1. Un po' di Logica

Diciamo *proposizione* una affermazione di cui siamo in grado di stabilire se è vera o è falsa.

Assegnata una proposizione P si può costruire una nuova proposizione, che definiamo negazione di P ed indichiamo con not P, come la proposizione che è vera se P è falsa ed è falsa se P è vera.

Si può identificare la proposizione not P anche mediante una tabella, detta tabella di verità, che elenca in corrispondenza dei due casi possibili la verità o la falsità della proposizione in questione:

P	not$P$
1	0
0	1

Table 1.1:

È inoltre necessario definire nuove proposizioni che dipendono da una o più proposizioni note.

Assegnate due proposizioni P e Q,

- (P and Q) è vera se P e Q sono entrambe vere
- (P or Q) è vera se almeno una tra P e Q è vera
- (P xor Q) è vera se una ed una sola tra P e Q è vera.

Le corrispondenti tabelle di verità possono essere raggruppate nella seguente:

P	Q	not P	not Q	P and Q	P or Q	P xor Q
1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0

Table 1.2:

È immediato verificare che la proposizione P xor Q è vera o falsa a seconda che sia vera o falsa la proposizione

$$(P \text{ and } (\text{not } Q)) \text{ or } (Q \text{ and } (\text{not}\} P))$$

come si può verificare dalla tabella 1.

Possiamo anche verificare come not interagisce con and e or mediante la tabella1.3

P	Q	not P	not Q	P and Q	P or Q	not(P and Q)	not (P or Q)
1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Table 1.3:

Dalla tabella 1.3 possiamo verificare che

- $(\text{not}(P \text{ and } Q))$ è vera tutte e sole le volte che è vera $((\text{not } P) \text{ or } (\text{not } Q))$
- $(\text{not}(P \text{ or } Q))$ è vera tutte e sole le volte che è vera $((\text{not } P) \text{ and } (\text{not } Q))$

Si può inoltre affermare che le seguenti affermazioni sono sempre vere

- (P or (not P)) (legge del terzo escluso)
- (not(P and (not P))) (legge di non contraddizione)

Assegnate due proposizioni P e Q si possono inoltre costruire le seguenti proposizioni

$$(P \Rightarrow Q) \;\; , \;\; (P \Leftarrow Q) \;\; , \;\; (P \Leftrightarrow Q)$$

che leggiamo, rispettivamente 'P implica Q', 'P è implicato da Q', 'P è equivalente a Q' e che sono identificate come segue

- ($P \Rightarrow Q$) significa che Q è vera ogni volta che P è vera;
- ($P \Leftarrow Q$) significa che P è vera ogni volta che Q è vera;
- ($P \Leftrightarrow Q$) significa che P è vera tutte e sole le volte in cui Q è vera.

In altre parole $(P \Rightarrow Q)$ significa che o non è vera P oppure, se P è vera, allora è vera anche Q; in simboli:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\text{not } P) \text{ or } Q) \tag{1.1}$$

Possiamo verificare dalla tabella 1.4 che due proposizioni sono equivalenti se assumono gli stessi valori nella loro tabella di verità, cioè se sono entrambe vere o entrambe false.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	1	1

Table 1.4:

Per convincerci che la definizione di implicazione corrisponde a criteri di senso comune, è opportuno mettere in evidenza la negazione della proposizione ($P \Rightarrow Q$), in altre parole possiamo osservare che è naturale affermare che ($P \Rightarrow Q$) non è vera nel caso in cui sia vera P e Q sia invece falsa ; in simboli

$$\text{not}(P \Rightarrow Q) \iff \text{not}((\text{not } P) \text{ or} Q) \iff (P \text{ and} (\text{not} Q)) \quad (1.2)$$

Infatti è chiaro che $\text{not}(P \Rightarrow Q)$ è vera se accade che P è vera e Q è falsa.

La seguente tabella permette di verificare che le proposizioni enunciate in 1.2 hanno la stessa tabella di verità; cioè sono equivalenti.

P	Q	not Q	$P \Rightarrow Q$	(P and (not Q))	not ($P \Rightarrow Q$)
1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

Table 1.5:

Osserviamo anche che

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\text{not } Q) \Rightarrow (\text{not } P)) \quad (1.3)$$

Per cui possiamo aggiungere una colonna alla tabella 1.5

P	Q	not Q	not P	$P \Rightarrow Q$	(not Q) $\Rightarrow$ (not P)
1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Table 1.6:

$$(P \Leftrightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; ((P \Rightarrow Q) \text{ and } (P \Leftarrow Q))$$

$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; ((\text{not } Q) \Rightarrow (\text{not } P)) \Leftrightarrow (\text{not}(P \text{ and } (\text{not } Q)))$$

Quest'ultima relazione è nota come **principio di dimostrazione per assurdo**.

Ricordiamo che si suppone noto il concetto di insieme.

Usualmente gli insiemi sono identificati da una lettera maiuscola, mentre le lettere minuscole, di solito, designano gli elementi di un insieme.

Ricordiamo anche che

- $a \in A$ significa che a è un elemento di A, a appartiene ad A;
- $b \notin A$ significa che b non è un elemento di A, b non appartiene ad A.
- se A è un insieme, $a \in A$ e P_a o $P(a)$ è una proprietà che dipende da a, cioè tale che sia vera per certi valori di a e falsa per altri valori di a, scriviamo

  $$\{a \in A : P_a\} \quad \text{oppure} \quad \{a \in A : P_a \text{ è vera}\}$$

  per indicare l'insieme degli elementi di A tali che P_a è vera.

Occorre infine ricordare che si dice data una relazione binaria su un insieme A se dati due elementi $a, b \in A$ è possibile stabilire se è vera o falsa la proposizione **'a è in relazione con b'**.

