ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 3

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Il concetto di funzione è di fondamentale importanza;

DEFINIZIONE 3.1. *Diciamo che è data una funzione reale di una variabile reale se sono assegnati un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ ed una corrispondenza f che ad ogni elemento $x \in D$ associa uno ed un solo elemento $y \in \mathbb{R}$.*

DEFINIZIONE 3.2. *Chiamiamo D dominio della funzione e denotiamo con $f(x)$ (si legge f di x) il corrispondente di x secondo la legge assegnata f; spesso useremo il termine valore di f in x oppure f calcolata in x per indicare $f(x)$ e chiamiamo x argomento di f(x); per indicare la corrispondenza f scriviamo anche $x \mapsto f(x)$ oppure $x \mapsto y = f(x)$.*

Chiamiamo rango di f l'insieme

$$R(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D,\ y = f(x)\}.$$

Per indicare una funzione scriviamo $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, specificando prima della freccia il dominio D di f, ma non curandoci di precisare, dopo la freccia, il suo rango.

Osservazione. Distinguiamo fin d'ora due notazioni che saranno usate con significati completamente diversi. Useremo f per indicare la legge di corrispondenza di una funzione ed $f(x)$ per indicare il valore di f in x, (quindi $f(x)$ è un numero reale). $\square$

Spesso, nell'assegnare una funzione, daremo soltanto la legge di corrispondenza f; in tal caso sottointendiamo sempre che D è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi possono essere usati come argomenti di f.

Ad ogni funzione è possibile associare un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (che indicheremo spesso con $\mathbb{R}^2$) che la caratterizza in maniera completa e dalla quale è completamente caratterizzato.

DEFINIZIONE 3.3. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo grafico di f*

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in D\,,\; y = f(x)\}$$

Mediante la definizione 3.2 è possibile associare in maniera univoca un sottoinsieme G $(= G(f))$ ad ogni funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Non è altrettanto vero che ad ogni sottoinsieme $G \subset \mathbb{R}^2$ è possibile associare una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Ciò accade solo nel caso in cui G soddisfi una particolare proprietà.

DEFINIZIONE 3.4. *Diciamo che* $G \subset \mathbb{R}^2$ *soddisfa la proprietà (g) se*

$$(g) \qquad (x, y_1), (x, y_2) \in G \;\Rightarrow\; y_1 = y_2$$

TEOREMA 3.1. *Per ogni* $G \subset \mathbb{R}^2$, G *soddisfacente la proprietà (g), esistono unici* $D \subset \mathbb{R}$ *ed* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *tali che* $G = \mathrm{gph} f$.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $D = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in G\}$ e sia $f(x) = y$ dove y è l'unico elemento di $\mathbb{R}$ tale che $(x, y) \in G$.

Dal momento che G soddisfa la proprietà (g), D ed f verificano le proprietà richieste. □

DEFINIZIONE 3.5. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *sia* $A \subset D$, *definiamo restrizione di* f *ad* A *la funzione* $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che* $g(x) = f(x)\ \forall x \in A$.

Indichiamo con $f|_A$ *la restrizione di* f *ad A.*

Siano invece $B \supset D$ *e* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$*; diciamo che* g *è un prolungamento di* f *a* B *se* $g|_D = f$.

DEFINIZIONE 3.6. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *diciamo che*

(1) f *è iniettiva se*

$$\forall x_1, x_2 \in D \qquad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

In altre parole f è iniettiva se ogni retta parallela all'asse delle x interseca $\mathrm{gph} f$ in un solo punto.

(2) *Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che f è surgettiva su A se $R(f) = A$, cioè se*

$$\forall y \in A \quad \exists x \in D \quad : \quad y = f(x).$$

Per esprimere che f è surgettiva su A diremo anche che $f : D \longrightarrow A$ è surgettiva. (Si osservi che in questo caso abbiamo specificato dopo la freccia il rango di f).

Sia $f : D \longrightarrow A$, diciamo che f è bigettiva se è iniettiva e surgettiva.

Osservazione. Ogni funzione è surgettiva sul suo rango. □

DEFINIZIONE 3.7. *Siano $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo*

(1) $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *come* $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$
(2) $f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *come* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$
(3) $\frac{1}{g} : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *come* $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$ $\forall x \in D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$

DEFINIZIONE 3.8. *Siano $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $R(g) \subset D$.*
Definiamo funzione composta di g ed f la funzione che ad ogni $x \in B$ associa $f(g(x)) \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 3.9. *Diciamo che* $f : D \longrightarrow A$ *è invertibile se esiste* $g : A \longrightarrow D$ *tale che*

$$f(g(y)) = y \qquad \forall y \in A \tag{3.1}$$

$$g(f(x)) = x \qquad \forall x \in D \tag{3.2}$$

Per indicare g *usiamo il simbolo* f^{-1} *cosicché*

$$f^{-1} : A \longrightarrow D$$

è l'inversa di f.

TEOREMA 3.2. *Sia* $f : D \longrightarrow A$, f *è invertibile se e solo se* f *è bigettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f invertibile; allora

$$\forall y \in A \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

e ciò prova che f è surgettiva su A.

Siano poi $x_1, x_2 \in D$ e sia $f(x_1) = f(x_2)$, allora

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$$

e ciò prova l'iniettività di f.

Supponiamo viceversa che f sia bigettiva e definiamo, per ogni $y \in A$, $f^{-1}(y) = x$ dove x è l'unico elemento di D tale che $f(x) = y$.

In altre parole

$$f^{-1}(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x) \quad .$$

Si ha allora

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \qquad \forall x \in D$$

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \qquad \forall y \in A.$$

□

DEFINIZIONE 3.10. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che D sia simmetrico rispetto all'origine (cioè $x \in D \Rightarrow -x \in D$); diciamo che f è una funzione pari se*

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in D;$$

diciamo che f è una funzione dispari se

$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall x \in D.$$

DEFINIZIONE 3.11. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*, diciamo che* f *è crescente (strettamente crescente) se*

$$\forall x, y \in D, \qquad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) \qquad (f(x) < f(y)) \ .$$

Diciamo che f *è decrescente (strettamente decrescente) se*

$$\forall x, y \in D, \qquad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y) \qquad (f(x) > f(y))$$

DEFINIZIONE 3.12. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*, diciamo che* f *è monotòna (strettamente monotòna) se* f *è crescente oppure decrescente (strettamente crescente oppure strettamente decrescente).*

TEOREMA 3.3. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *è monotòna (strettamente monotòna) se e solo se*

$$\forall x, y, z \in D, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad [f(y) - f(x)][f(z) - f(y)] \geq 0 \ (> 0).$$

DIMOSTRAZIONE. La sufficienza è ovvia, proviamo la necessità.
Siano $a, b, x_1, x_2 \in D$, $a < b \leq x_1 \leq x_2$,

$$[f(a) - f(b)][f(b) - f(x_1)][f(b) - f(x_1)][f(x_1) - f(x_2)] \geq 0;$$

perciò $f(x_1) - f(x_2)$ ha lo stesso segno di $f(a) - f(b)$ ed f è monotona in $D \cap [b, +\infty)$.
In maniera analoga si prova che f è monotona su $D \cap (-\infty, b]$ e quindi su D in quanto se $a < b < c$

$$[f(a) - f(b)][f(b) - f(c)] \geq 0$$

Nel caso in cui f sia strettamente monotona tutte le disuguaglianze sono da intendersi in senso stretto. $\square$

TEOREMA 3.4. *Sia $f : D \longrightarrow A$ surgettiva e strettamente monotona, allora f è invertibile ed $f^{-1} : A \longrightarrow D$ è strettamente monotona.*

Più precisamente se f è strettamente crescente (decrescente), f^{-1} è strettamente crescente (decrescente).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f sia strettamente crescente e vediamo che f è iniettiva.

Siano $x, y \in D$ tali che $f(x) = f(y)$; se si avesse, per assurdo, $x < y$, si potrebbe dedurre che $f(x) < f(y)$ e ciò è in contrasto con l'ipotesi che $f(x) = f(y)$. Pertanto $x = y$.

Si ha quindi che f è invertibile e $f^{-1}(y) = x$ se e solo se $y = f(x)$ per ogni $x \in D$ e per ogni $y \in A$.

Siano ora $y_1, y_2 \in A$, $y_1 < y_2$ e siano $x_1, x_2 \in D$ in modo che

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{e} \quad y_2 = f(x_2)$$

se fosse $x_1 \geq x_2$ si avrebbe $f(x_1) \geq f(x_2)$ e $y_1 \geq y_2$ e ciò è assurdo.

Se ne deduce che $x_1 < x_2$ e la stretta crescenza di f^{-1}.

$\square$

DEFINIZIONE 3.13. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *diciamo che* f *è superiormente limitata se esiste* $M \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$f(x) \leq M \qquad \forall x \in D$$

diciamo che f *è inferiormente limitata se esiste* $m \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in D$$

diciamo che f *è limitata se è sia superiormente che inferiormente limitata.*

Osservazione. f è limitata (superiormente) [inferiormente] se e solo se $R(f)$ è limitato (superiormente) [inferiormente]. □

DEFINIZIONE 3.14. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *diciamo che* $x_0 \in D$ *è un punto di minimo assoluto per* f *se*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in D$$

diciamo che $x_0 \in D$ *è un punto di massimo assoluto per* f *se*

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in D$$

TEOREMA 3.5. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *affinché* $x_0 \in D$ *sia un punto di minimo (massimo) assoluto per* f *è sufficiente che* f *sia decrescente (crescente) in* $(-\infty, x_0] \cap D$ *e crescente (decrescente) in* $[x_0, +\infty) \cap D$.

TEOREMA 3.6. *Siano* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tali che* $R(g) \subset D$, *allora*

- f *strettamente crescente,* g *strettamente crescente* $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ *strettamente crescente;*
- f *strettamente crescente,* g *strettamente decrescente* $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ *strettamente decrescente;*
- f *strettamente decrescente,* g *strettamente crescente* $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ *strettamente decrescente;*
- f *strettamente decrescente,* g *strettamente decrescente* $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ *strettamente crescente.*

Inoltre, le stesse asserzioni valgono abolendo ovunque la parola strettamente.

CAPITOLO 4

LE FUNZIONI ELEMENTARI

Per costruire modelli che coinvolgono funzioni occorre avere un certo numero di funzioni, che chiameremo elementari, di cui sono note le proprietà.

Usando tali funzioni si possono costruire la maggior parte delle funzioni necessarie per l'impostazione di modelli matematici.

È pertanto molto importante una buona conoscenza e della definizione delle funzioni elementari e delle loro principali proprietà.

Naturalmente la classe delle funzioni elementari, sebbene codificata e delimitata dalla letteratura e dalla tradizione matematica è in qualche modo aperta a nuovi ingressi che si rendano di uso frequente in applicazioni future.

1. Le funzioni Potenze

Cominciamo con il definire cosa si intende per potenza di esponente naturale;

DEFINIZIONE 4.1. *Sia* $n \in \mathbb{N}$, *definiamo la funzione* $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mediante la*

$$p_n(x) = x^n;$$

p_n *si dice potenza di esponente* n *e di base* x.

