

# 1. Definizione di Limite e sue Conseguenze

Il concetto di limite è centrale in tutta l'analisi e da esso dipende l'essenza stessa del calcolo infinitesimale.

Si tratta di formalizzare un concetto che consenta di estendere il concetto di uguaglianza algebrica.

A questo scopo è necessario premettere alcuni concetti.

Conveniamo di indicare con  $\mathbb{R}^*$  l'insieme  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , che chiameremo  $\mathbb{R}$  esteso.

**Definizione 1.1** Sia  $x \in \mathbb{R}^*$  e  $\delta > 0$ , definiamo intorno di centro  $x$  e ampiezza  $\delta$  l'insieme  $I(x, \delta)$  definito da

$$I(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta) \quad (1.1)$$

$$I(+\infty, \delta) = (\delta, +\infty) \quad (1.2)$$

$$I(-\infty, \delta) = (-\infty, -\delta) \quad (1.3)$$

Definiamo intorno bucato di centro  $x$  e ampiezza  $\delta$  l'insieme  $I^o(x, \delta)$ .

$$I^o(x, \delta) = I(x, \delta) \setminus \{x\} \quad (1.4)$$

$$I^o(+\infty, \delta) = I(+\infty, \delta) \quad (1.5)$$

$$I^o(-\infty, \delta) = I(-\infty, \delta) \quad (1.6)$$

**Definizione 1.2** Sia  $A \subset \mathbb{R}$ , diciamo che  $x \in \mathbb{R}^*$  è un punto di accumulazione per  $A$  se

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \quad A \cap I^o(x, \delta) \neq \emptyset \quad (1.7)$$

Indichiamo con  $\mathcal{D}(A)$  l'insieme dei punti di accumulazione di  $A$ ;  $\mathcal{D}(A)$  si indica usualmente con il nome di insieme derivato di  $A$ .

Osserviamo esplicitamente che  $\mathcal{D}(A)$  può non essere un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  in quanto  $+\infty$  e  $-\infty$  possono essere elementi di  $\mathcal{D}(A)$ .

**Definizione 1.3** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$  ed  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ; diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad (1.8)$$

se

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che} & \quad (1.9) \\ \forall x \in I^\circ(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D \text{ si ha } f(x) \in I(\ell, \varepsilon) & \end{aligned}$$

**Osservazione.** Nel caso in cui  $x_0$  ed  $\ell$  siano entrambi reali la 1.9 può essere riscritta nella seguente maniera

$$\forall x \in D \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (1.10)$$

se  $x_0 = +\infty$  ( $-\infty$ ) ed  $\ell \in \mathbb{R}$  la 1.9 diviene

$$\forall x \in D \text{ tale che } x > \delta_\varepsilon \text{ (} x < -\delta_\varepsilon \text{) si ha } |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (1.11)$$

Notiamo che, nel caso  $\ell \in \mathbb{R}$ , se la 1.9 è verificata per  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , essa è automaticamente verificata anche per tutti gli  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ , pur di definire  $\delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon_0}$ .

Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $\ell = +\infty$  ( $-\infty$ ) la 1.9 diviene

$$\forall x \in D \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } f(x) > \varepsilon \text{ (} f(x) < -\varepsilon \text{)} \quad (1.12)$$

se  $x_0 = +\infty$  ( $-\infty$ ) e  $\ell = +\infty$  ( $-\infty$ ) la 1.9 diviene

$$\forall x \in D \quad : \quad x > \delta_\varepsilon \text{ (} x < -\delta_\varepsilon \text{) si ha } f(x) > \varepsilon \text{ (} f(x) < -\varepsilon \text{)} \quad (1.13)$$

Notiamo anche qui che, nel caso in cui  $\ell = +\infty$  o  $\ell = -\infty$ , se la 1.9 è verificata per  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , essa è automaticamente verificata pure per tutti gli  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , pur di definire  $\delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon_0}$ .

□

**Osservazione.** Se esiste  $\ell \in \mathbb{R}$  tale che valga la definizione 1.3 si dice che  $f$  ammette limite finito per  $x \rightarrow x_0$ ; in caso contrario si dice che  $f$  non ammette limite finito.

Se esiste  $\in \mathbb{R}^*$  tale che valga la definizione 1.3 si dice che  $f$  ammette limite per  $x \rightarrow x_0$ ; in caso contrario si dice che  $f$  non ammette limite.

□

**Definizione 1.4** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ; diciamo che  $f$  è localmente (superiormente) [inferiormente] limitata in  $x_0$  se esiste  $M \in \mathbb{R}$  ed esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|f(x)| \leq M \quad , \quad (f(x) \leq M) \quad , \quad [f(x) \geq M] \quad \forall x \in I(x_0, \delta) \cap D \quad (1.14)$$

Passiamo ora a dimostrare che una funzione che ammette limite finito è localmente limitata.

**Teorema 1.1** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$  e supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

allora:

1. se  $\ell \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  è localmente limitata in  $x_0$ ;
2. se  $\ell > 0$  (eventualmente  $\ell = +\infty$ ) allora esiste  $\delta > 0$  ed esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che se  $x \in I^o(x_0, \delta) \cap D$  si ha

$$f(x) \geq M > 0$$

**DIMOSTRAZIONE.**

1. Sia  $\varepsilon > 0$ , se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon)$  si ha

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

e

$$|f(x)| \leq \max\{|\ell + \varepsilon|, |\ell - \varepsilon|, |f(x_0)|\} \quad \forall x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$$

2. Sia  $\ell \in \mathbb{R}_+$ , se  $x \in I^o(x_0, \delta_{\ell/2}) \cap D$  si ha

$$f(x) > \ell - \ell/2 = \ell/2 > 0.$$

Sia invece  $\ell = +\infty$ , se  $x \in I^o(x_0, \delta_1) \cap D$  si ha

$$f(x) > 1 > 0.$$

□

**Teorema 1.2** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ; allora, se  $f$  ammette limite per  $x \rightarrow x_0$ , tale limite è unico.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\ell_1$  ed  $\ell_2$  siano entrambi limiti di  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ ; occorre distinguere alcuni casi:

- se  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ , si ha  $\forall \varepsilon > 0$ , se  $x \in I^o(x_0, \delta_{\varepsilon/2}) \cap D$ ,

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

- Se  $\ell_1 \in \mathbb{R}$  ed  $\ell_2 = +\infty$ , si ha che se  $x \in I^o(x_0, \delta^1) \cap D$

$$|f(x)| \leq M$$

ma essendo  $\ell_2 = +\infty$ , se  $x \in I^o(x_0, \delta_M) \cap D$  si ha

$$f(x) > M;$$

ciò è assurdo per tutti gli  $x \in I^o(x_0, \delta) \cap D$ , con  $\delta = \min\{\delta^1, \delta_M\}$ .

- Se  $l_1 \in \mathbb{R}$  ed  $l_2 = -\infty$  ci si riconduce facilmente al caso precedente, considerando  $-f$  in luogo di  $f$ .

Se  $l_1 = +\infty$  ed  $l_2 = -\infty$  si ha

$$x \in I^o(x_0, \delta_1) \cap D \Rightarrow f(x) > 1 \quad \text{e} \quad f(x) < -1$$

il che è assurdo.

□

**Definizione 1.5** Supponiamo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D_+) \cap \mathbb{R}$ ,  $D_+ = \{x \in D : x \geq x_0\}$ .

Diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}^*$$

se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $x \in D$  e  $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$  si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Se  $x_0 \in \mathcal{D}(D_-) \cap \mathbb{R}$ ,  $D_- = \{x \in D : x \leq x_0\}$ , diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}^*$$

se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $x \in D$  e  $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$  si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

**Teorema 1.3** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D_+) \cap \mathcal{D}(D_-) \cap \mathbb{R}$ , allora se  $\ell \in \mathbb{R}^*$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

**DIMOSTRAZIONE.** Cominciamo con l'osservare che se il limite esiste  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$  con  $x \neq x_0$  ed  $x \in D$  si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

e ciò implica per la definizione 1.5, la tesi.

Se viceversa esistono i limiti da destra e da sinistra  $\forall \varepsilon > 0$  esistono  $\delta_\varepsilon^1, \delta_\varepsilon^2 > 0$  tali che se  $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon^1$ ,  $x \in D$  si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

e se  $x_0 - \delta_\varepsilon^2 < x < x_0$ ,  $x \in D$  si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Pertanto se si sceglie

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^1, \delta_\varepsilon^2\}$$

la definizione di limite è verificata.  $\square$

A questo punto è conveniente definire in  $\mathbb{R}^*$  le operazioni di addizione e di moltiplicazione che fino a questo momento sono definite solamente in  $\mathbb{R}$ .

Osserviamo esplicitamente che non sono applicabili a queste operazioni le usuali regole che permettono di svolgere calcoli con i numeri reali. Riterremo pertanto lecite tutte e sole le uguaglianze che coinvolgono gli elementi  $+\infty$  e  $-\infty$  che elenchiamo qui di seguito.

Definiamo:

$$\begin{aligned} x \pm \infty &= \pm \infty + x = \pm \infty & \forall x \in \mathbb{R} \\ x(\pm \infty) &= (\pm \infty)x = \pm \infty & \forall x \in \mathbb{R}_+ \\ x(\pm \infty) &= (\pm \infty)x = \mp \infty & \forall x \in \mathbb{R}_- \\ \frac{x}{\pm \infty} &= 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \left| \frac{x}{0} \right| &= +\infty & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ +\infty + \infty &= +\infty, & -\infty - \infty = -\infty \\ (\pm \infty)(+\infty) &= \pm \infty & |\pm \infty| = +\infty \end{aligned}$$

Ricordiamo inoltre che *non* sono definite le seguenti operazioni;

$$+\infty - \infty, \quad 0(\pm \infty), \quad \frac{\pm \infty}{\pm \infty}, \quad \frac{0}{0}$$

in quanto ciò potrebbe dar luogo facilmente ad inconvenienti e ad errate interpretazioni.

**Teorema 1.4** Siano  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ; supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \quad , \quad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$$

Allora

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell_1|$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$  *tranne che nel caso in cui  $\ell_1 = \pm \infty$  e  $\ell_2 = \mp \infty$*
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \ell_1 \ell_2$  *tranne che nel caso in cui  $\ell_1 = 0$  e  $\ell_2 = \pm \infty$*
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1}$  *tranne che nel caso in cui  $\ell_1 = 0$*

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo le varie asserzioni nel caso in cui  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ .

Per ipotesi abbiamo che  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon^1, \delta_\varepsilon^2 > 0$  tali che  $\forall x \in I^\circ(x_0, \delta_\varepsilon^1) \cap D$  si ha

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

$\forall x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon^2) \cap D$  si ha

$$|g(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

1. Se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon^1) \cap D$  si ha

$$||f(x)| - |\ell_1|| \leq |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon$$

2. Sia  $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{\varepsilon/2}^1, \delta_{\varepsilon/2}^2\}$ , se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$  si ha

$$|f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

3. Sia  $\delta^3$  tale che se  $x \in I^o(x_0, \delta^3) \cap D$  si ha

$$|g(x)| \leq M$$

sia  $\ell_1 \neq 0$  (il caso  $\ell_1 = 0$  risulta banale) e sia

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{\varepsilon/(2M)}^1, \delta_{\varepsilon/(2|\ell_1|)}^2, \delta^3\}$$

allora se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$  si ha

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - g(x)\ell_1 + g(x)\ell_1 - \ell_1\ell_2| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2| < \\ &< M\varepsilon/(2M) + \varepsilon|\ell_1|/(2|\ell_1|) = \varepsilon \end{aligned}$$

(1.15)

4. Sia  $\delta^4 > 0$  tale che se  $x \in I^o(x_0, \delta^4) \cap D$  si ha

$$|f(x)| \geq M > 0$$

sia  $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{\varepsilon M|\ell_1|}^1, \delta^4\}$ , allora se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$  si ha

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell_1} \right| = \frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|} \leq \frac{\varepsilon M|\ell_1|}{M|\ell_1|} = \varepsilon$$

Dimostriamo ora ad esempio la (2) nel caso in cui  $\ell_1 = +\infty$  e  $\ell_2 \in \mathbb{R}$  (da cui  $\ell_1 + \ell_2 = +\infty$ ); la (3) nel caso in cui  $\ell_1 < 0$  e  $\ell_2 = -\infty$  (da cui  $\ell_1\ell_2 = +\infty$ ) e la (4) nel caso in cui  $\ell_1 = \pm\infty$  (da cui  $1/\ell_1 = 0$ ).

• (2) Sia  $\ell_1 = +\infty$  ed  $\ell_2 \in \mathbb{R}$ , allora, se  $x \in I^o(x_0, \delta^3) \cap D$  si ha

$$|g(x)| < M$$

mentre, se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon^1) \cap D$  si ha

$$f(x) > \varepsilon;$$

pertanto se  $\delta_\varepsilon = \min\{\delta^3, \delta_{\varepsilon+M}^1\}$ , se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$ , si ha

$$f(x) + g(x) > \varepsilon + M - M = \varepsilon$$

- (3) Sia  $\ell_1 < 0$  ed  $\ell_2 = -\infty$ , allora, se  $x \in I^o(x_0, \delta^4) \cap D$  si ha

$$f(x) \leq -M < 0$$

mentre se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon^2) \cap D$  si ha

$$g(x) < -\varepsilon;$$

allora, se  $\delta_\varepsilon = \min\{\delta^4, \delta_{\varepsilon/M}^2\}$ , per  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$

$$f(x)g(x) > -Mg(x) > -M(-\varepsilon/M) = \varepsilon$$

- (4) Sia  $\delta_\varepsilon = \delta_{1/\varepsilon}^1$ , allora se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$  si ha

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad e \quad \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

□

Possiamo a questo punto stabilire un utile corollario.

**Corollario 1.1** Siano  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$  e supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$$

con  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$  ed  $\ell_1 < \ell_2$ ; allora

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in I^o(x_0, \delta) \quad , \quad f(x) < g(x)$$

Per completare il quadro di risultati proviamo il seguente

**Teorema 1.5** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_1 = \{x \in D \quad : \quad f(x) \neq 0\}$ ,  $x_0 \in \mathcal{D}(D_1)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty \quad (1.16)$$

se esiste  $\delta > 0$  tale che per  $x \in I^o(x_0, \delta) \cap D$  si ha  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad (-\infty) \quad (1.17)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi, Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$  si ha  $|f(x)| < \varepsilon$ .

$$x \in I^o(x_0, \delta_{1/\varepsilon}) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < 1/\varepsilon$$

e

$$\frac{1}{|f(x)|} > \varepsilon$$

(2) Supponiamo per semplicità che  $f$  sia localmente positiva in  $x_0$ ; sia

$$\delta'_\varepsilon = \min\{\delta, \delta_{1/\varepsilon}\},$$

allora, se  $x \in I^o(x_0, \delta'_\varepsilon) \cap D$

$$0 < f(x) < 1/\varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{1}{f(x)} > \varepsilon$$

Il caso in cui  $f$  sia localmente negativa si riconduce banalmente al caso sopra descritto.  $\square$

**Osservazione.** Notiamo esplicitamente che è essenziale nella (2) l'ipotesi che  $f$  abbia segno localmente costante in  $x_0$ .