Scriveremo $a\mathcal{R}b$ e $a\not\mathcal{R}b$ per significare che la proposizione in oggetto è rispettivamente vera o falsa.

Una relazione binaria si dice relazione di equivalenza se sono verificate le seguenti condizioni

- $(a\mathcal{R}b) \Rightarrow (b\mathcal{R}a)$ (simmetricità);
- $(a\mathcal{R}a)$ (riflessività);
- $((a\mathcal{R}b) \text{ and } (b\mathcal{R}c)) \Rightarrow (a\mathcal{R}c)$ (transitività).

Una *relazione binaria* si dice *relazione d'ordine* o *ordinamento* se sono verificate le seguenti condizioni

- $(a\not\mathcal{R}a)$ (antiriflessività);
- $((a\mathcal{R}b) \text{ and } (b\mathcal{R}c)) \Rightarrow (a\mathcal{R}c)$ (transitività).

Siano A, B due insiemi, diciamo che

$$A \subset B \quad (B \supset A) \qquad \text{se} \quad (a \in A) \;\Rightarrow\; (a \in B) \tag{1.4}$$

Diciamo che

$$A = B \quad \text{se} \;\; (a \subseteq A) \,\text{and}\;\, (a \supseteq B) \tag{1.5}$$

Definiamo

$$A \backslash B = \{a \in A \text{ and } a \notin B\}$$

Nel caso in cui $B \subset A$ l'insieme $A \backslash B$ si dice anche complementare di B in A e si indica con B^c essendo omessa l'indicazione che il complementare è fatto rispetto ad A, in quanto sarà sempre chiara, quando si userà tale simbolo, l'identità di A.

Definiamo inoltre

- $A \cup B = \{a \in A \text{ or } a \in B\}$ $\quad$ (A unione B)
- $A \cap B = \{a \in A \text{ and } a \in B\}$ $\quad$ (A intersezione B)
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ and } b \in B\}$ $\quad$ (prodotto cartesiano).

Si possono provare facilmente proprietà del tipo

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Le ultime due uguaglianze sono note come formule di De-Morgan.

Indichiamo con $\varnothing$ l'insieme vuoto , cioè l'insieme privo di elementi

Se P è una proposizione ed A è un insieme possiamo considerare le seguenti proposizioni

- ogni elemento di A soddisfa P;
- qualche elemento di A soddisfa P;
- uno ed un solo elemento di A soddisfa P .

Le tre affermazioni di cui sopra si scrivono in simboli

- $\forall x \in A \quad , \quad P_x$
- $\exists x \in A \quad : \quad P_x$
- $\exists! x \in A \quad : \quad P_x$

Osserviamo che le negazioni delle prime due precedenti proposizioni sono

- $\exists x \in A \quad \text{not } P_x$
- $\forall x \in A \quad \text{not } P_x$

2. I Numeri Reali

Introduciamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali per via assiomatica; elenchiamo cioè le proprietà cui deve soddisfare l'insieme dei numeri reali prescindendo dalla verifica dell'esistenza di un modello di $\mathbb{R}$ e dalla costruzione di tale modello.

A tale proposito ci limitiamo a ricordare che la retta euclidea su cui siano stati fissati due punti (0 ed 1), sia stato definito il verso positivo e siano state definite la somma ed il prodotto per via geometrica, costituisce un buon modello dei numeri reali.

Diciamo che sono assegnati i numeri reali, che indicheremo con $\mathbb{R}$, se:

- è assegnato un insieme $\mathbb{R}$
- sono assegnate due leggi, che chiamiamo somma o addizione e prodotto o moltiplicazione e che indichiamo con $+$ e $\cdot$ rispettivamente, ciascuna delle quali associa ad ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un elemento di $\mathbb{R}$ che indicheremo con $x + y$ ed $x \cdot y$ rispettivamente (in realtà useremo sempre xy in luogo di $x \cdot y$)
- è assegnata in $\mathbb{R}$ una relazione di equivalenza che indicheremo con il simbolo $=$ (rispetto alla quale esistono in $\mathbb{R}$ almeno due elementi distinti)
- è assegnata in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine che indicheremo con $<$

  valgono le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1. $x + y = y + x$
   (proprietà commutativa dell'addizione)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
   (proprietà associativa dell'addizione)
3. esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $x + \theta = x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$
   (esistenza di un elemento neutro rispetto all'addizione)
   - *l'elemento neutro rispetto alla somma è unico in* $\mathbb{R}$

infatti se z, z' sono due elementi neutri rispetto alla somma si ha

$$z = z + z' = z' + z = z'$$

- **sarà indicato d'ora innanzi con** 0

4. $xy = yx$

   (proprietà commutativa della moltiplicazione)

5. $(xy)z = x(yz)$

   (proprietà associativa della moltiplicazione)

6. esiste $\zeta \in \mathbb{R}$ tale che $x\zeta = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

   (esistenza di un elemento neutro rispetto alla moltiplicazione)

   - *l'elemento neutro rispetto al prodotto è unico in $\mathbb{R}$ Se u, u' sono due elementi neutri rispetto al prodotto si ha*

   $$u = uu' = u'$$

   - **sarà indicato d'ora innanzi con** 1

7. $x(y + z) = xy + xz$

   (proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione)

8. è vera una ed una sola delle seguenti affermazioni

   $$x < y \quad , \quad x = y \quad , \quad y < x$$

   (legge di tricotomia)

9. se $x < y$ allora $x + z < y + z$

   (invarianza dell'ordine rispetto all'addizione)

10. se $x < y$ e $0 < z$ allora $xz < yz$

    (invarianza dell'ordine rispetto alla moltiplicazione per elementi positivi)

11. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $x' \in \mathbb{R}$ tale che $x' + x = 0$

    (esistenza dell'inverso rispetto all'addizione)

    - *per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'inverso di x rispetto alla somma è unico, infatti siano x', x'' tali che $x' + x = x'' + x = 0$ allora si ha $x' + x + x' = x'' + x + x'$ e ne segue che $x' = x''$*
    - **verrà indicato solitamente con** $-x$

12. per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esiste $x'' \in \mathbb{R}$ tale che $x''x = 1$

    (esistenza dell'inverso rispetto alla moltiplicazione)

- *per ogni* $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *l'inverso di* x *rispetto al prodotto è unico Siano* x', x'' *tali che* $x'x = x''x = 1$ *si ha* $x'xx' = x''xx'$ *e ne segue* $x' = x''$
- **verrà indicato solitamente con** $1/x$ **o con** x^{-1}

13. Per ogni $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \varnothing$ tali che

$$a \leq b \quad \forall a \in A \ , \ \forall b \in B$$

esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \ \ \forall b \in B \tag{2.1}$$

(esistenza di un elemento separatore).

Osserviamo che gli assiomi precedenti assicurano che $\mathbb{R}$ contiene almeno 0 ed 1 ; tuttavia non escludono che 0 ed 1 siano distinti, nonostante si supponga comunque che $\mathbb{R}$ deve contenere almeno due elementi.

Le proprieta' che dimostreremo nel seguito assicurano tuttavia che 0 ed 1 coincidessero, $\mathbb{R}$ si ridurrebbe ad un solo elemento e questo non è ammesso.

Se $x, y \in \mathbb{R}$ scriveremo $x > y$ in luogo di $y < x$ e converremo di usare il simbolo $x \leq y$ se $(x = y)$ or $(x < y)$.

Ricordiamo inoltre che in caso di più operazioni in sequenza, se non vi sono parentesi, per convenzione il prodotto ha priorità sulla somma.

Passiamo ora a provare alcune fondamentali proprietà dei numeri reali.

Teorema 2.1 *- Proprietà dei numeri reali - Valgono i seguenti fatti:*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ \ x + z = y + z \ \Leftrightarrow \ x = y$ *(legge di cancellazione rispetto alla somma)*

   - Infatti: se z' è tale che $z + z' = 0$ allora

$$x = (x + z) + z' = (y + z) + z' = y$$

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ ,\ z \neq 0\ ,\ xz = yz \ \Leftrightarrow \ x = y$ *(legge di cancellazione rispetto al prodotto)*

   - Infatti: se z' è tale che $zz' = 1$ allora

$$x = (xz)z' = (yz)z' = y$$

3. $x0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   - Infatti: $x0 = x\ (0 + 0) = x0 + x0$ da cui $x0 = 0$.

4. $(-(-x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   - Infatti: $(-x) + x = 0$ da cui $-(-x) = x$.

5. $(-x) + (-y) = -(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

   - Infatti: $x + y + (-x) + (-y) = 0$ da cui $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

6. $(-x)y = -xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

   In particolare $(-1)y = -(1\,y) = -y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

   - Infatti: $(-x)y + xy = (-x + x)y = 0$ onde $(-x)y = -xy$.

7. $(-x)(-y) = xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

   - Infatti: $(-x)(-y) + (-xy) = (-x)(-y) + (-x)y = (-x)(-y + y) = 0$.

8. $xy = 0$ *se e solo se* $(x = 0)$ *or* $(y = 0)$

   - Infatti: supposto $xy = 0$, se fosse $y \neq 0$ si avrebbe $x = xyy^{-1} = 0$.

9. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

   - Infatti: $(xy)x^{-1}y^{-1} = 1$.

10. $x > 0$ *implica* $-x < 0$

    - Infatti: se $x > 0$ allora $0 = x - x > 0 - x = -x$.

11. $xx > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

    - Infatti: se $x > 0$ allora $xx > 0$ mentre se $x < 0$ si ha $xx = (-x)(-x) > 0$.

12. $1 \neq 0$

    - Infatti: se fosse $1 = 0$ si avrebbe, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x = x\,1 = x\,0 = 0$.

13. $1 > 0$

    - Infatti: $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

14. $x > 0$ *implica* $x^{-1} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

    - Infatti: se $x > 0$ e $x^{-1} < 0$ allora $1 = xx^{-1} < 0$.

Possiamo ora costruire un modello di $\mathbb{R}$ identificando gli elementi di $\mathbb{R}$ con i punti di una retta euclidea su cui è fissato un punto 0 ed un punto 1.

Si dice positivo il verso di percorrenza da 0 ad 1 e si dice altresì positivo un punto (elemento di $\mathbb{R}$) che sta dalla stessa parte di 1 rispetto a 0 e negativo in caso contrario.

Si definisce somma di due elementi x ed y l'elemento $x + y$ individuato dal secondo estremo del segmento composto affiancando i segmenti di estremi 0 ed x e 0 ed y come si vede in figura2.

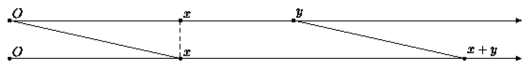

Figure 2.1: Costruzione della somma di due numeri reali

Si definisce il prodotto di due elementi x ed y mediante la costruzione indicata in figura**??**.