TEOREMA 4.1. *Sia* $n \in \mathbb{N}$, p_n *è strettamente crescente in* $\overline{\mathbb{R}}_+$.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione; è innanzi tutto ovvio che p_1 è strettamente crescente in $\overline{\mathbb{R}}_+$ ed inoltre se supponiamo p_n crescente in $\overline{\mathbb{R}}_+$, presi $x > y \geq 0$ si ha

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) > xp_n(y) \geq yp_n(y) = p_{n+1}(y)$$

e p_{n+1} è strettamente crescente su $\overline{\mathbb{R}}_+$ $\square$

TEOREMA 4.2. *Sia* $n \in \mathbb{N}$, n *pari, allora*

(1) $p_n(x) = p_n(-x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$
(2) p_n *è strettamente decrescente su* $\overline{\mathbb{R}}_-$
(3) $R(p_n) = \overline{\mathbb{R}}_+$

DIMOSTRAZIONE.

(1) Poichè n è pari si ha $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ e

$$x^n = x^{2k} = (x^2)^k = ((-x)^2)^k = (-x)^{2k} = (-x)^n$$

(2) Siano $x < y \le 0$, allora $-x > -y \ge 0$ e dal teorema 4.2

$$p_n(x) = p_n(-x) > p_n(-y) = p_n(y)$$

(3) È evidente che $R(p_n) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ in quanto $x^n = x^{2k}$ e $x^2 \ge 0$, l'inclusione opposta dipende dal fatto che p_n è una funzione continua e dal teorema dei valori intermedi. Proveremo tale inclusione a suo tempo.

□

TEOREMA 4.3. *Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari, allora*

(1) $p_n(x) = -p_n(-x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$
(2) p_n *è strettamente crescente su* $\overline{\mathbb{R}}_-$
(3) $R(p_n) = \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE.

(1) Poiché n è dispari si ha $n = 2k + 1$ e

$$p_n(x) = x^{2k+1} = xx^{2k} = -(-x)(-x)^{2k} = -(-x)^n = -p_n(-x)$$

(2) Siano $x < y \leq 0$, allora $-x > -y \geq 0$ e, per il teorema 4.2, $-p_n(x) = p_n(-x) > p_n(-y) = -p_n(y)$.

(3) Anche in questo caso rimandiamo la dimostrazione al seguito.

$\square$

Abbiamo visto che, se $n \in \mathbb{N}$, n pari, allora $p_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ è strettamente crescente e surgettiva; pertanto p_n è invertibile ed è lecito definire

$$r_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad come \qquad r_n = (p_n)^{-1}.$$

Se $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $r_n(x)$ si dice radice n-esima di x.

Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari, abbiamo già visto che $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente e surgettiva; pertanto p_n è invertibile ed è lecito definire

$$r_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad come \qquad r_n = (p_n)^{-1}$$

Se $x \in \mathbb{R}$, $r_n(x)$ si dice radice n-esima di x.

TEOREMA 4.4. *Sia $n \in \mathbb{N}$*

(1) *se n è pari, $r_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ è strettamente crescente;*
(2) *se n è dispari, $r_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente.*

Definiamo ancora le potenze ad esponente negativo.

DEFINIZIONE 4.2. *Sia $n \in \mathbb{N}$, $p_{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita come*

$$p_{-n}(x) = 1/p_n(x)$$

inoltre, $p_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$p_0(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per studiare le proprietà di crescenza, decrescenza e invertibilità di p_{-n} sarà sufficiente fare ricorso al seguente risultato.

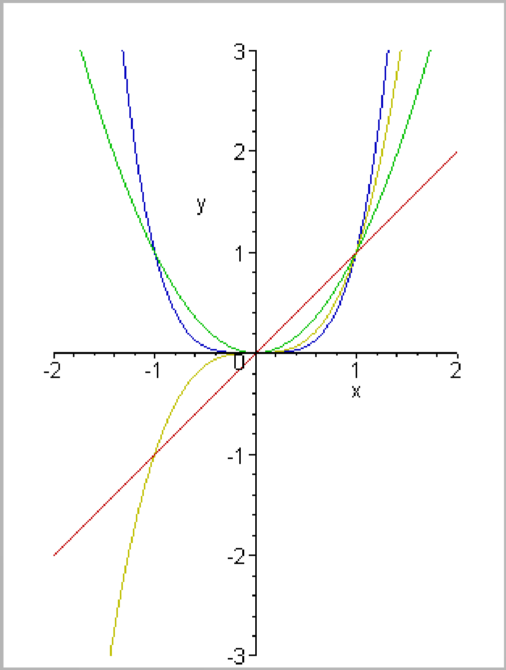

FIGURA 4.1. Potenze ad esponente naturale

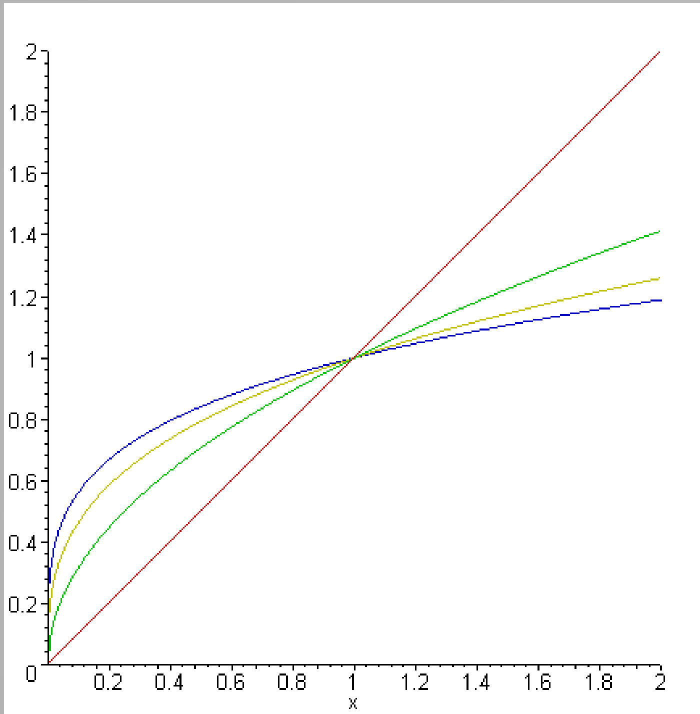

FIGURA 4.2. Radici ad esponente naturale

TEOREMA 4.5. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in D$*; allora*

(1) f *è (strettamente) crescente* $\Leftrightarrow 1/f$ *è (strettamente) decrescente;*
(2) f *è (strettamente) decrescente* $\Leftrightarrow 1/f$ *è (strettamente) crescente.*

DEFINIZIONE 4.3. *Sia* $s \in \mathbb{Q}$, $s = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$*; definiamo la funzione* $f_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *mediante la*

$$f_s(x) = p_m(r_n(x)) = r_n(p_m(x))$$

Se $x \in \mathbb{R}_+$, $f_s(x)$ *si dice potenza ad esponente frazionario di esponente* s *di base* x*.*

Osservazione. Se $x \in \mathbb{R}_+$ la definizione 4.3 è indipendente dalla rappresentazione di s in forma frazionaria e dall'ordine in cui viene fatta la composizione tra potenza e radice.

Se invece $x \in \mathbb{R}_-$ può accadere che $r_n(p_m(x))$ sia definito anche quando $p_m(r_n(x))$ non lo è.

Inoltre, se m/n, m'/n' sono due diverse rappresentazioni frazionarie dello stesso numero razionale s, può accadere che $r_n(p_m(x))$ sia definito mentre $r_{n'}(p_{m'}(x))$ non lo è.

(Si consideri ad esempio $m = 2$ ed $n = 4$; allora se $x < 0$ si ha che $r_4(p_2(x))$ è definito mentre $p_2(r_4(x))$ no.

Inoltre se $m' = 1$ e $n' = 2$ $r_4(p_2(x))$ è definito mentre $r_2(p_1(x))$ no.) □

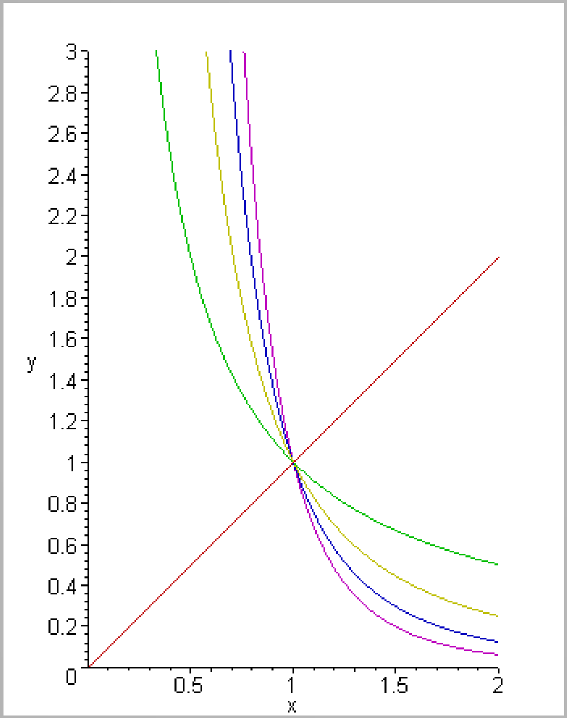

FIGURA 4.3. Potenze ad esponente negativo

Pertanto per valori di $x \in \mathbb{R}_-$ consideriamo la composizione di potenze e radici ove essa ha senso, ma non definiamo in alcun modo la funzione potenza ad esponente razionale.

Ribadiamo ancora che ciò è dovuto al fatto che non è agevole, e talvolta non è possibile, definire in modo univoco la potenza ad esponente razionale in $\mathbb{R}_-$.

Ciò non significa comunque rinunciare a considerare la composizione di una potenza di esponente n e di una radice di indice m, qualora essa abbia senso, anche per valori dell'argomento negativi.

Ad esempio è chiaro che $p_2(r_3(-2))$ risulta perfettamente ed univocamente individuato.

In casi simili tuttavia, pur trattando la funzione composta

$$p_m(r_n(\cdot))$$

non parleremo di potenza ad esponente razionale $\frac{n}{m}$ e non pretenderemo di applicare a $p_m(r_n(\cdot))$le proprietà delle potenze in quanto, come visto, potrebbero risultare false.