Sia infatti  $f(x) = x \sin(1/x)$  per  $x \neq 0$ ; allora si può facilmente verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1/|f(x)| = +\infty;$$

tuttavia è altrettanto immediato verificare che  $1/f(x)$  non tende né a  $-\infty$  né a  $+\infty$ , in quanto, se ciò accadesse, per valori di  $x$  vicini allo 0 si dovrebbe avere  $f(x) < 0$  oppure  $f(x) > 0$ .  $\square$

Sarà pure di fondamentale importanza il seguente teorema:

**Teorema 1.6** Siano  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ; supponiamo che esista  $\delta > 0$  tale che, se  $x \in I^o(x_0, \delta) \cap D$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

siano inoltre  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l_2$ . Allora

$$l_1, l_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad l_1 \leq l_2 \quad (1.18)$$

$$l_1 = l_2 = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad (1.19)$$

$$l_1 = +\infty \quad \Rightarrow \quad l_2 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \quad (1.20)$$

$$l_2 = -\infty \quad \Rightarrow \quad l_1 = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \quad (1.21)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima affermazione è una diretta conseguenza del corollario 1.1.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, dalle ipotesi si ha che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che, se  $x \in I^o(x_0, \delta_\varepsilon) \cap D$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad \text{e} \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

da cui, per gli stessi valori di  $x$  si ha

$$l - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < l + \varepsilon$$

Lasciamo al lettore la dimostrazione delle restanti affermazioni.  $\square$



**Teorema 1.7** Siano  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : A \rightarrow D$ ; siano  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$  e  $t_0 \in \mathcal{D}(A)$ ; supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$$

Supponiamo inoltre che sia verificata una delle seguenti condizioni:

1. esiste  $\delta > 0$  tale che  $g(t) \neq x_0$  per ogni  $t \in I^0(t_0, \delta)$ ;

2.

$$f(x_0) = \ell$$

Allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = \ell$$

Osserviamo che se tutte e due le condizioni vengono a mancare, il teorema precedente può non essere vero.

Sia ad esempio  $D = A = \mathbb{R}$ ,  $g(t) = 0$  ed  $f(x) = 0$  se  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$ ; allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

mentre

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(g(t)) = 1$$

Osserviamo inoltre che ognuna delle seguenti condizioni

1.  $x_0 \notin D$ ,
2.  $x_0 = \pm\infty$
3.  $g$  è iniettiva
4.  $g$  è strettamente monotona

è sufficiente per la (1) del teorema 1.7

**Teorema 1.8** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  crescente [decrescente]; allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

esistono e sono uguali rispettivamente a

$$\inf\{f(x) : x \in (a, b)\} \quad [\sup\{f(x) : x \in (a, b)\}]$$

e

$$\sup\{f(x) : x \in (a, b)\} \quad [\inf\{f(x) : x \in (a, b)\}]$$

Osserviamo esplicitamente che nel teorema precedente è essenziale supporre che l'intervallo in cui si considera la funzione sia aperto.

Sia infatti  $f(x) = x$  se  $x \in [0, 1)$ ,  $f(1) = 2$ ; allora

$$\sup\{f(x) : x \in [0, 1]\} = 2 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

**Corollario 1.2** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona, allora per ogni  $x_0 \in \mathcal{D}(D_+) \cap \mathcal{D}(D_-)$  si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

esistono.

Per stabilire l'esistenza del limite di una funzione è possibile avvalersi del criterio di convergenza di Cauchy.

**Teorema 1.9 - Criterio di Cauchy** - Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ; sono condizioni equivalenti:

1. esiste  $\ell \in \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
2. per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $x, y \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$  si ha

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

## 2. Le Successioni

Le successioni costituiscono una classe molto particolare di funzioni: si tratta di funzioni definite su un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  molto particolare, l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali; questa caratteristica conferisce loro la semplicità che è tipica degli insiemi discreti, mentre impedisce una significativa rappresentazione grafica e rende il concetto di successione apparentemente ostico.

Il concetto di successione, inoltre, interpreta un ruolo di notevole importanza nelle applicazioni pratiche e nelle descrizioni algoritmiche.

**Definizione 2.1** *Chiamiamo successione di numeri reali una funzione definita sull'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali, che assume valori in  $\mathbb{R}$*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*Seguendo le consuetudini introdotte per la descrizione di una funzione sarebbe naturale usare il simbolo  $a(n)$  per identificare il valore di  $a$  calcolato in  $n$  tuttavia è normale usare, in luogo di esso il simbolo  $a_n = a(n)$ .*

E' immediato esplicitare per le successioni i concetti di crescita, decrescenza, monotonia, limitatezza, che sono stati introdotti, in generale, per le funzioni.

Nell'estendere il concetto di limite però occorre tenere presente che  $\mathcal{D}(\mathbb{N})$  è costituito dal solo elemento  $+\infty$ , per cui, per una successione, ha senso soltanto considerare il concetto di limite per  $n \rightarrow +\infty$ .

Più precisamente si dice che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \tag{2.1}$$

se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che, per  $n > n_\varepsilon$ , si abbia

$$a_n \in I(\ell, \varepsilon)$$

Osserviamo che, dal momento che nessuna ambiguità è possibile, scriveremo spesso

$$\lim_n a_n \quad \text{oppure} \quad \lim a_n$$

in luogo di  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

E' molto importante, quando si trattano le successioni, il concetto di successione estratta da un'altra successione.

Tale concetto è strettamente legato, o meglio è una specializzazione del concetto di composizione di funzioni ed è molto utile per caratterizzare i limiti di una successione.

In altre parole si dice successione estratta dalla successione  $a_n$  una nuova successione  $a_{n(k)}$ .

Naturalmente non ogni funzione  $n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  può essere usata, per due ragioni:

1.  $n$  deve dar luogo, composta con  $a$ , ad una nuova successione, per cui deve aversi che il dominio di  $f$  è  $\mathbb{N}$ ;
2.  $R(n)$  deve essere contenuto nel dominio di  $a$  e perciò deve aversi  $R(n) \subset \mathbb{N}$ .

Dovrà pertanto essere  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

3. Inoltre, poichè vogliamo collegare il comportamento al limite della successione  $a_n$  con quello delle sue estratte, è necessario che  $+\infty$  sia un punto di accumulazione per  $R(n)$ .

In altre parole  $n$  è una particolare successione (particolare in quanto assume valori solo in  $\mathbb{N}$ ) e pertanto è d'uso far riferimento alla notazione

$$n_k = n(k)$$

**Definizione 2.2** Sia  $a_n$  una successione e sia  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strettamente crescente; diciamo che la successione  $b_k = a_{n(k)}$  è una successione estratta da  $a_n$ .

