1. La Regola di De L'Hôpital

Dal teorema di Cauchy è possibile ricavare un risultato molto importante usualmente identificato come regola di De L'Hôpital, dal nome del marchese che pubblicò un trattato che la contiene, ma è più probabilmente dovuta a Johann Bernoulli.

Il suo scopo è fornire uno strumento atto a risolvere, in certi casi, il problema di trovare il limite di una forma indeterminata.

E' importante ricordare che l'applicazione di tale regola è subordinata, come sempre, alla verifica di alcune ipotesi, in assenza delle quali si possono ottenere dei risultati sbagliati.

La regola di De l'Hôpital è un raffinamento del seguente fatto del tutto elementare.

Teorema 1.1 *Siano $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in D$, D aperto; allora, se $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) \neq 0$, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□

Il risultato appena enunciato si può generalizzare al caso in cui non sia possibile considerare

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ma soltanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Naturalmente tutto ciò è fatto allo scopo di determinare il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nel caso in cui

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Non sarà ovviamente restrittivo trattare solo il caso in cui $x \to x_0^+$.

Teorema 1.2 *Siano $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili; supponiamo che*

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0.$$

Allora, se

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, si ha

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Sia

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*.$$

Se $a < x < a + \delta_\varepsilon$ si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in I(\ell, \varepsilon).$$

Ora, se prolunghiamo f e g per continuità in a ponendo

$$f(a) = g(a) = 0,$$

si può applicare il teorema di Cauchy nell'intervallo $[a, x]$ con $x \in (a, b)$ ed ottenere che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{con} \quad a < c < x$$

Perciò, se $a < x < a + \delta_\varepsilon$ si ha $a < c < x < a + \delta_\varepsilon$ e

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in I(\ell, \varepsilon).$$

□

Il teorema 1.2 può ovviamente essere rienunciato anche considerando limiti per $x \to a^-$ e per $x \to a$.

Restano fuori da questa trattazione i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Osserviamo che in tali casi può essere utilizzato il fatto che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}.$$

A quest'ultimo limite può essere applicato il teorema 1.2 non appena si siano verificate le ipotesi in esso richieste.

Enunciamo, per comodità, il risultato che si ottiene seguendo questa via.

Corollario 1.1 *Siano $f, g : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili; supponiamo*

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \,.$$

Allora, se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nel caso in cui $g \to +\infty$ oppure $g \to -\infty$ possiamo dimostrare il seguente teorema la cui domostrazione comporta qualche difiicoltà in più.

Teorema 1.3 *Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili; supponiamo*

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b)$$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty.$$

Allora, se

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$.

Allora esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $a < x \leq a + \delta_\varepsilon$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in I(\ell, \varepsilon)$$

Se consideriamo $a < x < a + \delta_\varepsilon$, per il teorema di Cauchy, esiste $c \in (x, a + \delta_\varepsilon)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x) - g(a+\delta_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in I(\ell, \varepsilon)$$

Si ha,dividendo per $g(x)$

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}} \in I(\ell, \varepsilon) \qquad \forall x \in (a, a+\delta_\varepsilon)$$

Occorre a questo punto procedere in modo leggermente diverso a seconda che $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$.

Sia ad esempio $\ell \in \mathbb{R}$. possiamo supporre $\varepsilon < 1$ e possiamo trovare $\delta'_\varepsilon > 0$tale che, se $a < x < a + \delta'_\varepsilon \leq a + \delta_\varepsilon$ si abbia

$$\left|\frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right|, \left|\frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \varepsilon$$

Allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \ell = \frac{f(x)}{g(x)} - \ell - \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} + \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} - \ell\frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} + \ell\frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}$$

e

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} - \ell\left(1 - \frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right)\right| + \left|\frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} - \ell\frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right| \leq$$
$$\left(1 - \frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right)\left|\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}}\right| + \left|\frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} - \ell\frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right| \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon)\varepsilon + (1+\ell)\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon + \ell\varepsilon \leq (3+\ell)\varepsilon$$

