ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 17

INTEGRAZIONE.

Consideriamo un punto materiale P che si muove lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano, ed è sottoposto ad una forza di richiamo costante a tratti verso un punto O della retta, che assumiamo come origine degli assi coordinati.

Più precisamente se x è lo spostamento da O del punto P la forza di richiamo R sarà espressa da:

$$R(x) = k_i \quad \text{se} \quad i \leq x < i+1 \qquad \text{con} \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Il lavoro svolto per muovere un punto su cui agisce una forza costante, si calcola moltiplicando l'intensità della forza per lo spostamento che il punto ha subito, pertanto il lavoro che occorre per spostare il punto P dall'origine è dato da:

$$\Lambda(x) = \sum_{j=0}^{i-1} k_j + k_i(x-i) \quad \text{se} \qquad i \leq x < i+1 \quad \text{con} \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Se supponiamo che la forza di richiamo R anzichè costante a tratti sia proporzionale alla distanza x di P da O, come ad esempio accade nel caso in cui su P agisca una forza elastica, cioè se ipotizziamo che

$$R(x) = kx \quad \text{con } k \in \mathbb{R}_+$$

avremo qualche problema in più per il calcolo del lavoro che non è più svolto da una forza costante, o costante a tratti. Possiamo allora tentare di calcolare il lavoro approssimando la forza di richiamo con una forza costante su tratti abbastanza piccoli.

Siano

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = x$$

n punti che conveniamo di indicare come

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

e possiamo chiamare partizione dell'intervallo $[0, x]$. Possiamo approssimare $\Lambda(x)$ con le quantità

$$\Lambda^+(P, x) \quad \text{e} \quad \Lambda^-(P, x)$$

definite mediante le

$$\Lambda^-(P,x) = \sum_{i=1}^{n} kx_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \tag{17.1}$$

$$\Lambda^+(P,x) = \sum_{i=1}^{n} kx_i(x_i - x_{i-1}) \tag{17.2}$$

Per come sono state definite si ha

$$\Lambda^-(P,x) \leq \Lambda(x) \leq \Lambda^+(P,x).$$

ed inoltre se consideriamo le partizioni

$$P_n = \{ix/n\ ,\ i = 0,1,2,..,n\}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \frac{kx^2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{kx^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \Lambda^-(P_n,x) \leq \\ \leq \sup\{\Lambda^-(P,x)\ :\ P\} \leq \inf\{\Lambda^+(P,x)\ :\ P\} \leq \\ \leq \Lambda^+(P_n,x) = \frac{kx^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\ = \frac{kx^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned} \tag{17.3}$$

Per cui passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che

$$\frac{kx^2}{2} \leq \sup\{\Lambda^+(P,x)\ :\ P\} \leq \inf\{\Lambda^-(P,x)\ :\ P\} \leq \frac{kx^2}{2} \tag{17.4}$$

ed è lecito definire

$$\Lambda(x) = \inf\{\Lambda^+(P,x)\ :\ P\} = \sup\{\Lambda^-(P,x)\ :\ P\} = \frac{kx^2}{2} \tag{17.5}$$

Lo stesso problema si pone non appena cerchiamo di definire l'area dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq x^2\}$$

Siano $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ e definiamo

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\};$$

possiamo approssimare, rispettivamente per eccesso e per difetto, l'area di D mediante le

$$A(P) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ (x_i - x_{i-1}) \quad , \quad a(P) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2(x_i - x_{i-1})$$

e possiamo definire l'area di D come l'eventuale valore comune di $\inf\{A(P)\ :\ P\}$ e $\sup\{a(P)\ :\ P\}$ dichiarando che D non è misurabile se tali valori non risultano coincidenti.

Considerata la partizione $P_n = \{i/n \ : \ i = 0, 1, 2, ..., n\}$ si calcola che

$$
\begin{aligned}
\text{(17.6)} \quad \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \le \\
\le \sup\{a(P) \ : \ P\} \le \inf\{A(P) \ : \ P\} \le \\
\le \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \le \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

e per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\frac{1}{3} \le \sup\{a(P) \ : \ P\} \le \inf\{a(P) \ : \ P\} \le \frac{1}{3} \tag{17.7}$$

onde è lecito definire

$$\text{area}(D) = \inf(A(P) \ : \ P\} = \sup\{a(P) \ : \ P\} = \frac{1}{3}$$

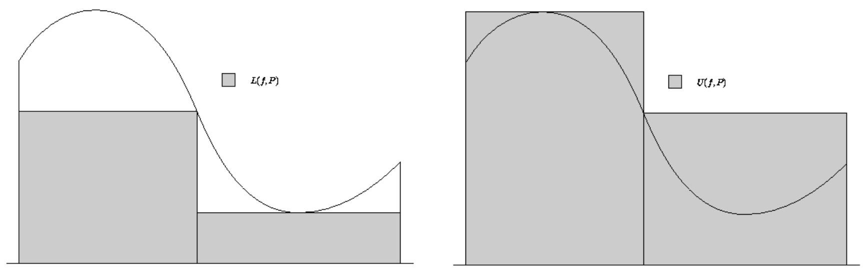
La definizione di integrale nasce dall'esigenza di formalizzare procedimenti del tipo che abbiamo esposto; in sostanza si tratta di definire l'estensione del concetto di somma discreta al caso in cui la somma sia fatta su insieme continuo di indici.

DEFINIZIONE 17.1. *Sia* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*, chiamiamo partizione di* $[a, b]$ *un insieme*

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

di punti di $[a, b]$ *tali che*

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b.$$



(a) Somme Inferiori *(b) Somme superiori*

FIGURA 17.1.

Indichiamo con $\mathcal{P}(a, b)$ *l'insieme delle partizioni di* $[a, b]$.
Definiamo

$$I_k = [x_k, x_{k+1}] \quad , \quad \Delta I_k = x_{k+1} - x_k \tag{17.8}$$

$$I = [a, b] \quad , \quad \Delta I = b - a \tag{17.9}$$

ovviamente si avrà

$$I = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k \quad , \quad [a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] \tag{17.10}$$

Definiamo inoltre, per ogni $P \in \mathcal{P}(a,b)$,

$$\Delta(P) = \max\{\Delta I_k, k = 0..n-1\}$$

DEFINIZIONE 17.2. *Sia* $P \in \mathcal{P}(a,b)$ *e sia* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione limitata che supporremo sempre;*

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

poniamo

$$P = \{x_0, x_1, .., x_n\}$$

e definiamo

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$
$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}.$$

Definiamo inoltre

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta I_k \tag{17.11}$$

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta I_k \tag{17.12}$$

$$R(f,P,\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta I_k \tag{17.13}$$

ove si indichi con $\mathcal{S} = \{c_1, .., c_n\}$ *una scelta di punti tale che* $x_k \leq c_k \leq x_{k+1}$.