Sempre a proposito di terminologia, ricordiamo anche che si dice che una successione è convergente se ammette limite reale, mentre si dice che una successione è positivamente (negativamente) divergente se ammette come limite  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

**Lemma 2.1** Sia  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n$  strettamente crescente; allora

$$\lim_k n_k = +\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che  $n$  è strettamente crescente si ha

$$n_{k+1} > n_k \quad \text{e} \quad n_{k+1} \geq n_k + 1$$

perciò, per induzione, si prova facilmente che  $n_k \geq k$  e la tesi. □

**Teorema 2.1** Sia  $a_n$  una successione e sia

$$\lim_n a_n = \ell$$

allora se  $b_k$  è una successione estratta da  $a_n$  si ha

$$\lim_k b_k = \ell$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $b_k = a_{n_k}$ , se  $n > n_\varepsilon$  si ha  $a_n \in I(\ell, \varepsilon)$ , inoltre, dal momento che  $n_k \rightarrow +\infty$ , se  $k > k_\varepsilon$  si ha  $n_k > n_\varepsilon$ ; ne deduciamo che, se  $k > k_\varepsilon$ ,

$$b_k = a_{n_k} \in I(\ell, \varepsilon)$$

□

Si può inoltre dimostrare che

**Teorema 2.2** Ogni successione convergente è limitata.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $a_n$  una successione e sia

$$\lim_n a_n = \ell$$

allora, se  $n > n_\varepsilon$  si ha

$$|a_n| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < \varepsilon + |\ell|$$

Perciò se

$$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_\varepsilon}|, |\ell| + \varepsilon\}$$

si può affermare che

$$|a_n| \leq M$$

□

**Teorema 2.3** Sia  $a_n$  una successione crescente e sia

$$\lambda = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

allora

$$\lim_n a_n = \lambda$$

DIMOSTRAZIONE. Distinguiamo due casi.

1.  $\lambda = +\infty$

in tal caso  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  è un insieme non limitato e  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_{n_\varepsilon} > \varepsilon$$

ma allora, dal momento che  $a_n$  è crescente, si ha, per  $n > n_\varepsilon$

$$a_n > a_{n_\varepsilon} > \varepsilon$$

2.  $\lambda \in \mathbb{R}$

in questo caso, per le proprietà dell'estremo superiore, si ha

$$a_n \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_{n_\varepsilon} > \lambda - \varepsilon$$

pertanto, se  $n > n_\varepsilon$ , si ha, essendo  $a_n$  crescente

$$\lambda - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq \lambda$$

□

In maniera analoga si può dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 2.4** *Sia  $a_n$  una successione decrescente e sia*

$$\lambda = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

*allora*

$$\lim_n a_n = \lambda$$

Il risultato che segue è uno dei più importanti tra quelli che riguardano le successioni di numeri reali.

**Teorema 2.5 - Bolzano-Weierstraß** - *Sia  $a_n$  una successione limitata, allora esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  ed esiste una successione  $b_k$  estratta da  $a_n$  tale che*

$$\lim_k b_k = \lambda$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi esistono  $m, M \in \mathbb{R}$  tali che

$$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideriamo i due intervalli

$$\left[ m, \frac{m+M}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \frac{m+M}{2}, M \right]$$

almeno uno di essi contiene un numero infinito di termini della successione  $a_n$  sia esso  $[\alpha_1, \beta_1]$  ovviamente si avrà

$$m \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq M \quad \text{e} \quad \beta_1 - \alpha_1 = \frac{M-m}{2}$$

Consideriamo ora gli intervalli

$$\left[ \alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1 \right]$$

almeno uno di essi contiene un numero infinito di termini di  $a_n$  sia esso  $[\alpha_2, \beta_2]$  ovviamente si avrà

$$m \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \beta_1 \leq M \quad \text{e} \quad \beta_2 - \alpha_2 = \frac{M-m}{4}$$

Il procedimento descritto si può iterare e si ottengono così due successioni  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  soddisfacenti le seguenti proprietà:

$$m \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \beta_k \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq M \quad (2.2)$$

$$\beta_k - \alpha_k = \frac{M - m}{2^k} \quad (2.3)$$

$$\{n : a_n \in [\alpha_k, \beta_k]\} \text{ ha infiniti elementi} \quad (2.4)$$

Possiamo pertanto concludere che le successioni  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  sono, rispettivamente, crescente e decrescente ed inoltre che sono entrambe limitate. Si ottiene pertanto che

$$\lim_k \alpha_k = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_k \beta_k = \beta$$

ove

$$\alpha = \sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta = \inf\{\beta_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$$

Per la 2.3 si ha che

$$\beta - \alpha = \lim_k (\beta_k - \alpha_k) = \lim_k \frac{M - m}{2^k} = 0$$

(si ricordi che è facile provare per induzione che  $2^k \geq k$ ), e perciò si ha

$$\alpha = \beta = \lambda$$

in altre parole chiamiamo  $\lambda$  il valore comune di  $\alpha$  e  $\beta$ .

Sia ora

$$\begin{aligned} n_1 \in \mathbb{N} & \quad \text{tale che} & \alpha_1 \leq a_{n_1} \leq \beta_1 \\ n_2 \in \mathbb{N} & \quad \text{tale che} & \alpha_2 \leq a_{n_2} \leq \beta_2, \quad n_2 > n_1 \\ & \dots\dots\dots & \\ n_k \in \mathbb{N} & \quad \text{tale che} & \alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k, \quad n_k > n_{k-1} \end{aligned}$$

Allora  $b_k = a_{n_k}$  è una successione estratta dalla successione  $a_n$ , la cui esistenza è assicurata dalla 2.4 ed inoltre si ha

$$\alpha_k \leq b_k \leq \beta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e pertanto  $\lim_k b_k = \lambda$ . □

**Teorema 2.6** *Sia  $a_n$  una successione:*

1. se  $a_n$  non è limitata superiormente, esiste  $b_k$  estratta da  $a_n$  tale che

$$\lim_k b_k = +\infty$$

2. se  $a_n$  non è limitata inferiormente, esiste  $b_k$  estratta da  $a_n$  tale che

$$\lim_k b_k = -\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio la prima affermazione. Sia

$$\begin{aligned} n_1 \in \mathbb{N} & \quad \text{tale che} & a_{n_1} & > 1 \\ n_2 \in \mathbb{N} & \quad \text{tale che} & a_{n_2} & > 2, \quad n_2 > n_1 \\ & & \dots & \\ n_k \in \mathbb{N} & \quad \text{tale che} & a_{n_k} & > k, \quad n_k > n_{k-1} \end{aligned}$$

Allora  $b_k = a_{n_k}$  (l'esistenza di tale estratta è assicurata dall'ipotesi che  $a_n$  non è limitata superiormente) tende a  $+\infty$   $\square$

Sappiamo bene cosa significa che una successione converge ad un limite  $\ell \in \mathbb{R}^*$  cerchiamo ora di stabilire il significato del fatto che  $a_n$  non converge ad un limite  $\ell \in \mathbb{R}^*$

**Lemma 2.2** Sia  $a_n$  una successione e sia  $\ell \in \mathbb{R}^*$   $a_n$  non converge ad  $\ell$  se e solo se esiste  $\varepsilon_0 > 0$  ed esiste una successione  $b_k$  estratta da  $a_n$  tale che  $b_k \notin I(\ell, \varepsilon_0)$ .

