ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 19

INTRODUZIONE AI MODELLI DIFFERENZIALI

Uno degli argomenti più interessanti del calcolo differenziale è costituito dalle equazioni differenziali: si tratta di equazioni in cui l'incognita è una funzione $y(x)$ di cui sono noti i valori iniziali ed il fatto che deve essere verificata, per ogni x, una relazione tra la funzione stessa e la sua derivata prima $y'(x)$.

L'esempio più semplice e naturale di un problema di questo genere è dato dal modello che descrive la caduta di un grave.

Se consideriamo un punto di massa m posto ad un'altezza h dalla superficie terrestre e trascuriamo gli effetti della resistenza dell'aria, avremo che sul punto agisce solo la forza di gravità $F = mg$.

L'esperienza mostra che il punto materiale P si muove verso il basso; per descrivere il suo moto possiamo considerare un sistema di riferimento che coincide con la retta che il punto percorre cadendo.

Assumiamo l'origine in corrispondenza del suolo e consideriamo positive le altezze misurate dal suolo.

La velocità con cui il punto P si muove verso il basso lungo la retta scelta come asse di riferimento è

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

e la sua accelerazione è

$$a(t) = \ddot{x}(t)$$

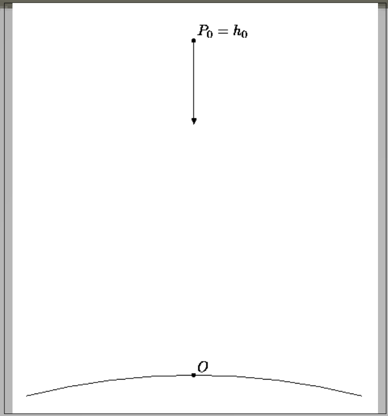


FIGURA 19.1. Un punto materiale soggetto alla gravità

Come già detto, sul punto agisce la sola forza gravitazionale $F = mg$.

Per le leggi di Newton si avrà allora

$$ma(t) = -mg$$

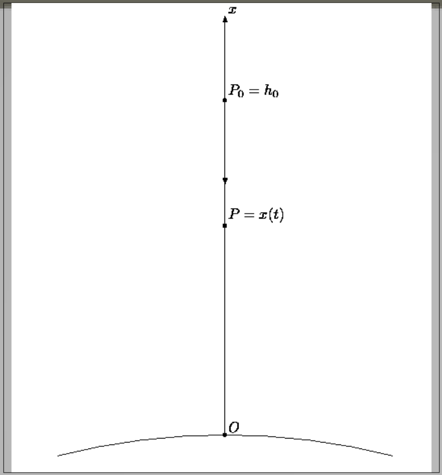


FIGURA 19.2. Il sistema di riferimento

e quindi

$$\ddot{x}(t) = g \tag{19.1}$$

La 19.1 è un semplicissimo esempio di equazione differenziale: essa impone una relazione che coinvolge una funzione e le sue derivate.

Il moto del punto si può ricavare integrando due volte tra t e $t_0 = 0$, es xassumiamo che il moto inizi all'istante $t_0 = 0$.

Si ottiene

$$\dot{x}(t) = -gt + c_1 \tag{19.2}$$

e

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_0 \tag{19.3}$$

e si vede che per determinare in maniera unica il moto dovremo procurarci dei valori per c_0 e c_1. Questo si può fare utilizzando informazioni sulla velocità e sulla posizione iniziale del punto. È subito visto infatti dalla 19.2 e dalla 19.3 rispettivamente che

$$v_0 = \dot{x}(0) = c_1 \qquad h_0 = x(0) = c_0 \tag{19.4}$$

Possiamo osservare che per determinare il moto abbiamo cioè bisogno di conoscere posizione e velocità iniziale del punto P e ciò corrisponde anche all'intuizione.

Se teniamo conto di tali dati, possiamo affermare che il punto P si muove sull'asse x seguendo la legge

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 \tag{19.5}$$

Possiamo descrivere lo stesso fenomeno anche usando il principio di conservazione dell'energia.

L'energia potenziale del punto P, soggetto al solo campo gravitazionale è, in ogni istante t,

$$U(t) = mgx(t)$$

mentre la sua energia cinetica è

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$$

e la sua energia totale

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + mgx(t)$$

si mantiene costante durante il moto

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + mgx(t) = mk \tag{19.6}$$

Se conosciamo le condizioni iniziali v_0 ed h_0 siamo anche in grado di calcolare

$$k = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

La 19.6 è una equazione differenziale, che è in grado di descrivere la posizione $x(t)$ del punto P in ogni istante t, tuttavia ricavare x da tale relazione è più difficile.

Possiamo riscrivere la 19.6 come

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) = k - gx(t) \tag{19.7}$$

e da questa uguaglianza possiamo ricavare una prima informazione:

la quantità $k - gx(t)$ deve mantenersi positiva e quindi $x(t) \leq \frac{k}{g}$.

Abbiamo così ricavato una limitazione per la soluzione dell'equazione senza risolverla, abbiamo ottenuto cioè una limitazione a priori per la soluzione dell'equazione.

Osserviamo anche che

$x(t) = \frac{k}{g}$ **è una soluzione costante dell'equazione 19.7**

Per cercare soluzioni non costanti possiamo applicare la radice ad entrambi i membri

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{2k - 2gx(t)} \tag{19.8}$$

e dividere per il secondo membro

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{2k - 2gx(t)}} = \pm 1 \tag{19.9}$$

Ora, se moltiplichiamo per g

$$\frac{g\dot{x}(t)}{\sqrt{2k - 2gx(t)}} = \pm g \tag{19.10}$$

ed integriamo tra $t_0 = 0$ e t, otteniamo

$$\int_0^t \frac{g\dot{x}(s)}{\sqrt{2k - 2gx(s)}} ds = \pm gt \tag{19.11}$$

dove tuttavia il primo integrale non può essere calcolato in quanto la funzione integranda dipende dalla funzione incognita $x(t)$.

Possiamo integrare per sostituzione ponendo

$$u = x(s) \qquad , \qquad du = \dot{x}(s)ds$$

osservando che per $s = 0$ e $s = t$ avremo $x(s) = x(0) = h_0$ e $x(s) = x(t)$, da cui si ricava che $v_0 = \pm\sqrt{2k - 2gx_0}$, avremo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{g du}{\sqrt{2k - 2gu}} = \pm gt \tag{19.12}$$

A questo punto possiamo calcolare l'integrale a sinistra ed ottenere che

$$\sqrt{2k - 2gx(t)} - \sqrt{2k - 2gx_0} = \pm gt \tag{19.13}$$

$$\sqrt{2k - 2gx(t)} = \pm gt + v_0 \tag{19.14}$$

$$2k - 2gx(t) = (\pm gt + v_0)^2 \tag{19.15}$$

$$x(t) = \frac{k}{g} - \frac{1}{2g}(\pm gt + v_0)^2 \tag{19.16}$$

La 19.16 descrive il moto del punto negli stessi termini ottenuti in precedenza; il segno $\pm$ di $\pm gt$ si può determinare dalla 19.8: poichè il moto avviene con continuità il segno dovrà essere lo stesso di v_0.

La scelta del segno e la validità dell'equazione si mantengono fino a quando la derivata di $x(t)$, cioè la velocità non si annulla; questa eventualità non si verifica mai se $v_0 < 0$ mentre ha luogo per $t_0 = \frac{v_0}{g}$ nel caso in cui $v_0 > 0$.

In tal caso dobbiamo riconsiderare le condizioni iniziali che diventano

$$x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$$

e quindi non forniscono indicazioni sul segno da attribuire alla radice che rappresenta la velocità nella 19.8.

Dobbiamo quindi esaminare tutti i casi disponibili:

(1) se supponiamo che il moto abbia velocità positive

$$\dot{x}(t) = +\sqrt{2k - 2gx(t)} \tag{19.17}$$

(2) se supponiamo che il moto abbia velocità negative

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2k - 2gx(t)} \tag{19.18}$$

(3) se supponiamo che il moto abbia velocità nulla entrambe le precedenti sono accettabili.