Nel caso in cui $\ell = +\infty$ possiamo supporre $\varepsilon > 1$ e possiamo trovare $\delta'_\varepsilon > 0$tale che, se $a < x < a + \delta'_\varepsilon \leq a + \delta_\varepsilon$ si abbia

$$\left|\frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right|, \left|\frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} + \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} \geq$$
$$\left(1 - \frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}\right)\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{g(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)}} + \frac{f(a+\delta_\varepsilon)}{g(x)} \geq$$
$$\leq \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon - 2$$

□

Ecco alcuni esempi che mostrano come la regola di De L'Hôpital non dia risultati corretti se viene meno anche una sola delle ipotesi fatte.

Esempio 1.1 *Siano*

$$f(x) = x + \cos x \qquad , \qquad g(x) = x - (\sin x)/2$$

e consideriamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

La regola di De L'Hôpital non può essere applicata perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sin x}{1-(\cos x)/2}$$

non esiste.

Osserviamo anche che tutte le altre ipotesi sono soddisfatte.

Una applicazione incauta della regola stessa condurrebbe a concludere che anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

non esiste, mentre non è difficile vedere che tale limite esiste e vale 1.

Esempio 1.2 *Siano*

$$f(x) = e^{-2x}(2\sin x + \cos x) \qquad , \qquad g(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

e consideriamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

La regola di De L'Hôpital non può essere applicata perché esiste una successione x_n tale che $x_n \to +\infty$ e $g'(x_n) = 0$, tutte le altre ipotesi essendo soddisfatte.

Tuttavia si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

ed una incauta applicazione della regola di De L'Hôpital condurrebbe a concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ma ciò è falso in quanto tale limite non esiste.

Verifichiamo le nostre affermazioni.

Si ha

$$f'(x) = -5e^{-2x}\sin x \quad , \quad g'(x) = -2e^{-x}\sin x \quad , \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{5}{2}e^{-x}$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Inoltre, sia c tale che $2\sin c + \cos c = 0$ e consideriamo la successione

$$x_n = c + 2\pi n,$$

$x_n \to +\infty$ ed $f(x_n) = 0$ per cui si ha

$$\lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0.$$

Sia d'altro canto

$$a_n = \operatorname{atn}(e^{-7n}) \qquad , \qquad y_n = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n + a_n;$$

usando le formule di addizione del seno e del coseno si calcola facilmente che

$$\begin{aligned}\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = e^{\pi/4-2\pi n-a_n}\frac{3\sin a_n - \cos a_n}{2\sin a_n} = \\ &= e^{\pi/4-a_n}e^{-2\pi n}\frac{3\tan a_n - 1}{2\tan a_n} \\ &= e^{\pi/4-\operatorname{atn}(e^{-7n})}\frac{3e^{-7n}-1}{2}e^{(7-2\pi)n} \longrightarrow -\infty \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Ciò è sufficiente per concludere che il limite in oggetto non esiste.

Teorema 1.4 *Siano $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili; supponiamo*

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b)$$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty.$$

Allora, se

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regola di De L'Hôpital permette di ricavare un risultato molto utile per calcolare la derivata di una funzione in punti che presentino qualche criticità.

Corollario 1.2 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $D \setminus \{x_0\}$ e continua in $x_0 \in D$, D aperto, con*

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lambda \qquad , \qquad \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \mu.$$

Allora

1. *se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $f'_+(x_0) = \lambda$*
2. *Se $\mu \in \mathbb{R}$ allora $f'_-(x_0) = \mu$*
3. *Se $\lambda = \pm\infty$ allora f non è derivabile da destra in x_0*
4. *Se $\mu = \pm\infty$ allora f non è derivabile da sinistra in x_0*

2. La Formula Di Taylor

La formula di Taylor nasce dall'esigenza di trovare buone approssimazioni, facilmente calcolabili, per le funzioni elementari.