DIMOSTRAZIONE. La successione  $a_n$  non converge ad  $\ell$  se e solo se esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $\forall m \in \mathbb{N}$  è possibile trovare  $n > m$  con

$$a_n \notin I(\ell, \varepsilon_0)$$

Sia pertanto

$$n_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad a_{n_1} \notin I(\ell, \varepsilon_0) \quad (2.5)$$

$$n_2 > n_1 \quad \text{tale che} \quad a_{n_2} \notin I(\ell, \varepsilon_0) \quad (2.6)$$

$$\dots \dots \dots \quad (2.7)$$

$$n_k > n_{k-1} \quad \text{tale che} \quad a_{n_k} \notin I(\ell, \varepsilon_0) \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

La successione  $b_k = a_{n_k}$  soddisfa i requisiti richiesti.  $\square$

**Teorema 2.7** Sia  $a_n$  una successione soddisfacente la seguente proprietà:

- esiste  $\ell \in \mathbb{R}^*$  tale che per ogni successione  $b_k$  estratta da  $a_n$  è possibile trovare una successione  $c_h$  estratta da  $b_k$  con

$$\lim_h c_h = \ell$$

Allora si ha

$$\lim_n a_n = \ell$$



DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che

$$\lim_n a_n \neq \ell$$

allora esistono  $\varepsilon_0 > 0$  e  $b_k$  estratta da  $a_n$  tale che  $b_k \notin I(\ell, \varepsilon_0)$

Ma, per ipotesi, è possibile trovare una successione  $c_h$  tale che

$$\lim_h c_h = \ell$$

e ciò è assurdo; infatti per  $h$  sufficientemente grande si avrebbe contemporaneamente

$$c_h \in I(\ell, \varepsilon_0) \quad \text{e} \quad c_h = b_{k_h} \notin I(\ell, \varepsilon_0)$$

□

**Teorema 2.8** - *Criterio di convergenza di Cauchy* - Sia  $a_n$  una successione; sono fatti equivalenti:

1. esiste  $\ell \in \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_n a_n = \ell$$

2. Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che se  $n, m > n_\varepsilon$  si ha

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE.

• (1)  $\Rightarrow$  (2) sia  $\varepsilon > 0$ , allora esiste  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che per  $n > n_\varepsilon$  si ha

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

Allora se  $n, m > n_{\varepsilon/2}$  si ha

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

• (2)  $\Rightarrow$  (1) se  $n > n_\varepsilon$  si ha

$$a_{n_\varepsilon} - \varepsilon < a_n < a_{n_\varepsilon} + \varepsilon$$

per cui la successione  $a_n$  è limitata.

Sia  $a_{n_k}$  una successione estratta da  $a_n$  tale che

$$\lim_k a_{n_k} = \ell$$

Se  $k > k_\varepsilon$  si ha

$$|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$$

ed inoltre se  $k > k_\varepsilon^1$  si ha

$$n_k > n_\varepsilon$$

Ma allora fissato  $k > \max\{k_{\varepsilon/2}, k_{\varepsilon/2}^1\}$ , se  $n > n_{\varepsilon/2}$  si ha

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

□

E' di grande utilità per il seguito provare i due seguenti risultati.

**Lemma 2.3** Sia  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , e siano

$$\lambda = \sup A \quad , \quad \mu = \inf A$$

allora esistono due successioni  $a_n, b_n \in A$  tali che

$$\lim_n a_n = \lambda \quad , \quad \lim_n b_n = \mu$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio che esiste una successione  $b_n \in A$  tale che

$$\lim_n b_n = \mu$$

Occorre distinguere due casi:

1.  $\mu = -\infty$ ; in tal caso l'insieme  $A$  non è inferiormente limitato e pertanto per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $b_n \in A$  tale che  $b_n < -n$ .

Ciò è sufficiente per concludere che

$$\lim_n b_n = -\infty$$

2.  $\mu \in \mathbb{R}$ ; in tal caso si ha che:

$$\begin{aligned} \mu &\leq b \quad \forall b \in A \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists b_n \in A & : \mu + 1/n > b_n \end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$\mu + 1/n > b_n \geq \mu$$

e la tesi.

□

Ricordiamo anche la seguente disuguaglianza

**Lemma 2.4** Se  $a > -1$  allora

$$(1+a)^n \geq 1+na \tag{2.10}$$

DIMOSTRAZIONE. Si prova per induzione;

1. La disuguaglianza è banalmente vera per  $n = 1$
2. Inoltre se supponiamo  $(1+a)^n \geq 1+na$  avremo che

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) > (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a \tag{2.11}$$

□

Elenchiamo ora alcune successioni che saranno utili nel seguito e calcoliamone i relativi limiti:

1.  $\lim n^k = +\infty$  ,  $k > 0$
2.  $\lim n^k = 0$  ,  $k < 0$
3.  $\lim a^n = +\infty$  ,  $a > 1$
4.  $\lim a^n = 0$  ,  $|a| < 1$
5.  $\lim \sqrt[n]{a} = 1$  ,  $a > 0$
6.  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
7.  $\lim \frac{a^n}{n^n} = 0$

Possiamo verificare le affermazioni precedenti mediante le seguenti argomentazioni:

1. si prova mediante la definizione di limite.
2. si deduce dalla precedente tenendo conto che  $n^k = 1/n^{-k}$ .
3. sia  $a = 1 + b$  con  $b > 0$ , allora  $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$ .
4. si deduce dalla precedente tenendo conto che  $|a^n| = 1/(1/|a|)^n$ .
5. se  $a > 1$ , posto

$$y_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$$

si ha

$$a = (1 + y_n)^n \geq 1 + ny_n$$

da cui

$$0 \leq y_n \leq (a - 1)/n$$

se  $0 < a < 1$  si ha  $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{1/a}$ .

6. posto

$$y_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$$

si ha

$$n = (1 + y_n)^n \geq 1 + n(n - 1)y_n^2/2 \text{ e } 0 \leq y_n \leq (2/n)$$

7. Se  $n > 2|a|$  si ha

$$0 < |a|/n < 1/2$$

per cui

$$0 < |a|^n/n^n < (1/2)^n$$

**Lemma 2.5** *Sia  $a_n$  una successione:*

1. se  $a_n > 0$  e  $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$  allora  $\lim_n a_n = 0$
2. se  $a_n \geq 0$  e  $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$  allora  $\lim_n a_n = 0$ ;
3. se  $a_n > 0$  e  $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$  allora  $\lim_n a_n = +\infty$ ;
4. se  $a_n \leq 0$  e  $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$  allora  $\lim_n a_n = +\infty$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio la prima e l'ultima affermazione.

(1) Si ha, fissato  $\varepsilon > 0$  in modo che  $\ell + \varepsilon < 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

pertanto

$$a_{n+1} < a_n(\ell + \varepsilon)$$

e se  $n > m > n_\varepsilon$

$$0 < a_n < (\ell + \varepsilon)^{n-m} a_m$$

e si può concludere che (1) è vera.

(4) Fissato  $\varepsilon$  in modo che  $\ell - \varepsilon > 1$  si ha

$$(a_n)^{1/n} > (\ell - \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

e

$$a_n > (\ell - \varepsilon)^n \quad \forall n > n_\varepsilon .$$

Ciò è sufficiente per concludere. □

Possiamo ora studiare le proprietà di una successione di notevole importanza.

Sia  $E_n$  la successione definita da

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

si ha che  $E_n$  è una successione strettamente crescente ed inoltre

$$2 \leq E_n < 3$$

.

Infatti si ha

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

per cui

$$E_n \geq 1 + n(1/n) = 2$$

Per dimostrare che  $E_n$  è crescente osserviamo che si ha

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = E_{n-1}$$

se e solo se

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

se e solo se

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

se e solo se

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

e l'ultima disuguaglianza si deduce immediatamente dal lemma 2.4.