Osserviamo che a questo punto occorre distinguere tra risultato del modello e soluzione dell'equazione differenziale: infatti

È evidente che per $t > t_0$ la 19.17 non può più rappresentare il moto del punto materiale P in quanto il moto avviene con velocità negativa, il che non è consentito dalla 19.17.

L’unica soluzione prevista dalla 19.17 è quella costante che tuttavia è in contrasto con l’evidenza del fenomeno.

Dovremo pertanto considerare le soluzioni dell’equazione 19.18 per trovare la descrizione del seguito del movimento.

CAPITOLO 20

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI.

Risolvere una equazione differenziale a variabili separabili, significa trovare una funzione y, che sia derivabile e per cui si abbia

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

con f, g assegnate.

Più precisamente possiamo dire che

Se $I, J \subset \mathbb{R}$ sono intervalli aperti e non vuoti ed $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni, diciamo che risolviamo l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \tag{20.1}$$

se troviamo un intervallo $I' \subset I$ ed una funzione $y : I' \longrightarrow J$ tale che la 20.1 sia soddisfatta per ogni $x \in I'$

Quando si cercano soluzioni di un'equazione differenziale che soddisfino anche un dato iniziale, si parla di problema di Cauchy.

Precisamente se

$I, J \subset \mathbb{R}$ **sono intervalli aperti** $x_0 \in I$**,** $y_0 \in J$**,** $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **e** $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ **sono funzioni; chiamiamo problema di Cauchy a variabili separabili il problema di trovare** $I' \subset I$ **ed** $y : I' \longrightarrow \mathbb{R}$**, derivabile, tali che**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y(x)) \quad , \qquad \forall x \in I' \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{20.2}$$

Vale il seguente teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy a variabili separabili, per dimostrare il quale procediamo in maniera costruttiva utilizzando un metodo che, di fatto, consente di risolvere l'equazione.

La dimostrazione è, in questo caso, molto più utile dell'enunciato, ma anche le condizioni di esistenza ed unicità della soluzione sono di fondamentale importanza.

Nei teorema che segue giocano un ruolo fondamentale il fatto che I e J siano intervalli aperti e che $g(y) \neq 0 \; \forall y \in J$.

Quest'ultima condizione è certamente soddisfatta se g è continua e se $g(y_0) \neq 0$ a meno di considerare un'intervallo J pii̇̀ piccolo.

TEOREMA 20.1. *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$, intervalli aperti, siano $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ e siano $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue, supponiamo inoltre che $g(y) \neq 0$, per ogni $y \in J$.*

Allora esiste un intervallo $I' \subset I$ e una ed una sola soluzione $y : I' \longrightarrow J$ del problema di Cauchy 20.2.

DIMOSTRAZIONE.

y **è soluzione del problema assegnato se e solo se**

$$\begin{cases} \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{20.3}$$

e ciò si verifica se e solo se

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{20.4}$$

se e solo se

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{20.5}$$

se e solo se, dette F **e** G **due primitive di** f **ed** $1/g$ **su I e** J **rispettivamente,**

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \tag{20.6}$$

$R(G - G(y_0))$ **e** $R(F - F(x_0))$ **sono intervalli per la continuità delle medesime, entrambi contengono** 0 **e** $R(G)$ **contiene** 0 **al suo interno in virtù del fatto che** G **è strettamente monotona in quanto** $g = G'$ **ha segno costante inoltre** G **è invertibile.**
Ciò assicura che esiste un intervallo I'**, aperto e contenente** x_0 **in cui l'uguaglianza vale ed in tale intervallo si può scrivere che**

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0)). \tag{20.7}$$

□

È importante anche ricordare due risultati di esistenza e di unicità la cui dimostrazione non è opportuna a questo punto, che possiamo tuttavia utilizzare per ottenere informazioni sull'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy.

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$**, intervalli aperti, siano** $x_0 \in I$**,** $y_0 \in J$ **e siano** $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$**,** $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ **due funzioni continue.**
Allora esiste un intervallo $I' \subset I$ **e una soluzione** $y : I' \longrightarrow J$ **del problema di Cauchy 20.2.**
Se inoltre $g \in \mathcal{C}^1$**,cioè se ammette derivata prima continua, allora la soluzione è anche unica.**
L'unicità è anche assicurata dalla lipschitzianità di g **cioè dalla condizione**

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \tag{20.8}$$

Vale la pena di ricordare che, usando il teorema di Lagrange, si può dimostrare che una funzione che abbia derivata prima limitata è lipschitziana: infatti se $|g'(c)| \leq L$ **si ha**

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)||x - y| \leq L|x - y| \tag{20.9}$$

Ricordiamo anche che se $g \in \mathcal{C}^1$**, il teorema di Weierstraß assicura che** $|g'|$ **(che è continua) ammette massimo su ogni intorno chiuso e limitato di** x_0

Possiamo procedere alla soluzione dell'equazione differenziale a variabili separabili anche senza precisi riferimenti ai dati iniziali seguendo essenzialmente gli stessi passi percorsi in precedenza

Siano f e g continue sugli intervalli aperti I e J e supponiamo che $g(y) \neq 0$ su J; Consideriamo l'equazione a variabili separabili

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \tag{20.10}$$

Dal momento che $g(y) \neq 0$ in J, avremo che la 20.10 è soddisfatta in I' se e solo se

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

e, dette F e G due primitive in I e J di f ed $1/g$ rispettivamente, l'ultima uguaglianza è equivalente a

$$G(y(x)) = F(x) + c \tag{20.11}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (ricordiamo che stiamo lavorando su intervalli e quindi due primitive differiscono per costante).
Ora, se fissiamo x_0 interno ad I e chiamiamo $y(x_0) = y_0 \in J$, posto

$$c = G(y_0) - F(x_0)$$

avremo che la 20.11 diventa

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \tag{20.12}$$

ed è verificata almeno in un intervallo $I' \subset I$.
Infatti $R(G - G(y_0))$ e $R(F - F(x_0))$ sono intervalli per la continuità delle medesime, entrambi contengono 0 e $R(G)$ contiene 0 al suo interno in virtù del fatto che G è strettamente monotona in quanto $g = G'$ ha segno costante inoltre G è invertibile.
Pertanto possiamo ricavare

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

per $x \in I'$.

Il procedimento sopra esposto fornisce, al variare di c, l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale a variabili separabili considerata. Allorquando necessiti trovare le soluzioni dell'equazione considerata, che soddisfino di più la condizione $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, è sufficiente considerare $c = G(y_0) - F(x_0)$ ed osservare che tale scelta di c consente di determinare $I' \subset I$ tale che $F(I') + c \subset G(J)$. In tal caso si risolve un problema di Cauchy.

Per una corretta risoluzione di un'equazione a variabili separabili non va trascurato di considerare quanto accade se g si annulla in qualche punto.

Ricordiamo che per separare le variabili occorre dividere per g e quindi in questo caso non si può procedere già dall'inizio.

È ragionevole limitarci al caso in cui y_0 è uno zero isolato di g, cioè se esiste un intorno di y_0 in cui g non si annulla altre volte.

In tal caso possiamo osservare che la funzione

$$y(x) = y_0$$

è una soluzione dell'equazione, che in presenza di condizioni che assicurino l'unicità è anche la sola soluzione possibile.

Qualora non sussistano tali condizioni occorre indagare l'esistenza di altre soluzioni; a questo scopo si procede studiando l'equazione per $y \neq y_0$ e, giunti al punto di considerare

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{20.13}$$

prima di procedere, occorre studiare l'esistenza in senso improprio dell'integrale a sinistra.

Le informazioni che abbiamo sull'integrazione impropria ci consentono allora di capire che:

- se g è infinitesima in y_0 di ordine $\alpha \geq 1$. la primitiva G di $1/g$ non può essere prolungata per continuità in y_0 e pertanto la soluzione costante è l'unica possibile.
- Se invece g è infinitesima in y_0 di ordine $\alpha \leq \beta < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Allora G può essere prolungata per continuità in y_0 e, si può procedere oltre.