Si tratta essenzialmente dello sviluppo del concetto di approssimazione lineare che è stato introdotto con la definizione di derivata. Infatti se supponiamo che f sia una funzione derivabile in x_0; abbiamo visto che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0)$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0 = \omega(0).$$

Possiamo pertanto affermare che in tale occasione abbiamo trovato un polinomio di primo grado che approssima la funzione f con un errore che può essere espresso nella forma $(x - x_0)\omega(x - x_0)$, con $\omega(x - x_0) \to 0$ se $x \to x_0$, tale errore quindi risulta essere infinitesimo di ordine superiore ad 1 cioè di ordine superiore al grado del polinomio approssimante.

Poniamoci ora il problema di approssimare la funzione f con un polinomio di grado n, commettendo un errore che sia infinitesimo di ordine superiore ad n, cioè che possa essere espresso nella forma

$$(x - x_0)^n \omega(x - x_0) \qquad \text{ove} \qquad \lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0\ .$$

Sia pertanto

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i$$

un tale polinomio; dovrà aversi

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + (x - x_0)^n \omega(x - x_0) \tag{2.1}$$

con $\omega(x - x_0) \to 0$ se $x \to x_0$.

Se supponiamo f derivabile n volte, affinché la 2.1 sia vera dovrà essere

$$f(x_0) = a_0$$

per cui si avrà

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x - x_0)^i + (x - x_0)^n \omega(x - x_0)$$

e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i(x - x_0)^{i-1} + (x - x_0)^{n-1} \omega(x - x_0).$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene

$$f'(x_0) = a_1$$

e si avrà

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \sum_{i=2}^{n} a_i(x - x_0)^i + (x - x_0)^n \omega(x - x_0)$$

da cui

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \\ = a_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i(x - x_0)^{i-2} + (x - x_0)^{n-2} \omega(x - x_0) \quad (2.2)$$

per cui, applicando la regola di De L'Hôpital, si ottiene che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = a_2 \quad (2.3)$$

e

$$\frac{f''(x_0)}{2!} = a_2.$$

Così procedendo si ottiene che

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n$$

e pertanto, affinché il nostro scopo sia raggiunto, sarà necessario che

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Riassumendo possiamo dire che

Affinchè si abbia

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i + (x - x_0)^n \omega(x - x_0) \quad (2.4)$$

con $\omega(x - x_0) \to 0$ se $x \to x_0$. deve essere

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (2.5)$$

Ci resta ora da provare che tale polinomio soddisfa effettivamente le condizioni richieste.

Ciò sarà fatto provando il seguente risultato:

Teorema 2.1 *- Formula di Taylor con il resto di Peano - Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile n-1 volte in (a, b) ed n volte in $x_0 \in (a, b)$; allora*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + (x - x_0)^n \omega(x - x_0) \tag{2.6}$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0 = \omega(0) .$$

Dimostrazione. Definiamo

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

e chiamiamo

$$\omega(x - x_0) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n};$$

proviamo che

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0$$

Allo scopo di applicare la regola di De L'Hôpital calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \quad & \frac{f'(x) - P'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \\ & = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n(x - x_0)^{n-1}} \left(f'(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-1)!}(x - x_0)^{i-1} \right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

e proseguendo calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} & \frac{f''(x) - P''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \\ & = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} \left(f''(x) - \sum_{i=2}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-2)!}(x - x_0)^{i-2} \right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

fino ad arrivare a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \quad & \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \\ & = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \\ & = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si può pertanto dedurre che

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0 \tag{2.10}$$

□

La formula di Taylor con il resto nella forma di Peano permette di estendere la possibilità di approssimare una funzione f con un polinomio di primo grado, fino ad ottenere la possibilità di approssimarla con un polinomio di grado n arbitrario.

Ovviamente il fatto più importante è la valutazione dell'errore commesso e, se consideriamo il resto nella forma di Peano, tale valutazione è di tipo qualitativo.