TEOREMA 4.6. *Sia $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, e sia $f_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, allora f_s è strettamente crescente.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti se $s = \frac{m}{n} > 0$ allora si ha $m, n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$x^s = p_m(r_n(x)) = r_n(p_m(x))$$

è la composizione di due funzioni strettamente crescenti. □

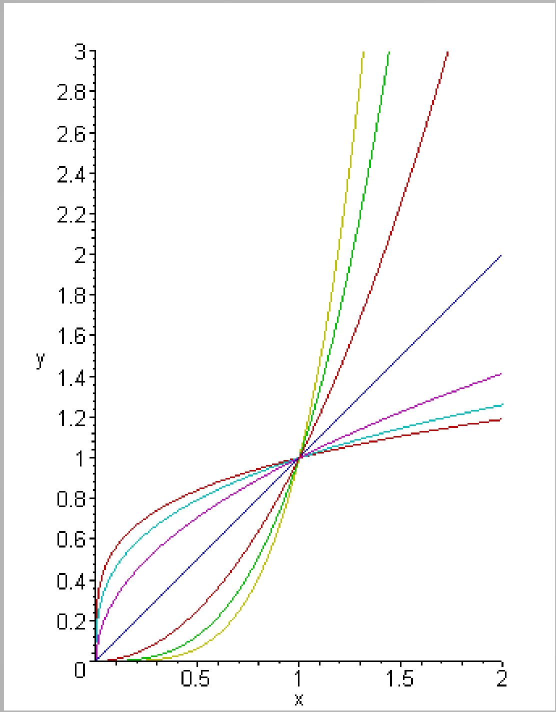

FIGURA 4.4. Potenze ad esponente positivo

E' inoltre possibile dimostrare che le usuali regole di calcolo delle potenze naturali continuano a valere anche per le potenze ad esponente razionale In altre parole si può provare che

Se $s, r \in \mathbb{Q}$, e se $x, y \in \mathbb{R}_+$, allora si ha:

(1) $x^{s+r} = x^s x^r$
(2) $(x^s)^r = x^{sr}$
(3) $(xy)^s = x^s y^s$

Si dimostra altresì che

TEOREMA 4.7. *Se $x > 1$ la funzione $\mathbb{Q} \ni r \mapsto x^r$ è crescente su $\mathbb{Q}$*
In altre parole per $s, r \in \mathbb{Q}$, $s < r$; si ha

$$x^s < x^r$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$x^r - x^s = x^s(x^{r-s} - 1) > 0$$

in quanto

$$x^s > 0 \quad \text{e} \quad x^{r-s} > 1$$

dal momento che essendo $r - s > 0$ la funzione $x \mapsto x^{r-s}$ è crescente ed $x > 1$. $\square$

Per poter definire la potenza anche per esponenti reali è necessario ricordare che piccole variazioni dell'esponente razionale corrispondono a piccole variazioni della potenza; più precisamente possiamo affermare che:

TEOREMA 4.8. *Sia $x > 1$ e sia $r \in \mathbb{Q}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$0 < x^r - x^{r-1/n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Sfruttando questa proprietà è facile capire come sia naturale definire x^a per ogni $x > 1$.

Nel caso in cui sia invece $0 < x < 1$ potremo considerare $\frac{1}{x} > 1$, calcolare $\left(\frac{1}{x}\right)^a$ e definire

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a}$$

Se $x = 1$, infine definiamo $1^a = 1$ per ogni a.

DEFINIZIONE 4.4. *Sia $x > 1$ e sia $a \in \mathbb{R}$; definiamo*

$$x^a = \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq a\} = \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < a\}$$

La precedente definizione afferma implicitamente che i due estremi superiori che vi figurano sono reali ed uguali; possiamo infatti verificare che

Siano $A = \{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq a\}$ e $B = \{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < a\}$ allora

$$\sup A = \sup B \in \mathbb{R}$$

DEFINIZIONE 4.5. *Se* $x = 1$ *definiamo* $1^a = 1$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$. *Se* $0 < x < 1$ *definiamo* $x^a = (1/x)^{-a}$.

A partire dalla definizione data possiamo verificare che la quantità x^a per $x > 0$ ed $a \in \mathbb{R}$ soddisfa le proprietà che siamo abituati ad usare quando maneggiamo potenze.

se $x, y > 0$ e se $a, b \in \mathbb{R}$, allora

(1) $x^a > 0$
(2) $x^{a+b} = x^a x^b$
(3) $(x^a)^b = x^{ab}$
(4) $(xy)^a = x^a y^a$
(5) $1/(x^a) = x^{-a}$

DEFINIZIONE 4.6. *Sia* $a \in \mathbb{R}$, *definiamo la funzione* $p_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *mediante la*

$$x \mapsto p_a(x) = x^a$$

potenza di esponente a

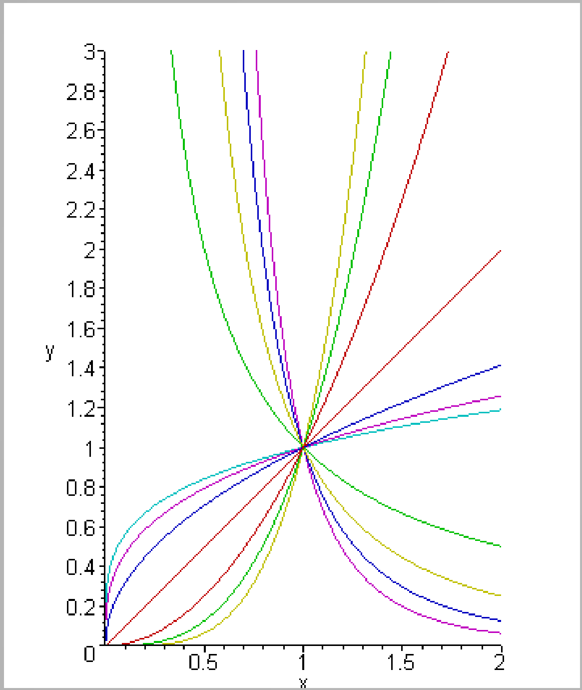

FIGURA 4.5. Potenze ad esponente reale

TEOREMA 4.9. *Sia $a \in \mathbb{R}$, valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se $a > 0$ allora p_a è strettamente crescente*
(2) *Se $a < 0$ allora p_a è strettamente decrescente*
(3) *Se $a \neq 0$ allora $R(p_a) = \mathbb{R}_+ s$*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Sia $0 < x < y$, occorre provare che $x^a < y^a$, cioè che $x^a - y^a < 0$; si ha

$$x^a - y^a = x^a(1 - (y/x)^a) \qquad \text{e} \qquad (y/x) > 1$$

pertanto $(y/x)^r > 1$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r \leq a$ e $(y/x)^a > 1$.

(2) È immediata conseguenza di (1)

(3) Il fatto che $R(p_a) \subset \mathbb{R}_+$ segue dalla definizione di potenza, mentre la dimostrazione dell'inclusione opposta si ottiene mediante il teorema dei valori intermedi.

□

TEOREMA 4.10. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, allora p_a è invertibile su $\mathbb{R}_+$ e $p_a^{-1} = p_{1/a}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sarà sufficiente dimostrare che

$$p_a(p_{1/a}(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

e

$$p_{1/a}(p_a(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Si ha infatti

$$p_a(p_{1/a}(y)) = (y^{1/a})^a = y^{a/a} = y$$

e

$$p_{1/a}(p_a(x)) = (x^a)^{1/a} = x^{a/a} = x.$$

□

2. La funzione esponenziale

DEFINIZIONE 4.7. *Sia* $a \in \mathbb{R}_+$, *definiamo la funzione* $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *mediante la*

$$x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$

esponenziale di base a

TEOREMA 4.11. *Sia* $a > 0$, *valgono i seguenti fatti*

(1) *Se* $a > 1$ *allora* $\exp_a$ *è strettamente crescente*
(2) *Se* $0 < a < 1$ *allora* $\exp_a$ *è strettamente decrescente*

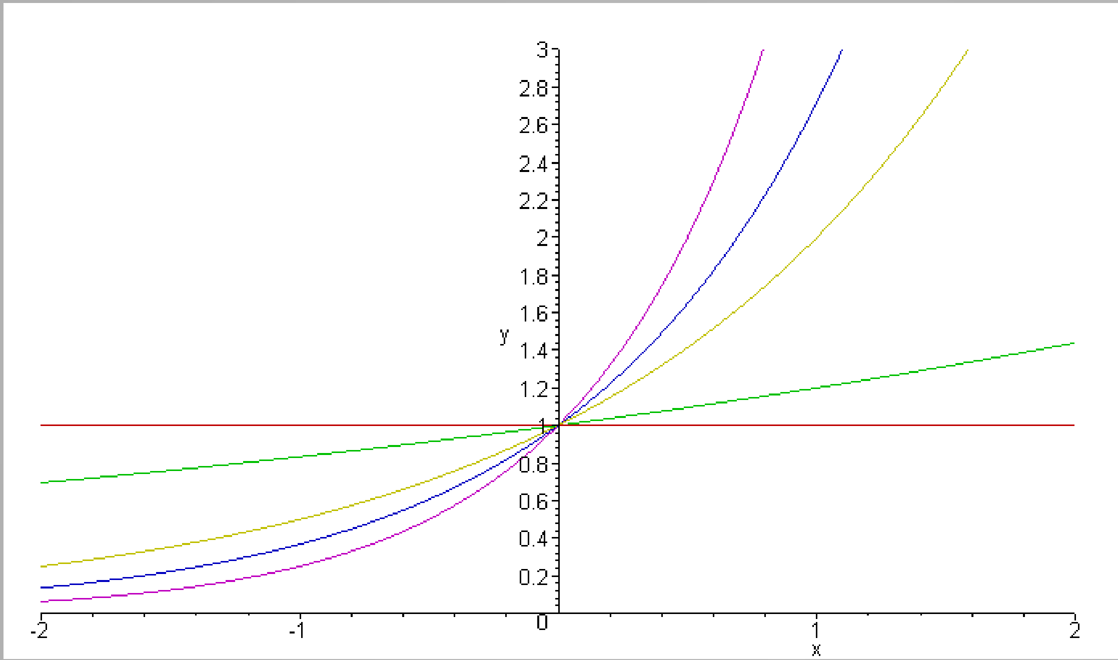

FIGURA 4.6. Esponenziali di base $a > 1$

(3) *Se* $a \neq 1$ *allora* $R(\exp_a) = \mathbb{R}_+$.

DIMOSTRAZIONE.

(1) Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, allora esistono $r, s \in \mathbb{Q}$ tali che $x < r < s < y$ e perciò

$$a^x \leq a^r < a^s \leq a^y$$

dove la prima e la terza disuguaglianza discendono dalla definizione 4.4, mentre la seconda segue dal teorema 4.7.

(2) è conseguenza di (1)

(3) Il fatto che $R(\exp_a) \subset \mathbb{R}_+$ è conseguenza della definizione di potenza; l'inclusione opposta segue ancora dal teorema dei valori intermedi.

□

3. La funzione logaritmo

Definiamo ora la funzione inversa dell'esponenziale.