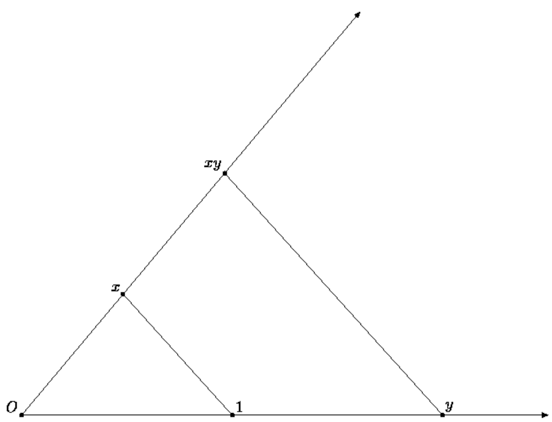

Figure 2.2: Costruzione del prodotto di due numeri reali

Con le operazioni di somma e di prodotto e la relazione d'ordine introdotte si può dimostrare che le proprietà richieste sono verificate e permettono di identificare nella retta euclidea un buon modello dei numeri reali.

Occorre ora identificare in $\mathbb{R}$ l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

A questo scopo definiamo il concetto di sottoinsieme induttivo in $\mathbb{R}$

Definizione 2.1 *Sia $E \subset \mathbb{R}$, diciamo che E è un insieme induttivo se soddisfa le due seguenti proprietà:*

1. $1 \in E$
2. $x \in E \Rightarrow x + 1 \in E$

Osserviamo che esistono certamente insiemi induttivi in quanto, ad esempio, $\mathbb{R}$ stesso è un insieme induttivo; è pure utile osservare che anche

$$\{x \in \mathbb{R} \;:\; x \geq 1\}$$

è un insieme induttivo.

Definizione 2.2 *Sia $\mathcal{E}$ l'insieme degli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$; definiamo*

$$\mathbb{N} = \bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$$

La definizione assicura che $\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2 *$\mathbb{N}$ è non vuoto, $1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ed inoltre vale la seguente proprietà:*

$$\textit{se } A \subset \mathbb{N} \textit{ è un insieme induttivo allora } A = \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Dal momento che 1 appartiene ad ogni sottoinsieme induttivo e dal momento che $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 1\}$ è un insieme induttivo si ha che $1 \in \mathbb{N}$ ed inoltre $n \geq 1$ se $n \in \mathbb{N}$.

Per provare la seconda affermazione possiamo osservare che se A è un insieme di $\mathbb{N}$ induttivo, allora evidentemente $A \in \mathcal{E}$ e pertanto $A \supset \mathbb{N}$ onde $A = \mathbb{N}$ □

L'ultima affermazione del teorema 2.2 è nota come **principio di induzione**.

Applicando il principio di induzione all'insieme

$$B = A \cup \{n \in \mathbb{N} \ : \ n < n_0 \}$$

possiamo dedurre il seguente corollario:

Corollario 2.1 *Sia $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, e supponiamo che sia $A \subset \mathbb{N}$ tale che*

1. $n_0 \in A$
2. $n \in A \ \Rightarrow \ n+1 \in A$

Allora

$$A \supset \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq n_0 \} \ .$$

Definizione 2.3 *Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, e sia $a_k \in \mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; definiamo*

$$\sum_{k=n}^{n} a_k \ = \ a_n \quad , \quad \sum_{k=n}^{m+1} a_k \ = \ a_{m+1} + \sum_{k=n}^{m} a_k \quad .$$

$$\prod_{k=n}^{n} a_k \ = \ a_n \qquad \prod_{k=n}^{m+1} a_k \ = \ a_{m+1} \cdot \prod_{k=n}^{m} a_k \quad .$$

Definizione 2.4 *Chiamiamo insieme dei numeri interi l'insieme*

$$\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{R} \ : \ a = m - n \ , \ m, n \in \mathbb{N}\} \ ,$$

inoltre diciamo insieme dei numeri razionali l'insieme

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{R} \ : \ q = mn^{-1} = m/n \ , \ m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Non entriamo nel dettaglio delle proprietà di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, ricordiamo solo che

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Definizione 2.5 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se*

$$\forall a \in A \; , \;\; a \leq M$$

Diciamo che $m \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$\forall a \in A \; , \;\; a \geq m$$

Chiamiamo

$$M(A) = \{M \in \mathbb{R} \; : \; \forall a \in A \; , \; a \leq M\}$$

$$m(A) = \{m \in \mathbb{R} \; : \; \forall a \in A \; , \; a \geq m\}$$

In altre parole $M(A)$ è l'insieme dei maggioranti di A, mentre $m(A)$ è l'insieme dei minoranti di A.

Osserviamo che

$$M(\varnothing) = m(\varnothing) = \mathbb{R} \;\; .$$

Definizione 2.6 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che A è un insieme superiormente limitato se $M(A) \neq \varnothing$.*

Diciamo che A è un insieme inferiormente limitato se $m(A) \neq \varnothing$.

Diciamo che A è limitato se A è sia superiormente che inferiormente limitato, cioè se tanto $M(A)$ quanto $m(A)$ sono non vuoti.

Definizione 2.7 *Diciamo che $A \subset \mathbb{R}$ ammette minimo (massimo) se esiste $m \in A$ $(M \in A)$ tale che $m \leq a$ $(M \geq a)$ per ogni $a \in A$*

Scriveremo in tal caso

$$m = \min A \quad , \quad M = \max A$$

Osserviamo che non sempre è vero che un insieme di numeri reali ammette minimo o massimo: si consideri ad esempio

$$A = \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad A = \{x \in \mathbb{R} \; : \; 0 < x < 1\}$$

Osserviamo anche che

$$\min \; A \;\; = \;\; m(A) \cap A \quad , \quad \max \; A \;\; = \;\; M(A) \cap A$$

e che tali insiemi, se non sono vuoti, contengono un solo elemento.

Teorema 2.3 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ se A è inferiormente limitato allora $m(A)$ ammette massimo, mentre se A è superiormente limitato $M(A)$ ammette minimo.*

Dimostrazione. Proviamo ad esempio che se A è inferiormente limitato allora $m(A)$ ammette massimo.