Se vogliamo una valutazione dell'errore di tipo quantitativo ci occorre seguire un procedimento diverso dalla definizione di differenziabilità. Un rapido sguardo ai risultati di calcolo differenziale fino ad ora provati ci convincerà ben presto che il risultato da estendere è il teorema di Lagrange.

Cercheremo in altre parole di valutare la differenza

$$f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

in funzione di maggioranti di $|f^{(n+1)}(x)|$.

Teorema 2.2 *Formula di Taylor con il resto di Lagrange - Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a, b); siano $x, x_0 \in (a, b)$, allora esiste c tra x_0 ed x, tale che*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dimostrazione. Proviamo il teorema nel caso in cui $n = 2$; dovremo in questo caso provare che esiste c tra x_0 ed x, tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3 \tag{2.11}$$

Sia

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - R(x - x_0)^3 \tag{2.12}$$

Ovviamente R dipende dal fatto che abbiamo fissato $n = 3$ oltre che da x e da x_0, che comunque sono essi pure fissati,

Se consideriamo F sull'intervallo di estremi x_0 ed x, possiamo affermare che è derivabile almeno tre volte e si ha

$$F'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - 3R(x - x_0)^2 \tag{2.13}$$
$$F''(x) = f''(x) - f''(x_0) - 6R(x - x_0) \tag{2.14}$$
$$F'''(x) = f'''(x) - 6R \tag{2.15}$$

Poichè $F(x) = F(x_0) = 0$ per il teorema di Rolle esiste un punto α tra x_0 ed x tale che

$$F'(\alpha) = 0$$

Poichè inoltre $F'(x_0) = 0$, sempre per il teorema di Rolle si ha che esiste un punto β tra x_0 ed α tale che

$$F''(\beta) = 0$$

Ed ancora per il teorema di Rolle, poichè ancora $F''(x_0) = 0$ esiste un punto c tra x_0 ed β tale che

$$F'''(c) = 0$$

Ne ricaviamo infine che

$$F'''(c) = f'''(c) - 6R = 0$$

e ne deduciamo che

$$R = \frac{f'''(c)}{6}$$

□

Lemma 2.1 *Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte in (a, b) e sia $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b), con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$.*

Siano $x, x_0 \in (a, b)$, allora esiste c, tra x_0 ed x, tale che

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)(x - c)^n(x - x_0)}{n!\ \varphi'((x - c)/(x - x_0))}.$$

Dimostrazione. Sia $x \in (a, b)$, posto

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x - t)^i$$

e

$$R = f(x) - Q(x_0) = f(x) - P(x)$$

definiamo $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la

$$F(t) = Q(t) + \varphi\left(\frac{x - t}{x - x_0}\right) R.$$

Si ha

$$F(x) = Q(x) + \varphi(0)R = Q(x) = f(x)$$

$$F(x_0) = Q(x_0) + \varphi(1)R = f(x);$$

inoltre F è derivabile in (a, b), pertanto per il teorema di Rolle, esiste c, tra x_0 ed x tale che $F'(c) = 0$, ovvero

$$F'(c) = Q'(c) - \frac{1}{x - x_0}\varphi'\left(\frac{x-c}{x-x_0}\right)R \ = 0.$$

Notiamo che

$$Q(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + ... + f^{(n)}(t)n!(x-t)^n$$

da cui

$$\begin{aligned} Q'(t) &= \\ &= f'(t) - f'(t) + f''(t)(x-t) - f''(t)(x-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2 + \\ &+ \cdots\cdots\cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned} \tag{2.16}$$

e

$$F'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n - \frac{1}{x-x_0}\varphi'\left(\frac{x-c}{x-x_0}\right)R = 0.$$

Ne viene

$$R = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)}{n!\varphi'((x-c)/(x-x_0))}$$

□ Il precedente teorema può essere applicato per ottenere diversi resti corrispondenti a diverse scelte della funzione φ.