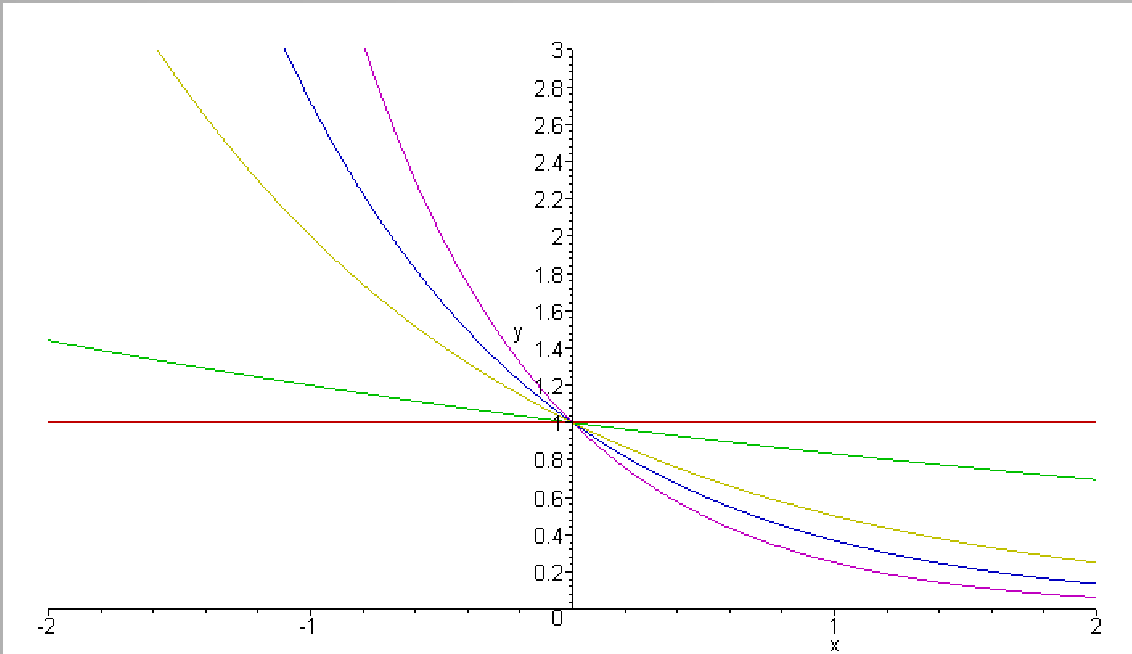

FIGURA 4.7. Esponenziali di base a, $0 < a < 1$

Sia $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$, allora la funzione $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ è strettamente monotona e surgettiva, pertanto essa è invertibile e si può considerare la funzione $\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\log_a = \exp_a^{-1}$$

Se $x \in \mathbb{R}_+$, $\log_a(x)$ si dice logaritmo in base a di x.

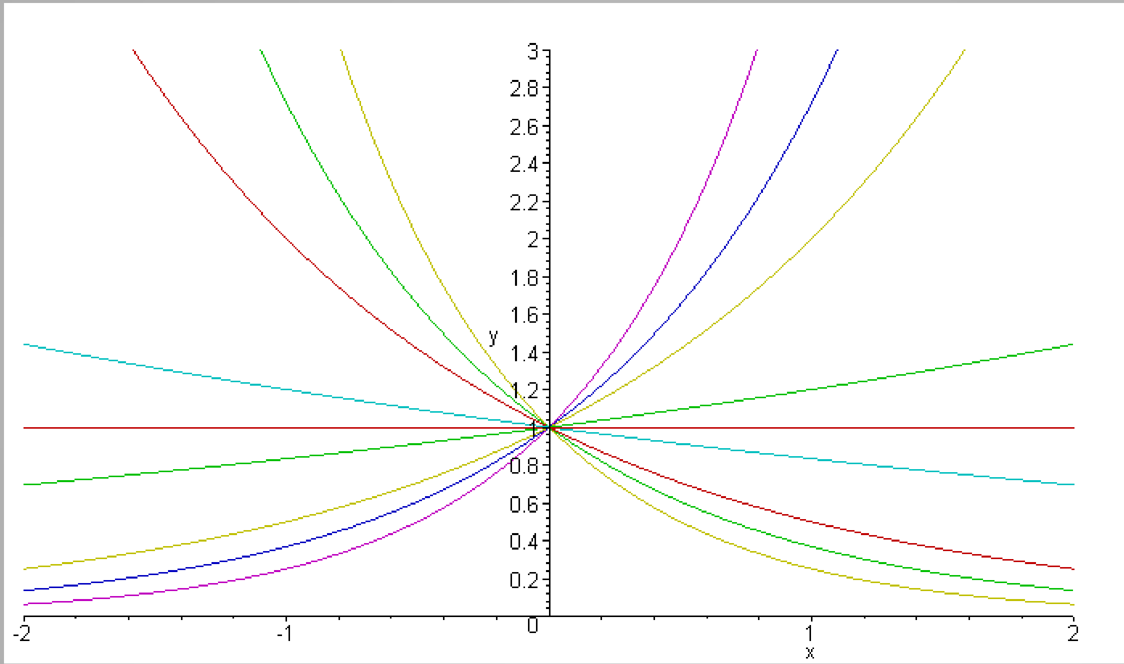

FIGURA 4.8. Esponenziali

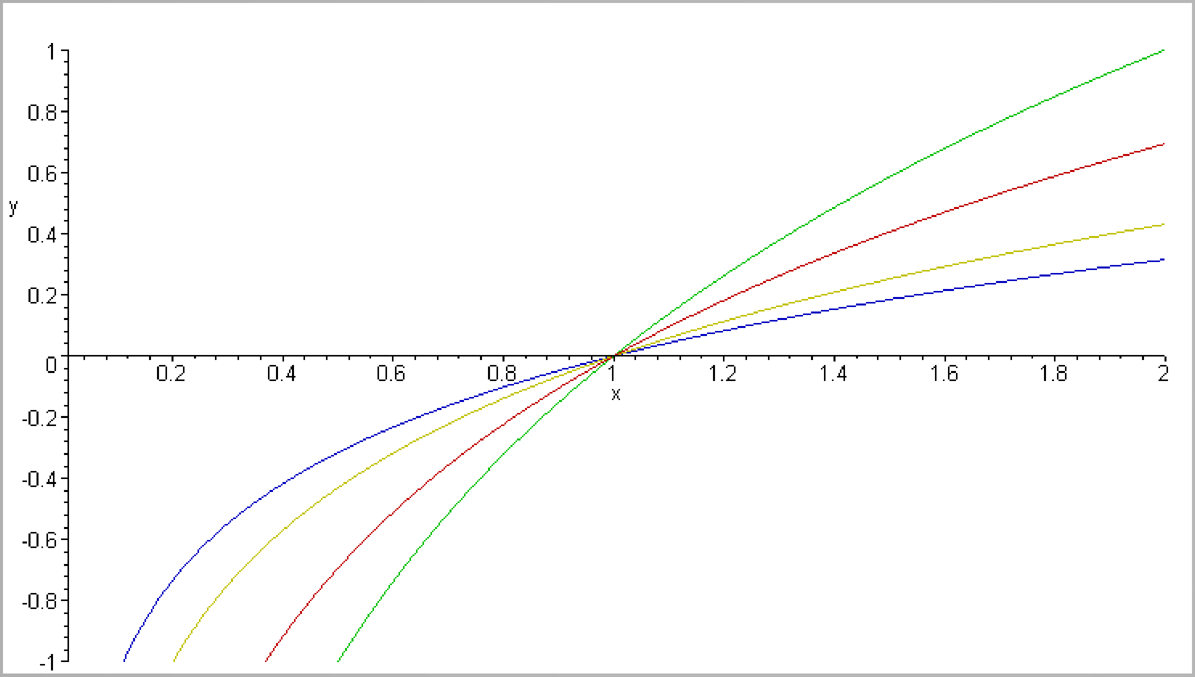

FIGURA 4.9. Logaritmi in base maggiore di 1

TEOREMA 4.12. *Sia* $a \in \mathbb{R}$, *allora*

(1) *Se* $a > 1$ *allora* $\log_a$ *è strettamente crescente*
(2) *Se* $0 < a < 1$ *allora* $\log_a$ *è strettamente decrescente*

TEOREMA 4.13. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a, b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{R}$, *allora*

(1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
(2) $\log_a(x^z) = z \log_a(x)$
(3) $\log_a(x) = \log_a(b) \log_b(x)$.

DIMOSTRAZIONE.

(1) Siano $u = \log_a(x)$ e $v = \log_a(y)$, allora $x = \exp_a(u)$ e $y = \exp_a(v)$, da cui

$$xy = \exp_a(u) \exp_a(v) = \exp_a(u + v)$$

e

$$u + v = \log_a(xy)$$

(2) Sia $u = \log_a(x)$, allora $x = \exp_a(u)$ e $x^z = (\exp_a(u))^z = \exp_a(zu)$ per cui

$$zu = \log_a(x^z)$$

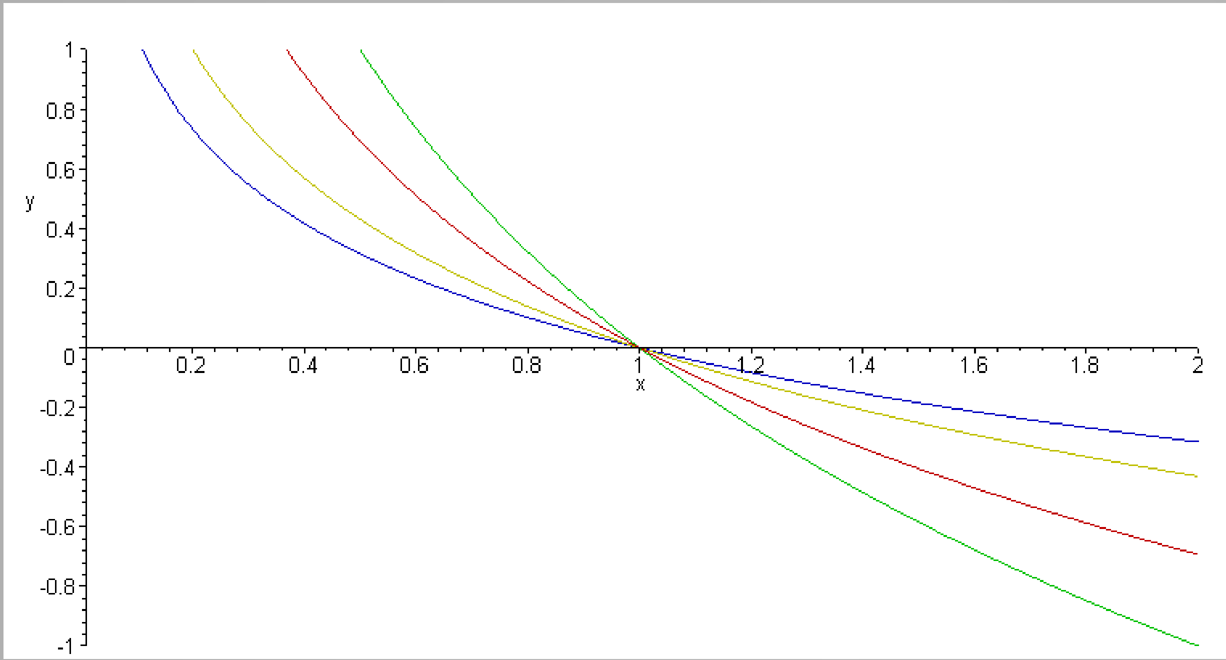

FIGURA 4.10. Logaritmi in base minore di 1

(3)

$$\exp_a(\log_a(b)\log_b(x)) = (\exp_a(\log_a(b)))^{\log_b(x)} = \exp_b(\log_b(x)) = x$$

e

$$\log_a(x) = \log_a(b)\log_b(x)$$

□

4. Le funzioni trigonometriche

Ci apprestiamo, per concludere questa parte, a definire le cosiddette funzioni circolari. A questo scopo abbiamo bisogno di definire la lunghezza di un arco di circonferenza.

DEFINIZIONE 4.8. *Sia Γ un arco della circonferenza C e siano A e B gli estremi di Γ; supponiamo che A preceda B (scriveremo in tal caso $A \ll B$) considerando positivo il senso di rotazione antiorario.*
Diciamo che è data una poligonale P inscritta in Γ (si veda fig. 4.12) se esistono n punti di Γ, $A_1 = A$, A_2, ..., $A_n = B$ tali che $A_i \ll A_{i+1}$, $i = 1, 2, .., n-1$.