Si ha

$$m \leq a \qquad \forall m \in m(A) \ , \ \forall a \in A$$

e pertanto per la 2.1

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad m \leq \alpha \leq a \qquad \forall m \in m(A), \ \forall a \in A$$

Pertanto si può affermare che

$$\alpha = \max \ m(A)$$

□

Definizione 2.8 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A inferiormente limitato; definiamo estremo inferiore di A e lo indichiamo con $\inf A$, il massimo dei minoranti di A, definiamo cioè*

$$\inf \ A \ = \ \max \ m(A).$$

Analogamente se A è superiormente limitato definiamo estremo superiore di A e lo indichiamo con $\sup A$, il minimo dei maggioranti di A, definiamo cioè

$$\sup \ A \ = \ \min \ M(A).$$

Definiamo inoltre

- $\inf A = -\infty$, *se A non è inferiormente limitato*
- $\sup A = +\infty$, *se A non è superiormente limitato*
- $\inf \ \varnothing = +\infty$
- $\sup \ \varnothing = -\infty$

È importante trovare una caratterizzazione dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore di un insieme.

Teorema 2.4 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A inferiormente limitato; allora $\lambda = \inf A$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1. $\lambda \leq a \quad \forall a \in A$

2. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$*

Dimostrazione. $\lambda = \inf A \;\Leftrightarrow\; \lambda = \max\, m(A) \;\Leftrightarrow\; \lambda \in m(A)$
e
$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \lambda + \varepsilon \notin m(A)\ .$
D'altra parte
$\lambda \in m(A) \;\Leftrightarrow\; \lambda \leq a \;\; \forall a \in A \;\Leftrightarrow (1);$
mentre
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \lambda + \varepsilon \notin m(A) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A \;:\; a_\varepsilon < \lambda + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; (2)$ □
In maniera analoga si può dimostrare

Teorema 2.5 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato; allora $\mu = \sup\, A$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1. *$\mu \geq a \quad \forall a \in A$*

2. *$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a_\varepsilon \in A \;:\; a_\varepsilon > \mu - \varepsilon$*

Dal momento che $\inf A = -\infty$ e $\sup A = +\infty$ se, rispettivamente, A non è inferiormente, o superiormente limitato,si ha che

Teorema 2.6 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ allora*

1. *$\inf\;\; A = -\infty \;\;\Leftrightarrow\;\; \forall k \in \mathbb{R} \;\; \exists a_k \in A$ tale che $a_k < k$*

2. *$\sup\;\; A = +\infty \;\;\Leftrightarrow\;\; \forall k \in \mathbb{R} \;\; \exists a_k \in A$ tale che $a_k > k$*

Proviamo a questo punto che l'insieme dei numeri interi non è superiormente limitato; proviamo cioè che

Teorema 2.7 - *Principio di Archimede - $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{Z} \;:\; n \geq x$*

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$y > n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$

allora $y \in M(\mathbb{Z})$ e

$$\lambda = \sup \mathbb{Z} \in \mathbb{R}$$

Pertanto, da

$$\lambda \geq n \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$

possiamo dedurre che

$$\lambda \geq n + 1 \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$

e

$$\lambda - 1 \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ma ciò contraddice il teorema 2.5
Infatti per $\varepsilon = 1$ non esiste alcun $n \in \mathbb{Z}$ tale che $\lambda - 1 < n$. □

Lemma 2.1 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n_x \in \mathbb{Z}$ tale che*

$$n_x \leq x < n_x + 1 \ .$$

Inoltre si ha $n_x = \max\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \leq x\}$.

Dimostrazione. Definiamo

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \leq x\} \ .$$

Evidentemente A è superiormente limitato e non vuoto in quanto, per il teorema 2.7, esiste $-n_0 \in \mathbb{Z}$, $-n_0 \geq -x$; si può pertanto affermare che $n_0 \in a$

$$\lambda = \sup A \ \in \mathbb{R}$$

Se per assurdo si avesse che

$$\forall n \in A \quad \text{si abbia} \ \ n + 1 \in A$$

avremmo allora che $A \supset \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_1\}$ e quindi A non potrebbe risultare limitato.

Quindi è lecito affermare che

$$\text{esiste } n_x \in A \text{, tale che } n_x + 1 \notin A;$$

da cui, essendo n_x e di conseguenza $n_x + 1$ interi, si ha

$$n_x \leq x < n_x + 1 \ .$$

Osserviamo inoltre che, se esistesse $n \in A$, $n > n_x$, si avrebbe $n \geq n_x + 1 > x$ ed $n \notin A$. □

E' pertanto lecito porre:

Definizione 2.9 *Sia $x \in \mathbb{R}$, definiamo $E(x)$, parte intera di x, come*

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \leq x\}$$

Osserviamo che $E(x)$ è il più grande intero più piccolo di x.

Definizione 2.10 *Sia $x \in \mathbb{R}$, definiamo $|x|$, modulo, o valore assoluto, o norma di x :*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Teorema 2.8 *Sono verificati i seguenti fatti,* $\forall a, x, y \in \mathbb{R}$ *:*

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
3. $|xy| = |x|\ |y|$
4. $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$
6. $||x| - |y|| \leq |x-y|$
7. $|x| < \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

Dimostrazione. (1), (2) e (3) seguono immediatamente dalla definizione di modulo; per quel che riguarda la (4) si noti che

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq a \ \text{ oppure } \ -a \leq x \leq 0 \ .$$

Proviamo ora la (5): per (4) si ha

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{e} \quad -|y| \leq y \leq |y| \ .$$

Pertanto, sommando membro a membro,

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

e la tesi, riutilizzando la (4).

