1. Funzioni Reali di una Variabile Reale

Il concetto di funzione è di fondamentale importanza;

Definizione 1.1 *Diciamo che è data una funzione reale di una variabile reale se sono assegnati un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ ed una corrispondenza f che ad ogni elemento $x \in D$ associa uno ed un solo elemento $y \in \mathbb{R}$.*

Definizione 1.2 *Chiamiamo D dominio della funzione e denotiamo con $f(x)$ (si legge f di x) il corrispondente di x secondo la legge assegnata f; spesso useremo il termine valore di f in x oppure f calcolata in x per indicare $f(x)$ e chiamiamo x argomento di f(x); per indicare la corrispondenza f scriviamo anche $x \mapsto f(x)$ oppure $x \mapsto y = f(x)$.*

Chiamiamo rango di f l'insieme

$$R(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D,\ y = f(x)\}.$$

Per indicare una funzione scriviamo $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, specificando prima della freccia il dominio D di f, ma non curandoci di precisare, dopo la freccia, il suo rango.

Osservazione. Distinguiamo fin d'ora due notazioni che saranno usate con significati completamente diversi. Useremo f per indicare la legge di corrispondenza di una funzione ed $f(x)$ per indicare il valore di f in x, (quindi $f(x)$ è un numero reale). $\square$

Spesso, nell'assegnare una funzione, daremo soltanto la legge di corrispondenza f; in tal caso sottointendiamo sempre che D è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi possono essere usati come argomenti di f.

Ad ogni funzione è possibile associare un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (che indicheremo spesso con $\mathbb{R}^2$) che la caratterizza in maniera completa e dalla quale è completamente caratterizzato.

Definizione 1.3 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo grafico di f*

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in D \ , \ y = f(x)\}$$

Mediante la definizione 1.2 è possibile associare in maniera univoca un sottoinsieme G $(= G(f))$ ad ogni funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Non è altrettanto vero che ad ogni sottoinsieme $G \subset \mathbb{R}^2$ è possibile associare una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Ciò accade solo nel caso in cui G soddisfi una particolare proprietà.

Definizione 1.4 *Diciamo che $G \subset \mathbb{R}^2$ soddisfa la proprietà (g) se*

$$(g) \qquad (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$$

Teorema 1.1 *Per ogni $G \subset \mathbb{R}^2$, G soddisfacente la proprietà (g), esistono unici $D \subset \mathbb{R}$ ed $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $G = \mathrm{gph} f$.*

Dimostrazione. Definiamo $D = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in G\}$ e sia $f(x) = y$ dove y è l'unico elemento di $\mathbb{R}$ tale che $(x, y) \in G$.

Dal momento che G soddisfa la proprietà (g), D ed f verificano le proprietà richieste. □

Definizione 1.5 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $A \subset D$, definiamo restrizione di f ad A la funzione $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x)$ $\forall x \in A$.*

Indichiamo con $f|_A$ la restrizione di f ad A.

Siano invece $B \supset D$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$; diciamo che g è un prolungamento di f a B se $g|_D = f$.

Definizione 1.6 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che*

1. *f è iniettiva se*

$$\forall x_1, x_2 \in D \qquad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

In altre parole f è iniettiva se ogni retta parallela all'asse delle x interseca $\mathrm{gph} f$ in un solo punto.

2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che f è surgettiva su A se $R(f) = A$, cioè se*

$$\forall y \in A \quad \exists x \in D \quad : \quad y = f(x).$$

Per esprimere che f è surgettiva su A diremo anche che $f : D \longrightarrow A$ è surgettiva. (Si osservi che in questo caso abbiamo specificato dopo la freccia il rango di f).

Sia $f : D \longrightarrow A$, diciamo che f è bigettiva se è iniettiva e surgettiva.

Osservazione. Ogni funzione è surgettiva sul suo rango. □

Definizione 1.7 *Siano $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo*

1. *$f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ come $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$*
2. *$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ come $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$*

3. $\frac{1}{g} : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *come* $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}\ \forall x \in D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$

Definizione 1.8 *Siano* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *e supponiamo che* $R(g) \subset D$.

Definiamo funzione composta di g *ed* f *la funzione che ad ogni* $x \in B$ *associa* $f(g(x)) \in \mathbb{R}$.

Definizione 1.9 *Diciamo che una funzione* $f : D \longrightarrow A$ *è invertibile se esiste una funzione* $g : A \longrightarrow D$ *tale che*

$$f(g(y)) = y \qquad \forall y \in A \tag{1.1}$$
$$g(f(x)) = x \qquad \forall x \in D \tag{1.2}$$

Per indicare g *usiamo il simbolo* f^{-1} *cosicché*

$$f^{-1} : A \longrightarrow D$$

è l'inversa di f.

Teorema 1.2 *Sia* $f : D \longrightarrow A$, f *è invertibile se e solo se* f *è bigettiva.*

Dimostrazione. Supponiamo f invertibile; allora

$$\forall y \in A \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

e ciò prova che f è surgettiva su A.

Siano poi $x_1, x_2 \in D$ e sia $f(x_1) = f(x_2)$, allora

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$$

e ciò prova l'iniettività di f.

Supponiamo viceversa che f sia bigettiva e definiamo, per ogni $y \in A$, $f^{-1}(y) = x$ dove x è l'unico elemento di D tale che $f(x) = y$.

In altre parole

$$f^{-1}(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x) \quad .$$

Si ha allora

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \qquad \forall x \in D$$
$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \qquad \forall y \in A.$$

$\square$

Definizione 1.10 *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e supponiamo che* D *sia simmetrico rispetto all'origine (cioè* $x \in D \Rightarrow -x \in D$*); diciamo che* f *è una funzione pari se*

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in D;$$

diciamo che f *è una funzione dispari se*

$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall x \in D.$$

Definizione 1.11 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è crescente (strettamente crescente) se*

$$\forall x, y \in D, \qquad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) \qquad (f(x) < f(y)) \ .$$

Diciamo che f è decrescente (strettamente decrescente) se

$$\forall x, y \in D, \qquad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y) \qquad (f(x) > f(y))$$

Definizione 1.12 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è monotòna (strettamente monotòna) se f è crescente oppure decrescente (strettamente crescente oppure strettamente decrescente).*

Teorema 1.3 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, f è monotòna (strettamente monotòna) se e solo se*

$$\forall x, y, z \in D, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad [f(y) - f(x)][f(z) - f(y)] \geq 0 \ (> 0).$$

Dimostrazione. La sufficienza è ovvia, proviamo la necessità.

Siano $a, b, x_1, x_2 \in D$, $a < b \leq x_1 \leq x_2$,

$$[f(a) - f(b)][f(b) - f(x_1)][f(b) - f(x_1)][f(x_1) - f(x_2)] \geq 0;$$

perciò $f(x_1) - f(x_2)$ ha lo stesso segno di $f(a) - f(b)$ ed f è monotona in $D \cap [b, +\infty)$.

In maniera analoga si prova che f è monotona su $D \cap (-\infty, b]$ e quindi su D in quanto se $a < b < c$

$$[f(a) - f(b)][f(b) - f(c)] \geq 0$$

Nel caso in cui f sia strettamente monotona tutte le disuguaglianze sono da intendersi in senso stretto. □

Teorema 1.4 *Sia $f : D \longrightarrow A$ surgettiva e strettamente monotona, allora f è invertibile ed $f^{-1} : A \longrightarrow D$ è strettamente monotona.*

Più precisamente se f è strettamente crescente (decrescente), f^{-1} è strettamente crescente (decrescente).