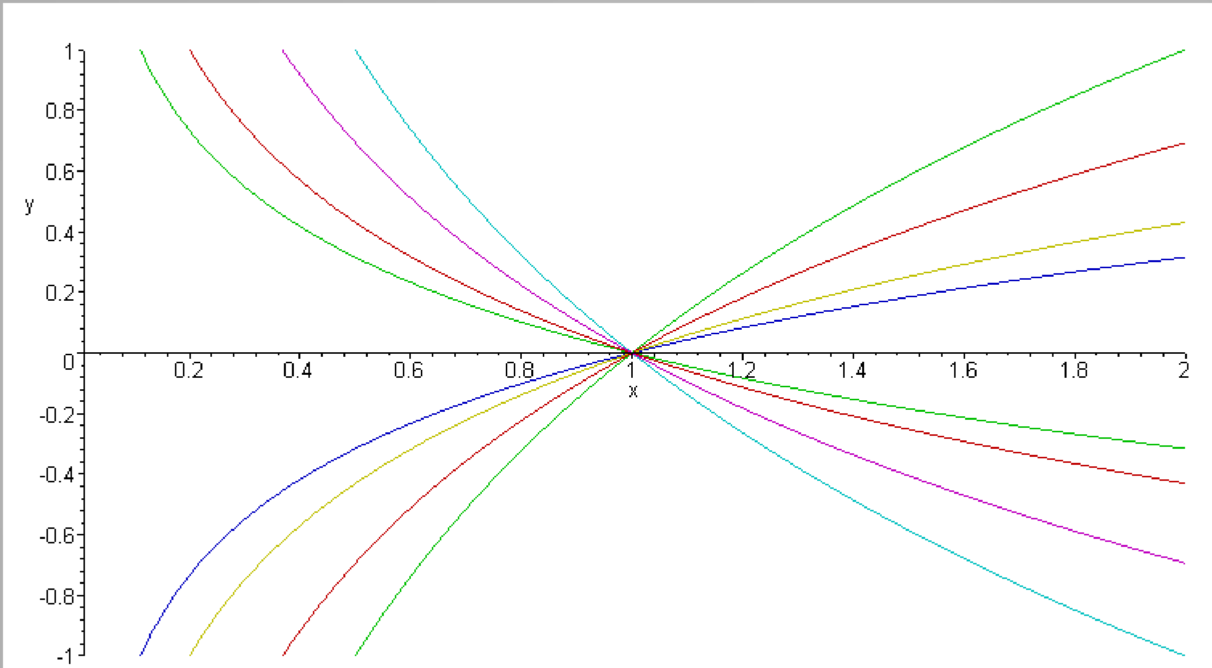

FIGURA 4.11. Logaritmi

Definiamo lunghezza della poligonale P, $\ell(P)$, come

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{A_i A_{i+1}}$$

DEFINIZIONE 4.9. *Sia Γ un arco di circonferenza di estremi A e B e sia $\mathcal{P}$ l'insieme delle poligonali inscritte in Γ. Definiamo*

$$\ell(\Gamma) = \sup\{\ell(P) : P \in \mathcal{P}\}$$

(Si osservi che la definizione è ben posta in quanto $\ell(P) \leq 8R$ per ogni $P \in \mathcal{P}$, dove R è il raggio della circonferenza di cui Γ fa parte).

Usualmente si indica con π la lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1; si ha con 51 cifre decimali esatte:

$$\boxed{\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105}$$

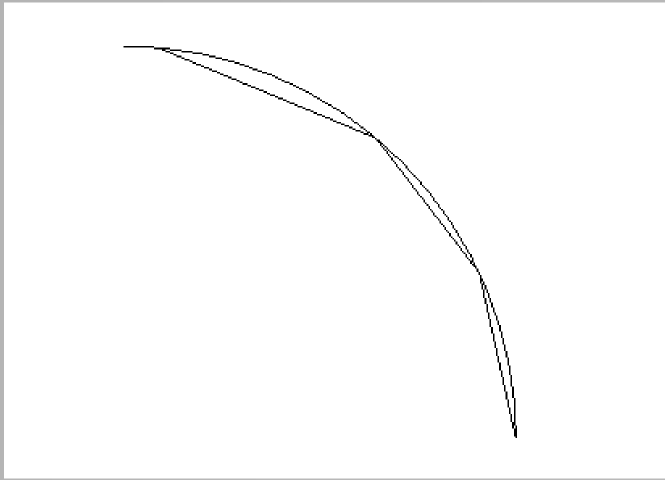

FIGURA 4.12. Una poligonale inscritta

DEFINIZIONE 4.10. *Diciamo che un angolo* x *misura* 1 *radiante se è l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza* R *in una circonferenza di raggio* R*. (vedi fig. 4)*

Osservazione. Ovviamente un angolo giro misura 2π radianti, mentre un angolo piatto misura π radianti. Più in generale, se α è la misura di un angolo in gradi sessagesimali e x è la misura dello stesso angolo in radianti, si ha

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{180}{\pi}$$

Questa relazione permette di convertire rapidamente la misura di un angolo da gradi in radianti e viceversa. □

DEFINIZIONE 4.11. *Sia* $x \in [0, 2\pi]$ *e consideriamo su di una circonferenza di raggio 1, centrata nell'origine delle coordinate, un arco* Γ *di lunghezza* x *aventi il primo estremo coincidente con il punto* $(1, 0)$ *(vedi fig. 4).*

Definiamo $\cos(x)$ *e* $\sin(x)$ *rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del secondo estremo dell'arco.*

DEFINIZIONE 4.12. *Definiamo* $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *nella seguente maniera: sia* $x \in \mathbb{R}$ *e sia* $k = E(x/2\pi)$*, allora* $2k\pi \leq x < 2(k + 1)\pi$*.*