Proviamo infine un risultato riguardante una disequazione differenziale che è spesso utile per trovare limitazioni a priori per soluzioni di equazioni differenziali che non si è in grado di risolvere.

LEMMA 20.1. *- di Gronwall - Siano* $y, f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *funzioni continue,* I *intervallo, e siano* $c > 0$, $x_0 \in I$*; allora se*

$$y(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt \right| + c$$

per ogni $x \in I$ *si ha*

$$0 \leq y(x) \leq ce^{\left|\int_{x_o}^{x} f(t)dt\right|}$$

per ogni $x \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $x \geq x_0$; dividendo ambo i membri per il secondo e moltiplicando poi per $f(x)$ si ottiene (si ricordi che $f \geq 0$, $c > 0$)

$$\frac{y(x)f(x)}{c + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt} \leq f(x)$$

da cui

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(c + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right)\right] \leq f(x).$$

Integrando ora tra x_0 ed x si ha

$$\ln\left(c+\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right)-\ln c \;\le\; \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

onde

$$c+\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt \;\le\; ce^{\int_{x_o}^{x} f(t)dt}.$$

e

$$y(x)\le c+\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\le ce^{\int_{x_o}^{x} f(t)dt}$$

Se $x\le x_0$ si procede in modo analogo solo tenendo conto di un cambiamento di segno. $\square$

COROLLARIO 20.1. *Siano* $y, f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *continue,* I *intervallo, e sia* $x_0\in I$*; allora se*

$$y(x)\le\left|\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right| \qquad \forall x\in I$$

si ha

$$y(x)=0 \quad \forall x\in I$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$y(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt \right| + c \qquad \forall c > 0$$

e pertanto

$$0 \leq y(x) \leq ce^{\left|\int_{x_o}^{x} f(t)dt\right|} \qquad \forall c > 0$$

per cui, al limite per $c \to 0^+$, si ha $y(x) \equiv 0$. □

Se nel lemma di Gronwall si suppone

$$y(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt \right| + c(x)$$

con c **, si prova che**

$$0 \leq y(x) \leq c(x)e^{\left|\int_{x_o}^{x} f(t)dt\right|}$$

CAPITOLO 21

ESEMPI NOTEVOLI DI PROBLEMI DI CAUCHY

1. Esempio

Consideriamo l'equazione

(21.1) $$y'(x) = y^2(x)$$

Osserviamo innanzi tutto che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione.
Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

(21.2) $$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$$

ed integrando tra x_0 ed x

(21.3) $$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = x - x_0$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{s^2} = x - x_0 \tag{21.4}$$

Poichè $\frac{1}{s^2}$ è infinita in $s = 0$ di ordine 2, non è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che non è integrabile in intervalli che contengano 0). Pertanto y ed y_0 dovranno avere sempre lo stesso segno: soluzioni che partono con valori y_0 positivi (negativi), rimangono positive (negative).

Sotto tale condizione avremo che

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x - x_0 \tag{21.5}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} + x_0 - x = c - x \tag{21.6}$$

dove si sia definito

$$c = \frac{1}{y_0} + x_0$$

Osserviamo inoltre che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali.

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \frac{1}{c - x} \tag{21.7}$$

ed il loro grafico è indicato in figura 21.1.

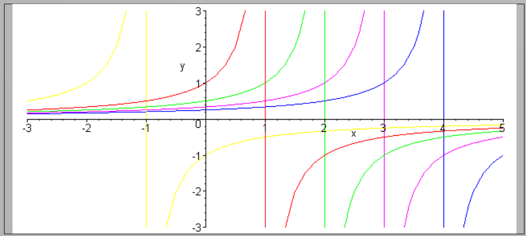


FIGURA 21.1.

2. Esempio

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} \tag{21.8}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $y(x) \geq 0$ e che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione. Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 1 \tag{21.9}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} dt = x - x_0 \tag{21.10}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = x - x_0 \tag{21.11}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{s}}$ è infinita in $s = 0$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano 0). Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore 0. Avremo

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = x - x_0 \tag{21.12}$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x - x_0 + 2\sqrt{y_0}) = \frac{1}{2}(x + c) \tag{21.13}$$

dove si sia definito

$$c = 2\sqrt{y_0} - x_0$$

Osserviamo inoltre che la 21.13 impone che deve essere

$$\frac{1}{2}(x + c) \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad x \geq -c$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali.

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \frac{1}{4}(x+c)^2 \qquad \text{per} \qquad x \geq -c \tag{21.14}$$

ed il loro grafico è indicato in figura 21.2.

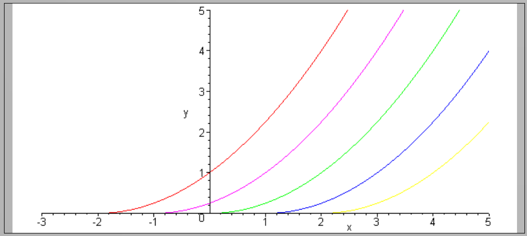


FIGURA 21.2.

3. Esempio

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = x\sqrt{y(x)} \tag{21.15}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $y(x) \geq 0$ e che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione. Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = x \tag{21.16}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} dt = \int_{x_0}^{x} t dt \tag{21.17}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \tag{21.18}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{s}}$ è infinita in $s = 0$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano 0). Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore 0. Avremo

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \tag{21.19}$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + (\sqrt{y_0} - \frac{x_0^2}{2}) = \frac{x^2}{4} + c \tag{21.20}$$

dove si sia definito

$$c = \sqrt{y_0} - \frac{x_0^2}{2}$$

Osserviamo che la 21.19 impone che deve essere

$$\frac{x^2}{4} + c \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \text{sempre} & \text{se } c > 0 \\ |x| \geq -2c & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali.
Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2 \tag{21.21}$$

sotto le condizioni indicate per x ed il loro grafico è indicato in figura 21.3.

4. Esempio

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = -x\sqrt{y(x)} \tag{21.22}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $y(x) \geq 0$ e che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione.

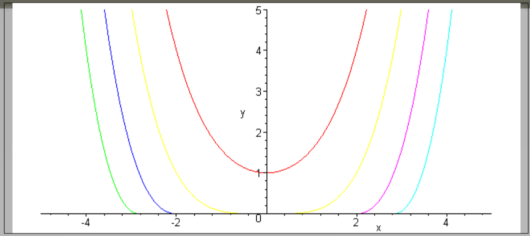


FIGURA 21.3.

Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = -x \tag{21.23}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} dt = -\int_{x_0}^{x} t dt \tag{21.24}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} \tag{21.25}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{s}}$ è infinita in $s = 0$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano 0). Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore 0. Avremo

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} \tag{21.26}$$

$$\sqrt{y} = -\frac{x^2}{4} + (\sqrt{y_0} + \frac{x_0^2}{2}) = -\frac{x^2}{4} + c \tag{21.27}$$

dove si sia definito

$$c = \sqrt{y_0} + \frac{x_0^2}{2}$$

Osserviamo che la 21.27 impone che deve essere

$$-\frac{x^2}{4} + c \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \text{mai} & \text{se } c < 0 \\ |x| \leq -2c & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere solo valori positivi.
Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \left(-\frac{x^2}{4} + c\right)^2 \tag{21.28}$$

sotto le condizioni indicate per x ed il loro grafico è indicato in figura 21.4.

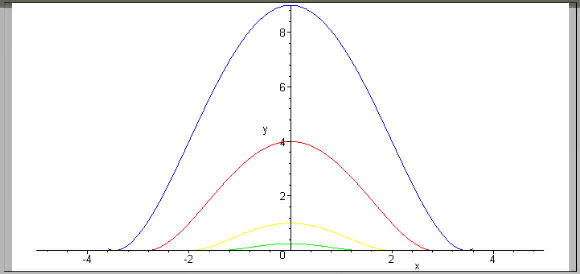


FIGURA 21.4.

