ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 6

LE SUCCESSIONI

Le successioni costituiscono una classe molto particolare di funzioni: si tratta di funzioni definite su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ molto particolare, l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali; questa caratteristica conferisce loro la semplicità che è tipica degli insiemi discreti, mentre impedisce una significativa rappresentazione grafica e rende il concetto di successione apparentemente ostico.

Il concetto di successione, inoltre, interpreta un ruolo di notevole importanza nelle applicazioni pratiche e nelle descrizioni algoritmiche.

DEFINIZIONE 6.1. *Chiamiamo successione di numeri reali una funzione definita sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, che assume valori in $\mathbb{R}$*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Seguendo le consuetudini introdotte per la descrizione di una funzione sarebbe naturale usare il simbolo $a(n)$ per identificare il valore di a calcolato in n tuttavia è normale usare, in luogo di esso il simbolo $a_n = a(n)$.

E' immediato esplicitare per le successioni i concetti di crescenza, decrescenza, monotonia, limitatezza, che sono stati introdotti, in generale, per le funzioni.

Nell'estendere il concetto di limite però occorre tenere presente che $\mathcal{D}(\mathbb{N})$ è costituito dal solo elemento $+\infty$, per cui, per una successione, ha senso soltanto considerare il concetto di limite per $n \to +\infty$.

Più precisamente si dice che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \tag{6.1}$$

se $\forall\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > n_\varepsilon$, si abbia

$$a_n \in I(\ell, \varepsilon)$$

Osserviamo che, dal momento che nessuna ambiguità è possibile, scriveremo spesso

$$\lim_n a_n \qquad \text{oppure} \qquad \lim a_n$$

in luogo di $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

E' molto importante, quando si trattano le successioni, il concetto di successione estratta da un'altra successione.

Tale concetto è strettamente legato, o meglio è una specializzazione del concetto di composizione di funzioni ed è molto utile per caratterizzare i limiti di una successione.

In altre parole si dice successione estratta dalla successione a_n una nuova successione $a_{n(k)}$.

Naturalmente non ogni funzione $n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ può essere usata, per due ragioni:

(1) n deve dar luogo, composta con a, ad una nuova successione, per cui deve aversi che il dominio di f è $\mathbb{N}$;
(2) $R(n)$ deve essere contenuto nel dominio di a e perciò deve aversi $R(n) \subset \mathbb{N}$.
    Dovrà pertanto essere $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.
(3) Inoltre, poichè vogliamo collegare il comportamento al limite della successione a_n con quello delle sue estratte, è necessario che $+\infty$ sia un punto di accumulazione per $R(n)$.

In altre parole n è una particolare successione (particolare in quanto assume valori solo in $\mathbb{N}$) e pertanto è d'uso far riferimento alla notazione

$$n_k = n(k)$$

DEFINIZIONE 6.2. *Sia a_n una successione e sia $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente; diciamo che la successione $b_k = a_{n(k)}$ è una successione estratta da a_n.*

Sempre a proposito di terminologia, ricordiamo anche che si dice che una successione è convergente se ammette limite reale, mentre si dice che una successione è positivamente (negativamente) divergente se ammette come limite $+\infty(-\infty)$.

LEMMA 6.1. *Sia $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, n strettamente crescente; allora*

$$\lim_k n_k = +\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che n è strettamente crescente si ha

$$n_{k+1} > n_k \qquad \text{e} \qquad n_{k+1} \geq n_k + 1$$

perciò, per induzione, si prova facilmente che $n_k \geq k$ e la tesi. $\square$

TEOREMA 6.1. *Sia a_n una successione e sia*

$$\lim_n a_n = \ell$$

allora se b_k è una successione estratta da a_n si ha

$$\lim_k b_k = \ell$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $b_k = a_{n_k}$, se $n > n_\varepsilon$ si ha $a_n \in I(\ell, \varepsilon)$, inoltre, dal momento che $n_k \to +\infty$, se $k > k_\varepsilon$ si ha $n_k > n_\varepsilon$; ne deduciamo che, se $k > k_\varepsilon$,

$$b_k = a_{n_k} \in I(\ell, \varepsilon)$$

□

Si può inoltre dimostrare che

TEOREMA 6.2. *Ogni successione convergente è limitata.*

DIMOSTRAZIONE. Sia a_n una successione e sia

$$\lim_n a_n = \ell$$

allora, se $n > n_\varepsilon$ si ha

$$|a_n| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < \varepsilon + |\ell|$$

Perciò se

$$M = max\{|a_1|, .., |a_{n_\varepsilon}|, |\ell| + \varepsilon\}$$

si può affermare che

$$|a_n| \leq M$$

□

TEOREMA 6.3. *Sia a_n una successione crescente e sia*

$$\lambda = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

allora

$$\lim_n a_n = \lambda$$

DIMOSTRAZIONE. Distinguiamo due casi.