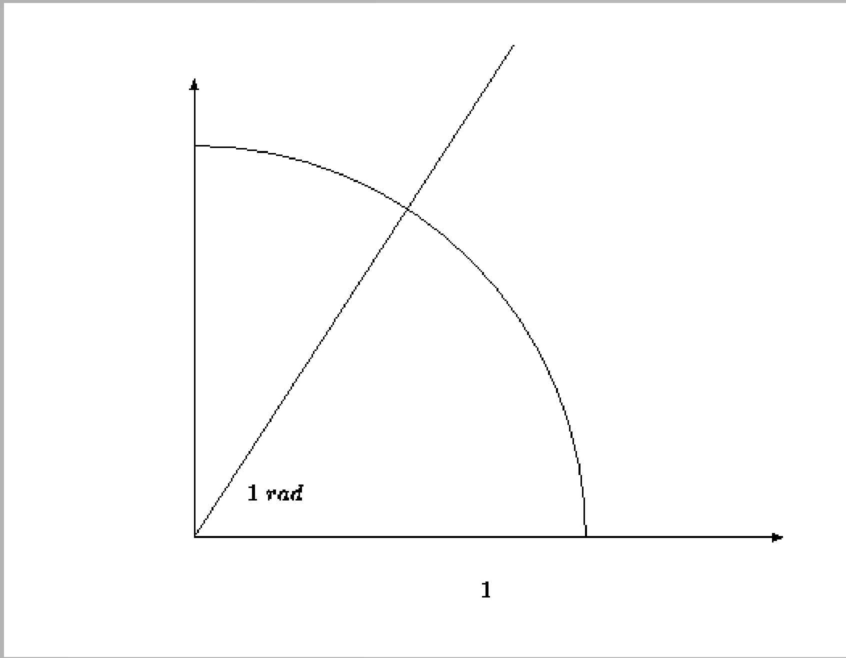

FIGURA 4.13. Definizione di radiante

Poniamo

$$\cos(x) = \cos(x - 2k\pi) \qquad e \qquad \sin(x) = \sin(x - 2k\pi)$$

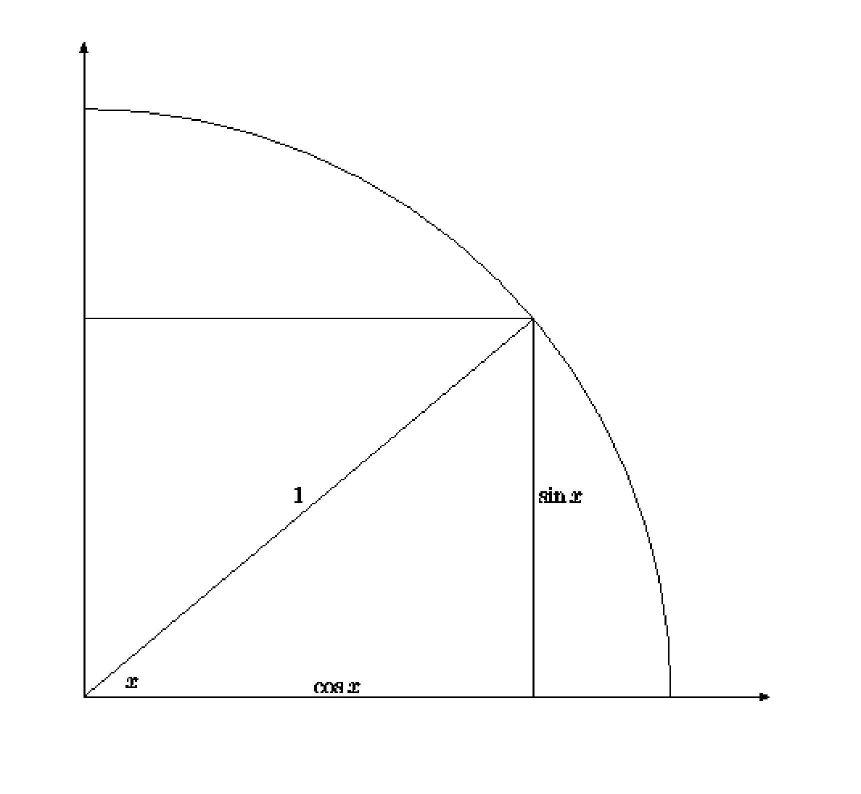

FIGURA 4.14. Definizione di sin e cos

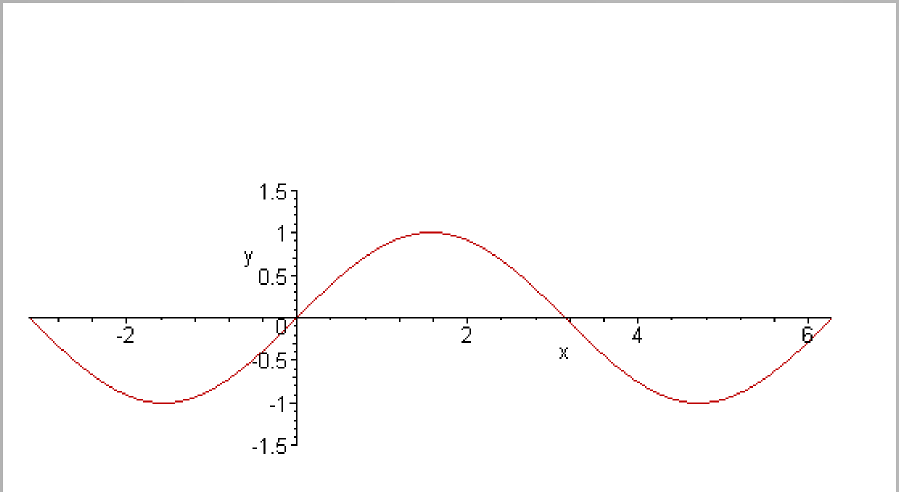

FIGURA 4.15. Grafico della funzione sin

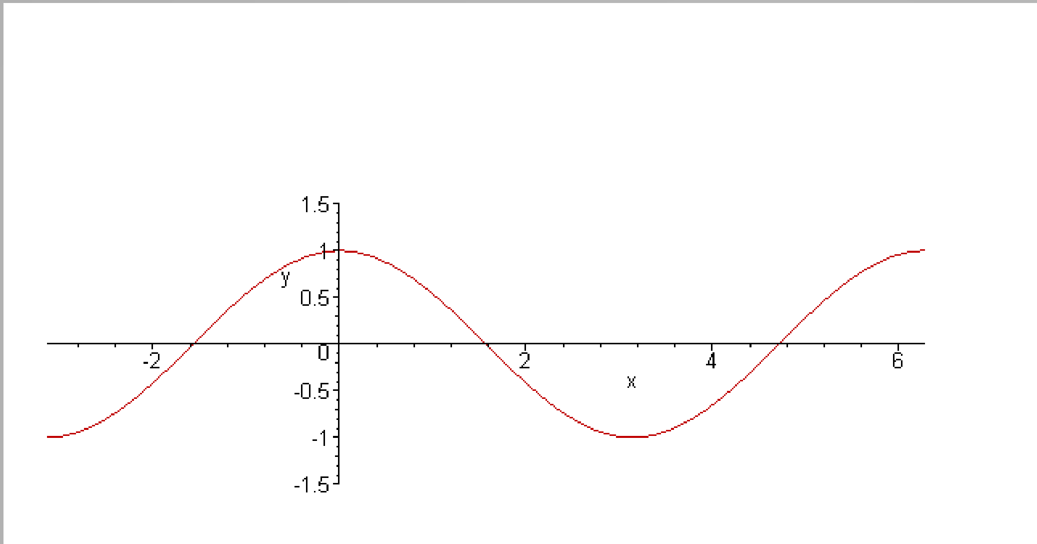

FIGURA 4.16. grafico della funzione cos

TEOREMA 4.14. *Valgono i seguenti fatti*

(1) $R(\cos) = [-1, 1]$
(2) $R(\sin) = [-1, 1]$

DIMOSTRAZIONE. E' ovvio dalla definizione che $R(\cos) \subset [-1, 1]$ e $R(\sin) \subset [-1, 1]$. Rimandiamo al seguito la dimostrazione dell'inclusione opposta. □

DEFINIZIONE 4.13. *Definiamo* $\tan : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D = \{x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$, *mediante la*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

DEFINIZIONE 4.14. *Siano* $D \subset \mathbb{R}$ *e* $T \in \mathbb{R}$ *tali che* $x \in D \Rightarrow x + T \in D$; *sia inoltre* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$; f *si dice periodica di periodo* T *se,*

$$\forall x \in D, \qquad f(x) = f(x + T)$$

Enunciamo a questo punto, senza dimostrarle, alcune fondamentali proprietà delle funzioni introdotte.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, valgono i seguenti fatti:

(1) $\cos(-x) = \cos(x)$
(2) $\sin(-x) = -\sin(x)$

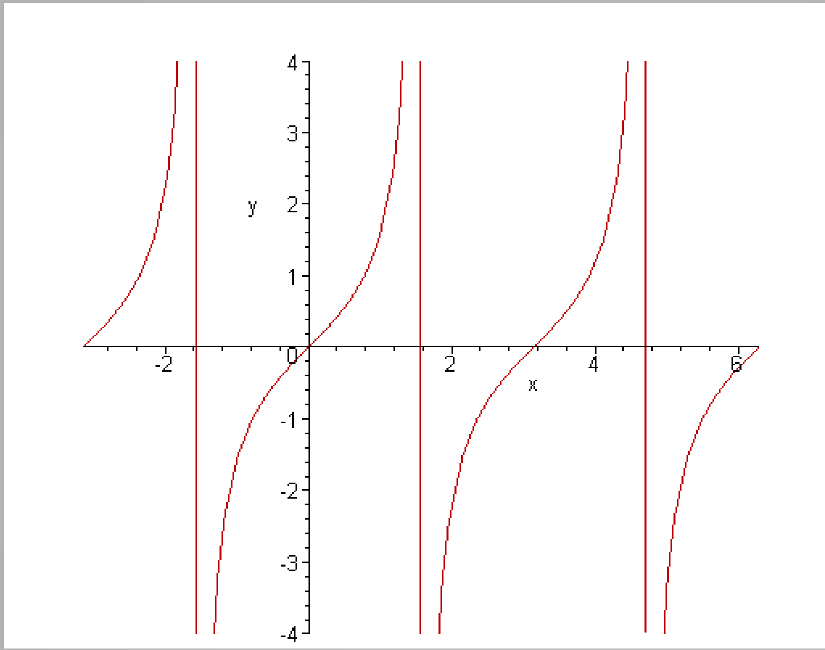

FIGURA 4.17. grafico della funzione tan

(3) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
(4) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
(5) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
(6) $\sin$ e $\cos$ sono periodiche di periodo 2π
(7) $\tan$ è periodica di periodo π

Valgono inoltre i seguenti fatti

(1) $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ è strettamente crescente e surgettiva.
(2) $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ è strettamente decrescente e surgettiva.
(3) $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente e surgettiva.

Le verifiche delle proprietà enunciate sono basate su considerazioni geometriche che qui non stiamo ad investigare.

DEFINIZIONE 4.15. *Definiamo*

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \tag{4.1}$$

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \tag{4.2}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2) \tag{4.3}$$

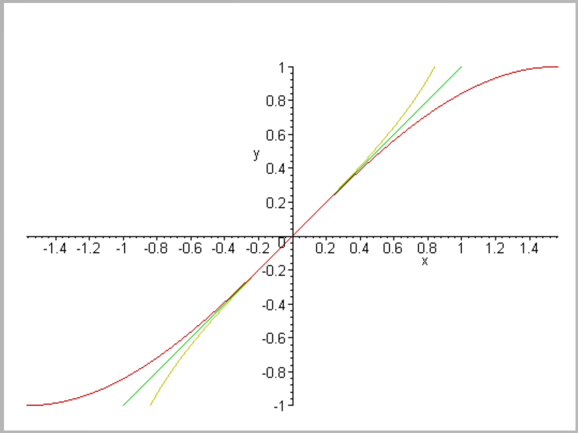

FIGURA 4.18. Grafico della funzione arcsin

mediante le

$$\arccos = \cos^{-1} \tag{4.4}$$

$$\arcsin = \sin^{-1} \tag{4.5}$$

$$\arctan = \tan^{-1} \tag{4.6}$$

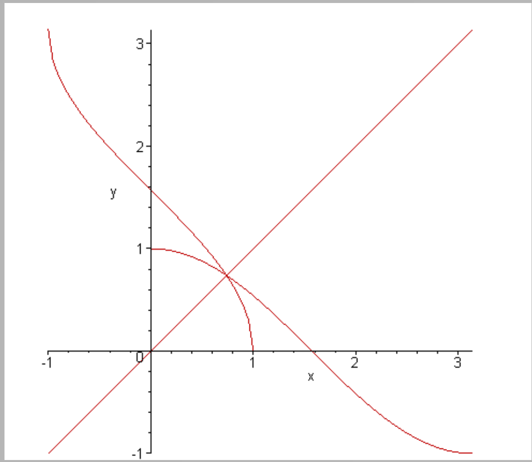

FIGURA 4.19. Grafico della funzione $\arccos$

La definizione è ben posta e valgono i seguenti fatti:

TEOREMA 4.15. *La funzione* $\arccos$ *è strettamente decrescente su* $[-1,1]$*; la funzione* $\arcsin$ *è strettamente crescente su* $[-1,1]$*; la funzione* $\arctan$ *è strettamente crescente su* $\mathbb{R}$.

Osservazione. Occorre ricordare sempre che la denominazione $\arcsin$, $\arccos$ ed $\arctan$ è riservata alle inverse delle funzioni trigonometriche negli intervalli indicati nella definizione 4.15

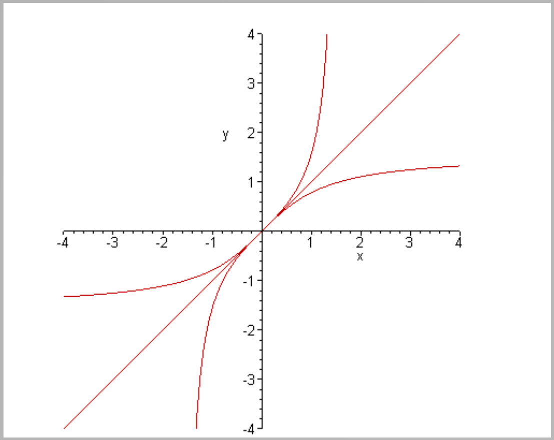

FIGURA 4.20. Grafico della funzione $\arctan$

Naturalmente, tali intervalli non sono gli unici in cui le funzioni in questione sono invertibili, tuttavia se vogliamo invertire una funzione trigonometrica in intervalli diversi da quelli sopra citati dobbiamo tener presente che le funzioni che otteniamo sono differenti da quelle definite in 4.15.

In particolare è opportuno ricordare che

$$\sin(\arcsin(x)) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{4.7}$$

$$\cos(\arccos(x)) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{4.8}$$

$$\tan(\arctan(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

$$\arcsin(\sin(x)) = |x - 2k\pi + \pi/2| - \pi/2 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ k = E\left(\frac{x + 3\pi/2}{2\pi}\right) \tag{4.10}$$

$$\arccos(\cos(x)) = |x - 2k\pi| \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = E\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right) \tag{4.11}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x - k\pi \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = E\left(\frac{x + \pi/2}{\pi}\right) \tag{4.12}$$

(4.13)

$\square$

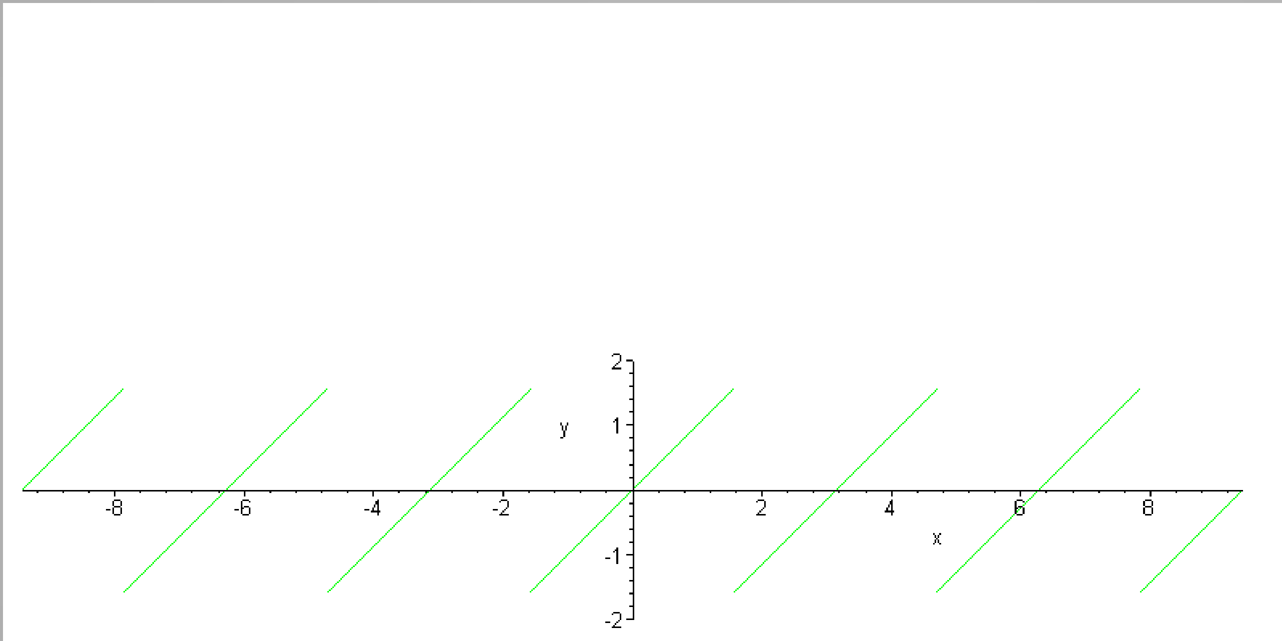

FIGURA 4.21. Grafico della funzione $\arctan(\tan)$

Le notazioni $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ non sono universalmente adottate. Nel seguito useremo anche le notazioni asn, acs, atn, rispettivamente.