5. Esempio

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)} \tag{21.29}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $|y(x)| \leq 1$ e che $y(x) \equiv \pm 1$ è soluzione dell'equazione. Se $y(x) \neq \pm 1$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}} = 1 \tag{21.30}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{1-y^2(t)}} dt = x - x_0 \tag{21.31}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = x - x_0 \tag{21.32}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ è infinita in $s = \pm 1$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = \pm 1$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano ± 1). Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore ± 1.

Avremo

$$\arcsin y(x) - \arcsin y_0 = x - x_0 \tag{21.33}$$

$$\arcsin y(x) = x - x_0 + \arcsin y_0 = x + c \tag{21.34}$$

dove si sia definito

$$c = \arcsin y_0 - x_0$$

Osserviamo che la 21.34 impone che deve essere

$$|x + c| \leq \frac{\pi}{2}$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali. Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \sin(x + c) \tag{21.35}$$

sotto le condizioni indicate per x ed il loro grafico è indicato in figura 21.5.

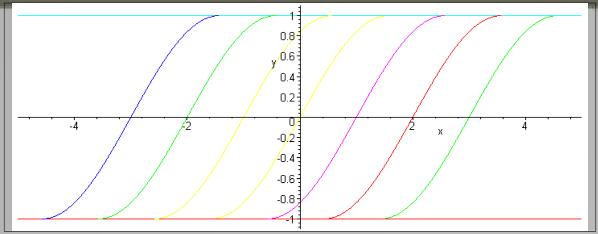


FIGURA 21.5.

6. Esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-(y(x))^4} - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{21.36}$$

Possiamo scrivere

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

se definiamo $f(x) = 1$ e $g(y) = e^{-y^4} - 1$;

Si ha $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, e quindi si avrà una ed una sola soluzione per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $y_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione ammette soluzioni costanti che possono essere trovate ponendo $y(x) = c$ e sostituendo; avremo

$$0 = e^{-c^4} - 1$$

per cui la sola soluzione costante è $y(x) = c = 0$.

Nel caso in cui $y_0 = 0$ la soluzione costante è anche l'unica soluzione del problema di Cauchy .

Se fissiamo $x_0 = 0$ ed $y_0 = 1$. possiamo supporre $y(x) \neq 0$ in un intorno di 0 e separando le variabili ed integrando tra 0 ed x si ottiene

$$\frac{y'(x)}{e^{-(y(x))^4} - 1} = 1 \tag{21.37}$$

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{e^{-(y(t))^4} - 1} dt = \int_0^x dt \tag{21.38}$$

ovvero

$$\int_1^{y(x)} \frac{ds}{\mathrm{e}^{-s^4} - 1} = x$$

Studiamo ora la funzione integrale a primo membro $h(y) = \int_1^y \frac{ds}{\mathrm{e}^{-s^4}-1}$.

Poiché l'integranda è definita e continua per $s \neq 0$ e

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{e^{-s^4} - 1} = -\infty$$

di ordine 4, l'integrale è divergente per in 0; ne segue che, essendo il primo estremo di integrazione positivo, la funzione è definita per $y > 0$.

Inoltre

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{1}{e^{-s^4} - 1} = -1$$

da cui l'integrale è divergente anche per $y \to +\infty$.

Si ha infine $h(1) = 0$ e $h'(y) =]frac1e^{-y^4} - 1$ essendo l'integranda continua per $y > 0$, e tale derivata risulta sempre negativa.

Possiamo anche osservare che

$$h''(y) = \frac{4y^3 e^{-y^4}}{(e^{-y^4} - 1)^2} > 0$$

per ogni $y > 0$, per cui la funzione risulterà convessa; inoltre, poiché

$$\lim_{y \to +\infty} h'(y) = -1$$

il grafico della funzione tenderà a diventare parallelo alla bisettrice del secondo e quarto quadrante)

Il grafico della funzione h è indicato nella figura;

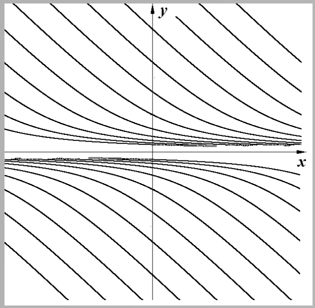
Poichè deve aversi

$$h(y(x)) = x$$

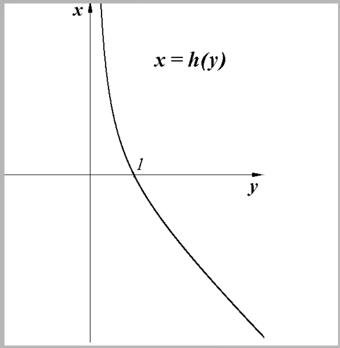
il grafico della soluzione del problema di Cauchy sarà quello dell'inversa di h, come riportato nella figura 21.6.6.

Per disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. possiamo osservare che l'equazione data è un'equazione differenziale autonoma, e quindi se $y(x)$ è soluzione, anche $y(x+a)$ è soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$.

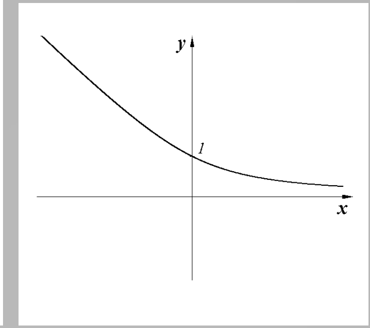
Pertanto tutte le traslate (in orizzontale) della soluzione trovata sono ancora soluzioni, per $y > 0$.



21.6.1. Grafico 1



21.6.2. Grafico2



21.6.3. Grafico3

FIGURA 21.6.

Per quanto riguarda le soluzioni per $y < 0$, ripetendo i calcoli fatti, ad esempio con $x_0 = 0$ e $y_0 = -1$, si ha

$$\int_{-1}^{y(x)} \frac{ds}{e^{-s^4} - 1} = x$$

e con considerazioni analoghe si ottengono le curve indicate in figura 6.6

(Si noti che, se $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale, tale è pure $-y(-x)$, ovvero i grafici delle soluzioni sono simmetrici rispetto all'origine).

7. Esempio

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 6x^2\sqrt{y(x)} \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un problema a variabili separabili con $f(x) = 6x^2$ definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, e $g(y) = \sqrt{y}$ definita e di classe C^1 per $y > 0$; pertanto essendo $y_0 = 1$, per il teorema di esistenza ed unicità, esiste una ed una sola soluzione del problema dato, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Separando le variabili, per $y(x) > 0$, si ottiene

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 6x^2$$

ed integrando tra 0 ed x

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}}dt = \int_0^x 6t^2\, dt$$

ovvero

$$2\sqrt{y(x)} - 2\sqrt{y(0)} = 2x^3 \qquad \text{da cui} \qquad \sqrt{y(x)} = 1 + x^3$$

Elevando al quadrato i due membri, dopo aver osservato che $1 + x^3 > 0$ e cioè $x > -1$, si ottiene

$$y(x) = (1 + x^3)^2 \qquad , \qquad x > -1$$

(si noti che la soluzione è prolungabile, in modo unico, con $y(x) = 0$ per $x \leq -1$).

Il grafico delle soluzioni è riportato in figura 21.7

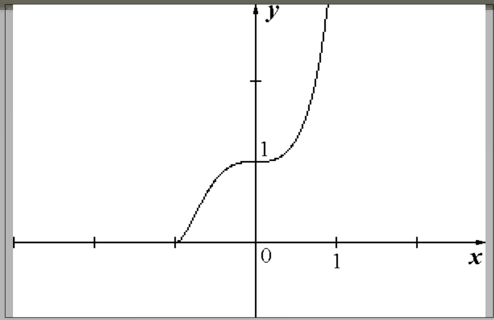


FIGURA 21.7.