$L(f,P)$ *ed* $U(f,P)$ *si dicono, rispettivamente, somme inferiori e somme superiori di* f *rispetto alla partizione* P*, mentre* $R(f,P,\mathcal{S})$ *si dice somma di Cauchy-Riemann.*

Vale la pena di osservare che le somme di Cauchy-Riemann dipendono dalla scelta dei punti $\mathcal{S}$ oltre che dai punti c_k.

DEFINIZIONE 17.3. *Siano* $P, Q \in \mathcal{P}(a,b)$*; diciamo che* P *è una partizione più fine di* Q*, e scriviamo* $P \ll Q$*, se* $P \supset Q$.

Diciamo inoltre che $P_n \in \mathcal{P}(a,b)$ *è una successione ordinata di partizioni se*

$$\begin{cases} P_{n+1} \ll P_n \\ \lim\ \Delta(P_n) = 0 \end{cases} \tag{17.14}$$

È evidente dalle figure che valgono i seguenti fatti la cui dimostrazione può essere scritta formalizzando ciò che è suggerito da esse.

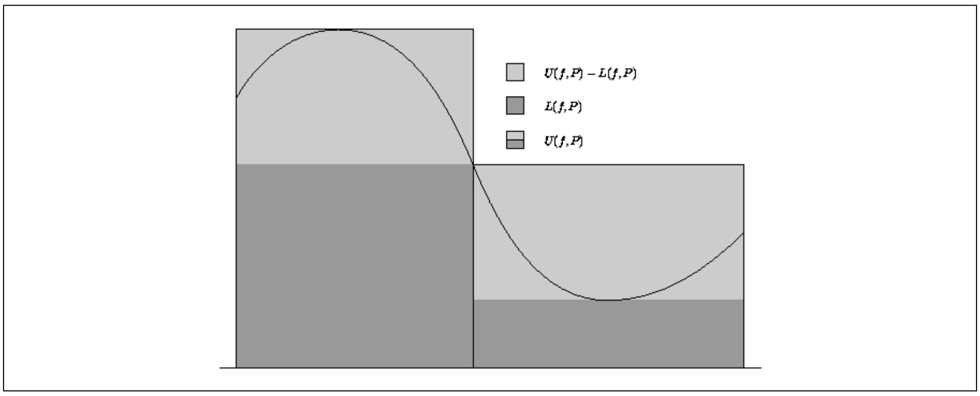


FIGURA 17.2. Confronto tra somme superiori e somme inferiori

LEMMA 17.1. *Siano $P, Q \in \mathcal{P}(a,b)$, $Q \ll P$, Allora*

$$\begin{aligned} m(b-a) \le L(f,P) \le L(f,Q) \le \\ \le R(f,Q,\mathcal{S}) \le \\ \le U(f,Q) \le U(f,P) \le M(b-a) \end{aligned} \tag{17.15}$$

Inoltre, comunque si scelgano $R, S \in \mathcal{P}(a,b)$, si ha

$$L(f,R) \le U(f,S).$$

DEFINIZIONE 17.4. *Definiamo*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,P) \ : \ P \in \mathcal{P}(a,b)\} \tag{17.16}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,P) \ : \ P \in \mathcal{P}(a,b)\} \tag{17.17}$$

Le precedenti quantità si dicono, rispettivamente, integrale superiore e integrale inferiore di f in $[a,b]$

È immediato verificare che

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le M(b-a).$$

DEFINIZIONE 17.5. *Diciamo che f è integrabile in $[a,b]$ se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \ = \ \overline{\int_a^b} f(x)dx \ .$$

In tal caso chiamiamo il valore comune ottenuto integrale di f tra a e b e lo denotiamo con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx \ .$$

Definiamo

$$\int_b^a f(x)dx \;=\; -\int_a^b f(x)dx$$

ed osserviamo che

$$\int_a^a f(x)dx \;=\; 0.$$

DEFINIZIONE 17.6. *Diciamo che f soddisfa la condizione di integrabilità in $[a,b]$ se $\forall\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b)$ tale che*

$$0 \le U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon \tag{17.18}$$

Dal momento che la quantità $U(f,P) - L(f,P)$ decresce al raffinarsi della partizione, restando non negativa, la precedente condizione è equivalente alla seguente

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ esiste } P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b) \text{ tale che}$$
$$0 \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$
$$\forall P \in \mathcal{P}(a,b), P \ll P_\varepsilon$$

DEFINIZIONE 17.7. *Diciamo che f è integrabile secondo Cauchy-Riemann in $[a,b]$ se esiste $I \in \mathbb{R}$ per cui esiste una partizione $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b)$ tale che $\forall\varepsilon > 0$ si ha che*

$$|R(f,P,\mathcal{S}) - I| < \varepsilon \tag{17.19}$$

per ogni $P \in \mathcal{P}(a,b)$, $P \ll P_\varepsilon$ e per ogni scelta di punti $\mathcal{S}$

TEOREMA 17.1. *Sono fatti equivalenti:*

(1) *f è integrabile su $[a,b]$*
(2) *f soddisfa la condizione di integrabilità in $[a,b]$*

DIMOSTRAZIONE. Se f è integrabile allora

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Ma per definizione

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\mathcal{P}} L(f,P) \qquad , \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathcal{P}} U(f,P) \tag{17.20}$$

e quindi possiamo trovare due partizioni P_ϵ e Q_ϵ tali che

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \le L(f,Q_\epsilon) \le \int_a^b f(x)dx \tag{17.21}$$

$$\int_a^b f(x)dx \le U(f,P_\epsilon) \le \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} \tag{17.22}$$

Se ne deduce che

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, Q_\epsilon) \leq \epsilon \tag{17.23}$$

Se $R_\epsilon = Q_\epsilon \bigcup P_\epsilon$, si ottiene che

$$U(f, R_\epsilon) - L(f, R_\epsilon) \leq U(f, P_\epsilon) - L(f, Q_\epsilon) \leq \epsilon \tag{17.24}$$

e quindi vale la condizione di integrabilità.
Se viceversa si ha

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) \leq \epsilon \tag{17.25}$$

allora

$$U(f, P_\epsilon) \leq L(f, P_\epsilon) + \epsilon \tag{17.26}$$

e pertanto

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon \tag{17.27}$$

e, passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ottiene

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \tag{17.28}$$

poichè è ovvio che

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{17.29}$$

si può concludere che

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \tag{17.30}$$

e l'integrabilità di f è dimostrata.