(1) $\lambda = +\infty$

in tal caso $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme non limitato e $\forall \varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n_\varepsilon} > \varepsilon$$

ma allora, dal momento che a_n è crescente, si ha, per $n > n_\varepsilon$

$$a_n > a_{n_\varepsilon} > \varepsilon$$

(2) $\lambda \in \mathbb{R}$

in questo caso, per le proprietà dell'estremo superiore, si ha

$$a_n \leq \lambda \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ a_{n_\varepsilon} > \lambda - \varepsilon$$

pertanto, se $n > n_\varepsilon$, si ha, essendo a_n crescente

$$\lambda - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq \lambda$$

□

In maniera analoga si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 6.4. *Sia a_n una successione decrescente e sia*

$$\lambda = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

allora

$$\lim_n a_n = \lambda$$

Il risultato che segue è uno dei più importanti tra quelli che riguardano le successioni di numeri reali.

TEOREMA 6.5. - *Bolzano-Weierstraß - Sia a_n una successione limitata, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ ed esiste una successione b_k estratta da a_n tale che*

$$\lim_k \; b_k \; = \lambda$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che

$$m \le a_n \le M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideriamo i due intervalli

$$\left[m, \frac{m+M}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad \left[\frac{m+M}{2}, M\right]$$

almeno uno di essi contiene un numero infinito di termini della successione a_n sia esso $[\alpha_1, \beta_1]$ ovviamente si avrà

$$m \le \alpha_1 < \beta_1 \le M \quad \text{e} \quad \beta_1 - \alpha_1 = \frac{M-m}{2}$$

Consideriamo ora gli intervalli

$$\left[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad \left[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1\right]$$

almeno uno di essi contiene un numero infinito di termini di a_n sia esso $[\alpha_2, \beta_2]$ ovviamente si avrà

$$m \le \alpha_1 \le \alpha_2 < \beta_2 \le \beta_1 \le M \qquad \text{e} \qquad \beta_2 - \alpha_2 = \frac{M-m}{4}$$

Il procedimento descritto si può iterare e si ottengono così due successioni α_k e β_k soddisfacenti le seguenti proprietà:

$$m \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le .. \le \alpha_k < \beta_k \le .. \le \beta_2 \le \beta_1 \le M \tag{6.2}$$

$$\beta_k - \alpha_k = \frac{M-m}{2^k} \tag{6.3}$$

$$\{n \; : \; a_n \in [\alpha_k, \beta_k]\} \quad \text{ha infiniti elementi} \tag{6.4}$$

Possiamo pertanto concludere che le successioni α_k e β_k sono, rispettivamente, crescente e decrescente ed inoltre che sono entrambe limitate. Si ottiene pertanto che

$$\lim_k \alpha_k = \alpha \qquad \text{e} \qquad \lim_k \beta_k = \beta$$

ove

$$\alpha = \sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \beta = \inf\{\beta_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$$

Per la 6.3 si ha che

$$\beta - \alpha = \lim_k (\beta_k - \alpha_k) = \lim_k \frac{M-m}{2^k} = 0$$

(si ricordi che è facile provare per induzione che $2^k \geq k$), e perciò si ha

$$\alpha = \beta = \lambda$$

in altre parole chiamiamo λ il valore comune di α e β.

Sia ora

$$\begin{array}{lll} n_1 \in \mathbb{N} & \text{tale che} & \alpha_1 \leq a_{n_1} \leq \beta_1 \\ n_2 \in \mathbb{N} & \text{tale che} & \alpha_2 \leq a_{n_2} \leq \beta_2 \quad , \quad n_2 > n_1 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots & \\ n_k \in \mathbb{N} & \text{tale che} & \alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k \quad , \quad n_k > n_{k-1} \end{array}$$

Allora $b_k = a_{n_k}$ è una successione estratta dalla successione a_n, la cui esistenza è assicurata dalla ?? ed inoltre si ha

$$\alpha_k \leq b_k \leq \beta_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

e pertanto $\lim_k b_k = \lambda$. □

TEOREMA 6.6. *Sia a_n una successione:*

(1) *se a_n non è limitata superiormente, esiste b_k estratta da a_n tale che*

$$\lim_k b_k = +\infty$$

(2) *se a_n non è limitata inferiormente, esiste b_k estratta da a_n tale che*

$$\lim_k b_k = -\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio la prima affermazione. Sia

$$\begin{array}{lll} n_1 \in \mathbb{N} & \text{tale che} & a_{n_1} > 1 \\ n_2 \in \mathbb{N} & \text{tale che} & a_{n_2} > 2 \quad , \quad n_2 > n_1 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ n_k \in \mathbb{N} & \text{tale che} & a_{n_k} > k \quad , \quad n_k > n_{k-1} \end{array}$$

Allora $b_k = a_{n_k}$ (l'esistenza di tale estratta è assicurata dall'ipotesi che a_n non è limitata superiormente) tende a $+\infty$ □

Sappiamo bene cosa significa che una successione converge ad un limite $\ell \in \mathbb{R}^*$ cerchiamo ora di stabilire il significato del fatto che a_n non converge ad un limite $\ell \in \mathbb{R}^*$

LEMMA 6.2. *Sia a_n una successione e sia $\ell \in \mathbb{R}^*$; a_n non converge ad ℓ se e solo se esiste $\varepsilon_0 > 0$ ed esiste una successione b_k estratta da a_n tale che $b_k \notin I(\ell, \varepsilon_0)$.*

TEOREMA 6.7. *Sia a_n una successione soddisfacente la seguente proprietà:*

- *esiste $\ell \in \mathbb{R}^*$ tale che per ogni successione b_k estratta da a_n è possibile trovare una successione c_h estratta da b_k con*

$$\lim_h \ c_h = \ell$$

Allora si ha

$$\lim_n \ a_n = \ell$$

TEOREMA 6.8. *- Criterio di convergenza di Cauchy - Sia a_n una successione; sono fatti equivalenti:*

(1) *esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_n \ a_n = \ell$$

(2) *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n, m > n_\varepsilon$ si ha*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE.