Infine, dal momento che si può facilmente provare per induzione che

$$(k+1)! \geq 2^k \quad \text{per } k \geq 0$$

si ha

$$E_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} < 3 \quad (2.12)$$

Pertanto  $E_n$  è una successione crescente e limitata per cui possiamo affermare che

$$\lim_n E_n$$

esiste ed è reale e pertanto è lecito definire chiamare  $e$  il suo limite.

$$e = \lim_n E_n$$

Se  $x_n$  è una successione a termini positivi,  $x_n \rightarrow x$  si può provare (si veda il capitolo successivo sulla continuità) che

$$\lim \log_a x_n = \log_a x$$

e pertanto si ha

$$\lim n \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_a e$$

Osserviamo anche che

$$\log_a e = 1 \Leftrightarrow a = e$$

per cui si è naturalmente indotti a privilegiare il numero  $e$  come base per i logaritmi.

Si ha con 51 cifre decimali esatte

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959 .$$

**Definizione 2.3** Definiamo logaritmo naturale la funzione  $\log_e$ .  
Più semplicemente scriveremo  $\log_e x = \ln x$ .

Valgono i seguenti fatti:

1.  $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$
2.  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$
3.  $\lim \frac{a^n}{n^k} = 0, |a| < 1$
4.  $\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty, a > 1$
5.  $\lim \frac{\log_a n}{n^k} = 0, k > 0, a > 0, a \neq 1$

Infatti se indichiamo con  $b_n$  ciascuna delle successioni in oggetto si ha

1.  $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|a|}{n+1} \rightarrow 0$
2.  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1$
3.  $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = |a| \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \rightarrow |a|$
4. si può facilmente dedurre dal fatto che

$$\frac{\log_a n}{n^k} = \frac{1}{k} \log_a (\sqrt[n^k]{n^k})$$

**Definizione 2.4** Definiamo per  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$0! = 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$n!$  verrà detto  $n$  fattoriale.

Osserviamo che, se  $n \geq 1$ ,

$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

Definiamo inoltre per  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  nella seguente maniera:

$$(0)!! = 1$$

$$(1)!! = 1$$

$$n!! = n(n-2)!!$$

$n!!$  verrà indicato con il nome di  $n$  semifattoriale.

Osserviamo che

$$(2n)!! = \prod_{i=1}^n 2i \quad , \quad (2n+1)!! = \prod_{i=0}^n (2i+1)$$

Definiamo infine

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

coefficiente binomiale di ordine  $n$  e posto  $k$  e verrà detta  $n$  su  $k$ .

I coefficienti binomiali godono di notevoli proprietà: ad esempio possono essere calcolati usando il ben noto triangolo di Tartaglia e consentono di stabilire la formula della potenza di un binomio di Newton.

### 2.0.1 Triangolo di Tartaglia e Binomio di Newton

Si ha

#### Teorema 2.9

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (2.13)$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \\ &= \frac{n![(n+1-k)+k]}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned} \quad (2.14)$$

□

La precedente uguaglianza consente di costruire il così detto triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{cccc}
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{k-1} & \binom{n}{k} \dots \binom{n}{n} \\
 \dots & \dots & \binom{n+1}{k} & \dots \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

È importante osservare che ogni elemento del triangolo si può ottenere dalla somma dei due elementi della riga precedente, che occupano la posizione sopra e a sinistra della posizione occupata dall'elemento considerato.

Vale inoltre il seguente risultato

**Teorema 2.10** (*binomio di Newton*)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**DIMOSTRAZIONE.** E' immediato verificare che la formula vale per  $n = 1$ .

Proviamo ora che, se la formula è valida per  $n$ , allora è valida anche



per  $n + 1$ . Si ha

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) = \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a + b) = \\
 &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} = \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \\
 &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

□

## 2.1 Massimo e Minimo Limite di una successione

**Definizione 2.5** Sia  $a_n$  una successione e sia

$$\Phi(a_n) = \{ \ell \in \mathbb{R}^* : \exists a_{n_k}, \lim_k a_{n_k} = \ell \}$$

Definiamo

$$\limsup_n a_n = \sup \Phi(a_n)$$

$$\liminf_n a_n = \inf \Phi(a_n)$$

**Lemma 2.6** Sia  $b_k$  una successione tale che

$$\lim_k b_k = b$$

e supponiamo che, per ogni fissato  $k$ ,  $a_n^k$  sia una successione tale che

$$\lim_n a_n^k = b_k ;$$

allora  $\exists n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strettamente crescente tale che

$$\lim_k a_{n_k}^k = b$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $k_\varepsilon$  tale che:

$$|b_k - b| < \varepsilon \quad \text{se} \quad k > k_\varepsilon$$

e

$$\forall k \quad \exists n'_k : |a_n^k - b_k| < 1/k \quad \text{se} \quad n > n'_k$$

Pertanto se scegliamo

$$n_1 > n'_1 \tag{2.16}$$

$$\dots\dots\dots \tag{2.17}$$

$$n_k > n'_k \quad , \quad n_k > n_{k-1} \tag{2.18}$$

avremo, se  $k > k_\varepsilon, k > 1/\varepsilon$

$$|a_{n_k}^k - b| \leq |a_{n_k}^k - b_k| + |b_k - b| < \varepsilon + 1/k < 2\varepsilon$$

□

**Teorema 2.11** *Si ha che*

1. Se  $\lambda = \limsup_n a_n$  si ha  $\lambda \in \Phi(a_n)$

2. Se  $\mu = \liminf_n a_n$  si ha  $\mu \in \Phi(a_n)$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\lambda = \sup \Phi(a_n)$ , allora per il lemma 2.3

$$\exists \ell_k \in \Phi(a_n) : \lim_k \ell_k = \lambda .$$

Poiché  $\ell_k \in \Phi(a_n)$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists a_n^k : \lim_k a_n^k = \ell_k ;$$

si prova, come nel lemma 2.6, che

$$\exists b_k = a_{n_k}^k \text{ estratta da } a_n : \lim_k b_k = \lambda$$

cioè

$$\lambda \in \Phi(a_n) .$$

□

**Teorema 2.12** *Valgono i seguenti fatti:*

$$1. \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$$

$$2. \liminf_n a_n \leq \liminf_n a_{n_k} \leq \limsup_n a_{n_k} \leq \limsup_n a_n$$

$$3. \liminf_n a_n = \limsup_n a_n = \ell \Leftrightarrow \lim_n a_n = \ell \Leftrightarrow \Phi(a_n) = \{\ell\}$$

DIMOSTRAZIONE. (1) segue dalla definizione 2.6.

(2) è immediata conseguenza del fatto che essendo  $\Phi(a_{n_k}) \subset \Phi(a_n)$

$$\inf \Phi(a_n) \leq \inf \Phi(a_{n_k}) \leq \sup \Phi(a_{n_k}) \leq \sup \Phi(a_n)$$

(3) segue da (2) e dai teoremi 2.4 e 2.11. ■ □

**Corollario 2.1** *Si ha*

$$\limsup_n a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_n a_n = -\infty \quad (2.19)$$

$$\liminf_n a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_n a_n = +\infty \quad (2.20)$$

**Teorema 2.13** *Si ha*

$$\ell = \limsup_n a_n, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (2.21)$$

*se e solo se*

1.  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon$  tale che se  $n > n_\varepsilon$  tale che  $a_n < \ell + \varepsilon$
2. esiste  $a_{n_k}$  tale che  $\lim_k a_{n_k} = \ell$

DIMOSTRAZIONE.