□

TEOREMA 17.2. *Se f è integrabile su $[a, b]$ allora f è integrabile secondo Cauchy-Riemann ed il valore dell'integrale è lo stesso.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè

$$L(f, P) \leq R(f, P, \mathcal{S}) \leq U(f, P) \tag{17.31}$$

ed anche

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P) \tag{17.32}$$

si ha

$$|R(f,P,\mathcal{S}) - \int_a^b f(x)dx| \leq U(f,P) - L(f,P) \tag{17.33}$$

Quando f è integrabile $U(f,P) - L(f,P)$ può essere reso piccolo quanto si vuole, pur di raffinare la partizione e quindi per la precedente disuguaglianza è possibile verificare la definizione di integrale secondo Cauchy-Riemann. □

Nel teorema 17.2 può essere dimostrata anche l'implicazione opposta per cui

TEOREMA 17.3. *f è integrabile su $[a,b]$ se e solo se f è integrabile secondo Cauchy-Riemann ed il valore dell'integrale è lo stesso.*

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che vale la definizione 17.7 avremo che se P è abbastanza fine allora

$$I - \varepsilon \leq R(f,P,\mathcal{S}) \leq I + \varepsilon \tag{17.34}$$

per ogni scelta di punti $\mathcal{S}$.

Poichè si ha

$$\begin{aligned} U(f,p) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta I_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(c_k) + \varepsilon)\Delta I_k = \\ &= R(f,P,\mathcal{S}_1) + \varepsilon(b-a) \leq I + \varepsilon(b-a) + \varepsilon \end{aligned} \tag{17.35}$$

$$\begin{aligned} L(f,p) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta I_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} (f(d_k) - \varepsilon)\Delta I_k = \\ &= R(f,P,\mathcal{S}_2) - \varepsilon(b-a) \leq I - \varepsilon(b-a) - \varepsilon \end{aligned} \tag{17.36}$$

Ne viene allora che

$$I - \varepsilon(b-a) - \varepsilon \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq I + \varepsilon(b-a) + \varepsilon \tag{17.37}$$

e quindi vale la condizione di integrabilità e

$$\int_a^b f(x)dx = I$$

□

TEOREMA 17.4. *Se f è una funzione integrabile e sia P_n una successione ordinata di partizioni di, allora*

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)dx = \lim_n U(f, P_n) = \lim_n L(f, P_n) = \lim_n R(f, P_n, S) \tag{17.38}$$

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che f è integrabile, possiamo trovare una partizione P_ϵ tale che

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

Se P_ϵ è costituita da N punti, dalla figura 17.3

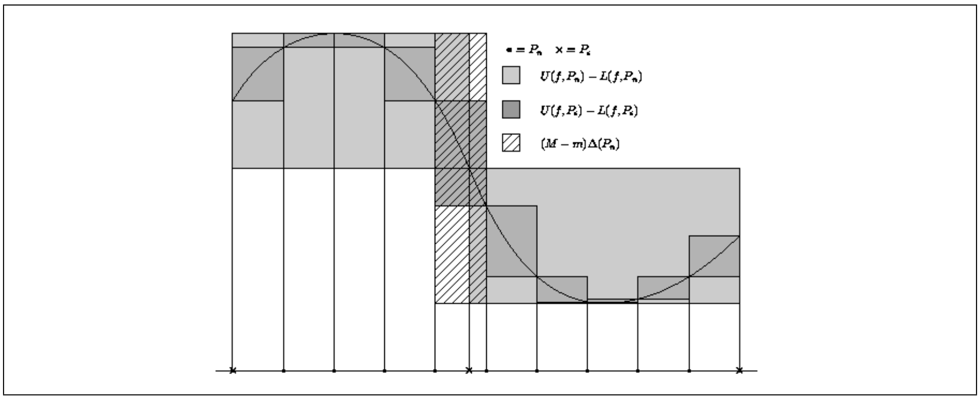


FIGURA 17.3. Confronto tra $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ e $U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon)$

si vede che

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) \le U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) + N(M - m)\Delta P_n \tag{17.39}$$

infatti è evidente che **non si può affermare semplicemente** che

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) \le U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon)$$

a causa del fatto messo in evidenza dalla zona tratteggiata in figura 17.3.

Tuttavia l'area di tale zona può essere maggiorata con

$$(M - m)\Delta P_n$$

e tale evenienza ha luogo al più in tanti casi quanti sono i punti (N) di P_ϵ.

Pertanto, fissando opportunamente P_ϵ e scegliendo n abbastanza grande, si ottiene che $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ diventa piccola quanto si vuole e quindi

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) \to 0$$

Ora, se ricordiamo che

$$n \mapsto L(f, P_n) \qquad \text{e} \qquad n \mapsto U(f, P_n) \tag{17.40}$$

sono successioni crescenti per il fatto che la successione di partizioni P è ordinata, che f è integrabile e che

$$L(f, P_n) \le R(f, P_n, \mathcal{S}) \le U(f, P_n) \tag{17.41}$$

possiamo concludere che

$$\lim_n U(f,P_n) \quad , \quad \lim_n L(f,P_n) \quad , \quad \lim_n R(f,P_n,S) \tag{17.42}$$

esistono e quindi poichè si ha

$$L(f,P_n) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f,P_n)$$

$$\lim_n U(f,P_n) = \lim_n L(f,P_n) = \lim_n R(f,P_n,S) = \int_a^b f(x)dx \tag{17.43}$$

