ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 9

LA DERIVABILITÀ.

Consideriamo una funzione f continua in un punto x_0, avremo che, quando x si discosta di poco da x_0, $f(x)$ è poco distante da $f(x_0)$.

È in questo caso importante valutare come varia $f(x)-f(x_0)$in rapporto a $x - x_0$ cioè il valore del rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9.1}$$

Possiamo vedere che 9.1 rappresenta il coefficiente angolare della corda che passa per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Se x è vicino al punto x_0 il denominatore tende a 0, ma se f è continua anche il numeratore tende a 0 e quindi è significativo considerare il valore limite di 9.1 per $x \to x_0$.

Si stabilisce quindi la seguente definizione.

DEFINIZIONE 9.1. *Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x_0 \in (a, b)$*;*

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è definito per ogni $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ *e si chiama rapporto incrementale relativo alla funzione* f *nel punto* x_0*.*

Dal momento che x_0 *è in* (a, b) *ha senso considerare*

$$\lim_{x \to x_0} g(x).$$

Diciamo che f *è derivabile in* x_0 *se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste finito.

In tal caso chiamiamo il suo valore derivata di f *in* x_0 *e scriviamo*

$$f'(x_0) \qquad \text{o} \qquad \frac{df}{dx}(x_0)$$

Diciamo che f *è derivabile in* x_0 *da destra oppure da sinistra se*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste ed è finito,

In tal caso chiamiamo tale limite derivata destra *o* derivata sinistra *di* f *in* x_0 *e scriviamo* $f'_+(x_0)$ *o* $f'_-(x_0)$*, ovvero*

$$\frac{d^+f}{dx}(x_0) \qquad \text{o} \qquad \frac{d^-f}{dx}(x_0).$$

Diciamo che f *è* derivabile *in* (a,b) *se è derivabile in ogni punto di* (a,b)*. In tal caso possiamo definire una funzione*

$$f' = \frac{df}{dx} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che si chiama derivata di f*.*

In maniera del tutto analoga si possono definire le funzioni derivata destra *e* derivata sinistra.

Osserviamo che $f'(x)$ è il limite per x che tende a x_0 del coefficiente angolare della corda secante il grafico di f nei punti $(x, f(x))$, $(x_0, f(x_0))$ e che pertanto è ragionevole supporre che sia il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$.

La derivata di f, fornisce, vicino ad x_0, una stima del variare di $f(x) - f(x_0)$ rispetto a $x - x_0$.

Poichè

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x) \tag{9.2}$$

si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x) = 0$$

da cui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{9.3}$$

Se ora poniamo

$$\frac{f(x) - f(x_0 - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \omega(x - x_0) \tag{9.4}$$

avremo che

$$f(x) - (f(x_0 + f'(x_0)(x - x_0)) = \omega(x - x_0)(x - x_0) \tag{9.5}$$

con

$$\lim_{x\to x_0} \omega(x - x_0) = 0$$

In altre parole, alla quantità $f(x)$ è possibile sostituire la quantità

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{9.6}$$

commettendo un errore

$$\omega(x - x_0)(x - x_0)$$

che tende a 0 più velocemente di $(x - x_0)$

Poichè l'equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ rappresenta una retta nel piano con la proprietà di approssimare $f(x)$ con un errore infinitesimo di ordine superiore al primo, per $x \to x_0$, possiamo definirla retta tangente al grafico di f nel punto x_0.

Resta così giustificato l'uso di $f'(x_0)$ per identificare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in x_0.

Definiamo pertanto, allo scopo di sviluppare questa idea, la differenziabilità di una funzione.

DEFINIZIONE 9.2. *Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$; diciamo che f è differenziabile in x_0 se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

La funzione lineare $L(x) = a(x - x_0)$ si chiama differenziale di f in x_0 e si indica con $df(x_0)(x)$.

TEOREMA 9.1. *Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, allora f è derivabile in x_0 se e solo se f è differenziabile in x_0.*

Inoltre

$$df(x_0)(h) = hf'(x_0)$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Se f è derivabile in x_0 è sufficiente definire

$$a = f'(x_0)$$

e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Se viceversa f è differenziabile in x_0 si ha che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a = 0$$

da cui

$$f'(x_0) = a$$

e

$$df(x_0)(h) = hf'(x_0)$$

□

Dalla 9.5 risulta evidente che se f è derivabile in x_0 si ha:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0).$$

Pertanto
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\omega(x-x_0)]=0$$
e
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$
Si è così provato che

TEOREMA 9.2. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ aperto, e sia $x_0\in D$; se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.*

Non è però vero il viceversa; esempi che illustrino questo fatto non sono difficili a trovarsi (basta considerare $f(x)=|x|$), e di più è possibile costruire una funzione continua su un intervallo ed ivi mai derivabile.