- $(1) \Rightarrow (2)$ sia $\varepsilon > 0$, allora esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_\varepsilon$ si ha

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

Allora se $n, m > n_{\varepsilon/2}$ si ha

$$|a_n - a_m| \le |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

- $(2) \Rightarrow (1)$ se $n > n_\varepsilon$ si ha

$$a_{n_\varepsilon} - \varepsilon < a_n < a_{n_\varepsilon} + \varepsilon$$

per cui la successione a_n è limitata.

Sia a_{n_k} una successione estratta da a_n tale che

$$\lim_k \ a_{n_k} = \ell$$

Se $k > k_\varepsilon$ si ha

$$|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$$

ed inoltre se $k > k_\varepsilon^1$ si ha

$$n_k > n_\varepsilon$$

Ma allora fissato $k > \max\{k_{\varepsilon/2}, k^1_{\varepsilon/2}\}$, se $n > n_{\varepsilon/2}$ si ha

$$|a_n - \ell| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

□

E' di grande utilità per il seguito provare i due seguenti risultati.

LEMMA 6.3. *Sia* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$*, e siano*

$$\lambda = \sup A \qquad , \qquad \mu = \inf A$$

allora esistono due successioni $a_n, b_n \in A$ *tali che*

$$\lim_n \, a_n = \lambda \qquad , \qquad \lim_n \, b_n = \mu$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio che esiste una successione $b_n \in A$ tale che

$$\lim_n \, b_n = \mu$$

Occorre distinguere due casi:

(1) $\mu = -\infty$; in tal caso l'insieme A non è inferiormente limitato e pertanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $b_n \in A$ tale che $b_n < -n$.
Ciò è sufficiente per concludere che

$$\lim_n \, b_n = -\infty$$

(2) $\mu \in \mathbb{R}$; in tal caso si ha che:

$$\mu \leq b \quad \forall b \in A$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists b_n \in A \ : \ \mu + 1/n > b_n$$

Pertanto si ha:

$$\mu + 1/n > b_n \geq \mu$$

e la tesi.

□

DEFINIZIONE 6.3. *Sia* a_n *una successione e sia*

$$\Phi(a_n) = \{\ell \in \mathbb{R}^* \ : \ \exists a_{n_k} \ , \ \lim_k \, a_{n_k} = \ell \ \}$$

Definiamo

$$\limsup_n \, a_n = \sup \, \Phi(a_n)$$

$$\liminf_n \, a_n \ = \inf \, \Phi(a_n)$$

Riguardo al massimo ed al minimo limite di una successione si possono provare molti risultati, non semplici, che non riportiamo.

LEMMA 6.4. *Sia* a_n *una successione:*

(1) *se* $a_n > 0$ *e* $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$ *allora* $\lim_n a_n = 0$
(2) *se* $a_n \geq 0$ *e* $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$ *allora* $\lim_n \ a_n = 0$*;*
(3) *se* $a_n > 0$ *e* $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$ *allora* $\lim_n \ a_n \ = +\infty$*;*
(4) *se* $a_n \leq 0$ *e* $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$ *allora* $\lim_n \ a_n = +\infty$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio la prima e l'ultima affermazione.

(1) Si ha, fissato $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell + \varepsilon < 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

pertanto

$$a_{n+1} < a_n(\ell + \varepsilon)$$

e se $n > m > n_\varepsilon$

$$0 < a_n < (\ell + \varepsilon)^{n-m} a_m$$

e si può concludere che (1) è vera.

(4) Fissato ε in modo che $\ell - \varepsilon > 1$ si ha

$$(a_n)^{1/n} > (\ell - \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

e

$$a_n > (\ell - \varepsilon)^n \quad \forall n > n_\varepsilon \, .$$

Ciò è sufficiente per concludere. □

DEFINIZIONE 6.4. *Definiamo per* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$0! = 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$n!$ *verrà detto* n *fattoriale.*

Osserviamo che, se $n \geq 1$,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Definiamo inoltre per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nella seguente maniera:

$$(0)!! = 1$$

$$(1)!! = 1$$

$$n!! = n(n-2)!!$$

$n!!$ verrà indicato con il nome di n *semifattoriale*.

Osserviamo che

$$(2n)!! = \prod_{i=1}^{n} 2i \quad , \quad (2n+1)!! = \prod_{i=0}^{n} (2i+1)$$

Definiamo infine

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

coefficiente binomiale di ordine n e posto k e verrà detta n su k.

