinistro.*

E' pertanto evidente che non è possibile caratterizzare un punto di flesso facendo uso soltanto della derivata prima nel punto.

Possiamo tuttavia provare nel successivo paragrafo condizioni in grado di caratterizzare i punti di flesso.

CAPITOLO 15

ESTREMI RELATIVI E ASINTOTI.

Abbiamo già visto cosa si intende per minimo e massimo assoluto di una funzione e abbiamo già trovato condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un minimo o un massimo assoluto. (Si veda il lemma 9.1 ed il teorema 7.10).

In questo paragrafo ci occuperemo di stabilire la definizione di massimo e minimo relativo per una funzione e daremo condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un punto di minimo o di massimo relativo.

DEFINIZIONE 15.1. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diciamo che $x_0 \in D$ è un punto di minimo (massimo) relativo per la funzione f se $\exists \delta > 0$ tale che se $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad\qquad (f(x) \leq f(x_0))$$

Usando la formula di Taylor possiamo ottenere uno strumento utile ad identificare i punti di massimo e di minimo relativo per una funzione. Tutto si fonda sul fatto che il polinomio di Taylor approssima una funzione a meno di infinitesimi di ordine superiore al grado del polinomio stesso.

Infatti, sia P_n il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di grado n, (ricordiamo che per scrivere il polinomio di Taylor di f, f deve essere derivabile almeno n volte); per il teorema 12.1 possiamo allora affermare che

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \omega(x - x_0) \tag{15.1}$$

dove, come al solito, qui e nel seguito supponiamo

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0$$

e se definiamo

$$P_n^1(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

si avrà

$$f(x) - f(x_0) = P_n^1(x) + (x - x_0)^n \omega(x - x_0) \tag{15.2}$$

mentre se

$$P_n^2(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

si avrà

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = P_n^2(x) + (x - x_0)^n \omega(x - x_0) \tag{15.3}$$

Osserviamo che P^1 e P^2 sono, rispettivamente, i polinomi di Taylor di $f(x) - f(x_0)$ e $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Dividendo le 15.1,15.2,15.3 per P, P^1 e P^2, rispettivamente, otteniamo

$$\frac{f(x)}{P_n(x)} = 1 + \frac{(x - x_0)^n}{P_n(x)} \omega(x - x_0) \tag{15.4}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{P_n^1(x)} = 1 + \frac{(x - x_0)^n}{P_n^1(x)} \omega(x - x_0) \tag{15.5}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{P_n^2(x)} = 1 + \frac{(x - x_0)^n}{P_n^2(x)} \omega(x - x_0) \tag{15.6}$$

(15.7)

Poichè P_n,P_n^1,P_n^2, sono polinomi di grado n e quindi sono infinitesimi, per $x \longrightarrow x_0$ di ordine al più n, tenendo conto che ω è a sua volta infinitesima, possiamo dedurre che

$$\frac{(x - x_0)^n}{P_n(x)} \omega(x - x_0) \quad \frac{(x - x_0)^n}{P_n^1(x)} \omega(x - x_0) \quad \frac{(x - x_0)^n}{P_n^2(x)} \omega(x - x_0) \tag{15.8}$$

sono infinitesimi per $x \longrightarrow x_0$.

Il teorema della permanenza del segno permette quindi di affermare che In un intorno di x_0

(1) f ha lo stesso segno di P
(2) $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di P^1
(3) $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ ha lo stesso segno di P^2

Poichè il segno di P_n in un intorno di x_0 è quello di $f(x_0)$, la prima affermazione si riduce semplicemente alla riaffermazione del teorema della permanenza del segno, tuttavia le altre due forniscono utili informazioni su crescenza e convessità.

Infatti poichè $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di P_n^1 in un intorno di x_0 possiamo dire che x_0 è un punto di minimo relativo se siamo in grado di stabilire che P_n^1 è positivo in un intorno di x_0, viceversa possiamo dire che x_0 non è di minimo relativo se il polinomio P_n^1 cambia segno in un intorno di x_0.

Ora se supponiamo che f sia derivabile almeno n volte in $(a, b) \ni x_0$ e che $f^{(n)}(x_0)$ sia la prima derivata non nulla di f in x_0 possiamo considerare il polinomio P_n^1 che risulta essere definito da

$$P_n^1(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

e quindi risulta evidente che P_n^1 mantiene segno costante o cambia segno in un intorno di x_0 a seconda che n sia pari o dispari; nel caso che n sia pari il segno di P_n^1 è determinato dal segno di $f^{(n)}(x_0)$

Possiamo allora enunciare il seguente risultato

TEOREMA 15.1. *Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile almeno n volte e sia $x_0 \in (a,b)$; sia $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ la prima derivata che non si annulla, $n \geq 1$; allora x_0 è punto di minimo relativo per f se e solo se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

In maniera simile $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ ha lo stesso segno di P_n^2 in un intorno di x_0 e quindi si ha che che x_0 è un punto di flesso se P_n^2 cambia segno in un intorno di x_0, viceversa possiamo dire che x_0 non è un punto di flesso se il polinomio P_n^2 è positivo in un intorno di x_0,