□

TEOREMA 17.5. *Se* $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sono integrabili su* $[a,b]$*, e se* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*; allora* $\alpha f + \beta g$ *e* fg *sono integrabili su* $[a,b]$ *e*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \;=\; \alpha \int_a^b f(x)dx \;+\; \beta \int_a^b g(x)dx \;\;.$$

TEOREMA 17.6. *Se* f *è integrabile in* $[a,b]$*; e se* $c \in (a,b)$*, allora* f *è integrabile in* $[a,c]$ *ed in* $[c,b]$ *e*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_a^c f(x)dx \;+\; \int_c^b f(x)dx\,.$$

TEOREMA 17.7. *Se* $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sono integrabili in* $[a,b]$ *e se* $f(x) \ge g(x)\ \forall x \in [a,b]$*; allora*

$$\int_a^b f(x)dx \;\ge\; \int_a^b g(x)dx \;\;.$$

DIMOSTRAZIONE. Sarà sufficiente provare che, se $f(x) \ge 0$,

$$\int_a^b f(x)dx \;\ge 0,$$

ma questo è ovvia conseguenza del fatto che $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \ge 0$. □

TEOREMA 17.8. *Se* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *e se definiamo*

$$f_+(x) = \max\{f(x),0\} \quad , \quad f_-(x) = \min\{f(x),0\}.$$

Allora f_+ *ed* f_- *sono integrabili su* $[a,b]$ *se e solo se* f *è integrabile su* $[a,b]$ *e si ha*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_a^b f_+(x)dx \;+\; \int_a^b f_-(x)dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$, allora

$$U(f_+,P) - L(f_+,P) \;\le\; U(f,P) - L(f,P)$$

in quanto

$$\sup\{f_+(x) - f_+(y) : x,y \in [x_{i-1},x_i]\} \le \sup\{f(x) - f(y) : x,y \in [x_{i-1},x_i]\}.$$

Inoltre si ha $f = f_+ + f_-$. □

COROLLARIO 17.1. *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$, allora anche $|f|$ è integrabile in $[a,b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $|f| = f_+ - f_-$ □

Osserviamo che $|f|$ può essere integrabile senza che f sia tale; ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

TEOREMA 17.9. *Se f è integrabile , allora*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \ \leq \ \left| \int_a^b |f(x)|dx \right|.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e la tesi segue dai risultati precedenti. □

TEOREMA 17.10. *Se f è integrabile in $[a,b]$, non negativa, e se $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$; allora*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \ \leq \ \int_a^b f(x)dx.$$

TEOREMA 17.11. *Siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, e sia f limitata ed integrabile in $[a,b]$; se*

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b] \setminus N \ \ , \ N = \{y_1, ..., y_k\}$$

allora anche g è integrabile in $[a,b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \int_a^b g(x)dx.$$

DIMOSTRAZIONE.È sufficiente provare che la funzione

$$h_c(x) = \begin{cases} 1 & , x = c \\ 0 & , \ x \neq c \end{cases}$$

con $c \in [a,b]$, è integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b h_c(x)dx = 0.$$

Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$; si ha

$$L(h_c, P) = 0 \quad , \quad U(h_c, P) \leq 2\Delta(P).$$

Pertanto

$$\inf\{U(h_c, P) : P \in \mathcal{P}(a,b)\} = 0.$$

La tesi segue tenendo conto del fatto che

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=1}^k \ h_{y_k}(x) \ [f(y_k) - g(y_k)].$$

□

Ci proponiamo ora di dare alcune condizioni sufficienti per l'integrabilità.

TEOREMA 17.12. *Se f è monotona su $[a,b]$, allora f è integrabile in $[a,b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Il teorema segue da quanto illustrato nella figura

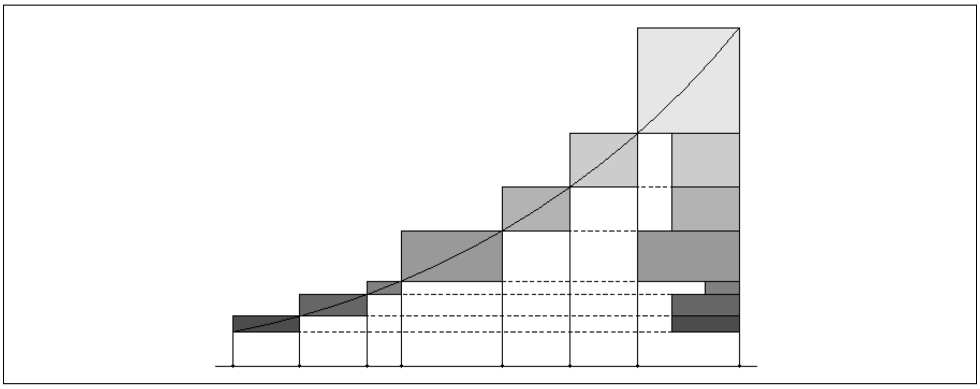


FIGURA 17.4. Integrabilità delle funzioni monotone

Supponiamo ad esempio che f sia crescente in $[a,b]$; si ha

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad , \quad M_i = f(x_i)$$

per cui

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1})$$

e, scelta $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b)$ in modo che $\Delta(P_\varepsilon) < \varepsilon$, si ha

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \varepsilon[f(b) - f(a)].$$

□

TEOREMA 17.13. *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile in $[a,b]$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di questo teorema si fonda sul concetto di uniforme continuità.

Poichè non si tratta di un concetto semplice, tanto che agli albori del calcolo esso era ignorato, è conveniente illustrare la dimostrazione per le funzioni lipschitziane, cioè per le funzioni per cui si può affermare che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

In tal caso si ha

(17.44)
$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta I_k=\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)-f(y_k))\Delta I_k\le \sum_{k=0}^{n-1}L|x_k-y_k|\Delta I_k$$

con $x_k, y_k \in I_k$ e se scegliamo $\Delta P < \frac{\epsilon}{L}$ otteniamo che

$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)\le \epsilon\sum_{k=0}^{n-1}\Delta I_k=\epsilon(b-a)$$

□

Possiamo anche dimostrare che

TEOREMA 17.14. *Se f è limitata in $[a,b]$ e continua in $[a,b]\setminus N$, $N=\{y_1,...,y_k\}$; allora f è integrabile in $[a,b]$.*

TEOREMA 17.15. *Se f è continua e non negativa e se*

$$\int_a^b f(x)dx=0$$

allora $f(x)=0$ per ogni $x\in[a,b]$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista $\alpha\in[a,b]$ tale che $f(\alpha)>0$; allora esiste $[c,d]\subset[a,b]$ in modo che $f(x)\ge m>0$ in $[c,d]$.