I coefficienti binomiali godono di notevoli proprietà: ad esempio possono essere calcolati usando il ben noto triangolo di Tartaglia e consentono di stabilire la formula della potenza di un binomio di Newton.

Si può provare con qualche calcolo che

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \tag{6.5}$$

La precedente uguaglianza consente di costruire il così detto triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{llllll}
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\dots & \dots\dots & & & \dots\dots & \\
\binom{n}{0} & \dots\binom{n}{k-1} & & & \binom{n}{k}\dots & \binom{n}{n} \\
\dots & \dots\dots & & \binom{n+1}{k}\dots & & \dots \\
\dots & \dots\dots & & & \dots\dots & \dots
\end{array}$$

È importante osservare che ogni elemento del triangolo si può ottenere dalla somma dei due elementi della riga precedente, che occupano la posizione sopra e a sinistra della posizione occupata dall'elemento considerato.

Vale inoltre il seguente risultato che è noto con il nome di

binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ricordiamo anche la seguente disuguaglianza

LEMMA 6.5. *Se* $a > -1$ *allora*

$$(1+a)^n \geq 1 + na \tag{6.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Si prova per induzione;

(1) La disuguaglianza è banalmente vera per $n = 1$

(2) Inoltre se supponiamo $(1+a)^n \geq 1+na$ avremo che

(6.7)
$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) > (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

□

Possiamo ora studiare le proprietà di una successione di notevole importanza.

Sia E_n la successione definita da

$$E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

si ha che E_n è una successione strettamente crescente ed inoltre

$$2 \leq E_n < 3$$

.

Infatti si ha

$$E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

per cui

$$E_n \geq 1 + n(1/n) = 2$$

Per dimostrare che E_n è crescente osserviamo che si ha

$$E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = E_{n-1}$$

se e solo se

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

se e solo se

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

se e solo se

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

e l'ultima disuguaglianza si deduce immediatamente dal lemma 6.5.

Infine, dal momento che si può facilmente provare per induzione che

$$(k+1)! \geq 2^k \quad per\ k \geq 0$$

si ha

(6.8)
$$E_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} < 3$$

Pertanto E_n è una successione crescente e limitata per cui possiamo affermare che

$$\lim_n E_n$$

esiste ed è reale e pertanto è lecito definire chiamare e il suo limite.

$$e = \lim_n E_n$$

Se x_n è una successione a termini positivi, $x_n \longrightarrow x$ si può provare (si veda il capitolo successivo sulla continuità) che

$$\lim \log_a x_n = \log_a x$$

e pertanto si ha

$$\lim n \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_a e$$

Osserviamo anche che

$$\log_a e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = e$$

per cui si è naturalmente indotti a privilegiare il numero e come base per i logaritmi.

Si ha con 51 cifre decimali esatte

$$\boxed{e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959\ .}$$

DEFINIZIONE 6.5. *Definiamo logaritmo naturale la funzione* $\log_e$.
Più semplicemente scriveremo $\log_e x = \ln x$.

Elenchiamo ora alcune successioni che saranno utili nel seguito e calcoliamone i relativi limiti:

(1) $\lim n^k = +\infty \quad , \quad k > 0$
(2) $\lim n^k = 0 \quad , \quad k < 0$
(3) $\lim a^n = +\infty \quad , \quad a > 1$
(4) $\lim a^n = 0 \quad , \quad |a| < 1$
(5) $\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad , \quad a > 0$
(6) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
(7) $\lim \frac{a^n}{n^n} = 0$

Possiamo verificare le affermazioni precedenti mediante le seguenti argomentazioni:

(1) si prova mediante la definizione di limite.
(2) si deduce dalla precedente tenendo conto che $n^k = 1/n^{-k}$.

(3) sia $a = 1 + b$ con $b > 0$, allora $a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb$.
(4) si deduce dalla precedente tenendo conto che $|a^n| = 1/(1/|a|)^n$.
(5) se $a > 1$, posto

$$y_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$$

si ha

$$a = (1 + y_n)^n \geq 1 + ny_n$$

da cui

$$0 \leq y_n \leq (a-1)/n$$

se $0 < a < 1$ si ha $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{1/a}$.
(6) posto

$$y_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$$

si ha

$$n = (1 + y_n)^n \geq 1 + n(n-1)y_n^2/2 \;\; e \;\; 0 \leq y_n \leq (2/n)$$

(7) Se $n > 2|a|$ si ha

$$0 < |a|/n < 1/2$$

per cui

$$0 < |a|^n/n^n < (1/2)^n$$

Valgono i seguenti fatti:

(1) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$
(2) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$
(3) $\lim \frac{a^n}{n^k} = 0, \;\; |a| < 1$
(4) $\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty, \;\; a > 1$
(5) $\lim \frac{\log_a n}{n^k} = 0, \;\; k > 0\ ,\ a > 0\ ,\ a \neq 1$

Infatti se indichiamo con b_n ciascuna delle successioni in oggetto si ha
(1) $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|a|}{n+1} \longrightarrow 0$
(2) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$
(3) $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = |a| \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \longrightarrow |a|$
(4) si può facilmente dedurre dal fatto che

$$\frac{\log_a n}{n^k} = \frac{1}{k} \log_a(\sqrt[n^k]{n^k})$$

Anche se a prima vista ciò non appare verosimile, operare con successioni piuttosto che con funzioni è molto più comodo e facile; è pertanto molto utile provare il seguente risultato che permette di ottenere informazioni sul limite di una funzione utilizzando opportune successioni.