Ora se, come prima, supponiamo che f sia derivabile almeno n volte in $(a,b) \ni x_0$ e che $f^{(n)}(x_0)$ sia la prima derivata non nulla di f in x_0 possiamo considerare il polinomio P_n^2 che risulta essere definito da

$$P_n^2(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

e quindi risulta evidente che P_n^2 mantiene segno costante o cambia segno in un intorno di x_0 a seconda che n sia pari o dispari; nel caso che n sia pari il segno di P_n^2 è determinato dal segno di $f^{(n)}(x_0)$

Possiamo allora enunciare il seguente risultato

TEOREMA 15.2. *Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile almeno n volte e sia $x_0 \in (a,b)$; sia $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ la prima derivata che non si annulla, $n \geq 2$; allora x_0 è punto di flesso per f se e solo se n è dispari. Il segno di $f^{(n)}(x_0)$ fornisce poi informazioni sul fatto che il grafico di f sia sopra (funzione localmente convessa) o sotto (funzione localmente concava) la retta tangente al suo grafico*

DEFINIZIONE 15.2. *Siano $f, g : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; diciamo che f e g sono asintotiche se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Nel caso in cui sia

$$g(x) = \alpha x + \beta$$

diciamo che g è un asintoto per f.

TEOREMA 15.3. *Sia $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; la retta di equazione*

$$y = \alpha x + \beta$$

è un asintoto per f se e solo se

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad \beta = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x \tag{15.9}$$

DIMOSTRAZIONE. E' immediato verificare che le 15.9 sono sufficienti affinché la retta sia asintoto.

Viceversa, se la retta è un asintoto, si ha □

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\alpha x-\beta}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \alpha = 0 \tag{15.10}$$

DEFINIZIONE 15.3. *Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *diciamo che la retta di equazione* $x = c$ *è un asintoto verticale per* f *se*

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty$$

CAPITOLO 16

RICERCA NUMERICA DI ZERI E MINIMI.

Una delle applicazioni più tipiche della convessità consiste nella ricerca approssimata degli zeri di una funzione.

Il più semplice dei metodi di ricerca degli zeri è indubbiamente il metodo di bisezione di cui abbiamo già dato una dimostrazione in **??**

Il metodo di bisezione offre indubbi vantaggi di semplicità di applicazione e necessita di ipotesi ridotte alla sola continuità della funzione f; tuttavia, in presenza di migliori condizioni, si possono trovare metodi che convergono alla soluzione molto più velocemente.

Tali metodi, usualmente utilizzano la convessità della funzione, e sono tanto più importanti quanto è più grande la difficoltà di svolgere calcoli.

Chiaramente, con tempi di calcolo sempre più ridotti, tali metodi perdono parte della loro attrattiva anche se rimangono interessanti per la loro eleganza ed efficienza.

E' questo il caso del metodo di Newton (o delle tangenti) e del metodo della 'regula falsi'; essi convergono se le funzioni di cui si ricercano gli zeri sono convesse e possono essere generalizzati al caso non convesso purché le derivate prime e seconde della funzione f siano opportunamente maggiorabili o minorabili.

TEOREMA 16.1. - *Metodo di Newton (o delle tangenti)- Supponiamo* $f : (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$*, convessa e derivabile due volte in* (α,β); *supponiamo inoltre che* $\alpha < a < b < \beta$ *e sia*

$$f(a) < 0 \ \ , \ \ f(b) > 0 \ \ .$$

Allora esiste uno ed un solo punto $c \in (a,b)$ *tale che*

$$f(c) = 0 \ \ , \ \ f'(x) \geq f'(c) > 0 \ \ \forall x \in [c,b].$$

Definiamo la successione x_n *nella seguente maniera:*

$$x_0 = b$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};$$

allora:

- x_n *è decrescente e inferiormente limitata,*
- $\lim x_n = c$
- *se* $0 \leq f''(x) \leq M$ *per ogni* $x \in [a,b]$ *e se* $f'(a) = P > 0$ *si ha*

$$0 \leq x_n - c \leq \frac{2P}{M}\left(\frac{M}{2P}(b-a)\right)^{2^n}$$

Il precedente metodo può essere generalizzato al caso in cui la funzione non sia convessa, ma siano verificate opportune condizioni.

TEOREMA 16.2. *-Metodo della regula falsi - Sia* $f:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ *una funzione convessa e derivabile due volte in* (α,β) *e siano* $a,b\in(\alpha,\beta),\ a<b$*, tali che* $f(a)<0$*,* $f(b)>0$*.*

Allora esiste uno ed un solo $c\in(a,b)$*, tale che* $f(c)=0$ *e* $f'(x)\geq f'(c)>0\ \ \forall x\in[c,b]$*.*

Inoltre, se definiamo una successione x_n *nella seguente maniera:*

$$x_0,x_1\in[c,b]\ ,\ x_1<x_0 \tag{16.1}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \\ &= x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \end{aligned} \tag{16.2}$$

si ha

- x_n *è decrescente ed inferiormente limitata,*
- $\lim\ x_n=c$
- *se* $M,P\in\mathbb{R}$ *sono tali che*

$$0\leq f''(x)\leq M\ \ ,\ \ f'(x)\geq P>0\ \ \forall x\in[a,b]$$

allora

$$0\leq x_n-c\leq\frac{2P}{M}\left(\frac{M}{2P}(b-a)\right)^{\delta_n}$$

ove δ_n *è la successione di Fibonacci.*

Elenco delle figure

Indice

Indice analitico