CAPITOLO 22

SISTEMI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Un altro tipo importante di equazioni di equazioni differenziali è costituito dalle equazioni lineari. La più semplice equazione lineare può essere scritta nella forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \tag{22.1}$$

Se $a, b \in \mathcal{C}^o(I)$, l'equazione 22.1 ammette una ed una soluzione definita su tutto I; questa è forse una delle più importanti caratteristiche di questo tipo di equazioni e si può facilmente verificare, in questo caso, direttamente.

Sia $x_0 \in I$, ed $y_0 \in \mathbb{R}$, e sia A una primitiva di a in I. L'esistenza di A è assicurata dalla continuità di a; ad esempio possiamo porre $A(x) = \int_{x_o}^{x} a(t)dt$.

La 22.1 è vera se e solo se

$$e^{-A(x)}y'(x) - e^{-A(x)}a(x)y(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

e ciò è equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-A(x)}y(x)\right) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Integrando tra x_0 ed x, si ottiene

$$e^{-A(x)}y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt$$

ed infine

$$y(x) = e^{\,A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(x)}\,dt\right) \tag{22.2}$$

Quanto abbiamo esposto consente di affermare che tutte le soluzioni dell'equazione 22.1 si ottengono, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, dalla 22.2.

Osserviamo anche che la 22.2 stessa può essere riscritta nella seguente maniera:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_o}^{x} a(t)dt} + e^{\int_{x_o}^{x} a(t)dt}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-\int_{x_o}^{t} a(s)ds}dt$$

in accordo con i risultati che proveremo nel seguito per il caso più generale.

La 22.2 costituisce, al variare di y_0, l'integrale generale dell'equazione 22.1.

I passi successivi consistono nel considerare equazioni lineari di ordine superiore oppure sistemi di equazioni del primo ordine.

Un'equazione lineare di ordine n si può scrivere nella forma

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(x) + b(x) \tag{22.3}$$

dove $a_i, b \in \mathcal{C}^0$ mentre un sistema lineare di ordine n si scrive nella forma

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \tag{22.4}$$

dove $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ e $B(x) = \{b_i(x)\}$ sono una matrice ed un vettore i cui elementi sono funzioni continue su un intervallo I; (scriviamo $A \in \mathcal{C}^k(I)$, $B \in \mathcal{C}^k(I)$ quando intendiamo pertanto affermare che $a_{ij} \in \mathcal{C}^k(I)$, $b_i \in \mathcal{C}^k(I)$ per $i, j = 1, ..., n$).

Il sistema può essere riscritto usando le componenti di Y, A, B, nella seguente maniera

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \tag{22.5}$$

ed anche, in forma più compatta

$$y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j(x) + b_i(x) \quad , \quad i = 1, ..., n \tag{22.6}$$

Qualora $B \equiv 0$ il sistema si dice omogeneo e assume la forma

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{22.7}$$

Quando $n = 1$ il sistema si riduce ad una sola equazione differenziale lineare del primo ordine che, posto $A = (a_{11}) = a$ e $B = b_1 = b$, si scrive nella forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

L'insieme $\mathcal{T}$ di tutte le soluzioni di 22.4 si chiama integrale generale del sistema .

Quando si associa al sistema o all'equazione differenziale un opportuno insieme di condizioni iniziali parliamo di problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \quad , \qquad \forall x \in I \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{22.8}$$

(22.9)
$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = a_n(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y(x) + b(x) \quad , \qquad \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

sono problemi di Cauchy.

Lo studio di un sistema consente di trovare risultati anche per l'equazione di ordine n; sia infatti

(22.10)
$$y^{(n)}(x) = a_n(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y(x) + b(x)$$

una equazione differenziale lineare di ordine n e poniamo

(22.11)
$$y_i(x) = y^{(i-1)}(x) \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

(Per chiarire le idee osserviamo che si avrà $y_1(x) = y(x)$, ... , $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$).

Possiamo riscrivere l'equazione nella seguente forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \dots \\ \dots \\ y_n'(x) = a_n(x)y_n(x) + \ \dots. \ + a_1(x)y_1(x) + b(x) \end{cases} \tag{22.12}$$

ed anche come

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

non appena si sia definito

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(x) & a_2(x) & a_3(x) & \dots & a_n(x) \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Vale il seguente teorema di cui è importante in questo contesto solo l'enunciato.

TEOREMA 22.1. *Siano A*: $I \longrightarrow \mathcal{M}^n$, $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continue e siano* $x_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. *Allora esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \quad , \qquad \forall x \in I \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{22.13}$$

Il teorema precedente consente di provare un risultato di esistenza anche per le equazioni differenziali lineari di ordine n.

TEOREMA 22.2. *Siano* $a_i, b \in \mathcal{C}^0(I)$, $i = 1, ..., n$ *e siano* $x_0 \in I$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, ..., n-1$. *Allora esiste una ed una sola soluzione* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^{(i-1)}(x) + b(x) \\ y^{(i)}(x_0) = y_i \quad , \qquad i = 0, ..., n-1 \end{cases} \tag{22.14}$$

Proviamo ora che l'insieme delle soluzioni di un sistema differenziale lineare, cioè l'integrale generale di un sistema differenziale omogeneo del primo ordine è uno spazio vettoriale avente dimensione uguale al numero di equazioni del sistema stesso.

TEOREMA 22.3. *Sia $A \in \mathcal{C}^0(I)$ e consideriamo il sistema differenziale lineare del primo ordine*

$$Y'(x) = A(x)Y(x);$$

sia $\mathcal{S}$ il suo integrale generale. Allora $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.

DIMOSTRAZIONE. E' immediato verificare che $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale in quanto si vede subito che se y e z sono soluzioni del sistema assegnato tali risultano anche $\alpha y + \beta z$ ove α, β sono scalari.

Per provare che dim $\mathcal{S} = n$ è sufficiente osservare che, per il teorema di esistenza ed unicità della soluzione l'applicazione lineare

$$\Gamma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$\Gamma(Y) = Y(x_0) \qquad , \qquad x_0 \in I$$

è un isomorfismo. □

In base al teorema precedente è possibile affermare che ogni soluzione di un sistema differenziale lineare omogeneo di n equazioni in n incognite può essere espressa mediante un combinazione lineare di n soluzioni linearmente indipendenti del sistema stesso.

Siano esse $Y_1, ..., Y_n$ e sia $(y_i)_j$ la componente j-esima della i-esima soluzione.

Possiamo allora costruire la matrice

$$G = \begin{pmatrix} (y_1)_1 & (y_2)_1 & \dots & (y_n)_1 \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \dots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1)_n & (y_2)_n & \dots & (y_n)_n \end{pmatrix} \tag{22.15}$$

che indicheremo spesso come

$$G = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$

considerando gli Y_i come vettori colonna, e che si chiama matrice fondamentale del sistema assegnato.

È possibile verificare che se G è una matrice fondamentale del sistema omogeneo 22.7 allora si ha

$$G'(x) = A(x)G(x) \tag{22.16}$$

Il sistema 22.16 è un sistema differenziale lineare di n^2 equazioni in n^2 incognite.

Ogni soluzione del nostro sistema potrà allora essere scritta nella forma

$$Y(x) = \; G(x)C \;\;, \;\; C \in \mathbb{R}^n$$

ovvero, considerando le componenti,

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} (y_j)_i c_j.$$

Anche lo spazio delle soluzioni di un sistema differenziale lineare ordinario del primo ordine non omogeneo è strutturato in maniera molto precisa.

TEOREMA 22.4. *Siano $A \in \mathcal{C}^0(I)$ $B \in \mathcal{C}^0(I)$ e consideriamo il sistema differenziale lineare non omogeneo del primo ordine*

$$Y'(x) = \ A(x)Y(x) + B(x)$$

Sia $\mathcal{T}$ l'integrale generale del sistema assegnato e sia $\mathcal{S}$ l'integrale generale del sistema omogeneo ad esso associato

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

sia ancora $z \in \mathcal{C}^0(I)$ tale che

$$Z'(x) = A(x)Z(x) + B(x)$$

Allora

$$\mathcal{T} = Z + \mathcal{S}$$

e $\mathcal{T}$ è uno spazio lineare affine di dimensione n.