TEOREMA 6.9. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in \mathcal{D}(D)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$; sono fatti equivalenti:*

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$
(2) *per ogni* $x_n \in D \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$*, si ha*

$$\lim f(x_n) = \ell$$

DIMOSTRAZIONE. Se vale la prima condizione avremo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $x \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$ si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Inoltre esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_\varepsilon$ si abbia $x_n \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$ e di conseguenza si ha

$$f(x_n) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Da cui la seconda asserzione.

Se viceversa la prima asserzione è falsa, allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, con $x_n \in I^0(x_0, 1/n)$ e

$$f(x_n) \notin I(\ell, \varepsilon_0)$$

e quindi la seconda è falsa

□

Si può provare che ogni successione convergente ammette una successione estratta monotona (e convergente allo stesso limite); pertanto nel verificare (2) è sufficiente limitarsi alle sole successioni monotone.

Il criterio di convergenza di Cauchy riveste notevole importanza ed è utile sapere che esso può essere provato anche per le funzioni nella seguente forma.

TEOREMA 6.10. - *Criterio di Cauchy - Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathcal{D}(D)$*; sono condizioni equivalenti:*

(1) *esiste* $\ell \in \mathbb{R}$ *tale che* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$
(2) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta_\varepsilon > 0$ *tale che se* $x, y \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$ *si ha*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE. $(1) \Rightarrow (2)$ Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in I^0(x_0, \delta_{\varepsilon/2})$ si ha

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon/2$$

per cui se $x, y \in I^0(x_0, \delta_{\varepsilon/2})$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$(2) \Rightarrow (1)$ Se per assurdo (1) non fosse vera esisterebbero due successioni $x_n, y_n \in D$, convergenti ad x_0 tali che $f(x_n) \longrightarrow \ell_1$ e $f(y_n) \longrightarrow \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$, $\ell_1 \neq \ell_2$.

Pertanto la condizione (2) non potrebbe essere soddisfatta. □

Mediante le successioni siamo anche in grado di provare i seguenti risultati che caratterizzano gli insiemi aperti, chiusi e compatti in $\mathbb{R}$ e che sono facilmente estendibili a più generali situazioni.

TEOREMA 6.11. *Sia* $A \subset \mathbb{R}$*, allora*

(1) *A è aperto se e solo se per ogni $x \in A$ e per ogni successione x_n, tale che $x_n \to x$, si ha $x_n \in A$ definitivamente;*
(2) *A è chiuso se e solo se per ogni $x_n \in A,\ x_n \to x$ si ha $x \in A$*
(3) *A è un insieme compatto se e solo se per ogni $x_n \in A$ esiste $x_{n_k} \to x$, tale che $x \in A$*

1. Infinitesimi ed Infiniti

Se $f(x) \to \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$ allora $f(x) - \ell \to 0$ per cui per studiare il comportamento di una funzione che ammette limite finito sarà sufficiente considerare funzioni che tendono a 0; tali funzioni si definiscono infinitesime ed è importante cercare di ottenere qualche informazione in più su come una funzione infinitesima tende a 0.

Ad esempio è evidente che x^n diminuisce più o meno velocemente, in dipendenza da n, quando ci si avvicina a 0. È quindi ovvio che sia utile cercare di individuare anche in funzioni più complesse tali comportamenti.

Quanto detto per le funzioni infinitesime si può poi facilmente estendere anche alle funzioni che tendono all'infinito: che chiameremo infinite.

Pertanto introduciamo la definizione di ordine di infinitesimo e di ordine di infinito.

DEFINIZIONE 6.6. *Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è infinitesima in a^+ se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$$

In maniera analoga si possono dare le definizioni per $x \to a^-$, $x \to a$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

DEFINIZIONE 6.7. *Siano f,g due funzioni infinitesime in a^+ e supponiamo che*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

- *se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ diciamo che f e g hanno lo stesso ;*
- *se $\ell = 0$ diciamo che f è infinitesima di ordine superiore a g.*

DEFINIZIONE 6.8. *Chiamiamo infinitesimo campione di ordine $\alpha \in \mathbf{R}_+$ in a^+,a^-,a,$+\infty$, $-\infty$ rispettivamente la funzione*

$$(x-a)^\alpha\ ,\ (a-x)^\alpha\ ,\ |x-a|^\alpha\ ,\ \frac{1}{x^\alpha}\ ,\ \frac{1}{(-x)^\alpha}$$

Si dice che f è infinitesima di ordine $\alpha \in \mathbb{R}_+$ se f ha lo stesso ordine dell'infinitesimo campione di ordine α.

Osserviamo esplicitamente che può accadere che f non abbia ordine di infinitesimo reale.