- La seconda condizione della (2) segue dal teorema 2.11;

la prima condizione della (2) è ovvia se  $\ell = +\infty$ ; sia pertanto  $\ell \in \mathbb{R}$ , se per un certo  $\varepsilon_0 > 0$  non fosse  $a_n \leq \ell + \varepsilon_0$  definitivamente, ci sarebbero infiniti indici per i quali  $a_n > \ell + \varepsilon_0$  ed esisterebbe pertanto una estratta tale che

$$\lim_k a_{n_k} = a \geq \ell + \varepsilon_0 > \ell$$

cioè  $\ell$  non sarebbe il  $\limsup$  di  $a_n$ .

- Per la seconda condizione della (2)  $\ell \in \Phi(a_n)$  da cui

$$\ell \leq \limsup_n a_n$$

Per la prima condizione della (2), d'altro canto

$$\limsup_k a_{n_k} \leq \ell + \varepsilon$$

□

Un risultato analogo vale per il  $\liminf$ .

**Teorema 2.14** *Si ha*

$$\limsup_n a_n = \inf_n \sup_{k \geq n} a_k = \lim_n \sup_{k \geq n} a_k$$

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente

$$b_n = \sup_{k \geq n} a_k$$

è decrescente e

$$\lambda = \inf_n b_n = \lim_n b_n$$

Inoltre, se  $k \geq n > n_\varepsilon$

$$a_k < b_n \leq \lambda + \varepsilon$$

e

$$\sup_{k \geq n} a_k = b_n > \lambda - \varepsilon$$

e si può trovare  $a_{k_n} > \lambda - \varepsilon$  da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 2.15** Siano  $a_n$  e  $b_n$  due successioni, si ha

1.  $\liminf_n a_n = - \limsup_n (-a_n)$
2.  $a_n \leq b_n \Rightarrow \limsup_n a_n \leq \limsup_n b_n$ .
3.  $\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n$
4.  $\lim_n b_n = b > 0 \Rightarrow \limsup_n a_n b_n = \limsup_n a_n \cdot \lim_n b_n$
5.  $a_n > 0 \Rightarrow \limsup_n \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf_n a_n}$ .

DIMOSTRAZIONE. (1), (2), (3) seguono dal teorema 2.14; (4) segue da  $\Phi(a_n b_n) = b \Phi(a_n)$ ; (5) segue da  $\Phi(1/a_n) = 1/\Phi(a_n)$   $\square$

Un risultato analogo vale per il  $\liminf$ .

Passiamo ora a dimostrare due risultati estremamente utili per il calcolo dei limiti di rapporti di successioni, che si presentano in forma indeterminata.

**Teorema 2.16** Siano  $a_n$  e  $b_n$  due successioni tali che

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0.$$

Supponiamo inoltre che  $b_n$  sia strettamente monotona, allora

$$\liminf_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che non è restrittivo considerare  $b_n$  strettamente decrescente (e quindi  $b_n > 0$ ) in quanto, se così non fosse, potremmo considerare  $-b_n$  e  $-a_n$  in luogo di  $b_n$  e  $a_n$  (rimanendo invariati i rapporti considerati).

Osserviamo altresì che è sufficiente provare, ad esempio, l'ultima disuguaglianza, essendo la prima una sua conseguenza non appena si consideri  $-a_n$  in luogo di  $a_n$ , ed essendo la seconda ovvia.

Sia

$$\ell = \limsup_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

proviamo che

$$\limsup_n \frac{a_n}{b_n} \leq \ell$$

Se  $\ell = +\infty$  non c'è nulla da provare; i casi  $\ell \in \mathbb{R}$  ed  $\ell = -\infty$  sono soggetti ad una trattazione del tutto simile che esplicitiamo parallelamente: allo scopo definiamo

$$\ell_\varepsilon = \begin{cases} \ell + \varepsilon & \text{se } \ell \in \mathbb{R} \\ -\varepsilon & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \quad (2.22)$$

si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon$$

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < \ell_\varepsilon$$

e

$$a_n - a_{n+1} < (b_n - b_{n+1})\ell_\varepsilon$$

Allora, se  $m > n > n_\varepsilon$ , si ha

$$a_n - a_m < (b_n - b_m)\ell_\varepsilon$$

e, facendo  $m \rightarrow +\infty$ ,

$$a_n \leq b_n \ell_\varepsilon$$

onde

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \ell_\varepsilon$$

□

**Teorema 2.17** Siano  $a_n$  e  $b_n$  due successioni e supponiamo che  $b_n$  sia strettamente crescente [decrescente] con

$$\lim_n b_n = +\infty \quad [-\infty]$$

Allora

$$\liminf_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Come per il teorema precedente è sufficiente provare l'ultima disuguaglianza; inoltre possiamo sempre supporre che  $b_n$  sia strettamente crescente. Pertanto, posto

$$\ell = \limsup_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

proviamo che

$$\limsup_n \frac{a_n}{b_n} \leq \ell$$

Se  $\ell = +\infty$  nulla è da dimostrare; i casi  $\ell \in \mathbb{R}$  ed  $\ell = -\infty$  saranno considerati parallelamente, ricordando la 2.22:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon$$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \ell_\varepsilon$$

e

$$a_{n+1} - a_n \leq (b_{n+1} - b_n)\ell_\varepsilon$$

Se  $n > m > n_\varepsilon$  si ha

$$a_n - a_m \leq (b_n - b_m)\ell_\varepsilon$$

e

$$a_n \leq a_m + (b_n - b_m)\ell_\varepsilon$$

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_m}{b_n} + \left(1 - \frac{b_m}{b_n}\right)\ell_\varepsilon$$

Facendo  $n \rightarrow +\infty$  si ha

$$\limsup_n \frac{a_n}{b_n} \leq \ell_\varepsilon$$

e la tesi. □

I due precedenti teoremi permettono di provare alcuni interessanti risultati sui limiti delle medie aritmetiche e geometriche dei primi  $n$  termini di una successione.

**Corollario 2.2** *Sia  $\alpha_n$  una successione, allora*

$$\begin{aligned} \liminf_n \alpha_n &\leq \liminf_n \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \leq \\ &\leq \limsup_n \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \leq \limsup_n \alpha_n \end{aligned} \quad (2.23)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta applicare il teorema 2.17 alle successioni

$$a_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad , \quad b_n = n \quad .$$

□

**Corollario 2.3** *Sia  $\alpha_n$  una successione allora*

$$\liminf_n \alpha_n \leq \liminf_n (\alpha_n \dots \alpha_1)^{1/n} \leq \limsup_n (\alpha_n \dots \alpha_1)^{1/n} \leq \limsup_n \alpha_n$$

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il teorema 2.17 alle successioni

$$\sum_{i=1}^n \log_2(\alpha_i) \quad \text{ed} \quad n$$

tenere conto del fatto che

$$\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^{1/n} = \exp_2\left(\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \log_2(\alpha_i)\right)\right)$$

ed osservare che  $\exp_2$  è crescente e, se  $x_n \rightarrow x$ , si dimostra che  $\exp_2(x_n) \rightarrow \exp_2(x)$ .  $\square$

**Corollario 2.4** Sia  $\alpha_n > 0$  allora si ha

$$\liminf_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{\alpha_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{\alpha_n} \leq \limsup_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal corollario 2.3 posto

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

$\square$

## 2.2 Caratterizzazione del limite di una funzione per successioni

Anche se a prima vista ciò non appare verosimile, operare con successioni piuttosto che con funzioni è molto più comodo e facile; è pertanto molto utile provare il seguente risultato che permette di ottenere informazioni sul limite di una funzione utilizzando opportune successioni.