Dimostrazione. Supponiamo che f sia strettamente crescente e vediamo che f è iniettiva.

Siano $x, y \in D$ tali che $f(x) = f(y)$; se si avesse, per assurdo, $x < y$, si potrebbe dedurre che $f(x) < f(y)$ e ciò è in contrasto con l'ipotesi che $f(x) = f(y)$. Pertanto $x = y$.

Si ha quindi che f è invertibile e $f^{-1}(y) = x$ se e solo se $y = f(x)$ per ogni $x \in D$ e per ogni $y \in A$.

Siano ora $y_1, y_2 \in A$, $y_1 < y_2$ e siano $x_1, x_2 \in D$ in modo che

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{e} \quad y_2 = f(x_2)$$

se fosse $x_1 \geq x_2$ si avrebbe $f(x_1) \geq f(x_2)$ e $y_1 \geq y_2$ e ciò è assurdo.

Se ne deduce che $x_1 < x_2$ e la stretta crescenza di f^{-1}.

□

Definizione 1.13 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è superiormente funzione superiormente limitata limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$f(x) \leq M \qquad \forall x \in D$$

diciamo che f è inferiormente limitata funzione superiormente limitata se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in D$$

diciamo che f è limitata funzione limitata se è sia superiormente che inferiormente limitata.

Osservazione. f è limitata (superiormente) [inferiormente] se e solo se $R(f)$ è limitato (superiormente) [inferiormente]. □

Definizione 1.14 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che $x_0 \in D$ è un punto di minimo assoluto per f se*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in D$$

diciamo che $x_0 \in D$ è un punto di massimo assoluto per f se

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in D$$

Teorema 1.5 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, affinché $x_0 \in D$ sia un punto di minimo (massimo) assoluto per f è sufficiente che f sia decrescente (crescente) in $(-\infty, x_0] \cap D$ e crescente (decrescente) in $[x_0, +\infty) \cap D$.*

Teorema 1.6 *Siano $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $R(g) \subset D$, allora*

- *f strettamente crescente, g strettamente crescente $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ strettamente crescente;*
- *f strettamente crescente, g strettamente decrescente $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ strettamente decrescente;*
- *f strettamente decrescente, g strettamente crescente $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ strettamente decrescente;*
- *f strettamente decrescente, g strettamente decrescente $\Rightarrow$ $f(g(\cdot))$ strettamente crescente.*

Inoltre, le stesse asserzioni valgono abolendo ovunque la parola strettamente.

2. Le Funzioni Elementari

Per costruire modelli che coinvolgono funzioni occorre avere un certo numero di funzioni, che chiameremo elementari, di cui sono note le proprietà.

Usando tali funzioni si possono costruire la maggior parte delle funzioni necessarie per l'impostazione di modelli matematici.

È pertanto molto importante una buona conoscenza e della definizione delle funzioni elementari e delle loro principali proprietà.

Naturalmente la classe delle funzioni elementari, sebbene codificata e delimitata dalla letteratura e dalla tradizione matematica è in qualche modo aperta a nuovi ingressi che si rendano di uso frequente in applicazioni future.

2.1 Le funzioni Potenze

Cominciamo con il definire cosa si intende per potenza di esponente naturale;

Definizione 2.1 *Sia $n \in \mathbb{N}$, definiamo la funzione $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la*

$$p_n(x) = x^n;$$

p_n si dice potenza di esponente n e di base x.

Teorema 2.1 *Sia $n \in \mathbb{N}$, p_n è strettamente crescente in $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione; è innanzi tutto ovvio che p_1 è strettamente crescente in $\overline{\mathbb{R}}_+$ ed inoltre se supponiamo p_n crescente in $\overline{\mathbb{R}}_+$, presi $x > y \geq 0$ si ha

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) > xp_n(y) \geq yp_n(y) = p_{n+1}(y)$$

e p_{n+1} è strettamente crescente su $\overline{\mathbb{R}}_+$ $\square$

Teorema 2.2 *Sia $n \in \mathbb{N}$, n pari, allora*

1. *$p_n(x) = p_n(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$*
2. *p_n è strettamente decrescente su $\overline{\mathbb{R}}_-$*

3. $R(p_n) = \overline{\mathbb{R}}_+$

Dimostrazione.

1. Poichè n è pari si ha $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ e
$$x^n = x^{2k} = (x^2)^k = ((-x)^2)^k = (-x)^{2k} = (-x)^n$$

2. Siano $x < y \leq 0$, allora $-x > -y \geq 0$ e dal teorema 2.2,
$$p_n(x) = p_n(-x) > p_n(-y) = p_n(y)$$

3. È evidente che $R(p_n) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ in quanto $x^n = x^{2k}$ e $x^2 \geq 0$, l'inclusione opposta dipende dal fatto che p_n è una funzione continua e dal teorema dei valori intermedi. Proveremo tale inclusione a suo tempo.

□

Teorema 2.3 *Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari, allora*

1. $p_n(x) = -p_n(-x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$
2. p_n *è strettamente crescente su* $\overline{\mathbb{R}}_-$
3. $R(p_n) = \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

1. Poiché n è dispari si ha $n = 2k + 1$ e
$$p_n(x) = x^{2k+1} = xx^{2k} = -(-x)(-x)^{2k} = -(-x)^n = -p_n(-x)$$

2. Siano $x < y \leq 0$, allora $-x > -y \geq 0$ e, per il teorema 2.2, $-p_n(x) = p_n(-x) > p_n(-y) = -p_n(y)$.

3. Anche in questo caso rimandiamo la dimostrazione al seguito.

□

Abbiamo visto che, se $n \in \mathbb{N}$, n pari, allora $p_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ è strettamente crescente e surgettiva; pertanto p_n è invertibile ed è lecito definire
$$r_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad \textit{come} \qquad r_n = (p_n)^{-1}.$$
Se $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $r_n(x)$ si dice radice n-esima di x.

Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari, abbiamo già visto che $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente e surgettiva; pertanto p_n è invertibile ed è lecito definire

$$r_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad come \qquad r_n = (p_n)^{-1}$$

Se $x \in \mathbb{R}$, $r_n(x)$ si dice radice n-esima di x.

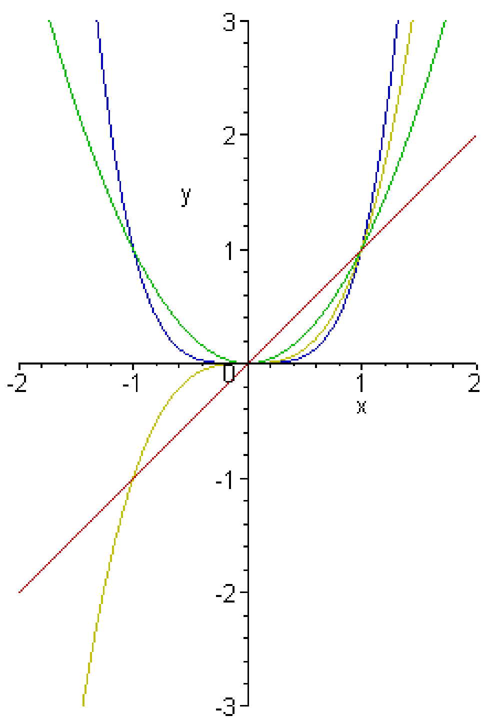


Figure 2.1: Potenze ad esponente naturale

Teorema 2.4 *Sia $n \in \mathbb{N}$*

1. *se n è pari, $r_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ è strettamente crescente;*
2. *se n è dispari, $r_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente.*

Definiamo ancora le potenze ad esponente negativo.