Ad esempio la funzione

$$\frac{1}{\ln x}$$

è infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine inferiore ad ogni $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 0 \tag{6.9}$$

La definizione di ordine di infinitesimo consente di provare che

TEOREMA 6.12. *Siano f e g due funzioni infinitesime in a^+ di ordine α e β rispettivamente; allora*

(1) *fg ha ordine $\alpha + \beta$*
(2) *se $\alpha < \beta$, $f + g$ ha ordine α*
(3) *se $\alpha = \beta$, $f + g$ ha ordine maggiore o uguale ad α.*

DEFINIZIONE 6.9. *Diciamo che f è infinita in a^+ se $1/f$ è infinitesima in a^+.*

Diciamo che f è infinita di ordine α se $1/f$ è infinitesima di ordine α.

TEOREMA 6.13. *Siano f e g due funzioni infinite in a^+ di ordine α e β rispettivamente; allora*

(1) *fg ha ordine $\alpha + \beta$;*
(2) *se $\alpha < \beta$, $f + g$ ha ordine β;*
(3) *se $\alpha = \beta$, $f + g$ ha ordine minore o uguale ad α*

Osserviamo che si potrebbe definire f di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ in a^+ se

$$\lim_{x-a^+} \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ed osservare che f è infinitesima se $\alpha > 0$ ed è infinita se $\alpha < 0$.

Con queste convenzioni si può provare che se f ha ordine α e g ha ordine β, allora f/g ha ordine $\alpha - \beta$.

CAPITOLO 7

LA CONTINUITÀ

La maggior parte delle situazioni semplici che cerchiamo di rappresentare mediante l'uso di una funzione reale di una variabile reale presentano una caratteristica comune:

piccoli cambiamenti della variabile (argomento della funzione) causano piccoli cambiamenti dei valori della funzione stessa.

Ad esempio se $T(x)$ rappresenta la temperatura di una sbarra di metallo in un punto che dista x da una delle sue estremità, ci aspettiamo che due punti vicini sulla sbarra abbiano temperature non molto dissimili.

Tuttavia non tutti i fenomeni sono facilmente rappresentabili mediante funzioni continue; se ad esempio $L(t)$ rappresenta la luminosità di una stanza nella quale si accende una lampada all'istante t_0 è evidente che in quell'istante il valore della luminosità può subire una brusca variazione, (se la luminosità della lampada è alta in confronto con la luminosità ambiente).

Anche nel linguaggio comune è naturale attribuire l'aggettivo continuo al primo fenomeno ma non al secondo.

In parole povere, una funzione è continua in un punto se il valore che essa assume in tale punto dipende dai valori da essa assunti nei punti vicini, o per meglio dire, se piccole variazioni dell'argomento danno luogo a piccole variazioni dei corrispondenti valori della funzione.

In altri termini una funzione è continua se non ammette repentini cambiamenti, salti, "discontinuità".

Vogliamo allora formalizzare cosa si intende per continuità di una funzione.

Precisamente poniamo la seguente definizione

DEFINIZIONE 7.1. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, diciamo che f è continua in x_0 se*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che se } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad , \quad x \in D \text{ si ha}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Diciamo che f è continua in D se è continua in ogni punto di D.

E' immediato verificare l'analogia, ma non l'identità, con la definizione di limite, ed è immediato provare che:

TEOREMA 7.1. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in D \cap \mathcal{D}(D)$; *sono fatti equivalenti:*

(1) f *è continua in* x_0,
(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

I teoremi sui limiti consentono di stabilire alcuni semplici risultati che ci limitiamo ad enunciare.

TEOREMA 7.2. *Siano* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue in* $x_0 \in D$, *siano inoltre* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; *si ha*

(1) $\alpha f + \beta g$ *è continua in* x_0;
(2) fg *è continua in* x_0;
(3) *se* $f(x_0) \neq 0$, $1/f$ *è continua in* x_0.

TEOREMA 7.3. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$; *sono fatti equivalenti:*

(1) f *è continua in* x_0;
(2) $\forall x_n \in D$, $x_n \to x_0$, *si ha* $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

Il precedente teorema consente di caratterizzare la continuità per successioni: nel confronto con il teorema 6.9 mediante il quale sono caratterizzati i limiti si evidenzia il fatto che:

per caratterizzare il limite la successione x_n deve essere scelta in $D \setminus \{x_0\}$, mentre per la continuità x_n assume valori in D.

Osserviamo anche che, come nel teorema 6.9 , ci si può limitare a considerare soltanto successioni monotone.

TEOREMA 7.4. *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua in* $x_0 \in D$, *allora se* $f(x_0) \neq 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che se* $x \in D \cap I(x_0, \delta)$ *si ha f(x)*$f(x_0) > 0$.

TEOREMA 7.5. *Siano* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua in* $x_0 \in D$, $g : A \longrightarrow D$ *continua in* $t_0 \in A$, $x_0 = g(t_0)$; *allora* $f(g(\cdot)) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua in* t_0.

CAPITOLO 8

I TEOREMI SULLA CONTINUITÀ

Dopo questa rapida rassegna di risultati passiamo a studiare le proprietà più importanti ed interessanti delle funzioni continue in un insieme.