**Teorema 2.18** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e siano  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ,  $\ell \in \mathbb{R}^*$ ; sono fatti equivalenti:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
2. per ogni  $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , si ha

$$\lim f(x_n) = \ell$$

DIMOSTRAZIONE. Se vale la prima condizione avremo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che, se  $x \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$  si ha

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Inoltre esiste  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che per  $n > n_\varepsilon$  si abbia  $x_n \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$  e di conseguenza si ha

$$f(x_n) \in I(\ell, \varepsilon)$$

Da cui la seconda asserzione.

Se viceversa la prima asserzione è falsa, allora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq x_0$ , con  $x_n \in I^0(x_0, 1/n)$  e

$$f(x_n) \notin I(\ell, \varepsilon_0)$$

e quindi la seconda è falsa

□

Si può provare che ogni successione convergente ammette una successione estratta monotona (e convergente allo stesso limite); pertanto nel verificare (2) è sufficiente limitarsi alle sole successioni monotone.

Il criterio di convergenza di Cauchy riveste notevole importanza ed è utile sapere che esso può essere provato anche per le funzioni nella seguente forma.

**Teorema 2.19** - *Criterio di Cauchy* - Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ ; sono condizioni equivalenti:

1. esiste  $\ell \in \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
2. per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $x, y \in I^0(x_0, \delta_\varepsilon)$  si ha

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**DIMOSTRAZIONE.** (1)  $\Rightarrow$  (2) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che se  $x \in I^0(x_0, \delta_{\varepsilon/2})$  si ha

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon/2$$

per cui se  $x, y \in I^0(x_0, \delta_{\varepsilon/2})$  si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) Se per assurdo (1) non fosse vera esisterebbero due successioni  $x_n, y_n \in D$ , convergenti ad  $x_0$  tali che  $f(x_n) \rightarrow \ell_1$  e  $f(y_n) \rightarrow \ell_2$  con  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$ ,  $\ell_1 \neq \ell_2$ .

Pertanto la condizione (2) non potrebbe essere soddisfatta. □

Mediante le successioni siamo anche in grado di provare i seguenti risultati che caratterizzano gli insiemi aperti, chiusi e compatti in  $\mathbb{R}$  e che sono facilmente estendibili a più generali situazioni.

**Teorema 2.20** Sia  $A \subset \mathbb{R}$ , allora

1.  $A$  è aperto se e solo se per ogni  $x \in A$  e per ogni successione  $x_n$ , tale che  $x_n \rightarrow x$ , si ha  $x_n \in A$  definitivamente;
2.  $A$  è chiuso se e solo se per ogni  $x_n \in A$ ,  $x_n \rightarrow x$  si ha  $x \in A$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A$  aperto,  $x \in A$ , allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ ; poiché definitivamente  $|x_n - x| < \varepsilon$  ne segue  $x_n \in A$ .



Supponiamo viceversa che  $A$  non sia aperto, allora esiste  $x \in A$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , esiste  $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n) \setminus A$  e ciò è assurdo.

Sia  $A$  chiuso e  $x_n \in A$ ,  $x_n \rightarrow x$ ; allora  $A^c$  è aperto e se  $x \in A^c$  si avrebbe  $x_n \in A^c$  definitivamente e ciò è assurdo.

Viceversa, se  $A$  non è chiuso,  $A^c$  non è aperto; pertanto esiste  $x \in A^c$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $x_n \in I(x, 1/n)$ ,  $x_n \in A$ ; pertanto  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \in A$  ed  $x \notin A$   $\square$

**Teorema 2.21** *Sia  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  è un insieme compatto se e solo se per ogni  $x_n \in A$  esiste  $x_{n_k} \rightarrow x$ , tale che  $x \in A$*

**DIMOSTRAZIONE.** Il solo se segue banalmente dai teorema 2.5 e 2.20.

Se viceversa  $A$  non fosse limitato, esisterebbe  $x_n \in A$ ,  $|x_n| \rightarrow +\infty$ , e qualunque estratta di  $x_n$  non potrebbe convergere ad  $x \in A$ .  $\square$



### 3. Infinitesimi ed Infiniti

Se  $f(x) \rightarrow \ell$ ,  $\ell \in \mathbb{R}$  allora  $f(x) - \ell \rightarrow 0$  per cui per studiare il comportamento di una funzione che ammette limite finito sarà sufficiente considerare funzioni che tendono a 0; tali funzioni si definiscono infinitesime ed è importante cercare di ottenere qualche informazione in più su come una funzione infinitesima tende a 0.

Ad esempio è evidente che  $x^n$  diminuisce più o meno velocemente, in dipendenza da  $n$ , quando ci si avvicina a 0. È quindi ovvio che sia utile cercare di individuare anche in funzioni più complesse tali comportamenti.

Quanto detto per le funzioni infinitesime si può poi facilmente estendere anche alle funzioni che tendono all'infinito: che chiameremo infinite.

Pertanto introduciamo la definizione di ordine di infinitesimo e di ordine di infinito.

**Definizione 3.1** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , diciamo che  $f$  è infinitesima in  $a^+$  se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$$

In maniera analoga si possono dare le definizioni per  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ .

**Definizione 3.2** Siano  $f, g$  due funzioni infinitesime in  $a^+$  e supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

- se  $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  diciamo che  $f$  e  $g$  hanno lo stesso;
- se  $\ell = 0$  diciamo che  $f$  è infinitesima di ordine superiore a  $g$ .

**Definizione 3.3** Chiamiamo infinitesimo campione di ordine  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  in  $a^+$ ,  $a^-$ ,  $a$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$  rispettivamente la funzione

$$(x - a)^\alpha, (a - x)^\alpha, |x - a|^\alpha, \frac{1}{x^\alpha}, \frac{1}{(-x)^\alpha}$$

Si dice che  $f$  è infinitesimo di ordine  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  se  $f$  ha lo stesso ordine dell'infinitesimo campione di ordine  $\alpha$ .

Osserviamo esplicitamente che può accadere che  $f$  non abbia ordine di infinitesimo reale.

Ad esempio la funzione

$$\frac{1}{\ln x}$$

è infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$  di ordine inferiore ad ogni  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .

Infatti per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 0 \quad (3.1)$$

La definizione di ordine di infinitesimo consente di provare che

**Teorema 3.1** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni infinitesime in  $a^+$  di ordine  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente; allora*

1.  $fg$  ha ordine  $\alpha + \beta$
2. se  $\alpha < \beta$ ,  $f + g$  ha ordine  $\alpha$
3. se  $\alpha = \beta$ ,  $f + g$  ha ordine maggiore o uguale ad  $\alpha$ .

**Definizione 3.4** *Diciamo che  $f$  è infinita in  $a^+$  se  $1/f$  è infinitesima in  $a^+$ . Diciamo che  $f$  è infinita di ordine  $\alpha$  se  $1/f$  è infinitesima di ordine  $\alpha$ .*

**Teorema 3.2** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni infinite in  $a^+$  di ordine  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente; allora*

1.  $fg$  ha ordine  $\alpha + \beta$ ;
2. se  $\alpha < \beta$ ,  $f + g$  ha ordine  $\beta$ ;
3. se  $\alpha = \beta$ ,  $f + g$  ha ordine minore o uguale ad  $\alpha$

Osserviamo che si potrebbe definire  $f$  di ordine  $\alpha \in \mathbb{R}$  in  $a^+$  se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ed osservare che  $f$  è infinitesima se  $\alpha > 0$  ed è infinita se  $\alpha < 0$ .

Con queste convenzioni si può provare che se  $f$  ha ordine  $\alpha$  e  $g$  ha ordine  $\beta$ , allora  $f/g$  ha ordine  $\alpha - \beta$ .