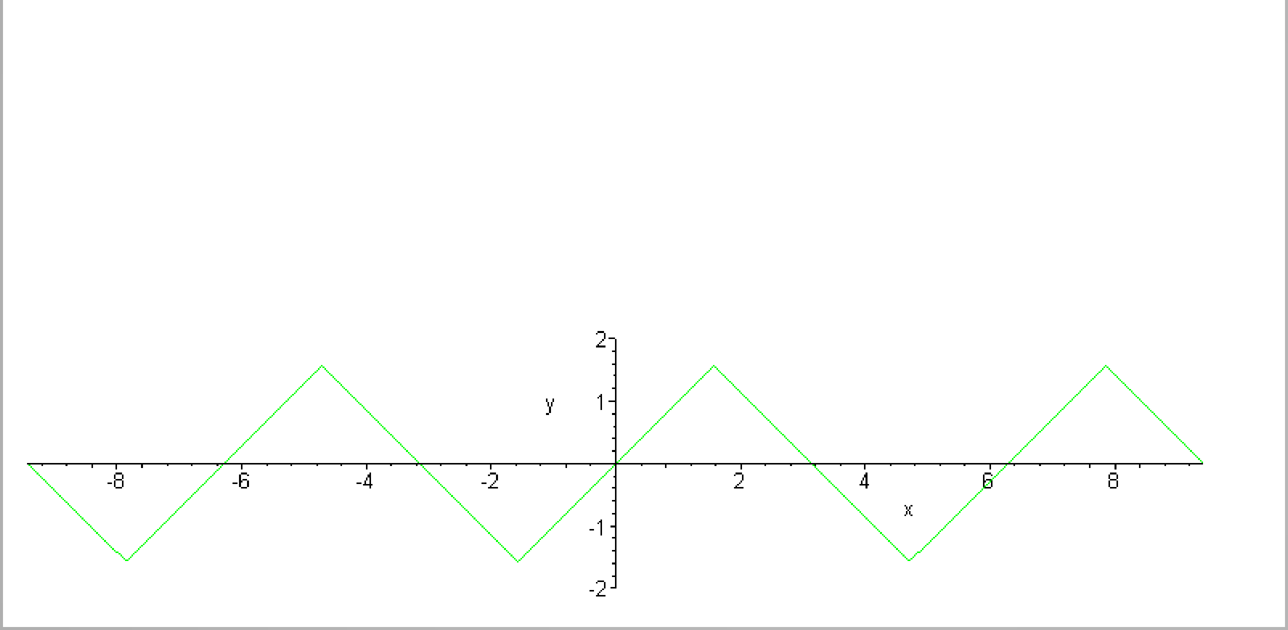

FIGURA 4.22. grafico della funzione $\arcsin(\sin)$

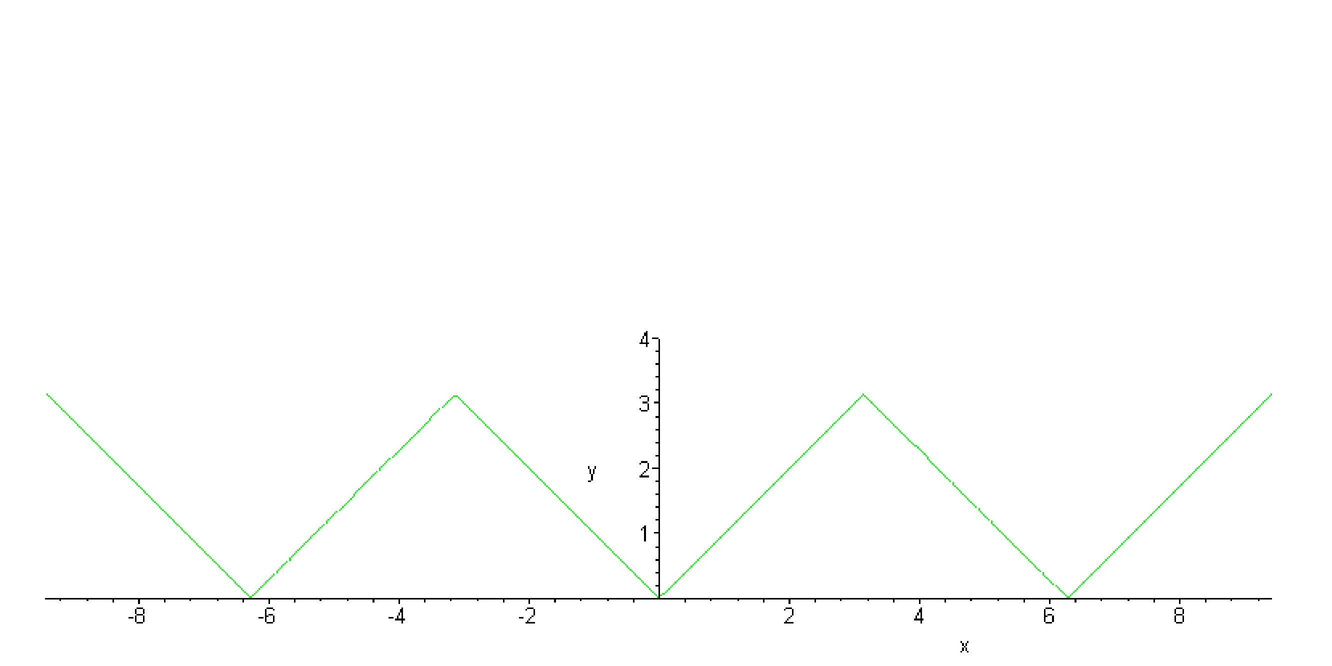

FIGURA 4.23. Grafico della funzione $\arccos(\cos)$

CAPITOLO 5

DEFINIZIONE DI LIMITE E SUE CONSEGUENZE

Il concetto di limite è centrale in tutta l'analisi e da esso dipende l'essenza stessa del calcolo infinitesimale.

Si tratta di formalizzare un concetto che consenta di estendere il concetto di uguaglianza algebrica.

A questo scopo è necessario premettere alcuni concetti.

Conveniamo di indicare con $\mathbb{R}^*$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, che chiameremo $\mathbb{R}$ esteso.

DEFINIZIONE 5.1. *Sia $x \in \mathbb{R}^*$ e $\delta > 0$, definiamo intorno di centro x e ampiezza δ l'insieme $I(x, \delta)$ definito da*

$$I(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta) \tag{5.1}$$

$$I(+\infty, \delta) = (\delta, +\infty) \tag{5.2}$$

$$I(-\infty, \delta) = (-\infty, -\delta) \tag{5.3}$$

Definiamo intorno bucato di centro x e ampiezza δ l'insieme $I^o(x, \delta)$.

$$I^o(x,\delta) = I(x,\delta) \setminus \{x\} \tag{5.4}$$

$$I^o(+\infty,\delta) = I(+\infty,\delta) \tag{5.5}$$

$$I^o(-\infty,\delta) = I(-\infty,\delta) \tag{5.6}$$

DEFINIZIONE 5.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che $x \in \mathbb{R}^*$ è un punto di accumulazione per A se*

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \quad A \cap I^o(x,\delta) \neq \varnothing \tag{5.7}$$

Indichiamo con $\mathcal{D}(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A; $\mathcal{D}(A)$ si indica usualmente con il nome di insieme derivato di A.

Osserviamo esplicitamente che $\mathcal{D}(A)$ può non essere un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in quanto $+\infty$ e $-\infty$ possono essere elementi di $\mathcal{D}(A)$.

DEFINIZIONE 5.3. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ed $\ell \in \mathbb{R}^*$; diciamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \tag{5.8}$$

se

(5.9)
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \textit{tale che}$$
$$\forall x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D \quad \text{si ha} \quad f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Osservazione. Nel caso in cui x_0 ed ℓ siano entrambi reali la 5.9 può essere riscritta nella seguente maniera

(5.10)
$$\forall x \in D \quad \text{tale che} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

se $x_0 = +\infty$ $(-\infty)$ ed $\ell \in \mathbb{R}$ la 5.9 diviene

(5.11)
$$\forall x \in D \quad \text{tale che} \quad x > \delta_\varepsilon \ (x < -\delta_\varepsilon) \quad \text{si ha} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Notiamo che, nel caso $\ell \in \mathbb{R}$, se la 5.9 è verificata per $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, essa è automaticamente verificata anche per tutti gli $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, pur di definire $\delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon_0}$.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty \quad (-\infty)$ la 5.9 diviene

(5.12)
$$\forall x \in D \quad \text{tale che} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad f(x) > \varepsilon \quad (f(x) < -\varepsilon)$$

se $x_0 = +\infty \quad (-\infty)$ e $\ell = +\infty \quad (-\infty)$ la 5.9 diviene

$$\forall x \in D \quad : \quad x > \delta_\varepsilon \ (x < -\delta_\varepsilon) \quad \text{si ha} \quad f(x) > \varepsilon \quad (f(x) < -\varepsilon) \tag{5.13}$$

Notiamo anche qui che, nel caso in cui $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$, se la 5.9 è verificata per $\varepsilon > \varepsilon_0$, essa è automaticamente verificata pure per tutti gli $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, pur di definire $\delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon_0}$.

$\square$

Osservazione. Se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che valga la definizione 5.3 si dice che f ammette limite finito per $x \to x_0$; in caso contrario si dice che f non ammette limite finito.

Se esiste $\in \mathbb{R}^*$ tale che valga la definizione 5.3 si dice che f ammette limite per $x \to x_0$; in caso contrario si dice che f non ammette limite.