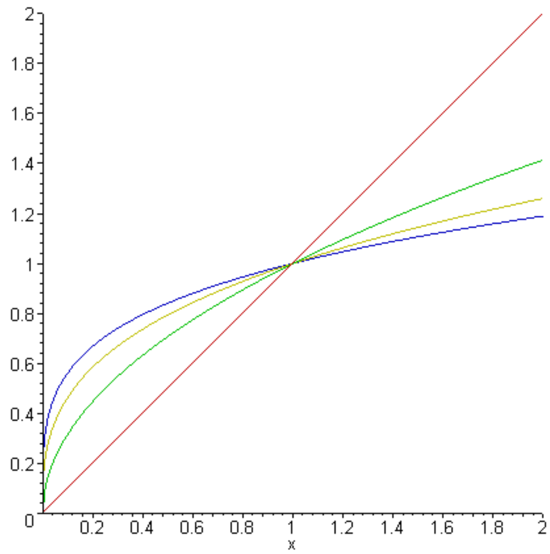
Definizione 2.2 *Sia $n \in \mathbb{N}$, $p_{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita come*

$$p_{-n}(x) = 1/p_n(x)$$

inoltre, $p_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$p_0(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Figure 2.2: Radici ad esponente naturale



Per studiare le proprietà di crescenza, decrescenza e invertibilità di p_{-n} sarà sufficiente fare ricorso al seguente risultato.

Teorema 2.5 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$; allora*

1. *f è (strettamente) crescente $\Leftrightarrow 1/f$ è (strettamente) decrescente;*
2. *f è (strettamente) decrescente $\Leftrightarrow 1/f$ è (strettamente) crescente.*

Definizione 2.3 *Sia $s \in \mathbb{Q}$, $s = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; definiamo la funzione $f_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mediante la*

$$f_s(x) = p_m(r_n(x)) = r_n(p_m(x))$$

Se $x \in \mathbb{R}_+$, $f_s(x)$ si dice potenza ad esponente frazionario di esponente s di base x.

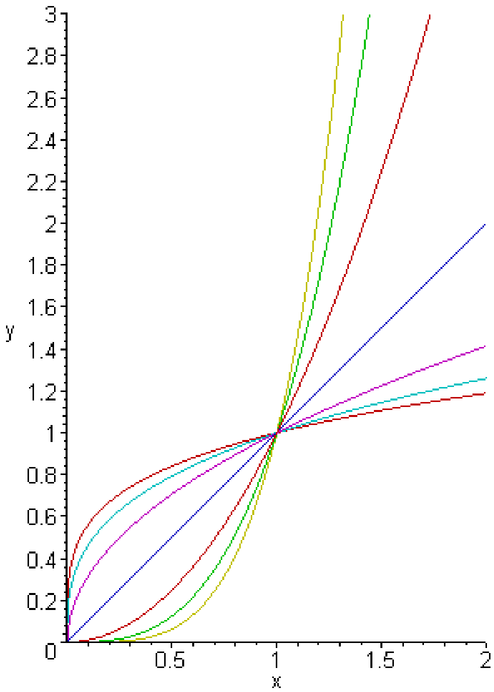
Osservazione. Se $x \in \mathbb{R}_+$ la definizione 2.3 è indipendente dalla rappresentazione di s in forma frazionaria e dall'ordine in cui viene fatta la composizione tra potenza e radice.

Se invece $x \in \mathbb{R}_-$ può accadere che $r_n(p_m(x))$ sia definito anche quando $p_m(r_n(x))$ non lo è.

Inoltre, se m/n, m'/n' sono due diverse rappresentazioni frazionarie dello stesso numero razionale s, può accadere che $r_n(p_m(x))$ sia definito mentre $r_{n'}(p_{m'}(x))$ non lo è.

(Si consideri ad esempio $m = 2$ ed $n = 4$; allora se $x < 0$ si ha che $r_4(p_2(x))$ è definito mentre $p_2(r_4(x))$ no.

Inoltre se $m' = 1$ e $n' = 2$ $\quad r_4(p_2(x))$ è definito mentre $r_2(p_1(x))$ no.) $\square$



[]

Figure 2.3: Potenze ad esponente negativo

Pertanto per valori di $x \in \mathbb{R}_-$ consideriamo la composizione di potenze e radici ove essa ha senso, ma non definiamo in alcun modo la funzione potenza ad esponente razionale.

Ribadiamo ancora che ciò è dovuto al fatto che non è agevole, e talvolta non è possibile, definire in modo univoco la potenza ad esponente razionale in $\mathbb{R}_-$.

Ciò non significa comunque rinunciare a considerare la composizione di una potenza di esponente n e di una radice di indice m, qualora essa abbia senso, anche per valori dell'argomento negativi.

Ad esempio è chiaro che $p_2(r_3(-2))$ risulta perfettamente ed univocamente individuato.

In casi simili tuttavia, pur trattando la funzione composta

$$p_m(r_n(\cdot))$$

non parleremo di potenza ad esponente razionale $\frac{n}{m}$ e non pretenderemo di applicare a $p_m(r_n(\cdot))$le proprietà delle potenze in quanto, come visto, potrebbero risultare false.

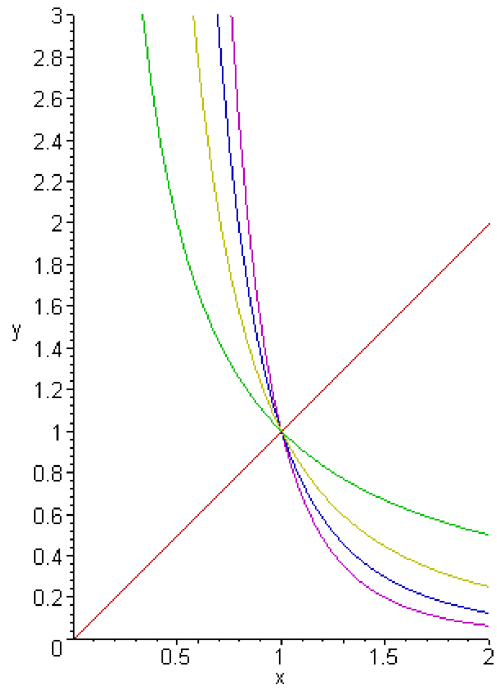
Teorema 2.6 *Sia $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, e sia $f_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, allora f_s è strettamente crescente.*

Dimostrazione. Infatti se $s = \frac{m}{n} > 0$ allora si ha $m, n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$x^s = p_m(r_n(x)) = r_n(p_m(x))$$

è la composizione di due funzioni strettamente crescenti. □

Figure 2.4: Potenze ad esponente positivo



E′ inoltre possibile dimostrare che le usuali regole di calcolo delle potenze naturali continuano a valere anche per le potenze ad esponente razionale In altre parole si può provare che

Se $s, r \in \mathbb{Q}$, e se $x, y \in \mathbb{R}_+$, allora si ha:

1. $x^{s+r} = x^s x^r$
2. $(x^s)^r = x^{sr}$
3. $(xy)^s = x^s y^s$

Si dimostra altresì che

Teorema 2.7 *Se $x > 1$ la funzione $\mathbb{Q} \ni r \mapsto x^r$ è crescente su $\mathbb{Q}$*
In altre parole per $s, r \in \mathbb{Q}$, $s < r$; si ha

$$x^s < x^r$$

Dimostrazione. Si ha

$$x^r - x^s = x^s(x^{r-s} - 1) > 0$$

in quanto

$$x^s > 0 \quad \text{e} \quad x^{r-s} > 1$$

dal momento che essendo $r - s > 0$ la funzione $x \mapsto x^{r-s}$ è crescente ed $x > 1$. $\square$

Per poter definire la potenza ad esponente reale potenza anche per esponenti reali è necessario ricordare che piccole variazioni dell'esponente razionale corrispondono a piccole variazioni della potenza; più precisamente possiamo affermare che:

Teorema 2.8 *Sia $x > 1$ e sia $r \in \mathbb{Q}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$0 < x^r - x^{r-1/n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Sfruttando questa proprietà è facile capire come sia naturale definire x^a per ogni $x > 1$.