Per quel che riguarda (6), si ha

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |x-y| + |x| \ ;$$

perciò

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

e, da (4), la tesi.

Infine, per quel che riguarda la (7), se fosse $x \neq 0$, si potrebbe scegliere ε tale che $0 < \varepsilon < |x|$. □

Definizione 2.11 *Sia* $x \in \mathbb{R}$*, definiamo per ogni* $n \in \mathbb{N}$:

$$x^0 = 1 \quad , \quad x^n = xx^{n-1}$$

x^n *si dice potenza ennesima di base* x*.*

Definiamo inoltre, se $x \neq 0$*,*

$$x^{-n} = 1/x^n \ .$$

Teorema 2.9 *Siano $x, y \in \mathbb{R}$; per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha*

$$x^{n+m} = x^n x^m \tag{2.3}$$

$$(x^n)^m = x^{nm} \tag{2.4}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

Fin qui abbiamo definito cosa intendiamo per numero reale, naturale, intero e razionale ma non abbiamo introdotto un simbolismo adeguato.

Abbiamo fino ad ora identificato un numero utilizzando un simbolo, ma è chiaro che in tal modo possiamo utilizzare contemporaneamente solo pochi numeri dato che, per chiarezza, è necessario servirsi solo di un piccolo numero di segni (simboli o cifre) diversi; è quindi utile introdurre un sistema di rappresentazione che utilizzi solo un numero piccolo di cifre e sia in grado di fornire una adeguata rappresentazione dei numeri,anche molto grandi, che ci interessano.

Tale tipo di rappresentazione fu introdotta in Europa da Leonardo Pisano, detto Fibonacci, cioè figlio di Bonaccio attorno al 1400, ma era impiegata dagli arabi già da molto tempo.

Essa prende il nome di notazione posizionale e si fonda sul seguente semplice fatto

Lemma 2.2 *Per ogni $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, e per ogni $b \in \mathbb{N}$, esistono e sono unici $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tali che*

$$a = bq + r \quad , \quad r < b \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Posto $q = E(a/b)$ si ha

$$q \leq a/b < q + 1 \quad \text{e} \quad bq \leq a < b(q + 1)$$

Pertanto, posto $r = a - bq$ si ha $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e

$$bq + r = a < bq + b \quad \text{da cui} \quad r < b$$

□

2.1 Rappresentazione dei numeri naturali in base b

Siano $a_0, b \in \mathbb{N}$, $a_0 \geq b > 1$; e definiamo il seguente algoritmo

per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ indichiamo con a_n e c_n gli unici elementi di $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (vedi il lemma 2.2) tali che

$$a_n = a_{n+1} b + c_n \quad , \quad c_n < b \tag{2.8}$$

I numeri a_n così generati soddisfano interessanti proprietà:

1. $a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; a_{n+1} < a_n$ infatti
   - Dal momento che $a_{n+1} = E(a_n/b)$ e poiché $b > 1$

$$a_{n+1} \leq a_n/b < a_n$$

2. Esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \neq 0$ ed $a_{n_0+1} = 0$
   - Se $a_n \neq 0$ implicasse $a_{n+1} \neq 0$ avremmo, per il principio di induzione che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si avrebbe

$$a_1 \leq a_0 - 1 \quad \text{essendo} \quad a_1 < a_0$$

   ed inoltre si potrebbe affermare che

$$a_n \leq a_0 - n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} < a_n \leq a_0 - n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq a_0 - (n+1)$$

   Ne verrebbe pertanto, per il principio di induzione, che

$$a_n \leq a_0 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   e ciò non è possibile in quanto, per $n > a_0$, si avrebbe $a_n < 0$

3. Risulta:

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n_0} c_k b^k.$$

   - Infatti

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 b &= c_0 \\ a_1 - a_2 b &= c_1 \\ a_2 - a_3 b &= c_2 \\ \cdots\cdots &= \cdots \\ a_{n_0} &= c_{n_0} \end{aligned}$$

   da cui moltiplicando la seconda uguaglianza per b, la terza uguaglianza per b^2 e così via fino a moltiplicare l'ultima per b^{n_0} si ottiene

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 b &= c_0 \\ a_1 b - a_2 b^2 &= c_1 b \\ a_2 b^2 - a_3 b^3 &= c_2 b^2 \\ \cdots\cdots &= \cdots \\ a_{n_0} b^{n_0} &= c_{n_0} b^{n_0} \end{aligned}$$

   e sommando membro a membro si ottiene

$$a_0 - a_1 b + a_1 b - a_2 b^2 + a_2 b^2 - a_3 b^3 + \;\ldots\ldots\; - a_{n_0} b^{n_0} = \\ = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \;\ldots\ldots\; + c_{n_0} b^{n_0} \qquad (2.9)$$

e cioè

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n_0} c_k b^k$$

È evidente a questo punto che possiamo identificare in maniera univoca il numero a_0 mediante la sequenza dei numeri c_k, che risultano interi positivi o nulli, minori di b.

In altre parole conveniamo di rappresentare in base b il numero a_0 mediante l'allineamento ordinato dei numeri c_k trovati seguendo il procedimento descritto; definiamo cioè

$$r(a_0) = c_{n_0} c_{n_0-1} c_{n_0-2} \ldots\ldots\ c_2 c_1 c_0.$$

Osserviamo esplicitamente che

$$0 \leq c_k < b$$

e che

$$r(a_0) = a_0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 < b$$

Possiamo verificare che, per come è stata costruita

1. La rappresentazione in base b di un numero naturale è unica;

2. Ogni allineamento finito di cifre in base b

$$\alpha_k \qquad , \qquad 0 \leq \alpha_k < b \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots, n_0$$

con $\alpha_{n_0} \neq 0$, identifica un numero $a \in \mathbb{N}$ mediante la

$$a = \sum_{k=0}^{n_0} \alpha_k b^k$$

Si può pertanto concludere che ogni numero naturale può essere individuato non appena si disponga di b simboli diversi che chiameremo cifre.