DIMOSTRAZIONE. E' evidente che $\mathcal{T} \supset Z + \mathcal{S}$; sia viceversa $Y \in \mathcal{T}$, è facile verificare che $Y - Z$ soddisfa il sistema omogeneo associato e pertanto $Y - Z \in \mathcal{S}$ da cui $Y \in Z + \mathcal{S}$. □

DEFINIZIONE 22.1. *Siano $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ n soluzioni del sistema differenziale lineare omogeneo*

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

Chiamiamo determinante wronskiano, o più semplicemente wronskiano, associato alle n soluzioni assegnate il determinante della matrice

$$(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$

In altri termini

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} (y_1(x))_1 & (y_2(x))_1 & \dots & (y_n(x))_1 \\ (y_1(x))_2 & (y_2(x))_2 & \dots & (y_n(x))_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1(x))_n & (y_2(x))_n & \dots & (y_n(x))_n \end{pmatrix} \tag{22.17}$$

Proviamo ora una interessante proprietà del wronskiano.

TEOREMA 22.5. *Siano verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità per il sistema differenziale lineare omogeneo*

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

e siano Y_1,Y_2,...,Y_n n *soluzioni del sistema stesso.*

Sono fatti equivalenti:

(1) $Y_1, ..., Y_n$ *sono linearmente indipendenti;*
(2) $W(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in I$
(3) *esiste* $x_0 \in I$ *tale che* $W(x_0) \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo, per ogni x fissato in I l'applicazione lineare

$$\Gamma_x : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da $\Gamma_x(Y) = Y(x)$. Per il teorema di esistenza ed unicità Γ_x è un isomorfismo.

- $(1) \Rightarrow (2)$

  Se $Y_1, ..., Y_n$ sono linearmente indipendenti in $\mathcal{S}$, allora

$$\Gamma_x(Y_1), ..., \Gamma_x(Y_n)$$

sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e perciò

$$0 \neq \det\left(\Gamma_x(Y_1), ..., \Gamma_x(Y_n)\right) = \det\left(Y_1(x), ..., Y_n(x)\right) = W(x)$$

per ogni $x \in I$

- $(2) \Rightarrow (3)$

  È ovvio.

- $(3) \Rightarrow (1)$

  $W(x_0) \neq 0$ implica che $Y_1(x_0), ..., Y_n(x_0)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e perciò

  $$Y_1 = \Gamma_{x_0}^{-1}(Y_1(x_0)), ..., Y_n = \Gamma_{x_0}^{-1}(Y_n(x_0))$$

  sono linearmente indipendenti in $\mathcal{S}$

$\square$

Per il teorema precedente è essenziale che $Y_1, ..., Y_n$ siano soluzioni del sistema; se ciò non fosse, sarebbe vero solo che $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

Che le altre implicazioni siano false è facilmente visto se si considera il wronskiano associato alle funzioni $Y_{1,2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definite da

$$Y_1(x) = (x^2, 2x) \qquad , \qquad Y_2(x) = (2x, 2)$$

oppure

$$Y_1(x) = \begin{cases} (x^2, 2x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad , \qquad Y_1(x) = \begin{cases} (x^2, 2x) & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Altrettanti risultati possono essere ottenuti per le equazioni di ordine n.

TEOREMA 22.6. *Siano $a_i, b \in \mathcal{C}^0(I)$, $i = 1, ..., n$, e consideriamo l'equazione differenziale lineare di ordine n*

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(i-1)}(x)$$

Sia $\mathcal{S}$ il suo integrale generale, allora $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Sia

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(x) \; + \; b(x)$$

la corrispondente equazione differenziale lineare di ordine n non omogenea, e sia $\mathcal{T}$ il suo integrale generale.

$\mathcal{T}$ è uno spazio lineare affine di dimensione n ed inoltre

$$\mathcal{T} = z + \mathcal{S}$$

dove z è una soluzione della equazione non omogenea.

Il teorema precedente consente di affermare che ogni soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n si può esprimere come combinazione lineare di n soluzioni $y_1, ..., y_n$ dell'equazione stessa che siano linearmente indipendenti.

L'insieme $y_1, ..., y_n$ si chiama sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione data; in altre parole ogni soluzione y può essere espressa mediante la

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

dove $c_i \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE 22.2. *Siano* $y_1, \ldots, y_n$ n *soluzioni dell'equazione differenziale lineare di ordine* n*, omogenea*

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(i-1)}(x)$$

Chiamiamo wronskiano associato alle soluzioni $y_1, \ldots, y_n$ *il determinante*

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{22.18}$$

TEOREMA 22.7. *Siano verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità e siano* $y_1, \ldots, y_n$ n *soluzioni dell'equazione differenziale omogenea di ordine* n

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(i-1)}(x)$$

Sono fatti equivalenti:

(1) *$y_1, ..., y_n$ sono linearmente indipendenti;*
(2) *$W(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$;*
(3) *esiste $x_0 \in I$ tale che $W(x_0) \neq 0$.*

Come in precedenza, usando lo stesso esempio, si vede che, qualora $y_1, ..., y_n$ non siano soluzioni dell'equazione, le uniche implicazioni ancora vere sono $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

I risultati precedenti assicurano la possibilità di trovare l'integrale generale di un sistema non omogeneo non appena siano noti l'integrale generale del sistema omogeneo ad esso associato ed una soluzione del sistema non omogeneo; è pertanto molto importante avere a disposizione uno strumento che consenta, noto l'integrale generale del sistema omogeneo, di trovare una soluzione del sistema non omogeneo.

Sia G una matrice fondamentale del sistema lineare omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

e $x_0 \in I$. Una soluzione del sistema non omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

è data da

$$Z(x) = G(x)\int_{x_0}^{x} G^{-1}(t)B(t)dt.$$

Infatti se cerchiamo soluzioni del sistema non omogeneo della forma

$$Z(x) = G(x)\lambda(x)$$

dove $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è derivabile, dovrà aversi

$$Z'(x) = A(x)Z(x) + B(x)$$

e pertanto, poiché si può verificare che la regola di derivazione del prodotto può essere estesa anche al prodotto righe per colonne, si ha

$$Z'(x) = G'(x)\lambda(x) + G(x)\lambda'(x)$$

deve essere

$$G'(x)\lambda(x) + G(x)\lambda'(x) = A(x)G(x)\lambda(x) + B(x)$$

Ma G è una matrice fondamentale e quindi,

$$G(x)\lambda'(x) = B(x) \quad e \quad \lambda'(x) = G^{-1}(x)B(x).$$

Se ne deduce che se

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t)B(t)dt$$

Z è soluzione del sistema completo.

Osserviamo inoltre che, essendo $G(x)\lambda'(x) = B(x)$, per il teorema di Cramer si ha

$$\lambda_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}$$

essendo

$$W_i = \det \begin{pmatrix} (y_1)_1 & (y_2)_1 & \dots & (y_{i-1})_1 & b_1 & (y_{i+1})_1 & \dots & (y_n)_1 \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \dots & (y_{i-1})_2 & b_2 & (y_{i+1})_2 & \dots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1)_n & (y_2)_n & \dots & (y_{i-1})_n & b_n & (y_{i+1})_n & \dots & (y_n)_n \end{pmatrix} \tag{22.19}$$

e una soluzione del sistema non omogeneo è data da

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) Y_i(x).$$

Come conseguenza se G è una matrice fondamentale del sistema lineare omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

è dato da

$$Y(x) = G(x)\left(C + \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t)B(t)dt\right) \ , \ C \in \mathbb{R}^n$$

Dove $x_0 \in I$ mentre la soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati $Y(x_0) = Y_0$ è

$$Y(x) = G(x)\left(G^{-1}(x_0)Y_0 + \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t)B(t)dt\right)$$

Il metodo esposto si chiama della metodo di Lagrange di variazione delle costanti arbitrarie e può ovviamente essere applicato anche alle equazioni differenziali di ordine n non appena le si sia trasformate in un sistema. Tuttavia per le equazioni è più conveniente procedere direttamente; illustriamo qui di seguito, il caso di una equazione del secondo ordine.