Nel caso in cui sia invece $0 < x < 1$ potremo considerare $\frac{1}{x} > 1$, calcolare $\left(\frac{1}{x}\right)^a$ e definire

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a}$$

Se $x = 1$, infine definiamo $1^a = 1$ per ogni a.

Definizione 2.4 *Sia $x > 1$ e sia $a \in \mathbb{R}$; definiamo*

$$x^a = \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \le a\} = \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < a\}$$

La precedente definizione afferma implicitamente che i due estremi superiori che vi figurano sono reali ed uguali; possiamo infatti verificare che

Siano $A = \{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \le a\}$ e $B = \{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < a\}$ allora

$$\sup A = \sup B \in \mathbb{R}$$

Definizione 2.5 *Se $x = 1$ definiamo $1^a = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Se $0 < x < 1$ definiamo $x^a = (1/x)^{-a}$.*

A partire dalla definizione data possiamo verificare che la quantità x^a per $x > 0$ ed $a \in \mathbb{R}$ soddisfa le proprietà che siamo abituati ad usare quando maneggiamo potenze.

se $x, y > 0$ e se $a, b \in \mathbb{R}$, allora

1. $x^a > 0$
2. $x^{a+b} = x^a x^b$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $(xy)^a = x^a y^a$
5. $1/(x^a) = x^{-a}$

2.2 Sulla definizione di potenza reale

Teorema 2.9 *Se $x > 1$ e se $r \in \mathbb{Q}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$0 < x^{r+1/n_\varepsilon} - x^r < \varepsilon$$

Dimostrazione. Per il teorema 2.7 è ovvio che

$$x^{r+1/n} - x^r > 0$$

d'altro canto si ha

$$x^{r+1/n} - x^r = x^r(x^{1/n} - 1)$$

Sia

$$y_n = x^{1/n} - 1$$

da cui

$$x = (y_n + 1)^n > 1 + ny_n$$

ed anche

$$y_n < (x-1)/n$$

Per il teorema **??** (principio di Archimede) si ha allora che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$y_{n_\varepsilon} < \varepsilon / x^r$$

e si ottiene che

$$0 < x^{r+1/n_\varepsilon} - x^r < (\varepsilon/x^r)x^r = \varepsilon$$

□

Corollario 2.1 *Sia $x > 1$ e sia $r \in \mathbb{Q}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$0 < x^r - x^{r-1/n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Dimostrazione. Si ricordi che

$$x^r - x^{r-1/n} = (x^{r+1/n} - x^r)/(x^{1/n})$$

e che

$$x^{1/n} > 1$$

□

Siano $A = \{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \le a\}$ e $B = \{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < a\}$ allora

$$\sup A = \sup B \in \mathbb{R}$$

Infatti intanto è ovvio che $B \subset A$ ed inoltre che $0 \in m(A)$ ed $x^t \in M(A)$ se $t \in \mathbb{Q}$, $t > a$; con il che si prova subito che i due insiemi sono limitati sia superiormente che inferiormente e che posto

$$\alpha = \sup A \qquad , \qquad \beta = \sup B$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proviamo che $\alpha = \beta$.

E' intanto ovvio che $\alpha \geq x^r$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $r < a$; inoltre $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tale che $r_\varepsilon \leq a$ e $x^{r_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon/2$.

Sia ora $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varepsilon/2 > x^{r_\varepsilon} - x^{r_\varepsilon - 1/n_\varepsilon} > 0 \ ;$$

si ha

$$r_\varepsilon - 1/n_\varepsilon < a$$

ed anche

$$x^{r_\varepsilon - 1/n_\varepsilon} = x^{r_\varepsilon} - x^{r_\varepsilon} + x^{r_\varepsilon - 1/n_\varepsilon} > x^{r_\varepsilon} - \varepsilon/2 > \alpha - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \alpha - \varepsilon$$

Ciò è sufficiente per concludere che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r'_\varepsilon \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che } r'_\varepsilon < a \quad e \quad x^{r'_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$$

e pertanto

$$\alpha = \sup B = \beta$$

Teorema 2.10 *se $x, y > 0$ e se $a, b \in \mathbb{R}$, allora*

1. $x^a > 0$

2. $x^{a+b} = x^a x^b$

3. $(x^a)^b = x^{ab}$

4. $(xy)^a = x^a y^a$

5. $1/(x^a) = x^{-a}$

Dimostrazione. Consideriamo come al solito il caso $x, y > 1$.

1. è immediato dalla definizione;

2.
$$x^a = \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < a\} = \sup A$$
$$x^b = \sup\{x^s : s \in \mathbb{Q},\ s < b\} = \sup B$$
$$x^{a+b} = \sup\{x^t : t \in \mathbb{Q},\ t < a + b\} = \sup C$$

Dal momento che $A, B, C \subset \mathbb{R}_+$, avremo concluso se dimostriamo che $C = A \cdot B$ in tal caso infatti si ha

$$\sup C = \sup A \ \sup B$$

.

Intanto è ovvio che

$$C \supset A \cdot B$$

infatti sia $y \in A \cdot B$ allora

$$y = x^r x^s \qquad \text{con} \qquad r, s \in \mathbb{Q},\ r < a,\ s < b$$

da cui

$$y = x^{r+s} \qquad \text{con} \qquad r + s < a + b \quad \text{e} \quad y \in C.$$

D'altro canto sia $w \in C$, allora

$$w = x^t \quad , \quad t \in \mathbb{Q}\ ,\ t < a + b;$$

scelto $r \in \mathbb{Q}$ tale che $t - b < r < a$ e posto $s = t - r < b$ si ha

$$w = x^t = x^{r+s} = x^r x^s \quad , \quad r, s \in \mathbb{Q},\ r < a,\ s < b$$

e pertanto $w \in A \cdot B$.

Le dimostrazioni di (3) e (4) possono essere completate seguendo procedimenti analoghi, ma sono macchinose e non verranno qui approfondite.

Per quanto riguarda (5) osserviamo che $x^a x^{-a} = 1$. □

Definizione 2.6 *Sia $a \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $p_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mediante la*

$$x \mapsto p_a(x) = x^a$$

potenza di esponente a

Teorema 2.11 *Sia $a \in \mathbb{R}$, valgono i seguenti fatti:*

1. *Se $a > 0$ allora p_a è strettamente crescente*

2. *Se $a < 0$ allora p_a è strettamente decrescente*

3. *Se $a \neq 0$ allora $R(p_a) = \mathbb{R}_+ s$*

Dimostrazione.

1. Sia $0 < x < y$, occorre provare che $x^a < y^a$, cioè che $x^a - y^a < 0$; si ha

$$x^a - y^a = x^a(1 - (y/x)^a) \qquad \text{e} \qquad (y/x) > 1$$

pertanto $(y/x)^r > 1$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r \leq a$ e $(y/x)^a > 1$.