$\square$

DEFINIZIONE 5.4. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathcal{D}(D)$; diciamo che f è localmente (superiormente) [inferiormente] limitata in x_0 se esiste $M \in \mathbb{R}$ ed esiste $\delta > 0$ tale che*

$$|f(x)| \leq M \quad , \quad (f(x) \leq M) \quad , \quad [f(x) \geq M] Quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap D \tag{5.14}$$

Passiamo ora a dimostrare che una funzione che ammette limite finito è localmente limitata.

TEOREMA 5.1. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ *e supponiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

allora:

(1) *se* $\ell \in \mathbb{R}$, *allora* f *è localmente limitata in* x_0;
(2) *se* $\ell > 0$ *(eventualmente* $\ell = +\infty$ *) allora esiste* $\delta > 0$ *ed esiste* $M \in \mathbb{R}$ *tale che se* $x \in I^o(x_0, \delta) \cap D$ *si ha*

$$f(x) \geq M > 0$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo solo la prima affermazione e rimandiamo per la seconda a **??** Sia $\varepsilon > 0$, se $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon)$ si ha

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

e

$$|f(x)| \leq \max\{|\ell + \varepsilon|, |\ell - \varepsilon|, |f(x_0)|\} \quad \forall x \in I(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$$

□

TEOREMA 5.2. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D)$; *allora, se* f *ammette limite per* $x \to x_0$, *tale limite è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il teorema nel caso in cui ℓ_1 ed ℓ_2 siano entrambi limiti di f per $x \to x_0$ e siano entrambi reali¿

Si ha $\forall \varepsilon > 0$, se $x \in I^o(x_0, \delta_{\varepsilon/2}) \cap D$,

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Negli altri casi possiamo procedere come indicato in **??** □

DEFINIZIONE 5.5. *Supponiamo* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D_+) \cap \mathbb{R}$, $D_+ = \{x \in D \ : \ x \geq x_0\}$. *Diciamo che*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad , \quad \ell \in \mathbb{R}^*$$

se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ *tale che se* $x \in D$ *e* $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ *si ha*

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Se $x_0 \in \mathcal{D}(D_-) \cap \mathbb{R}$, $D_- = \{x \in D \ : \ x \leq x_0\}$, *diciamo che*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \quad , \quad \ell \in \mathbb{R}^*$$

se $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0$ *tale che se* $x \in D$ *e* $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ *si ha*

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

TEOREMA 5.3. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D_+) \cap \mathcal{D}(D_-) \cap \mathbb{R}$*, allora se* $\ell \in \mathbb{R}^*$*, si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con l'osservare che se il limite esiste $\forall\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ con $x \neq x_0$ ed $x \in D$ si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

e ciò implica per la definizione 5.5, la tesi.

Se viceversa esistono i limiti da destra e da sinistra $\forall\varepsilon > 0$ esistono $\delta^1_\varepsilon, \delta^2_\varepsilon > 0$ tali che se $x_0 < x < x_0 + \delta^1_\varepsilon$, $x \in D$ si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

e se $x_0 - \delta^2_\varepsilon < x < x_0$, $x \in D$ si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Pertanto se si sceglie

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^1, \delta_\varepsilon^2\}$$

la definizione di limite è verificata. □

A questo punto è conveniente definire in $\mathbb{R}^*$ le operazioni di addizione e di moltiplicazione che fino a questo momento sono definite solamente in $\mathbb{R}$.

Osserviamo esplicitamente che non sono applicabili a queste operazioni le usuali regole che permettono di svolgere calcoli con i numeri reali. Riterremo pertanto lecite tutte e sole le uguaglianze che coinvolgono gli elementi $+\infty$ e $-\infty$ che elenchiamo qui di seguito.

Definiamo:

$$
\begin{aligned}
& x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty && \forall x \in \mathbb{R} \\
& x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \pm\infty && \forall x \in \mathbb{R}_+ \\
& x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \mp\infty && \forall x \in \mathbb{R}_- \\
& \frac{x}{\pm\infty} = 0 && \forall x \in \mathbb{R} \\
& |\frac{x}{0}| = +\infty && \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
& +\infty + \infty = +\infty, && -\infty - \infty = -\infty \\
& (\pm\infty)(+\infty) = \pm\infty && |\pm\infty| = +\infty
\end{aligned}
$$

Ricordiamo inoltre che *non* sono definite le seguenti operazioni;

$$
+\infty - \infty \quad , \quad 0(\pm\infty) \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad , \quad \frac{0}{0}
$$

in quanto ciò potrebbe dar luogo facilmente ad inconvenienti e ad errate interpretazioni.

TEOREMA 5.4. *Siano* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D)$*; supponiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \quad e \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \quad , \quad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$$

Allora

(1) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$
(2) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$ *tranne che nel caso in cui* $\ell_1 = \pm\infty$ *e* $\ell_2 = \mp\infty$
(3) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$ *tranne che nel caso in cui* $\ell_1 = 0 \quad e \quad \ell_2 = \pm\infty$
(4) $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1}$ *tranne che nel caso in cui* $\ell_1 = 0$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo nel caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ la seconda e la terza delle asserzioni fatte.

Per ipotesi abbiamo che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta^1_\varepsilon, \delta^2_\varepsilon > 0$ tali che
$\forall x \in I^o(x_0, \delta^1_{\frac{\varepsilon}{2}}) \cap D$ si ha

$$|f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $\forall x \in I^o(x_0, \delta^2_{\frac{\varepsilon}{2}}) \cap D$ si ha

$$|g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora

Sia $\delta_\varepsilon = \min\{\delta^1_{\varepsilon/2}, \delta^2_{\varepsilon/2}\}$, se $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$ si ha

$$|f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Con ciò la seconda affermazione è provata.

Sia δ^3 tale che se $x \in I^o(x_0, \delta^3) \cap D$ si ha

$$|g(x)| \leq M$$

sia $\ell_1 \neq 0$ (il caso $\ell_1 = 0$ risulta banale) e sia

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta^1_{\varepsilon/(2M)}, \delta^2_{\varepsilon/(2|\ell_1|)}, \delta^3\}$$

allora se $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - g(x)\ell_1 + g(x)\ell_1 - \ell_1\ell_2| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2| < \\ &< M\varepsilon/(2M) + \varepsilon|\ell_1|/(2|\ell_1|) = \varepsilon \end{aligned} \tag{5.15}$$

Quindi anche la terza è provata.

□

Possiamo a questo punto stabilire un utile corollario.

Corollario 5.1. *Siano* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ *e supponiamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad , \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$ *ed* $\ell_1 < \ell_2$; *allora*

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in I^o(x_0, \delta) \quad , \quad f(x) < g(x)$$

Per completare il quadro di risultati proviamo il seguente

Teorema 5.5. *Sia* $f : D \to \mathbb{R}$, $D_1 = \{x \in D \quad : \quad f(x) \neq 0\}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D_1)$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty \tag{5.16}$$

se esiste $\delta > 0$ *tale che per* $x \in I^o(x_0, \delta) \cap D$ *si ha* $f(x) > 0$ *(*$f(x) < 0$*),*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad (-\infty) \tag{5.17}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$ si ha $|f(x)| < \varepsilon$.

$$x \in I^o(x_0, \delta_{1/\varepsilon}) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < 1/\varepsilon$$

e

$$\frac{1}{|f(x)|} > \varepsilon$$

(2) Supponiamo per semplicità che f sia localmente positiva in x_0; sia

$$\delta'_\varepsilon = \min\{\delta, \delta_{1/\varepsilon}\},$$

allora, se $x \in I^o(x_0, \delta'_\varepsilon) \cap D$

$$0 < f(x) < 1/\varepsilon \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{f(x)} > \varepsilon$$

Il caso in cui f sia localmente negativa si riconduce banalmente al caso sopra descritto.

□

Osservazione. Notiamo esplicitamente che è essenziale nella (2) l'ipotesi che f abbia segno localmente costante in x_0.

Sia infatti $f(x) = x\sin(1/x)$ per $x \neq 0$; allora si può facilmente verificare che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0} 1/|f(x)| = +\infty;$$

tuttavia è altrettanto immediato verificare che $1/f(x)$ non tende né a $-\infty$ né a $+\infty$, in quanto, se ciò accadesse, per valori di x vicini allo 0 si dovrebbe avere $f(x) < 0$ oppure $f(x) > 0$. □

Sarà pure di fondamentale importanza il seguente teorema:

TEOREMA 5.6. *Siano* $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D)$; *supponiamo che esista* $\delta > 0$ *tale che, se* $x \in I^o(x_0, \delta) \cap D$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

siano inoltre $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *e* $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell_2$. *Allora*

$$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \ell_1 \leq \ell_2 \tag{5.18}$$

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \tag{5.19}$$

$$\ell_1 = +\infty \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = +\infty \quad \textit{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \tag{5.20}$$

$$\ell_2 = -\infty \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = -\infty \quad \textit{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \tag{5.21}$$

DIMOSTRAZIONE.La prima affermazione è una diretta conseguenza del corollario 5.1.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, dalle ipotesi si ha che $\forall\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \qquad e \qquad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$$

da cui, per gli stessi valori di x si ha

$$\ell - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < \ell + \varepsilon$$

Lasciamo al lettore la dimostrazione delle restanti affermazioni. $\square$

TEOREMA 5.7. *Siano* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : A \longrightarrow D$*; siano* $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ *e* $t_0 \in \mathcal{D}(A)$*; supponiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad e \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = x_0$$

Supponiamo inoltre che sia verificata una delle seguenti condizioni:

(1) *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $g(t) \neq x_0$ *per ogni* $t \in I^0(t_0, \delta)$*;*

(2)

$$f(x_0) = \ell$$

Allora

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = \ell$$

Osserviamo che se tutte e due le condizioni vengono a mancare, il teorema precedente può non essere vero.

Sia ad esempio $D = A = \mathbb{R}$, $g(t) = 0$ ed $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$; allora

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

mentre

$$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = 1$$

Osserviamo inoltre che ognuna delle seguenti condizioni

(1) $x_0 \notin D$,
(2) $x_0 = \pm\infty$
(3) g è iniettiva
(4) g è strettamente monotona

è sufficiente per la (1) del teorema 5.7

TEOREMA 5.8. *Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, f crescente [decrescente]; allora*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

esistono e sono uguali rispettivamente a

$$\inf\{f(x) : x \in (a, b)\} \qquad [\sup\{f(x) : x \in (a, b)\}]$$

e

$$\sup\{f(x) : x \in (a, b)\} \qquad [\inf\{f(x) : x \in (a, b)\}]$$

Osserviamo esplicitamente che nel teorema precedente è essenziale supporre che l'intervallo in cui si considera la funzione sia aperto.

Sia infatti $f(x) = x$ se $x \in [0,1)$, $f(1) = 2$; allora

$$\sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 2 \neq 1 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

COROLLARIO 5.2. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione monotona, allora per ogni* $x_0 \in \mathcal{D}(D_+) \cap \mathcal{D}(D_-)$ *si ha che*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

esistono.

Per stabilire l'esistenza del limite di una funzione è possibile avvalersi del criterio di convergenza di Cauchy.

TEOREMA 5.9. - *Criterio di Cauchy - Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D)$*; sono condizioni equivalenti:*

(1) *esiste* $\ell \in \mathbb{R}$ *tale che* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(2) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta_\varepsilon > 0$ *tale che se* $x, y \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$ *si ha*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Elenco delle figure

Indice

Indice analitico