Siano $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I)$ e consideriamo l'equazione lineare del secondo ordine

$$y''(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x).$$

Supponiamo note due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea associata; avremo allora a disposizione l'integrale generale dell'equazione omogenea nella forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Cerchiamo soluzioni per l'equazione non omogenea nella forma

$$z(x) = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2(x)y_2(x)$$

Avremo

$$z' = \lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2 + \lambda_1y_1' + \lambda_2y_2'$$

e posto

$$\lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2 = 0$$

si ha

$$z'' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''.$$

Sostituendo si ottiene

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' = \lambda_1 a y_1' + \lambda_2 a y_2' + \lambda_1 b y_1 + \lambda_2 b y_2 + c$$

e, tenuto conto che y_1 e y_2 sono soluzioni dell'omogenea,

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c.$$

Ne viene che λ_1' e λ_2' devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c \end{cases} \tag{22.20}$$

da cui si possono ricavare λ_1' e λ_2' e per integrazione λ_1 e λ_2.

Ricordiamo infine, per sommi capi, un metodo che consente di ridurre l'ordine di una equazione differenziale lineare, qualora sia nota una soluzione dell'equazione stessa.

Ci occuperemo qui di mostrare come esso funziona nel caso di una equazione del secondo ordine, essendo l'estensione del metodo del tutto ovvia per equazioni lineari di ordine superiore.

Consideriamo pertanto $a, b \in \mathcal{C}^0(I)$ e l'equazione differenziale di ordine 2

$$y''(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x).$$

Supponiamo nota una soluzione z dell'equazione, tale che $z(x) \neq 0 \; \forall x \in I$.
Cerchiamo soluzioni dell'equazione nella forma $y(x) = u(x)z(x)$
Derivando e sostituendo nell'equazione otteniamo che

$$u''z + 2u'z' + uz'' = au'z + auz' + buz$$

e, tenuto conto che z è soluzione,

$$u''z + 2u'z' - au'z = 0$$

Posto $v = u'$ si ha

$$v'z + v(2z' - az) = 0$$

e quindi, poiché $z \neq 0$,

$$v' + v(2\frac{z'}{z} - a) = 0.$$

Se ne deduce che deve essere

$$v(x) = e^{-\int_{x_o}^{x} 2\frac{z'(t)}{z(t)}dt + \int_{x_o}^{x} a(t)dt}$$

e quindi

$$v(x) = \left(\frac{z(x_0)}{z(x)}\right)^2 \; e^{\int_{x_o}^{x} a(t)dt}.$$

Pertanto una soluzione sarà

$$v(x) = \frac{1}{(z(x))^2} e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

e

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_o}^{t} a(s)ds} dt$$

da cui si può ricavare la soluzione cercata.

La soluzione trovata risulta linearmente indipendente da z. Se infatti

$$c_1 z(x) + c_2 z(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_o}^{t} a(s)ds} dt \; = 0$$

per ogni $\forall x$ si ha, per $x = x_0$

$$c_1 z(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad c_1 = 0$$

Ne viene anche che

$$c_2 z(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_o}^{t} a(s)ds} dt = 0$$

e $c_2 = 0$ in quanto il secondo fattore non può mai annullarsi, se $x \neq x_0$.

Possiamo pertanto scrivere l'integrale generale dell'equazione data come

$$y(x) = z(x) \left(c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \right).$$

Ci occupiamo ora della soluzione di equazioni e sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti della forma

$$Y'(x) = AY(x) + B(x)$$

$$Y'(x) = AY(x)$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x) + b(x)$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x)$$

In pratica l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x)$$

si può determinare come segue

(1) si considera il polinomio caratteristico associato all'equazione data

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{k-1}$$

che si ottiene sostituendo formalmente la quantità algebrica λ^k ad $y^{(k)}(x)$

(2) si trovano le n soluzioni, reali o complesse e coniugate, dell'equazione (a coefficienti reali)

$$P(\lambda) = 0$$

Consideriamo ogni soluzione $\lambda_1, .., \lambda_r$ con la sua molteplicità $\mu_1, .., \mu_r$

(3) in corrispondenza ad ogni valore λ, avente molteplicità μ,

- se λ è reale si considerano le funzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad y_2(x) = xe^{\lambda x} \quad \cdots \quad y_\mu(x) = x^{\mu-1}e^{\lambda x} \tag{22.21}$$

- se $\lambda = \alpha + \imath\beta$ è complesso, allora anche il suo complesso coniugato $\lambda = \alpha - \imath\beta$è autovalore in quanto i coefficienti dell'equazione sono reali, e si considerano le funzioni

$$u_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \quad u_2(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x \quad \cdots \quad u_\mu(x) = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{22.22}$$

$$v_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad v_2(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x \quad \cdots \quad v_\mu(x) = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{22.23}$$

Si verifica che le soluzioni trovate sono tra loro linearmente indipendenti.

(4) Si trovano così
- in corrispondenza di ogni soluzione reale λ, μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti
- in corrispondenza di ogni soluzione complessa e della sua coniugata, 2μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti

(5) siano

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

le soluzioni trovate nei punti precedenti.

Avremo che le soluzioni sono proprio n in quanto la somma del numero delle soluzioni, contate con la loro molteplicità, è proprio n per il teorema fondamentale dell'algebra.

La soluzione dell'equazione sarà pertanto

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

In pratica l'integrale generale del sistema $Y' = AY$ si può determinare come segue

(1) si trovano gli autovalori della matrice A, $\lambda_1, .., \lambda_r$ e la loro molteplicità $\mu_1, .., \mu_r$;

(2) in corrispondenza ad ogni valore λ di A, avente molteplicità μ,

- se λ è reale si considerano le funzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad y_2(x) = xe^{\lambda x} \quad \cdots \quad y_\mu(x) = x^{\mu-1}e^{\lambda x} \tag{22.24}$$

- se λ è complesso, allora anche il suo complesso coniugato è autovalore in quanto i coefficienti del sistema sono reali, e si considerano le funzioni

$$u_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \quad u_2(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x \quad \cdots \quad u_\mu(x) = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{22.25}$$

$$v_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad v_2(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x \quad \cdots \quad v_\mu(x) = x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{22.26}$$

Si verifica che le soluzioni trovate sono tra loro linearmente indipendenti.

(3) Si trovano così
- in corrispondenza di ogni autovalore reale λ, μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti
- in corrispondenza di ogni autovalore complesso e del suo coniugato, 2μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti

(4) siano

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

le soluzioni trovate nei punti precedenti.

Avremo che le soluzioni sono proprio n in quanto la somma del numero delle soluzioni, contate con la loro molteplicità, è proprio n per il teorema fondamentale dell'algebra e possiamo cercare soluzioni

$$Y = (Y_j)$$

del sistema omogeneo che abbiano come componenti delle combinazioni lineari delle funzioni y_i cioè

$$Y_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} y_i(x)$$

(5) Le costanti introdotte $c_{i,j}$ sono in numero di n^2 e quindi superiore al numero di costanti n necessario e sufficiente per descrivere l'integrale generale del sistema differenziale lineare omogeneo di ordine n; onde determinare solo n costanti si procede quindi sostituendo nel sistema ed usando le uguaglianze trovate per ridurre il numero di costanti libere ad n

Abbiamo con ciò gli strumenti per risolvere ogni equazione differenziale ed ogni sistema differenziale lineare omogeneo, a coefficienti costanti; per risolvere i corrispondenti problemi non omogenei sarà sufficiente trovare una soluzione particolare dei problemi non omogenei stessi. Ciò può essere fatto, in generale, usando il metodo di variazione delle costanti di Lagrange, ma, nel caso dei coefficienti costanti, possiamo, se inoltre il termine noto è di forma particolarmente semplice, trovare una soluzione particolare di forma similmente semplice.