Usualmente si adopera per questo scopo un numero di simboli o cifre che è pari al numero delle dita delle mani di un uomo; tali simboli sono:

$$0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 4 \ , \ 5 \ , \ 6 \ , \ 7 \ , \ 8 \ , \ 9$$

I primi due sono usati per identificare rispettivamente zero (l'elemento neutro rispetto alla somma) ed uno (l'elemento neutro rispetto al prodotto), mentre i successivi servono ad indicare i numeri naturali da due a nove (secondo la terminologia in uso nella lingua italiana). I numeri da dieci in poi si indicano invece facendo ricorso a più di una cifra.

Naturalmente la scelta della base $b = 10$ non è l'unica possibile né è la sola usata frequentemente.

Oltre alla notazione decimale infatti si fa spesso ricorso alla notazione binaria, che corrisponde alla scelta $b = 2$ e che fa uso delle sole cifre

$$0 \quad , \quad 1$$

alla notazione ottale, che corrisponde alla scelta $b = 8$ e usa le cifre

$$0 \; , \; 1 \; , \; 2 \; , \; 3 \; , \; 4 \; , \; 5 \; , \; 6 \; , \; 7$$

e alla notazione esadecimale che corrisponde alla scelta $b = 16$ (decimale) e che fa uso della cifre

$$0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\;,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,8\,,\,9\,,\,A\,,\,B\,,\,C\,,\,D\,,\,E\,,\,F$$

Osservazione. Il ruolo della base $b = 2$ è diventato basilare in seguito allo sviluppo degli elaboratori; infatti la memoria di un elaboratore è in grado di registrare in ogni singola posizione di memoria due stati: attivo e non attivo, vero e falso, 1 e 0. Può pertanto in maniera semplice memorizzare un numero come una sequenza di stati binari.

Le basi $b = 8$ e $b = 16$ sono di conseguenza importanti in quanto $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$ e la conversione di base tra numeri binari ottali o esadecimali risulta molto semplice. A titolo di esempio osserviamo che le seguenti rappresentazioni in base 2, 8 e 16 corrispondono al valore decimale 255

11	111	111		1111	1111
3	7	7		F	F

Table 2.1:

È anche utile ricordare che la numerazione in base 2 ha il vantaggio di usare poche cifre e quindi di necessitare di semplicissime tabelline di addizione e di moltiplicazione, mentre ha lo svantaggio di dover usare molte cifre anche per numeri piccoli.

Al contrario la numerazione in base 16 ha tabelline di addizione e di moltiplicazione complicate ma è in grado di rappresentare grandi numeri con poche cifre.

$\square$

Dal momento che si ha

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$$

possiamo ottenere anche la rappresentazione in base b di ogni numero intero.

Per quanto concerne i numeri reali non interi non sarà in generale possibile identificarli mediante un allineamento finito di cifre, possiamo però provare che ogni numero reale si può approssimare con arbitraria precisione mediante allineamenti finiti di cifre.

2.2 *Approssimazione dei numeri reali in base b*

Anche in questo caso possiamo definire un algoritmo che è in grado di generare un allineamento di cifre, che può essere infinito, mediante il quale ogni numero reale può essere approssimato con arbitraria precisione.

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e sia $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ definiamo

$$\begin{aligned} c_0 &= E(x) \\ c_1 &= E((x - c_0)b) \\ c_2 &= E((x - c_0 - \frac{c_1}{b})b^2) \\ \cdots &= \cdots\cdots \\ c_n &= E((x - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b^{-k})b^n) \end{aligned}$$

Definiamo inoltre

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b^{-k} \tag{2.10}$$

x_n si chiama approssimazione in base b di ordine n del numero reale x.

Usualmente si scrive

$$x_n = c_0, c_1 c_2 c_3 .....c_n$$

oppure

$$x_n = c_0.c_1 c_2 c_3 .....c_n$$

Se $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ si definisce

$$x_n = -(-x)_n$$

Nel seguito tuttavia faremo sempre riferimento al caso in cui $x > 0$

1. $0 \le x - x_n < b^{-n} \qquad , \qquad 0 \le c_{n+1} < b$

   - Infatti osservando che

     $$c_n = E((x - x_{n-1})b^n) \quad \text{e che} \quad x_n = x_{n-1} + c_n b^{-n}$$

     si ha

     $$c_n \le (x - x_{n-1})b^n < c_n + 1$$

     ed anche

     $$c_n b^{-n} \le x - x_{n-1} < c_n b^{-n} + b^{-n}$$

     da cui

     $$0 \le x - x_n < b^{-n}$$

Inoltre moltiplicando la precedente disuguaglianza per b^{n+1} si ottiene

$$0 \leq (x - x_n)b^{n+1} < b$$

e

$$c_{n+1} = E((x - x_n)b^{n+1}) < b$$

2. Si deduce quindi subito che

$$x \geq x_n$$

Ciò si esprime dicendo che x_n è una approssimazione per difetto del numero reale x. Si vede altresì che l'approssimazione di x può essere fatta con precisione arbitraria pur di aumentarne l'ordine. Infatti

3. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$x = \sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

- Abbiamo già osservato che

  $$x \geq x_n$$

  D'altro canto si ha

  $$x - x_n < 1/b^n$$

  e possiamo anche affermare che

  Se $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ si ha $b^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

  Infatti

  – per $n = 1$ si ha $b > 1$
  – inoltre se $b^n > n$ allora $b^{n+1} > n + 1$ in quanto

  $$b^{n+1} = b^n b > bn \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

  Poichè per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varepsilon > 1/n$ possiamo allora concludere che

  $$\varepsilon > 1/n_\varepsilon > 1/b^{n_\varepsilon}.$$

Si possono altresì provare i seguenti risultati.