In virtù del teorema 9.1 d'ora in poi, per le funzioni di una variabile, useremo indifferentemente i termini derivabilità e differenziabilità; useremo inoltre, per caratterizzare questa proprietà una qualunque delle condizioni enunciate nelle 9.2, 9.3, 9.5.

Proviamo ora alcuni risultati sulla derivabilità.

TEOREMA 9.3. *Siano $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ aperto, e sia $x_0\in D$; supponiamo che f e g siano derivabili in x_0 , allora:*

(1) *$\alpha f+\beta g$ è derivabile in x_0 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e si ha*
$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0);$$
(2) *fg è derivabile in x_0 e si ha*
$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$
(3) *Se $f(x_0)\neq 0$ allora $(1/f)$ è derivabile in x_0 e si ha:*
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

DIMOSTRAZIONE.

(1) è banale conseguenza della definizione di derivata e dei risultati provati sui limiti.

(2) si può provare osservando che
$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}+\frac{[f(x)-f(x_0)]g(x_0)}{x-x_0}$$
e passando al limite.

(3) Dal momento che f è derivabile in x_0, f è ivi continua e per il teorema della permanenza del segno $\exists\delta>0$ tale che $f(x)\neq 0$ se $|x-x_0|<\delta$.

Possiamo pertanto considerare la funzione $1/f$ in $|x-x_0|<\delta$ e costruire il suo rapporto incrementale
$$\frac{1/f(x)-1/f(x_0)}{x-x_0}=-\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{1}{f(x)f(x_0)}}.$$

Passando al limite per $x \longrightarrow x_0$ si ottiene che

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

□

TEOREMA 9.4. *Siano $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : (c,d) \longrightarrow (a,b)$; sia $t_0 \in (c,d)$, g derivabile in t_0; sia $x_0 = g(t_0)$ e sia f derivabile in x_0.*

Allora se $\varphi = f(g(\cdot))$, φ è derivabile in t_0 e si ha

$$\varphi'(t_0) = f'(x_0)g'(t_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Per la 9.5 si ha che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega_1(x - x_0) \tag{9.7}$$

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\omega_2(t - t_0). \tag{9.8}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(g(t)) &= f(g(t_0)) + f'(g(t_0))[g(t) - g(t_0)]+ \\ &\quad + [g(t) - g(t_0)]\omega_1(g(t) - g(t_0)) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)[g'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\omega_2(t - t_0)]+ \\ &\quad + [g(t) - g(t_0)]\omega_1(g(t) - g(t_0)) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)g'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\omega_3(t - t_0). \end{aligned} \tag{9.9}$$

E dal momento che

$$\lim_{t \to t_0} \omega_3(t - t_0) = 0$$

si ha la tesi □

TEOREMA 9.5. *Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 = f(x_0)$; supponiamo f strettamente monotona in (a,b), derivabile in x_0 ed $f'(x_0) \neq 0$; allora f^{-1} è derivabile in y_0 e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il rapporto incrementale

$$G(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0},$$

avremo che

$$G(y) = F(f^{-1}(y))$$

ove

$$F(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - f^{-1}(y_0)}{f(x) - y_0}.$$

Ora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

e

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

(si ricordi che f^{-1} è continua in y_0 in quanto inversa di una funzione monotona continua).

Inoltre x_0 non appartiene al campo di definizione di F; pertanto possiamo applicare il teorema che consente di calcolare il limite di una funzione composta per concludere che

$$\lim_{y \to y_0} G(y) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

e la tesi. □

Calcoliamo ora le derivate di alcune funzioni elementari;

- $\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1}$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

Ciascuna delle formule vale per quegli x per cui ha senso e può essere provata usando la definizione di derivata.

Abbiamo con ciò introdotto quello che si chiama derivata prima di una funzione f; ovviamente applicando successivamente più volte lo stesso procedimento, otterremo quelle che si chiamano derivata seconda, terza, .., n-esima di f.

Indichiamo con

$$f''(x_0) \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

$$f^{(3)}(x_0) \qquad \text{o} \qquad \frac{d^3}{dx^3} f(x_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x_0) \qquad \text{o} \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x_0)$$

la derivata seconda, terza, .., n-esima di f in x_0.

Discorsi e notazioni analoghe vanno bene per le derivate successive destre e sinistre.

Indichiamo infine con $\mathcal{C}^n(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, l'insieme delle funzioni $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili almeno n volte, con derivata n-esima continua.