Pertanto

$$\int_a^b f(x)dx \ \ge\ \int_c^d f(x)dx \ \ge\ m(d-c)\ >\ 0.$$

□

Gli sviluppi del calcolo integrale e le sue applicazioni dipendono dal legame strettissimo tra il concetto di integrale e quello di derivata che è espresso dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dalle proprietà di cui gode la funzione integrale $x\mapsto\int_{x_0}^x f(t)dt$.

Definiamo pertanto

(17.45)
$$F(x)=\int_{x_0}^x f(x)dx$$

e dedichiamo un po' di attenzione allo studio della continuità e della derivabilità di F

TEOREMA 17.16. *Sia f integrabile in $[a,b]$ e consideriamo, per ogni $x\in[a,b]$, la funzione definita da*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ \ .$$

Allora F è lipschitziana in $[a,b]$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x, y \in [a, b]$ e sia $|f(x)| \le M$ $\forall x \in [a, b]$; si ha

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \le \left| \int_x^y |f(t)|dt \right| \le M|y - x|. \tag{17.46}$$

□

TEOREMA 17.17. *Sia f integrabile in $[a, b]$; consideriamo la funzione definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Se f è continua in $x_0 \in (a, b)$, allora F è derivabile in x_0 e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|t - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Perciò se $|h| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \le \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \right| \le \varepsilon.$$

□

TEOREMA 17.18. *della media - Sia f continua, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo applicare il teorema di Lagrange alla Funzione $F(x)$ su $[a, b]$ □

Il precedente teorema può essere generalizzato nella seguente forma

TEOREMA 17.19. *- della media - Siano f, g continue, g non negativa; allora esiste $c \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è banale se g è identicamente nulla. In caso contrario si ha

$$\int_a^b g(x)dx > 0$$

e, posto

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \ , \ \ M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

si ha

$$m \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \int_a^b g(x)dx$$

e

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M.$$

Pertanto la tesi segue dal fatto che f è continua in $[a, b]$ ed assume tutti i valori compresi tra il suo minimo m ed il suo massimo M. $\square$

I precedenti risultati indicano la necessità di introdurre un nuovo concetto: quello di funzione la cui derivata è assegnata.

DEFINIZIONE 17.8. *Diciamo che F è una primitiva di f in (a, b) se F è ivi derivabile e risulta*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Definiamo integrale indefinito di f e lo indichiamo con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

l'insieme delle primitive di f.

TEOREMA 17.20. *Supponiamo che F e G siano due primitive di f in (a, b), allora esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in (a, b).$$

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che $(F - G)'(x) = 0$ in (a, b) si può applicare il corollario del teorema di Lagrange che assicura che se una funzione ha derivata nulla allora è costante. $\square$

COROLLARIO 17.2. *Sia F una primitiva di f in (a, b) e sia f continua in (a, b); allora esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ + k.$$

Il precedente corollario permette di determinare l'integrale indefinito di una funzione. Ricordiamo tuttavia che la sua validità è limitata a funzioni definite su un intervallo.

Anche il calcolo dell'integrale di f in $[a, b]$ beneficia di questo risultato vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 17.21. *Sia f integrabile in $[a, b]$, sia F una primitiva di f in (a, b) e sia $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$; allora*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \ = \ F(\beta) - F(\alpha).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$, $P = \{x_0, .., x_n\}$, si ha

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx - [F(\beta) - F(\alpha)] \right| = \tag{17.47}$$
$$= \left| \int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| =$$
$$= \left| \int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| =$$
$$= \left| \int_\alpha^\beta f(x)dx - R(f, P, \Xi) \right|$$

e si può concludere scegliendo una partizione sufficientemente fine. □

Il teorema precedente consente di usare le primitive di una funzione per calcolare il valore di un integrale definito. È pertanto importante conoscere le primitive di alcune funzioni elementari. Rimandando all'appendice per una informazione più completa, ci limitiamo qui ad osservare che la tabella di derivate data nel paragrafo 8, letta da destra verso sinistra, fornisce le primitive delle principali funzioni elementari.

Le funzioni che sono primitive di qualche altra funzione godono di una certa regolarità che è precisata nel seguente enunciato.

TEOREMA 17.22. *Se f ha una primitiva in (a,b), per ogni $c \in (a,b)$ non è possibile che*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia F una primitiva di f in (a,b); se i limiti in oggetto esistessero, si avrebbe, per le proprietà della derivabilità,

$$F'(c) = \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x).$$

□

Per il calcolo degli integrali definiti è molto utile servirsi delle seguenti regole di integrazione.

TEOREMA 17.23. *- integrazione per parti - Siano f, g di classe $\mathcal{C}^1$ e sia $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$; allora*

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

pertanto

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (fg)'(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

ed osservando che fg è una primitiva di $(fg)'$ in (a,b) si deduce la tesi. □

TEOREMA 17.24. - *integrazione per sostituzione - Se* $f \in \mathcal{C}^0$, $g \in \mathcal{C}^1$*; sia* $[\alpha, \beta] \subset (c, d)$*, allora*

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx \;=\; \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia F una primitiva di f in (a, b), allora $F(g(\cdot))$ è una primitiva di $f(g(\cdot))g'(\cdot)$ in (c, d) e si ha

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$$

□

Se f è una funzione, indichiamo

$$f(x)\,\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

In tal modo risultano semplificati molti enunciati che coinvolgono gli integrali definiti.

Ad esempio si può dire che, se F è una primitiva della funzione continua f, allora

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(x)\,\Big|_a^b$$

Ci siamo occupati fino ad ora del problema di integrare una funzione limitata su di un intervallo limitato che, in genere, è anche supposto chiuso.

Nella pratica è spesso necessario integrare funzioni non limitate o su intervalli non limitati, a questo scopo è necessario definire una estensione del concetto di integrale, che permetta di considerare anche questi casi.

La definizione non è strettamente collegata col procedimento di integrazione definita dato precedentemente, anche se da esso dipende in maniera essenziale, e, per questa ragione, viene denominato procedimento di integrazione impropria.