Illustriamo di seguito tre delle quattro più importanti formulazioni, rinviando al seguito per la quarta, che coinvolge il concetto di integrale.

Teorema 2.3 *Formula di Taylor con il resto di Schlomilch-Ròche Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* $n+1$ *volte in* (a, b) *e siano* $x, x_0 \in (a, b)$, $\alpha > 0$*; allora esiste* $c \in (a, b)$*, tra* x_0 *ed* x*, tale che*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n+1-\alpha}(x-x_0)^{\alpha}}{n!\ \alpha}.$$

Dimostrazione. E' sufficiente scegliere

$$\varphi(t) = t^{\alpha}$$

□

Teorema 2.4 *formula di Taylor con il resto di Cauchy - Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* $n+1$ *volte in* (a, b)*; siano* $x, x_0 \in (a, b)$, *allora esiste esiste* c, *tra* x_0 *ed* x, *tale che*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)}{n!}.$$

Dimostrazione. E' sufficiente applicare il teorema precedente con $\alpha = 1$. □

Teorema 2.5 *Formula di Taylor con il resto di Lagrange - Sia* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile* $n+1$ *volte in* (a, b)*; siano* $x, x_0 \in (a, b)$, *allora esiste* $c \in (a, b)$, c, *tra* x_0 *ed* x, *tale che*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

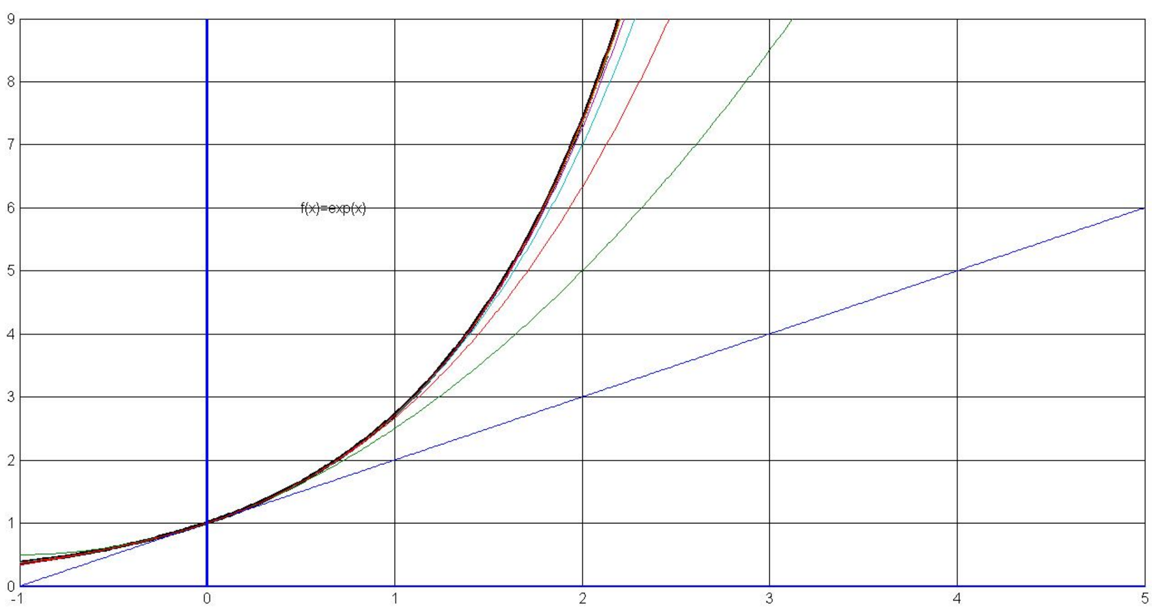
Dimostrazione. E' sufficiente applicare il teorema 2.3 dopo aver posto $\alpha = n + 1$. □

3. Qualche Sviluppo di Taylor

Alcuni sviluppi di funzioni elementari ricorrono spesso e quindi è molto comodo fare una breve raccolta di risultati in merito