La maggior parte delle proprietà che studieremo riguardano le funzioni continue su di un intervallo chiuso e limitato. E' facile vedere, mediante esempi, che se si considerano funzioni continue su insiemi che non soddisfano i requisiti opportuni, tali proprietà possono non essere soddisfatte.

TEOREMA 8.1. - *degli zeri - Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che $f(a)f(b) < 0$.*

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE.

Definiamo le successioni α_n e β_n nella seguente maniera:

(8.1)
$$[\alpha_0, \beta_0] = [a, b]$$

(8.2)
$$[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] = \begin{cases} [\alpha_n, (\alpha_n + \beta_n)/2] & se \quad f(\alpha_n)f((\alpha_n + \beta_n)/2) < 0 \\ [(\alpha_n + \beta_n)/2, \beta_n] & se \quad f(\alpha_n)f((\alpha_n + \beta_n)/2) > 0 \\ [(\alpha_n + \beta_n)/2, (\alpha_n + \beta_n)/2] & se \quad f((\alpha_n + \beta_n)/2) = 0 \end{cases}$$

Se, esiste $\bar{n}$, $f((\alpha_{\bar{n}} + \beta_{\bar{n}})/2) = 0$ si è trovato lo zero;

in caso contrario, per α_n e β_n si ha:

- (8.3)
$$\alpha_n \text{è crescente}, \beta_n \text{è decrescente},$$
- (8.4)
$$\alpha_n, \beta_n \in [a, b], f(\alpha_n)f(\beta_n) < 0$$
- (8.5)
$$\beta_n - \alpha_n = \frac{b - a}{2^n}$$

Pertanto si può affermare che

(8.6)
$$\alpha_n \nearrow \alpha \qquad \beta_n \searrow \beta \qquad \alpha, \beta \in [a, b]$$

e dalla 8.5 si ricava $\alpha = \beta = c$.

Per la continuità di f e per 8.4 si ha

$$0 \geq \lim f(\alpha_n)f(\beta_n) = (f(c))^2 \quad \text{e} \quad f(c) = 0 \tag{8.7}$$

Si ha anche che $c \in (a, b)$ ed inoltre

$$0 \leq c - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n \leq \frac{b-a}{2^n} \tag{8.8}$$

e

$$0 \leq \beta_n - c \leq \beta_n - \alpha_n \leq \frac{b-a}{2^n} \tag{8.9}$$

□

Il teorema 8.1 ammette come immediato corollario il seguente:

TEOREMA 8.2. - *dei valori intermedi - Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua e siano* $c, d \in R(f)$, $c < d$, *allora*

$$[c, d] \subset R(f).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\alpha, \beta \in [a, b]$ tali che $f(\alpha) = c$, $f(\beta) = d$ e consideriamo $y \in (c, d)$; la funzione

$$g(x) = f(x) - y$$

è continua su $[\alpha, \beta]$, $g(\alpha) < 0$, $g(\beta) > 0$ e perciò, per il teorema 8.1 , esiste $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tale che

$$g(x_0) = f(x_0) - y = 0$$

da cui $f(x_0) = y$ e $y \in R(f)$. □

COROLLARIO 8.1. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *se* f *è continua allora* $R(f)$ *è un intervallo.*

Ci proponiamo ora di dimostrare un teorema di esistenza del massimo per una funzione continua su un insieme compatto (cioè chiuso e limitato).

TEOREMA 8.3. - *Weierstraß - Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua,* D *compatto; allora esistono* $\alpha, \beta \in D$ *tali che*

$$f(\alpha) = \min\{f(x) \ : \ x \in D\}$$
$$f(\beta) = \max\{f(x) \ : \ x \in D\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio l'esistenza del minimo della funzione f. Sia

$$\lambda = \inf\{f(x) \ : \ x \in D\} = \inf \ R(f);$$

per il lemma 6.3 esiste $y_n \in R(f)$ tale che $y_n \to \lambda$.

Sia $x_n \in D$ tale che $y_n = f(x_n)$; dal momento che D è compatto esiste x_{n_k} estratta da x_n tale che

$$x_{n_k} \to \alpha \in D.$$

Pertanto

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$$

per la continuità di f ed anche $y_{n_k} \to \lambda$ da cui

$$\lambda = f(\alpha)$$

e la tesi. $\square$

E' possibile generalizzare il teorema 8.3 senza l'ipotesi di compattezza dell'insieme D, ad esempio possiamo provare:

TEOREMA 8.4. *Sia* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua,* $a, b \in \mathbb{R}^*$*, e supponiamo che esista* $\bar{x} \in (a,b)$ *tale che*

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x) > f(\bar{x})$$

allora esiste $\alpha \in (a,b)$ *tale che*

$$f(\alpha) = \min\{f(x) \ : \ x \in (a,b)\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $a, b \in \mathbb{R}$, essendo la dimostrazione negli altri casi analoga.