DEFINIZIONE 17.9. *Sia* f *integrabile in* $[x, b]$*, per ogni* $x \in (a, b]$*. Diciamo che* f *ammette integrale improprio (finito) in* $(a, b]$ *se esiste (finito)*

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$$

In tal caso definiamo il suo valore

$$\int_a^b f(x)dx$$

Definizioni analoghe permettono di considerare facilmente l'integrale improprio su di un intervallo $[a, b]$ di una funzione f limitata e integrabile in ogni intervallo $[x, y] \subset [a, b] \setminus N$, dove N è un insieme finito di punti

DEFINIZIONE 17.10. *Sia* f *integrabile in* $[a, x]$*, per ogni* $x \geq a$*. Diciamo che* f *ammette integrale improprio (finito) in* $[a, +\infty)$ *se esiste (finito)*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

In tal caso definiamo il suo valore

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Definizioni analoghe permettono di considerare l'integrale improprio di una funzione limitata e integrabile su ogni intervallo $[x, y]$, in $(-\infty, a]$ o $(-\infty, +\infty)$.

In entrambe le due precedenti definizioni diciamo che f ammette integrale improprio convergente o divergente, a seconda che il suo valore sia finito o infinito rispettivamente.

Per semplicità, nel seguito faremo riferimento solo ai casi contemplati nelle definizioni 17.9, 17.10, tuttavia i risultati che proveremo possono essere facilmente rienunciati e ridimostrati negli altri casi.

Possiamo considerare qualche esempio per illustrare i concetti introdotti Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

allora:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_\alpha(x)dx &= \frac{1}{1-\alpha} && se\ \ 0 < \alpha < 1 \\
\int_0^1 f_\alpha(x)dx &= +\infty && se\ \ \alpha \geq 1 \\
\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx &= \frac{1}{\alpha - 1} && se\ \ \alpha > 1 \\
\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx &= +\infty && se\ \ 0 < \alpha \leq 1
\end{aligned}$$

I risultati esposti si possono ricavare applicando semplicemente le definizioni e le regole elementari di integrazione. Partendo da questi semplici punti fermi possiamo ricavare dei criteri che consentono di stabilire se una funzione è integrabile in senso improprio.

A questo scopo dobbiamo considerare una conseguenza del criterio di convergenza di convergenza di Cauchy.

TEOREMA 17.25. *Sia f integrabile in $[x, b]$, per ogni $x \in (a, b]$; allora f ammette integrale improprio convergente in $(a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se si considerano $x', x'' \in (a, a + \delta_\varepsilon)$ allora*

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

TEOREMA 17.26. *Sia f integrabile in $[a, x]$, per ogni $x \geq a$; allora f ammette integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x', x'' > \delta_\varepsilon$ allora*

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

I due precedenti teoremi seguono immediatamente dal criterio di convergenza di Cauchy.

TEOREMA 17.27. *Siano f, g integrabili in ogni $[x, y] \subset I$; valgono i seguenti fatti:*

(1) *se $|f|$ ammette integrale improprio convergente in I, allora anche f ammette integrale improprio convergente in I;*
(2) *se $|f| \leq g$ e g ammette integrale improprio convergente in I, allora anche $|f|$ (e quindi f) ammette integrale improprio convergente in I.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} |f(x)|dx \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} g(x)dx \right|$$

□

Non è tuttavia vero che se f ammette integrale improprio convergente anche $|f|$ ammette integrale improprio convergente. Per esempio si consideri

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

sull'intervallo $[0, +\infty)$, (si veda teorema 17.31).

Diamo ora un risultato che sarà di grande utilità per stabilire l'integrabilità in senso improprio di una funzione.

TEOREMA 17.28. *Sia f integrabile in $[x, b]$, per ogni $x \in (a, b]$, e supponiamo che f sia infinita per $x \to a^+$ di ordine β.*

(1) *Se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\beta \leq \alpha < 1$ allora f ammette integrale improprio convergente in $(a, b]$.*
(2) *se $\beta \geq 1$ allora f ammette integrale improprio divergente in $(a, b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo ad esempio $f(x) \to +\infty$ per $x \to a^+$ e proviamo (1). Si ha

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{1/(x-a)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}_+$$

e pertanto esistono $k, \delta > 0$ tali che

$$0 \le f(x) \le \frac{k}{(x-a)^\alpha} \qquad \forall x \in (a, a+\delta)$$

e la tesi segue dal teorema 17.27 e dalle 17.48, non appena si sia tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt \; = \int_{a+\delta}^b f(t)dt + \lim_{x\to a^+} \int_x^{a+\delta} f(t)dt.$$

Proviamo ora (2); se $x \in (a, a+\delta)$, con $k, \delta > 0$ opportunamente scelti, si ha

$$f(x) \ge \frac{k}{x-\alpha}$$

e come prima segue la tesi. □

TEOREMA 17.29. *Sia f integrabile in $[a, x]$, per ogni $x \ge a$; supponiamo che f ammetta integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$ e che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Allora $\ell = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo ad esempio che sia $\ell > 0$; allora, se $x > \delta$, $f(x) > \ell/2$. Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = \int_a^\delta f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_\delta^x f(t)dt \ge \tag{17.48}$$
$$\ge \int_a^\delta f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} (x-\delta)\ell/2 = +\infty$$

□

Osserviamo che f può ammettere integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$ senza che esista il limite di f per $x \to +\infty$, se ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & i < x \le i + 1/2^i \\ 0 & i + 1/2^i \le x \le i+1 \end{cases} \qquad , \qquad i \in \mathbb{N} \tag{17.49}$$

si ha

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = \lim_n \frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1$$

Si può analogamente provare che

TEOREMA 17.30. *Sia f integrabile in $[a,x]$, per ogni $x \geq a$, e supponiamo che f sia infinitesima di ordine β per $x \to +\infty$.*

1. *Se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\beta \geq \alpha > 1$, allora f ammette integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$.*
2. *Se $\beta \leq 1$ allora $|f|$ ammette integrale improprio divergente in $[a,+\infty)$.*

Osserviamo, a proposito dei teoremi 17.28,?? che qualora $\beta \in \mathbb{R}$, in (1) è sufficiente prendere $\alpha = \beta$.