Nel seguito indichiamo con ω una funzione infinitesima per $x \to x_0$

3.1 Lo sviluppo di McLaurin di e^x



Sia

$$f(x) = e^x$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ e si ha

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1 \tag{3.1}$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1 \tag{3.2}$$
$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1 \tag{3.3}$$
$$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = 1 \tag{3.4}$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \tag{3.5}$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1 \tag{3.6}$$

da cui si ricava che il polinomio di McLaurin P_n di e^x di grado n è

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

ed il resto di Lagrange R_n assume la forma

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad |c| \le |x|$$

Possiamo pertanto concludere che

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \omega(x) && (3.7) \\ e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad |c| \le |x| && (3.8) \end{aligned}}$$

3.2 *Lo sviluppo di McLaurin di* $\sin x$

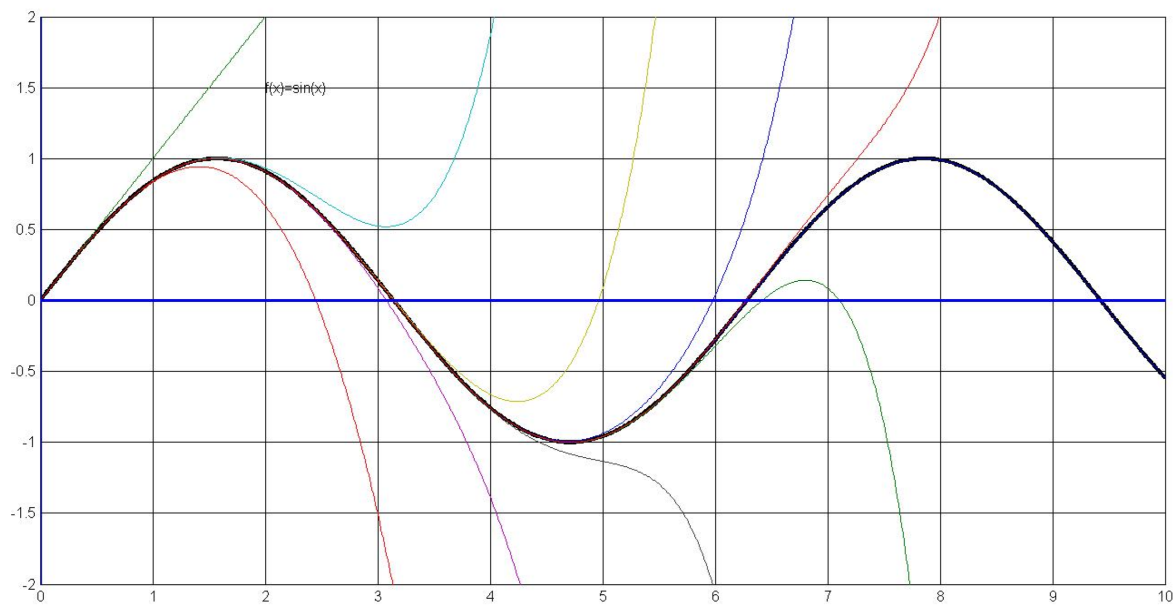
Sia

$$f(x) = \sin x$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ e si ha

$$f(x) = \sin x \qquad f^{(iv)}(x) = \sin x \tag{3.9}$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f^{(v)}(x) = \cos x \tag{3.10}$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f^{(vi)}(x) = -\sin x \tag{3.11}$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f^{(vii)}(x) = -\cos x \tag{3.12}$$

Pertanto le derivate di f si ripetono di 4 in 4 e si ha



$$f(0) = 0 \qquad f^{(iv)}(0) = 0 \tag{3.13}$$
$$f'(0) = 1 \qquad f^{(v)}(0) = 1 \tag{3.14}$$
$$f''(0) = 0 \qquad f^{(vi)}(0) = 0 \tag{3.15}$$
$$f'''(0) = -1 \qquad f^{(vii)}(0) = -1 \tag{3.16}$$

da cui si ricava che il polinomio di McLaurin P_n di $\sin x$ di grado $2n+1$ è

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ed il resto di Lagrange R_{2n+1} assume la forma