Siano

$$\lambda = \inf\{f(x) \ : \ x \in (a,b)\}$$

si ha

$$\mu = f(\bar{x}) \geq \lambda \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Se $\lambda = f(\bar{x})$ avremmo che il minimo è assunto.

sia $\delta > 0$ tale che

$$x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b) \quad \Rightarrow \quad f(x) > \mu.$$

Sia

$$y_n \in R(f) \quad , \quad y_n \to \lambda$$

poiché $\mu > \lambda$, definitivamente si ha $y_n \leq \mu$ e perciò esiste $x_n \in [a+\delta, b-\delta]$ tale che $f(x_n) = y_n$.

Ne segue che esiste $x_{n_k} \to \alpha \in [a+\delta, b-\delta]$ e

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(\alpha).$$

$\square$

A questo punto sarebbe ragionevole introdurre il concetto di uniforme continuità, tuttavia poichè si tratta di un concetto fondamentale ma difficile da comprendere rimandiamo chi fosse interessato a quanto è contenuto negli approfondimenti.

In parole povere diciamo che una funzione è uniformemente continua su un intervallo $[a,b]$, se, nella definizione di continuità applicata ad un punto $x \in [a,b]$, il valore di δ si può trovare in funzione di ϵ, ma non dipende anche da x.

Possiamo cioè dire che in un qualunque punto di $x_0 \in [a,b]$ il modo con cui $f(x)$ si avvicina ad $f(x_0)$ quando x si avvicina ad x_0 è in questo senso uniforme.

Abbiamo a suo tempo dimostrato che, se una funzione è strettamente monotona, allora essa è invertibile; vediamo ora che se ci restringiamo alla classe delle funzioni continue, la stretta monotonia è anche necessaria per l'invertibilità.

TEOREMA 8.5. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, allora* f *è invertibile se e solo se* f *è strettamente monotona.*

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a provare la parte 'solo se', in quanto la parte 'se' è già stata provata nel teorema 3.15.

Se per assurdo f non fosse monotona, per il teorema 3.14

$$\exists x, y, z \in [a, b] \ : \ x < y < z \ , \ [f(y) - f(x)][f(z) - f(y)] \leq 0 \tag{8.10}$$

se nella 8.10 vale l'uguaglianza, f non è invertibile; se vale la disegua-glianza stretta possiamo, per fissare le idee, supporre che

$$f(z) - f(y) < 0 \ \ , \ \ f(y) - f(x) > 0 \ \ , \ \ f(z) > f(x) \ \ .$$

Allora, per il teorema dei valori intermedi, poichè $f(x) < f(z) < f(y)$

$$\exists \alpha \in (x, y) \ : \ f(\alpha) = f(z)$$

e ciò è contro l'invertibilità di f. □

Per concludere con la continuità proviamo i seguenti risultati.

TEOREMA 8.6. *Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*, strettamente monotona, siano* $x_0 \in (a, b)$ *e* $y_0 = f(x_0)$*; allora* f^{-1} *è continua in* y_0*.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per fissare le idee, che f sia strettamente crescente e proviamo che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall y \ : \ |y - y_0| < \delta_\varepsilon \ \ , \text{ si ha } \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

Sia $\varepsilon_0 > 0$ tale che $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \subset (a, b)$.

Dal momento che f è strettamente crescente si ha, per $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon).$$

Definiamo

$$\delta_\varepsilon = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\} > 0;$$

se $|y - y_0| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$y_0 + f(x_0 - \varepsilon) - y_0 < y_0 - \delta_\varepsilon < y < y_0 + \delta_\varepsilon < y_0 + f(x_0 + \varepsilon) - y_0$$

e

$$f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon).$$

Poiché f^{-1} è strettamente crescente si ha

$$f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon))$$

cioè

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$
$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

e

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

□

TEOREMA 8.7. *Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua e invertibile; allora* f^{-1} *è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che f è continua ed invertibile su (a,b), essa è strettamente monotona e si può applicare il teorema 8.6. □

Si può verificare che:

(1) p_a, per $a \in \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}_+$
(2) p_n, per $n \in \mathbb{N}$ è continua in $\mathbb{R}$
(3) $\exp_a$, per $a \in \mathbb{R}_+$ è continua in $\mathbb{R}$
(4) $\sin$ è continua in $\mathbb{R}$
(5) $\cos$ è continua in $\mathbb{R}$
(6) r_n, per n $pari$ è continua in $\overline{\mathbb{R}}_+$
(7) r_n, per n $dispari$ è continua in $\mathbb{R}$
(8) $\log_a$, per $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ è continua in $\mathbb{R}_+$.

La verifica di questi fatti può essere completata usando la definizione di limite.

possiamo altresì verificare, usando il teorema dei valori intermedi che

TEOREMA 8.8. *Si ha*

(1) $R(p_n) = \overline{\mathbb{R}}_+$, *per* n *pari*
(2) $R(p_n) = \mathbb{R}$, *per* n *dispari*
(3) $R(\exp_a) = \mathbb{R}_+$ *per* $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$
(4) $R(p_a) = \mathbb{R}_+$ *per* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
(5) $R(\sin) = [-1, 1]$
(6) $R(\cos) = [-1, 1]$
(7) $R(\tan) = \mathbb{R}$

Elenco delle figure

Indice

Indice analitico