TEOREMA 17.31. *Siano f, g, $f \in \mathcal{C}^0$, $g \in \mathcal{C}^1$, e sia F una primitiva di f; allora le seguenti condizioni sono sufficienti per la convergenza dell'integrale improprio di fg in $[a,+\infty)$:*

1. *F limitata in $[a,+\infty)$ e g monotona a 0 per $x \to +\infty$;*
2. *F convergente per $x \to +\infty$ e g monotona e limitata.*

Segue da

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)dt.$$

CAPITOLO 18

QUALCHE STUDIO DI FUNZIONE INTEGRALE

Lo studio di una funzione che sia data mediante un integrale ricorre in molti casi: ad esempio quando si studiano le soluzioni di equazioni differenziali in cui compaiono funzioni che non ammettono primitive elementari o che ammettono primitive elementari non facilmente calcolabili.

Per funzione integrale si intende una funzione definita da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{18.1}$$

I risultati che occorre tener ben presenti quando si studia una funzione integrale sono i seguenti:

(1) I risultati che sono sufficienti a garantire l'integrabilità di una funzione: sono quelli contenuti nei teoremi **??** e si possono brevemente riassumere dicendo che:

- **f è integrabile su ogni intervallo su cui è continua**
- **f è integrabile su ogni intervallo su cui è monotona**
- **f è integrabile su ogni intervallo su cui è limitata e continua a meno di un numero finito di punti**
- **f è integrabile su ogni intervallo su cui differisce da una funzione integrabile a meno di un insieme finito di punti**

(2) Il risultato che assicura che se f è limitata allora F è continua.

(3) il teorema fondamentale del calcolo che assicura che se f è continua in x allora F è derivabile in x e

$$F'(x) = f(x)$$

(4) la definizione di integrale improprio per cui:

- Se f è integrabile in senso improprio in c^+

$$\lim_{x\to c^+} F(x) = \int_{x_0}^{c} f(t)dt$$

- Se f è integrabile in senso improprio a $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$$

Vale inoltre la pena di ricordare che se

$$G(x) = \int_{x_0}^{\beta(x)} f(t)dt \tag{18.2}$$

allora

$$G(x) = F(\beta(x)) \tag{18.3}$$

e quindi, se le funzioni in gioco sono derivabili

$$G'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) \tag{18.4}$$

Inoltre se

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \tag{18.5}$$

allora se c è scelto nel campo di integrabilità di f, si ha

(18.6)

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_{\alpha(x)}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_{c}^{\beta(x)} f(t)dt - \int_{c}^{\alpha(x)} f(t)dt$$

e quindi

(18.7)

$$G'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

1. Esempio

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^t}(t-1)\sqrt{t+2}}dt$$

Cominciamo a determinare il dominio di f.

La funzione integranda risulta definita e continua (e quindi integrabile) per $t \in (-2,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Inoltre

$$\lim_{t\to-2} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = -\infty$$

di ordine $\frac{1}{2}$ in quanto l'integranda è infinita a causa del fattore $\sqrt{t+2}$ presente nel denominatore;

$$\lim_{t\to0^-} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = -\infty$$

di ordine $\frac{1}{3}$ a causa del fattore a denominatore $\sqrt[3]{1-e^t}$ (si ricordi che $1-e^t$ è infinitesimo in zero di ordine 1); analogamente

$$\lim_{t\to0^+} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = +\infty$$

di ordine $\frac{1}{3}$

Infine

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = +\infty$$

di ordine 1 a causa del fattore $t-1$ a denominatore.

Ne segue che la funzione integranda è integrabile (eventualmente in senso improprio) in $[-2,1)\cup(1,+\infty)$.

Poichè gli estremi di integrazione sono 0 ed x dovrà essere $x \in [-2,1)$.

Dal momento che

- la funzione integranda è continua per $t \in (-2,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$
- f è definita in $[-2,1)$)

il teorema fondamentale del calcolo assicura che

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{1-e^x}(x-1)\sqrt{x+2}}$$

Per ogni $x \in (-2,0)\cup(0,1)$

Per quanto riguarda i punti $x=-2$ e $x=0$ si è già visto che

$$\lim_{t\to -2} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{t\to 0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{t\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

cui f non è derivabile per $x=-1$ ed $x=0$.

Per tracciare il grafico di f dobbiamo tenere conto che

- $f'(x) > 0$ per $x \in (0,1)$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$,
- f non è derivabile in -2 ed in 0
- in -2 ed in 0 il grafico ha tangente verticale

Pertanto il grafico di f risulta:

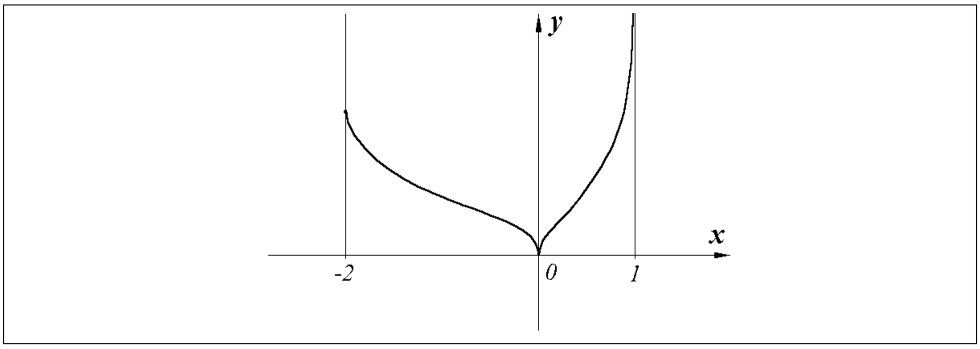


FIGURA 18.1. Grafico di $f(x)$

Consideriamo ora

$$g(x) = \int_0^{|x|} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} dt$$

Dal momento che

$$g(x) = f(|x|)$$

il grafico di g sarà uguale a quello di f per gli $x \in [0,1)$ ed il simmetrico rispetto all'asse y per gli $x \in (-1,0]$.