Più precisamente possiamo affermare che:

(1) Se consideriamo l'equazione differenziale non omogenea 22.3 e se

$$b(x) = q(x)e^{\lambda x}$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$ e q è un polinomio di grado m a coefficienti complessi, si può trovare un polinomio r di grado al più m tale che, se μ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico P ,

$$y(x) = x^{\mu} r(x) e^{\lambda x}$$

sia soluzione dell'equazione 22.3.

(2) Se consideriamo il sistema differenziale non omogeneo 22.4 e se

$$B(x) = Q(x) e^{\lambda x}$$

dove Q è un vettore colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti complessi, di grado minore o uguale ad m, si può trovare un vettore colonna R i cui elementi sono polinomi a coefficienti complessi di grado al più $m + \mu$, dove μ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico P della matrice A, tale che

$$Y(x) = R(x) e^{\lambda x}$$

risolve il sistema 22.4.

Si può inoltre provare che, nel caso in cui i coefficienti siano reali,

(1) Se

$$b(x) = e^{\alpha x}[q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)]$$

dove q_1 e q_2 sono polinomi a coefficienti reali di grado massimo m e $\alpha \pm i\beta$ è radice del polinomio caratteristico P di molteplicità μ, si possono trovare due polinomi r_1, r_2 di grado al più m tali che

$$y(x) = x^{\mu}e^{\alpha x}[r_1(x)\cos(\beta x) + r_2(x)\sin(\beta x)]$$

sia soluzione della 22.3.

(2) Se

$$B(x) = e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)]$$

dove Q_1 e Q_2 sono vettori colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti reali di grado al più m e $\alpha \pm i\ \beta$ è radice del polinomio caratteristico della matrice A con molteplicità μ, si possono trovare R_1 ed R_2 , vettori colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti reali di grado al più $m + \mu$, tali che

$$Y(x) = e^{\alpha x}[R_1(x)\cos(\beta x) + R_2(x)\sin(\beta x)]$$

sia soluzione del sistema 22.4.

1. L'oscillatore armonico

Un esempio molto importante di modello matematico che utilizza la teoria delle equazioni differenziali lineari è costituto dall'oscillatore armonico.

Si consideri l'equazione del secondo ordine

(22.27) $$x"(t) + 2hx'(t) + \omega^2 x(t) = K\sin(\alpha t)$$

dove $h, K, \alpha > 0$.

Essa può descrivere il comportamento di diversi sistemi reali quali,

(1) un punto materiale soggetto ad una forza di richiamo proporzionale alla distanza ed ad forza di attrito proporzionale alla velocità, sollecitato da una forza esterna sinusoidale di ampiezza K e di frequenza α.
(2) l'intensità di corrente che circola in un circuito RLC alimentato da una forza elettromotrice sinusoidale.

Le soluzioni dell'equazione sono date da:

(1) Se $h > \omega$

$$x(t) = c_1 e^{(-h+\theta)t} + c_2 e^{(-h-\theta)t} + \hat{x}(t)$$

I grafici di possibili soluzioni sono riportati nelle figure

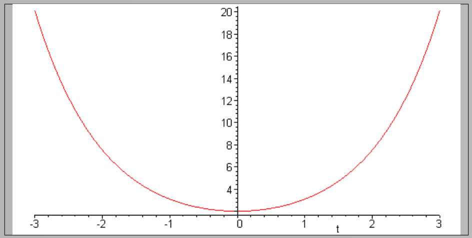


FIGURA 22.1. Soluzioni del polinomio caratteristico reali distinte una positiva ed una negativa

(2) Se $h = \omega$

$$x(t) = c_1 e^{-ht} + c_2 t e^{-ht} + \hat{x}(t)$$

I grafici di possibili soluzioni sono riportati nelle figure

(3) Se $h < \omega$

$$x(t) = e^{-ht}(c_1 \sin(\theta t) + c_2 \cos(\theta t)) + \hat{x}(t)$$

I grafici di possibili soluzioni sono riportati nelle figure

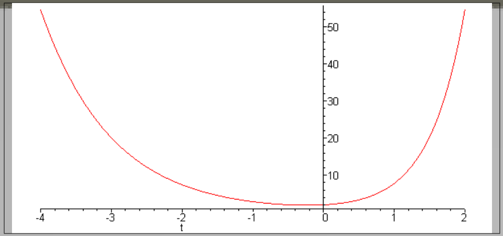


FIGURA 22.2. Soluzioni del polinomio caratteristico reali distinte una positiva ed una negativa

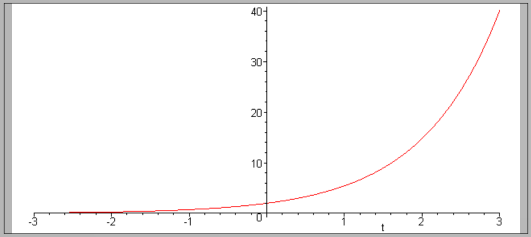


FIGURA 22.3. Soluzioni del polinomio caratteristico reali distinte entrambe positive

dove

$$\hat{x}(t) = \alpha \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t) = A \sin(\alpha t - \phi)$$

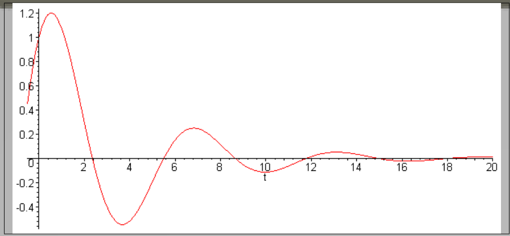


FIGURA 22.4. Soluzioni del polinomio caratteristico complesse e coniugate con parte reale negativa

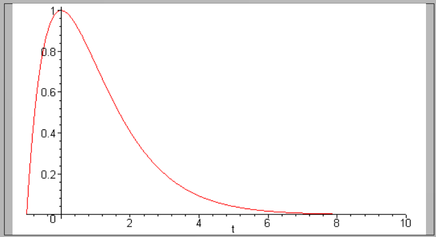


FIGURA 22.5. Soluzioni del polinomio caratteristico reali coincidenti negative

ed inoltre si è posto

$$\theta = |h^2 - \omega^2|^{1/2}$$

$$a = K \frac{\omega^2 - \alpha^2}{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$

$$b = -K \frac{2h\alpha}{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$

$$A = \frac{K}{\sqrt{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{a}{A}\right)$$

Nel caso in cui $h = 0$ l'equazione diventa

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = K \sin(\alpha t)$$

con $k, \alpha > 0$ e rappresenta un oscillatore armonico non smorzato sollecitato da una forza esterna sinusoidale.

Le soluzioni in questo caso sono

(1) Se $\alpha \neq \omega$

$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) + \frac{K}{\omega^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t)$$

(2) Se $\alpha = \omega$

$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) - \frac{K}{2\omega} t \cos(\omega t)$$

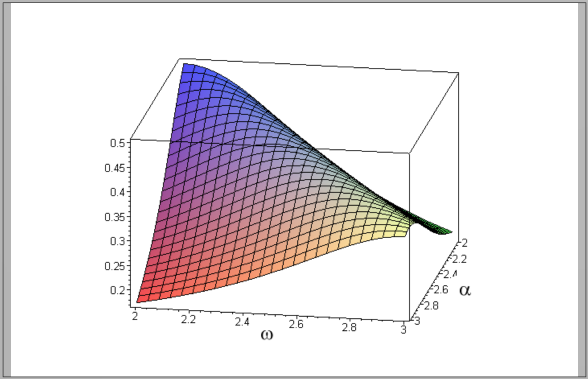


FIGURA 22.6. Grafico di A in funzione di α ed ω

$$A = \frac{K}{(4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2)^{1/2}} = \tag{22.28}$$

$$= \frac{K/\omega^2}{(4(h/\omega)^2(\alpha/\omega)^2 + (1 - (\alpha/\omega)^2)^2)^{1/2}}$$

con

$$K/\omega^2 = .5$$

Elenco delle figure

Indice

Indice analitico