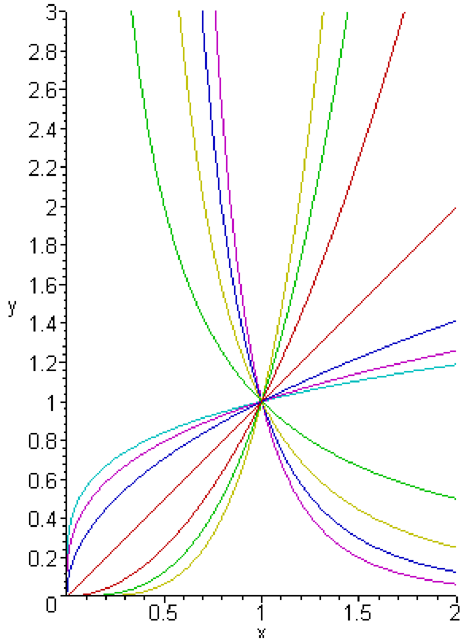


Figure 2.5: Potenze ad esponente reale

2. È immediata conseguenza di (1)

3. Il fatto che $R(p_a) \subset \mathbb{R}_+$ segue dalla definizione di potenza, mentre la dimostrazione dell'inclusione opposta si ottiene mediante il teorema dei valori intermedi.

$\square$

Teorema 2.12 *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, allora p_a è invertibile su $\mathbb{R}_+$ e $p_a^{-1} = p_{1/a}$.*

Dimostrazione. Sarà sufficiente dimostrare che

$$p_a(p_{1/a}(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+$$

e

$$p_{1/a}(p_a(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Si ha infatti

$$p_a(p_{1/a}(y)) = (y^{1/a})^a = y^{a/a} = y$$

e

$$p_{1/a}(p_a(x)) = (x^a)^{1/a} = x^{a/a} = x.$$

$\square$

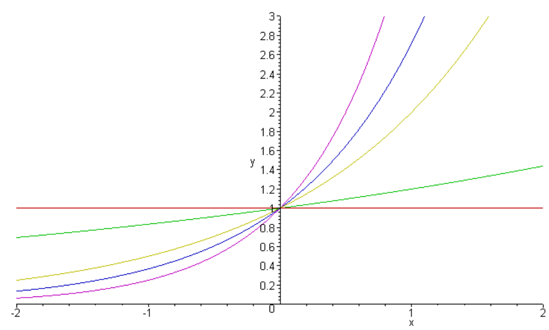
2.3 La funzione esponenziale

Definizione 2.7 *Sia $a \in \mathbb{R}_+$, definiamo la funzione* $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *mediante la*

$$x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$

esponenziale di base a

Figure 2.6: Esponenziali di base $a > 1$



Teorema 2.13 *Sia $a > 0$, valgono i seguenti fatti*

1. *Se $a > 1$ allora $\exp_a$ è strettamente crescente*

2. *Se $0 < a < 1$ allora $\exp_a$ è strettamente decrescente*

3. *Se $a \neq 1$ allora $R(\exp_a) = \mathbb{R}_+$.*

Dimostrazione.

1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, allora esistono $r, s \in \mathbb{Q}$ tali che $x < r < s < y$ e perciò
$$a^x \leq a^r < a^s \leq a^y$$
dove la prima e la terza disuguaglianza discendono dalla definizione 2.4, mentre la seconda segue dal teorema 2.7.

2. è conseguenza di (1)

3. Il fatto che $R(\exp_a) \subset \mathbb{R}_+$ è conseguenza della definizione di potenza; l'inclusione opposta segue ancora dal teorema dei valori intermedi.

□

2.4 La funzione logaritmo

Definiamo ora la funzione inversa dell'esponenziale.

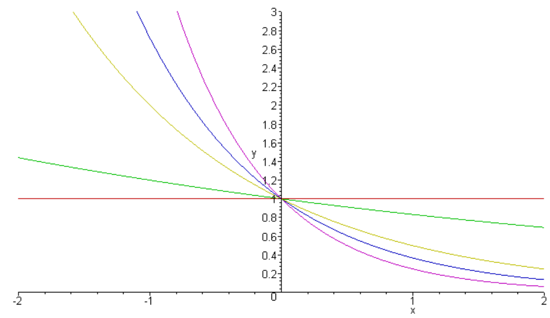


Figure 2.7: Esponenziali di base a, $0 < a < 1$

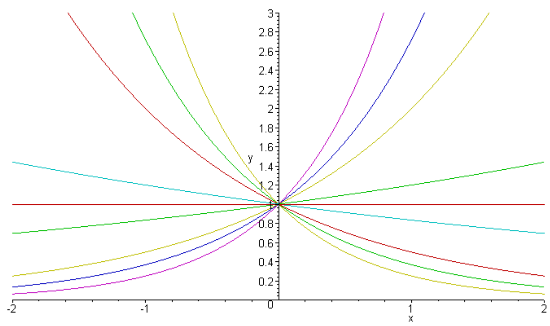


Figure 2.8: Esponenziali

Sia $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$, allora la funzione $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ è strettamente monotona e surgettiva, pertanto essa è invertibile e si può considerare la funzione $\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\log_a = \exp_a^{-1}$$

Se $x \in \mathbb{R}_+$, $\log_a(x)$ si dice logaritmo in base a di x.

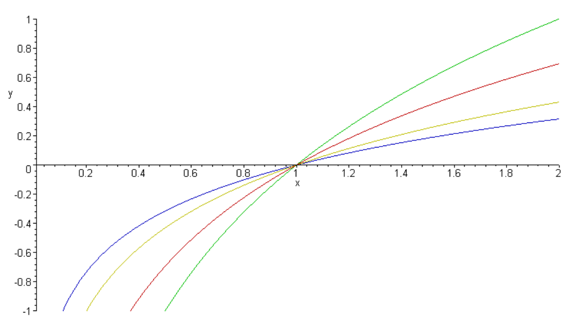


Figure 2.9: Logaritmi in base maggiore di 1

Teorema 2.14 *Sia* $a \in \mathbb{R}$, *allora*

1. *Se* $a > 1$ *allora* $\log_a$ *è strettamente crescente*

2. *Se* $0 < a < 1$ *allora* $\log_a$ *è strettamente decrescente*

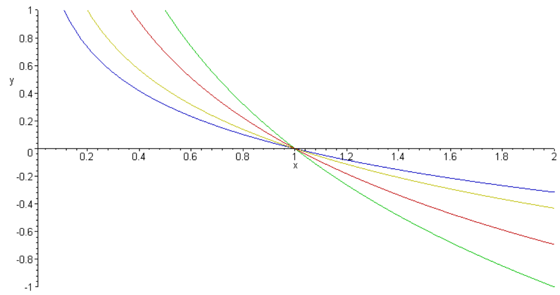


Figure 2.10: Logaritmi in base minore di 1

Teorema 2.15 *Siano* $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a, b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{R}$, *allora*

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(x^z) = z \log_a(x)$
3. $\log_a(x) = \log_a(b) \log_b(x)$.

Dimostrazione.