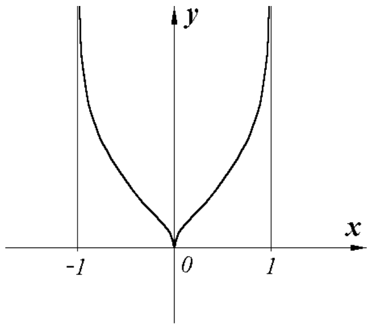


FIGURA 18.2. Grafico di $g(x)$

Se infine consideriamo

$$h(x) = \int_{x^3}^{x^2+2} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} dt$$

per quanto visto ai punti precedenti, (f è integrabile in $[-2,1) \cup (1,+\infty)$) L'intervallo di integrazione dovrà essere contenuto nell'insieme in cui è possibile calcolare l'integrale; dovrà cioè risultare che

$$[x^3, x^2+2] \subset [-2,1) \cup (1,+\infty)$$

e quindi la funzione h risulta definita per $x^3 > 1$ ovvero per $x > 1$.

Poiché l'integranda è continua per $t > 1$ e gli estremi di integrazione sono derivabili, si ha, per $x \in (1,+\infty)$

$$h'(x) = \frac{2xe^{(x^2+2)^2}}{\sqrt[3]{1-e^{x^2+2}}(x^2-1)\sqrt{x^2+4}} - \frac{3x^2e^{x^6}}{\sqrt[3]{1-e^{x^3}}(x^3-1)\sqrt{x^3+2}}$$

2. Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_x^{4-x} \frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}} dt$$

La funzione integranda è definita e continua (e quindi integrabile) in $(-\infty,1) \cup (1,4) \cup (4,+\infty)$.

Inoltre

$$\lim_{t \to 1} \left| \frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}} \right| = +\infty \qquad \text{di ordine } \frac{1}{3}$$

mentre

$$\lim_{t\to 4}\left|\frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}}\right| = +\infty \qquad \text{di ordine } 1$$

Pertanto l'integranda risulta integrabile (anche in senso improprio) in $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$.

Dovrà allora essere

$$\begin{cases} x<4 \\ 4-x<4 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x>4 \\ 4-x>4 \end{cases}$$

ovvero $0<x<4$.

Essendo gli estremi di integrazione due funzioni continue e derivabili, f risulta continua in tutto il suo dominio (perché l'integranda è integrabile) e derivabile per $x\neq 1$ e $4-x\neq 1$ essendo l'integranda continua per $t\neq 1$ (per $t=1$ l'integranda è infinita).

Pertanto l'insieme di continuità è $(0,4)$ e l'insieme di derivabilità è $(0,1)\cup(1,3)\cup(3,4)$.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dalla formula di derivazione delle funzioni composte si ha, se $x\in(0,1)\cup(1,3)\cup(3,4)$

$$f'(x) = -\frac{3+\cos(4-x)}{(-x)\sqrt[3]{(4-x)^5-1}} - \frac{3+\cos(x)}{(x-4)\sqrt[3]{x^5-1}}$$

3. Esempio

Si considerino le funzioni

$$h(x)=x^4+8x+k \qquad \text{e} \qquad g(x)=\frac{1}{h(x)}$$

Si ha, per ogni $k\in\mathbb{R}$,

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad \text{continua} \quad , \lim_{x\to\pm\infty} h(x)=+\infty$$

per cui h non è limitata superiormente (e quindi non ammette massimo globale), mentre, per il teorema di Weierstrass generalizzato, ammette minimo assoluto, per ogni $k\in\mathbb{R}$.

Se g risulta continua allora ha primitive in $\mathbb{R}$ ed inoltre, (essendo infinita dove non è continua, g ammette primitive se e solo se $h(x)=x^4+8x+k\neq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Poiché come visto nel punto precedente h ha minimo assoluto, e tale valore è assunto nel punto $x=-\sqrt[3]{2}$ (ove si annulla $h'(x)=4x^3+8$) e si ha $h(-\sqrt[3]{2})=k-6\sqrt[3]{2}$, si conclude che g ha primitive in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k-6\sqrt[3]{2}>0 \qquad \text{ovvero} \qquad k>6\sqrt[3]{2}$$

Similmente g ha primitive in $[-1,+\infty)$ se e solo se risulta continua in tale intervallo ovvero se e solo se $h(x)=x^4+8x+k\neq 0$ per ogni $x\geq -1$.

Essendo h crescente per $x \geq -\sqrt[3]{2}$, e quindi per $x \geq -1$, g ha primitive in $[-1, +\infty)$ se e solo se $h(-1) = k - 7 > 0$ ovvero

$$k > 7$$

Posto $k = 0$ si ha $g(x) = \frac{1}{x^4+8x}$, che è definita e continua in $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Utilizzando la decomposizione in fratti semplici si ha

$$\frac{1}{x^4 + 8x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2 - 2x + 4} = \frac{(a+b+c)x^3 + (2c - 2b + d)x^2 + (4b + 2d)x + 8a}{x^4 + 8x}$$

da cui

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2c - 2b + d = 0 \\ 4b + 2d = 0 \\ 8a = 1 \end{cases}$$

che risolto fornisce $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{24}$, $c = -\frac{1}{12}$, $d = \frac{1}{12}$; pertanto

$$\frac{1}{x^4 + 8x} = \frac{1}{24}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4}\right)$$

Una primitiva di g è quindi

$$\frac{1}{24} \ln \left| \frac{x^3}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \right| = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{x^3}{x^3 + 8} \right|$$

Tutte le primitive di g in $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$ sono pertanto

$$\begin{cases} \frac{1}{24} \ln \frac{x^3}{x^3+8} + c_1 & \text{, se} \quad x < -2 \\ \frac{1}{24} \ln \frac{-x^3}{x^3+8} + c_2 & \text{, se} \quad -2 < x < 0 \\ \frac{1}{24} \ln \frac{x^3}{x^3+8} + c_3 & \text{, se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} y''(x) = g(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Il problema ha soluzioni in $\mathbb{R}$ se e solo se g ha primitive in $\mathbb{R}$, poiché y' è la primitiva di g che soddisfa $y'(0) = 0$ e di conseguenza y è la primitiva di $\int_0^x g(t)dt$ che soddisfa $y(0) = 0$ cioè

$$y(x) = \int_0^x \left(\int_0^s g(t)dt \right) ds$$

Pertanto il problema dato ha una ed una sola soluzione per $k > 6\sqrt[3]{2}$.

Elenco delle figure

Indice

Indice analitico