In particolare $\mathcal{C}^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue, mentre $\mathcal{C}^\infty(I)$ è l'insieme delle funzioni che ammettono derivate di ogni ordine in ogni punto di I.

Si può facilmente verificare che ognuno di questi insiemi è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

CAPITOLO 10

I TEOREMI DI ROLLE, LAGRANGE E CAUCHY.

Le derivate forniscono un'importante strumento per lo studio delle proprietà e del grafico di una funzione.

L'applicazione di tale strumento si concretizza attraverso alcuni risultati dimostrati nel corso del '700, dei quali ci occupiamo di seguito.

Cominciamo con il provare il seguente lemma.

LEMMA 10.1. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile, sia* $x_1 \in [a, b]$ *tale che*

$$f(x_1) = \min\{f(x)\ :\ x \in [a, b]\}$$

si ha che

(1) *se* $x_1 \in (a, b)$ *allora* $f'(x_1) = 0$
(2) *Se* $x_1 = a$ *allora* $f'_+(x_1) \geq 0$
(3) *Se* $x_1 = b$ *allora* $f'_-(x_1) \leq 0$

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza del punto di minimo è assicurata dalla continuità di f in [a,b].

Proviamo la prima affermazione; sia

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

si ha

$$\begin{array}{lll} g(x) \leq 0 & \text{se} & x < x_1 \\ g(x) \geq 0 & \text{se} & x > x_1. \end{array}$$

Pertanto

$$0 \geq \lim_{x \to x_1^-} g(x) = f'(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} g(x) \geq 0.$$

Per quanto riguarda la seconda affermazione: se $x_1 = a$ si ha che

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} g(x) \geq 0.$$

La terza affermazione si dimostra in modo simile. □

È chiaro che un risultato simile si può provare per i punti di massimo.

A questo punto siamo in grado di provare un risultato che è, pur nella sua semplicità, fondamentale per lo sviluppo del calcolo differenziale.

TEOREMA 10.1. - *Rolle* - *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b)*; allora*

$$f(a) = f(b) \qquad \Rightarrow \qquad \exists c \in (a, b)\ :\ f'(c) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Weierstraß f ammette massimo e minimo assoluti in $[a, b]$; se entrambi sono assunti negli estremi si ha

$$\max\{f(x) \,:\, x \in [a, b]\} = \min\{f(x) \,:\, x \in [a, b]\}$$

ed f è costante, da cui $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Se invece il massimo o il minimo è assunto in un punto interno c, dal lemma 10.1 si ha $f'(c) = 0$. □

Ne segue che

TEOREMA 10.2. - *Lagrange - Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b); allora esiste $c \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right).$$

g è continua in [a,b] e derivabile in (a,b) ed inoltre $g(a) = g(b) = 0$.

Per il teorema di Rolle esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

TEOREMA 10.3. - *Peano - Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f, g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b); allora esiste $c \in (a, b)$ tale che*

$$\det\begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{pmatrix} = 0 \tag{10.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = \det\begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(x) \\ g(b) - g(a) & g(x) \end{pmatrix} = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) \tag{10.2}$$

h soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e pertanto si può affermare che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$h'(c) = \det\begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{pmatrix} = 0 \tag{10.3}$$

□

TEOREMA 10.4. *- Cauchy - Siano* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue in* $[a, b]$ *e derivabili in* (a, b)*; sia inoltre* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$. *Allora esiste* $c \in (a, b)$ *tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Peano si ha che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Ma $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e pertanto anche $g(b) - g(a) \neq 0$ (se così non fosse ci sarebbe, per il teorema di Rolle, un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $g'(\xi) = 0$). Possiamo allora dividere per $g'(c)$ e per $g(b) - g(a)$ ed ottenere la tesi. □

I teoremi appena dimostrati forniscono tutta una serie di risultati molto utili per lo studio del grafico di una funzione.

TEOREMA 10.5. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b)*; allora* f *è costante in* $[a, b]$ *se e solo se* $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$.

DIMOSTRAZIONE. Se f è costante in $[a, b]$ è immediato provare che f' è identicamente nulla.

Proviamo viceversa che se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$ si ha che f è costante: sia $x \in (a, b)$ ed applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[a, x]$. Per un opportuno valore di $c \in (a, x)$ si ha

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$$

e si deduce che $f(x) = f(a)$ □

COROLLARIO 10.1. *Siano* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue in* $[a, b]$ *, derivabili in* (a, b) *e tali che*

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in (a, b) \ ;$$

allora

$$\exists c \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = g(x) + c \qquad \forall x \in [a, b].$$

TEOREMA 10.6. *Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*, derivabile; allora* f *è crescente (decrescente) in* (a, b) *se e solo se* $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ *per ogni* $x \in (a, b)$.