1. Siano $u = \log_a(x)$ e $v = \log_a(y)$, allora $x = \exp_a(u)$ e $y = \exp_a(v)$, da cui
$$xy = \exp_a(u) \exp_a(v) = \exp_a(u+v)$$
e
$$u + v = \log_a(xy)$$
2. Sia $u = \log_a(x)$, allora $x = \exp_a(u)$ e $x^z = (\exp_a(u))^z = \exp_a(zu)$ per cui
$$zu = \log_a(x^z)$$
3. $$\exp_a(\log_a(b) \log_b(x)) = (\exp_a(\log_a(b)))^{\log_b(x)} = \exp_b(\log_b(x)) = x$$
e
$$\log_a(x) = \log_a(b) \log_b(x)$$

□

2.5 *Le funzioni trigonometriche*

Ci apprestiamo, per concludere questa parte, a definire le cosiddette funzioni circolari. A questo scopo abbiamo bisogno di definire la lunghezza di un arco di circonferenza.

Possiamo approssimare, per difetto, la lunghezza della circonferenza utilizzando il perimetro dei poligoni regolari inscritti nel cerchio di

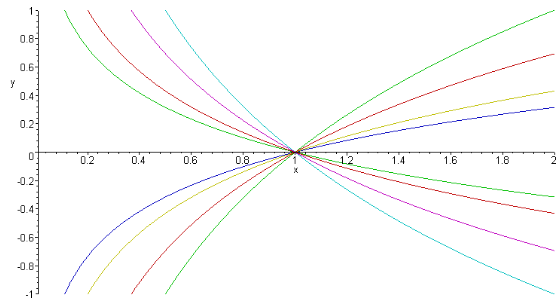


Figure 2.11: Logaritmi

raggio 1 mentre il perimetro dei poligoni regolari circoscritti la approssima per eccesso. Ovviamente otterremo una approssimazione tanto più buona quanto maggiore è il numero dei lati del poligono considerato.

Pertanto possiamo usare come prima approssimazione il perimetro di un triangolo equilatero procedere raddoppiando il numero dei lati.

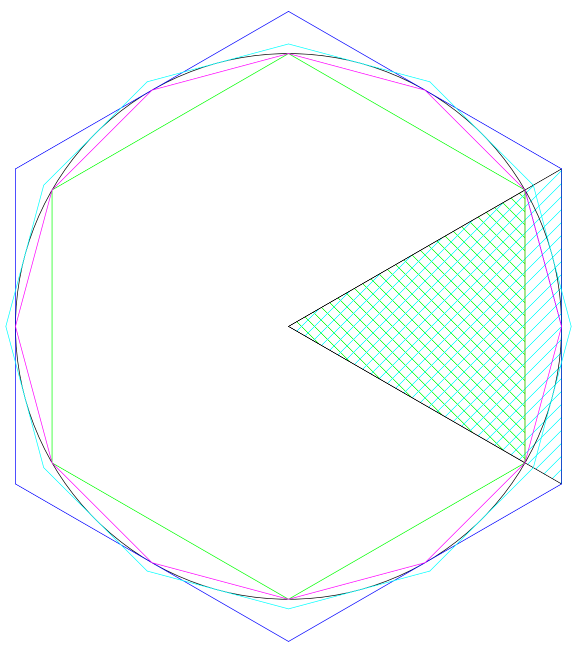
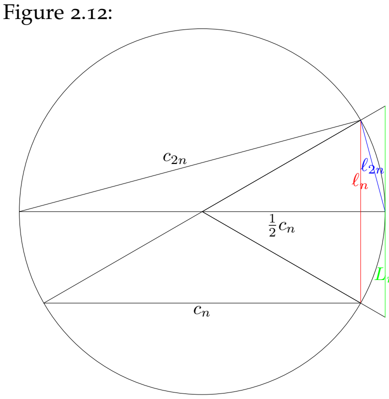


Figure 2.12:



Siano quindi:

- L_n Il lato del poligono regolare circoscritto di n lati
- ℓ_n lato del poligono regolare inscritto di n lati
- ℓ_{2n},L_{2n} lato del poligono regolare inscritto, circoscritto di $2n$ lati
- c_n, c_{2n} complementi di ℓ_n, ℓ_{2n}

Figure 2.13:

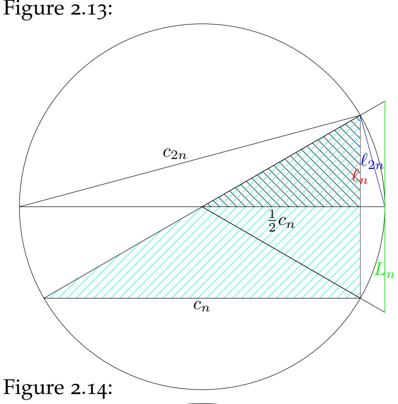


Figure 2.14:

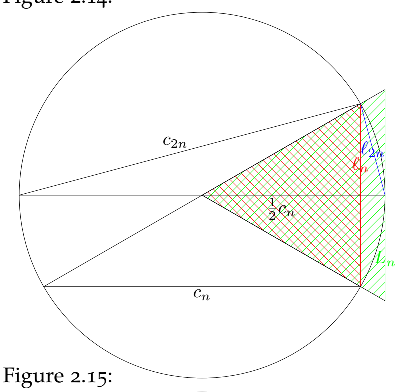


Figure 2.15:

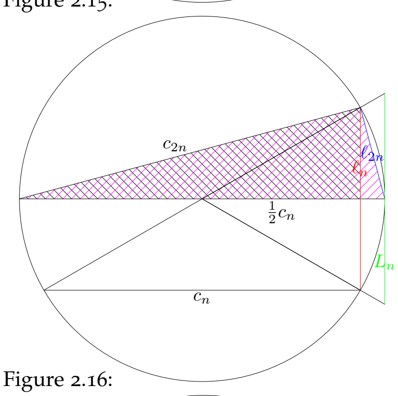
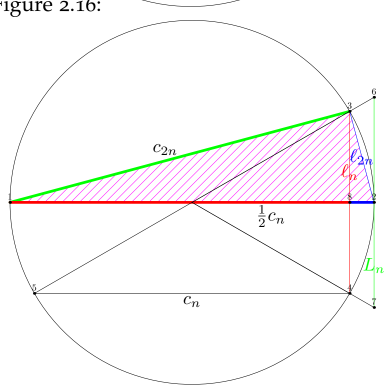


Figure 2.16:



c_n, ℓ_n ed il diametro per un estremo di ℓ_n formano un triangolo rettangolo. a_n,A_n sono le aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti.

La similitudine dei triangoli tratteggiati in figura 2.13 assicura che il segmento che congiunge il centro del cerchio ed il punto medio di ℓ_n misura $\frac{1}{2}c_n$.

Inoltre , per la similitudine dei triangoli tratteggiati in figura 2.14 si ha

$$\frac{\ell_n}{L_n} = \frac{1}{2}c_n \quad \text{da cui} \quad c_n = \frac{2\ell_n}{L_n} \quad \text{ed anche} \quad c_{2n} = \frac{2\ell_{2n}}{L_{2n}} \tag{2.1}$$

Per la similitudine dei triangoli tratteggiati in figura 2.15 si ha

$$\frac{c_{2n}}{2} = \frac{\frac{\ell_n}{2}}{\ell_{2n}} \quad , \quad c_{2n} = \frac{\ell_n}{\ell_{2n}} \tag{2.2}$$