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, esiste $q \in \mathbb{Q} \ : \ |x - q| < \varepsilon$.

   - Scelto $q = x_{n_\varepsilon}$, con $b^{n_\varepsilon} > 1/\varepsilon$, è immediato verificare che $q \in \mathbb{Q}$ e che $|x - q| < \varepsilon$.

2. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$

3. Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$, $x < y$, esiste $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tale che $x < z < y$

   Infatti detto $z = (x + y)/2$ e scelto $q = z_{n_\varepsilon}$ tale che $b^{n_\varepsilon} > 3/(y - x)$, è immediato verificare che $q \in \mathbb{Q}$ e $x < q < y$.

   La seconda affermazione segue dall'esistenza di almeno un irrazionale; se infatti α è un numero irrazionale compreso in $(0, 1)$, ad esempio $\alpha = \sqrt{2} - 1$, avremo che

$$x + \alpha(y - x) \tag{2.11}$$

   non è razionale (se lo fosse, poichè $x, y \in \mathbb{Q}$ si avrebbe anche $\alpha \in \mathbb{Q}$) ed è compreso in (x, y)

Osserviamo che quindi anche tra due reali $x < y$ esiste un irrazionale, infatti si possono trovare $x' < y'$ con $x < x' < y' < y$

Questo risultato si esprime usualmente dicendo che $\mathbb{Q}$ **è denso in** $\mathbb{R}$.

In realtà il risultato provato è più preciso in quanto assicura che il sottoinsieme dei numeri razionali che si possono scrivere nella forma usata in 2.10 è denso in $\mathbb{R}$.

Nel caso in cui $b = 10$ i numeri che si possono scrivere in tale forma si chiamano **numeri decimali finiti** .

Osservazione. È d'uso, lavorando con i numeri reali, adoperare la retta euclidea come modello dei numeri reali.

Infatti, assumendo i postulati della geometria euclidea ed il postulato di continuità di Dedekind, si possono definire sulla retta le operazioni di addizione e moltiplicazione, una relazione di equivalenza ed una d'ordine, in modo che siano verificati gli assiomi che identificano i numeri reali. □

È inoltre utile costruire una rappresentazione geometrica del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Ciò può essere ottenuto identificando $\mathbb{R}^2$ con un piano.

Consideriamo pertanto un piano α e fissiamo su di esso due rette r_1 ed r_2, dette **assi cartesiani**, che si intersecano nel punto O, detto **origine**.

Usualmente adopereremo le lettere x ed y per indicare i punti di r_1 ed r_2 rispettivamente; per tale ragione diremo che r_1 è l'asse x e che r_2 è l'asse y.

Ognuna delle rette può essere interpretata come $\mathbb{R}$ ed è chiaro che procedendo come in figura**??** si può identificare ogni coppia di numeri reali con un punto del piano α e viceversa.

Qualora r_1 ed r_2 siano tali che ruotando r_1 in senso antiorario, di un angolo inferiore ad un angolo piatto, fino a sovrapporla ad r_2, i punti che rappresentano le unità sulle due rette stanno dalla stessa parte rispetto al punto O, la rappresentazione si chiama **destrorsa**; in caso contrario si dice **sinistrorsa**.

Qualora le rette r_1 ed r_2 siano perpendicolari, la rappresentazione si chiama **ortogonale**.

Qualora si scelgano in r_1 ed r_2 segmenti unitari uguali, la rappresentazione si dice **monometrica**.

Usualmente adopereremo una rappresentazione *destrorsa, ortogonale e monometrica*, che chiamiamo **sistema cartesiano**.

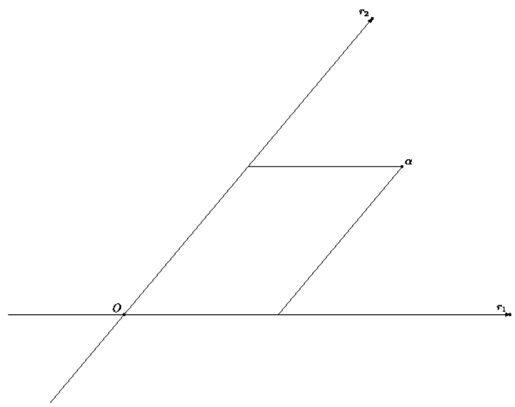

Figure 2.3: Sistema di riferimento Cartesiano

Per concludere ricordiamo alcune notazioni:

Definizione 2.12 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, definiamo*

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ a < x < b \ \} \\
[a,b] &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ a \leq x \leq b \ \} \\
[a,b) &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ a \leq x < b \ \} \\
(a,b] &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ a < x \leq b \ \} \\
(a,+\infty) &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x > a \ \} \\
a,+\infty) &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x \geq a \ \} \\
(-\infty,a) &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x < a \ \} \\
(-\infty,a] &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x \leq a \ \}
\end{aligned}
$$

Definiamo inoltre

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}_+ \quad &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x > 0 \ \} \\
\overline{\mathbb{R}}_+ \quad &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x \geq 0 \ \} \\
\mathbb{R}_- \quad &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x < 0 \ \} \\
\overline{\mathbb{R}}_- \quad &= \{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ x \leq 0 \ \}
\end{aligned}
$$

Definizione 2.13 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che A è aperto se*

$$\forall x \in A \ \ \exists r > 0 \quad \text{tale che} \quad (x - r, x + r) \subset A$$

Diciamo che A è chiuso se A^c è aperto.

Diciamo che A è compatto se è chiuso e limitato.