DIMOSTRAZIONE. E' intanto ovvio che se f è crescente allora si ha $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$; supponiamo viceversa che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora se $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, si ha

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad , \quad x_1 < c < x_2$$

e pertanto

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

□

Sottolineiamo che i risultati provati funzionano soltanto per funzioni definite su un intervallo.

È infatti facile trovare esempi che contraddicano gli enunciati precedenti se si rinuncia alla condizione di intervallo:

Ad esempio consideriamo le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases} \tag{10.4}$$

oppure

$$g(x) = 1/x \qquad \text{su} \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{10.5}$$

Si può anche provare che:

TEOREMA 10.7. *Sia* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile e supponiamo che* $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$; *allora* f *è strettamente crescente in* (a,b).

La funzione $f(x) = x^3$ ci convince inoltre che possono esistere funzioni strettamente crescenti la cui derivata non è sempre strettamente maggiore di zero.

CAPITOLO 11

LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL

Dal teorema di Cauchy è possibile ricavare un risultato molto importante usualmente identificato come regola di De L'Hôpital, dal nome del marchese che pubblicò un trattato che la contiene, ma è più probabilmente dovuta a Johann Bernoulli.

Il suo scopo è fornire uno strumento atto a risolvere, in certi casi, il problema di trovare il limite di una forma indeterminata.

E' importante ricordare che l'applicazione di tale regola è subordinata, come sempre, alla verifica di alcune ipotesi, in assenza delle quali si possono ottenere dei risultati sbagliati.

La regola di De l'Hôpital è un raffinamento del seguente fatto del tutto elementare.

TEOREMA 11.1. *Siano $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in D$, D aperto; allora, se $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) \neq 0$, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente osservare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□

Il risultato appena enunciato si può generalizzare al caso in cui non sia possibile considerare

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ma soltanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Naturalmente tutto ciò è fatto allo scopo di determinare il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nel caso in cui

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Non sarà ovviamente restrittivo trattare solo il caso in cui $x \to x_0^+$.

TEOREMA 11.2. *Siano* $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabili; supponiamo che*

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0.$$

Allora, se

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, si ha

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*.$$

Se $a < x < a + \delta_\varepsilon$ si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in I(\ell, \varepsilon).$$

Ora, se prolunghiamo f e g per continuità in a ponendo

$$f(a) = g(a) = 0,$$

si può applicare il teorema di Cauchy nell'intervallo $[a, x]$ con $x \in (a, b)$ ed ottenere che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{con} \quad a < c < x$$

Perciò, se $a < x < a + \delta_\varepsilon$ si ha $a < c < x < a + \delta_\varepsilon$ e

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in I(\ell, \varepsilon).$$

$\square$

Il teorema 11.2 può ovviamente essere rienunciato anche considerando limiti per $x \to a^-$ e per $x \to a$.

Restano fuori da questa trattazione i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Osserviamo che in tali casi può essere utilizzato il fatto che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}.$$

A quest'ultimo limite può essere applicato il teorema 11.2 non appena si siano verificate le ipotesi in esso richieste.

Enunciamo, per comodità, il risultato che si ottiene seguendo questa via.

COROLLARIO 11.1. *Siano* $f, g : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabili; supponiamo*

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\ .$$

Allora, se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Il caso in cui $g\to+\infty$ oppure $g\to-\infty$ è molto più tecnico e complicato; pertanto ci limitiamo ad enunciare il risultato.

TEOREMA 11.3. *Siano* $f,g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *derivabili; supponiamo*

$$g'(x)\neq 0\qquad\forall x\in(a,b)$$

$$\lim_{x\to a^+}g(x)=+\infty.$$

Allora, se

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, si ha

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regola di De L'Hôpital permette di ricavare un risultato molto utile per calcolare la derivata di una funzione in punti che presentino qualche criticità.

COROLLARIO 11.2. *Sia* $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$*, derivabile in* $D\setminus\{x_0\}$ *e continua in* $x_0\in D$*,* D *aperto, con*

$$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=\lambda\qquad,\qquad\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=\mu.$$

Allora

(1) *se* $\lambda\in\mathbb{R}$ *allora* $f'_+(x_0)=\lambda$
(2) *Se* $\mu\in\mathbb{R}$ *allora* $f'_-(x_0)=\mu$
(3) *Se* $\lambda=\pm\infty$ *allora* f *non è derivabile da destra in* x_0
(4) *Se* $\mu=\pm\infty$ *allora* f *non è derivabile da sinistra in* x_0

Elenco delle figure

Indice

Indice analitico