Pertanto

$$\frac{2\ell_{2n}}{L_{2n}} = c_{2n} = \frac{\ell_n}{\ell_{2n}} \quad \text{da cui} \quad 2\ell_{2n}^2 = \ell_n L_{2n}$$

e, se chiamiamo p_n e P_n i perimetri dei poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti, otteniamo

$$4n^2\ell_{2n}^2 = n\ell_n 2nL_{2n} \qquad \text{da cui} \qquad p_{2n}^2 = p_n P_{2n}$$

ed infine

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$$

Per il Teorema di Talete applicato al triangolo tratteggiato in Figura 2.16 si ha

$$c_{2n}^2 = 2(1 + \frac{1}{2}c_n) = 2 + c_n$$

e, tenendo conto delle 2.1 ,2.2

$$\frac{2\ell_n}{L_{2n}} = \frac{2\ell_n}{\ell_{2n}}\frac{\ell_{2n}}{L_{2n}} = c_{2n}c_{2n} = c_{2n}^2 = 2 + c_n = 2 + \frac{2\ell_n}{L_n}$$

$$\frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{\ell_n} + \frac{1}{L_n} \quad \text{e} \quad L_{2n} = \frac{\ell_n L_n}{L_n + \ell_n}$$

$$2nL_{2n} = \frac{2n\ell_n nL_n}{nL_n + n\ell_n} \quad \text{cioè } P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}$$

Pertanto avremo che

$$\begin{cases} p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}} \\ P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \end{cases}$$

Possiamo pertanto considerare due successioni definite da

$$p_k^+ = P_{2^k} \quad , \quad p_k^- = p_{2^k}$$

i cui valori sono i perimetri dei poligoni regolari circoscritti ed inscritti di $2, 4, 8, 16...$ lati.

È evidente che p_k^- è crescente e limitata superiormente e che p_k^+ è decrescente e limitata inferiormente;

Inoltre è evidente che $P_k^+ - p_k^-$ tende a zero.

e se chiamiamo $P = \inf p_k^+$ e $p = supp p_k^-$ si ha

$$\begin{cases} p^2 = pP \\ P = \frac{2pP}{p+P} \Longrightarrow P^2 + pP = 2pP \Longrightarrow P^2 = pP \end{cases}$$

Ne segue subito che $p = P$ e possiamo usare tale valore per definire la lunghezza della circonferenza unitaria. Tale valore viene solitamente indicato con 2π.

(Le affermazioni fatte sono dimostrabili nel contesto dei risultati sulle successioni numeriche.)

Si poò anche trovare una legge di ricorrenza per le aree a_n ed A_n dei poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti alla circonferenza unitaria.

Infatti ricordando che $c_n = \frac{2\ell_n}{L_n}$, ed osservando che

$$a_{2n} = n\frac{\ell_n}{2} \quad , \quad a_n = n\frac{c_n}{2}\ell_n \quad , \quad A_n = n\frac{L_n}{2}$$

si ha

$$a_{2n}^2 = n\frac{\ell_n}{2}\, n\frac{\ell_n}{2} = n\frac{\ell_n}{2}\, \frac{c_n}{2}\, n\frac{\ell_n}{2\frac{c_n}{2}} = a_n\, n\frac{L_n}{2} = a_n A_n$$

ed inoltre

$$A_{2n} = 2nL_{2n} = \frac{2n\ell_n nL_n}{nL_n + n\ell_n} = \frac{a_{2n}An}{A_n + a_{2n}}$$

Si calcola che

$$p_{48} = \frac{288}{(6+4\sqrt{3})\sqrt{12\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}} + \frac{48\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}}} \approx 6.278700407$$

e

$$P_{48} = \frac{1152\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}}\sqrt{3}}{(6+4\sqrt{3})\,(12\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}} + \frac{48\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}})} \approx 6.292172427$$

per $n = 3 * 2^k$ con $k = 1 \cdots 10$

k	$3 \cdot 2^k$	p_n	P_n	Errore
0	3	5.196152424	10.39230485	5.196152424
1	6	6	6.928203232	.928203232
2	12	6.211657082	6.430780622	.219123540
3	24	6.265257227	6.319319887	.54062660e-1
4	48	6.278700407	6.292172427	.13472020e-1
5	96	6.282063902	6.285429205	.3365303e-2
6	192	6.282904952	6.283746105	.841153e-3
7	384	6.283115212	6.283325488	.210276e-3
8	768	6.283167780	6.283220353	.52573e-4
9	1536	6.283180936	6.283194070	.13134e-4
10	3072	6.283184205	6.283187491	.3286e-5
11	6144	6.283185052	6.283185858	.806e-6
12	12288	6.283185254	6.283185421	.167e-6

Table 2.1:

La tabella mostra i valori di p_n e di P_n

Usualmente si indica con π la lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1; si ha con 51 cifre decimali esatte:

$$\boxed{\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105}$$

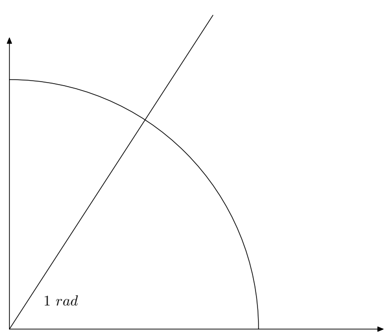


Figure 2.17: Definizione di radiante

Definizione 2.8 *Diciamo che un angolo x misura 1 radiante se è l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza R in una circonferenza di raggio R. (vedi fig.* **??***)*

Osservazione. Ovviamente un angolo giro misura 2π radianti, mentre un angolo piatto misura π radianti. Più in generale, se α è la misura di un angolo in gradi sessagesimali e x è la misura dello stesso angolo in radianti, si ha

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{180}{\pi}$$

Questa relazione permette di convertire rapidamente la misura di un angolo da gradi in radianti e viceversa. □

Definizione 2.9 *Sia $x \in [0, 2\pi]$ e consideriamo su di una circonferenza di raggio 1, centrata nell'origine delle coordinate, un arco Γ di lunghezza x aventi il primo estremo coincidente con il punto $(1, 0)$ (vedi fig.* **??***).*

Definiamo $\cos(x)$ e $\sin(x)$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del secondo estremo dell'arco.

Definizione 2.10 *Definiamo $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nella seguente maniera: sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $k = E(x/2\pi)$, allora $2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi$.*

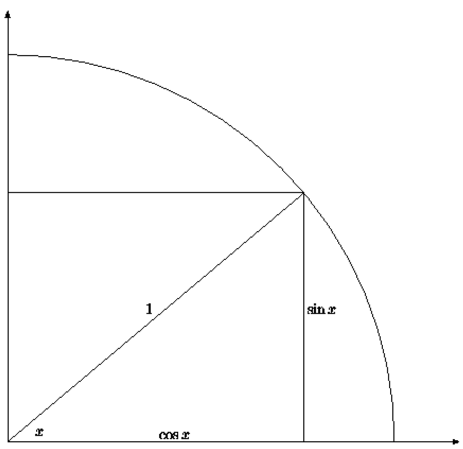


Figure 2.18: Definizione di sin e cos

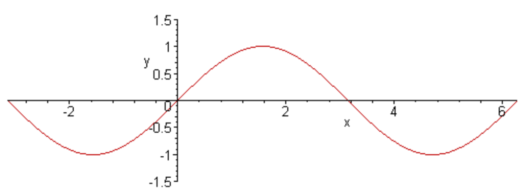


Figure 2.19: Grafico della funzione sin

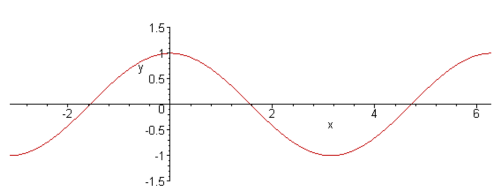


Figure 2.20: grafico della funzione cos

Poniamo

$$\cos(x) = \cos(x - 2k\pi) \qquad e \qquad \sin(x) = \sin(x - 2k\pi)$$

Teorema 2.16 *Valgono i seguenti fatti*

1. $R(\cos) = [-1, 1]$

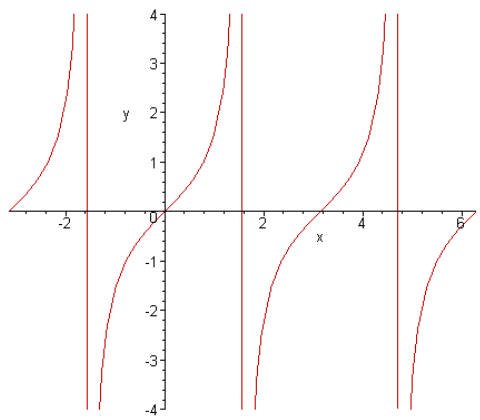
2. $R(\sin) = [-1, 1]$

Dimostrazione. E' ovvio dalla definizione che $R(\cos) \subset [-1,1]$ e $R(\sin) \subset [-1,1]$. Rimandiamo al seguito la dimostrazione dell'inclusione opposta. □

Definizione 2.11 *Definiamo* $\tan : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $D = \{x \neq k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$*, mediante la* $\tan(x)$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Figure 2.21: grafico della funzione tan



Definizione 2.12 *Siano* $D \subset \mathbb{R}$ *e* $T \in \mathbb{R}$ *tali che* $x \in D \Rightarrow x + T \in D$*; sia inoltre* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*;* f *si dice periodica di periodo* T *se,*

$$\forall x \in D, \qquad f(x) = f(x+T)$$

Enunciamo a questo punto, senza dimostrarle, alcune fondamentali proprietà delle funzioni introdotte.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, valgono i seguenti fatti:

1. $\cos(-x) = \cos(x)$

2. $\sin(-x) = -\sin(x)$

3. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

4. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

5. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
6. sin e cos sono periodiche di periodo 2π
7. tan è periodica di periodo π

Valgono inoltre i seguenti fatti

1. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ è strettamente crescente e surgettiva.
2. $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ è strettamente decrescente e surgettiva.
3. $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente e surgettiva.

Le verifiche delle proprietà enunciate sono basate su considerazioni geometriche che qui non stiamo ad investigare.

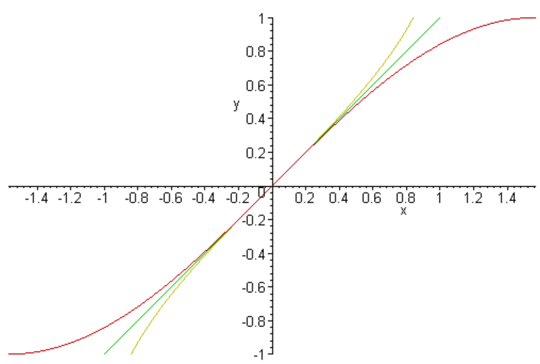


Figure 2.22: Grafico della funzione arcsin

Definizione 2.13 *Definiamo*

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \tag{2.3}$$
$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \tag{2.4}$$
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2) \tag{2.5}$$

mediante le

$$\arccos = \cos^{-1} \tag{2.6}$$
$$\arcsin = \sin^{-1} \tag{2.7}$$
$$\arctan = \tan^{-1} \tag{2.8}$$

La definizione è ben posta e valgono i seguenti fatti:

Teorema 2.17 *La funzione* arccos *è strettamente decrescente su* $[-1, 1]$*; la funzione* arcsin *è strettamente crescente su* $[-1, 1]$*; la funzione* arctan *è strettamente crescente su* $\mathbb{R}$.

Figure 2.23: Grafico della funzione arccos

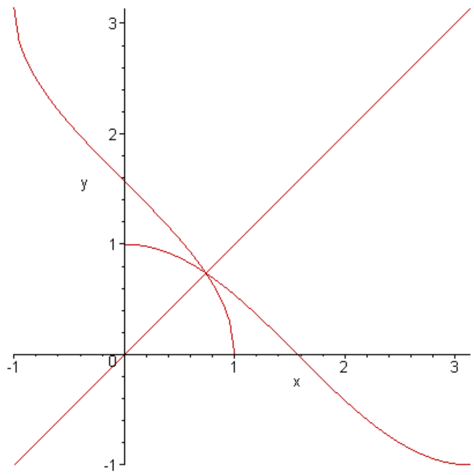
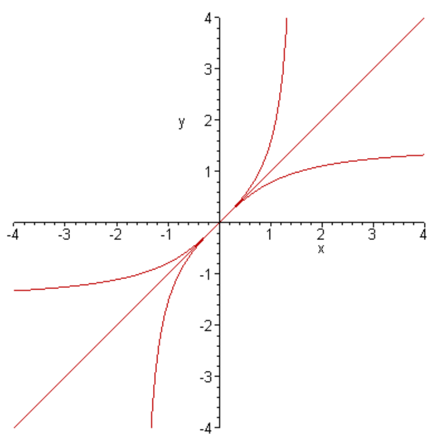


Figure 2.24: Grafico della funzione arctan



Osservazione. Occorre ricordare sempre che la denominazione arcsin, arccos ed arctan è riservata alle inverse delle funzioni trigonometriche negli intervalli indicati nella definizione 2.13

Naturalmente, tali intervalli non sono gli unici in cui le funzioni in questione sono invertibili, tuttavia se vogliamo invertire una funzione trigonometrica in intervalli diversi da quelli sopra citati dobbiamo tener presente che le funzioni che otteniamo sono differenti da quelle definite in 2.13.

In particolare è opportuno ricordare che

$$\sin(\arcsin(x)) = x \qquad \forall x \in [-1, 1] \tag{2.9}$$

$$\cos(\arccos(x)) = x \qquad \forall x \in [-1, 1] \tag{2.10}$$

$$\tan(\arctan(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

$$\arcsin(\sin(x)) = |x - 2k\pi + \pi/2| - \pi/2 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ k = E\left(\frac{x + 3\pi/2}{2\pi}\right) \tag{2.12}$$

$$\arccos(\cos(x)) = |x - 2k\pi| \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = E\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right) \tag{2.13}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x - k\pi \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = E\left(\frac{x + \pi/2}{\pi}\right) \tag{2.14}$$

$$\tag{2.15}$$

□

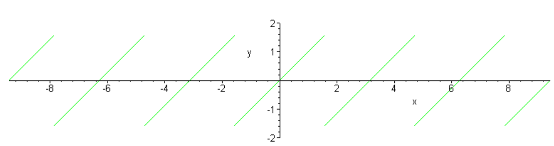


Figure 2.25: Grafico della funzione arctan(tan)

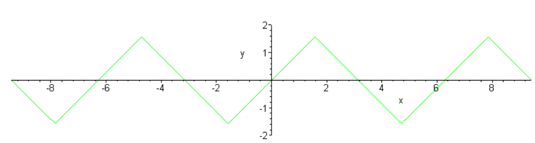
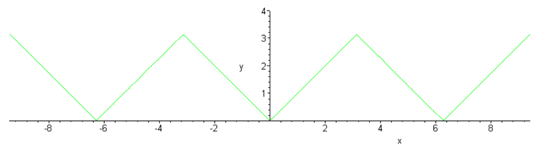


Figure 2.26: grafico della funzione arcsin(sin)

Figure 2.27: Grafico della funzione arccos(cos)



Le notazioni arcsin, arccos, arctan non sono universalmente adottate. Nel seguito useremo anche le notazioni asn, acs, atn, rispettivamente.