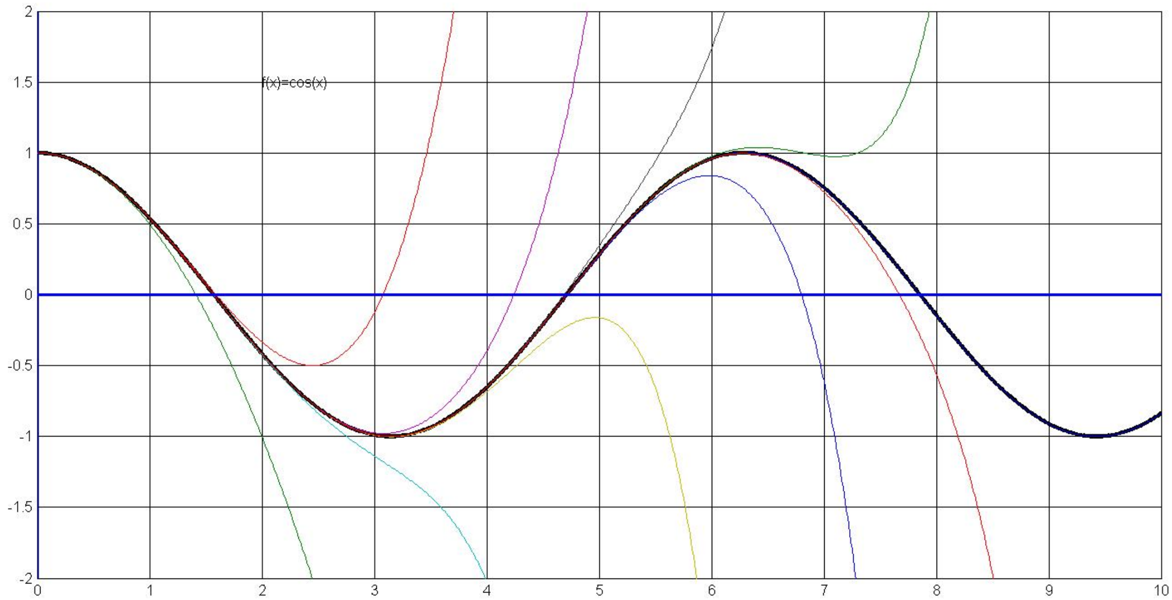
$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} \qquad |c| \leq |x|$$

Ricordiamo che il termine di grado $2n+2$ è nullo.

Possiamo pertanto concludere che

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+3}\omega(x) && (3.17) \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \qquad |c| \leq |x| && (3.18) \end{aligned}}$$

3.3 *Lo sviluppo di McLaurin di* $\cos x$



Sia

$$f(x) = \cos x$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ e si ha

$$f(x) = \cos x \qquad f^{(iv)}(x) = \cos x \tag{3.19}$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f^{(v)}(x) = -\sin x \tag{3.20}$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f^{(vi)}(x) = -\cos x \tag{3.21}$$

$$f'''(x) = \sin x \qquad f^{(vii)}(x) = \sin x \tag{3.22}$$

Pertanto le derivate di f si ripetono di 4 in 4 e si ha

$$f(0) = 1 \qquad f^{(iv)}(0) = 1 \tag{3.23}$$

$$f'(0) = 0 \qquad f^{(v)}(0) = 0 \tag{3.24}$$

$$f''(0) = -1 \qquad f^{(vi)}(0) = -1 \tag{3.25}$$

$$f'''(0) = 0 \qquad f^{(vii)}(0) = 0 \tag{3.26}$$

da cui si ricava che il polinomio di McLaurin P_n di $\cos x$ di grado $2n$ è

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

ed il resto di Lagrange R_{2n} assume la forma

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \qquad |c| \leq |x|$$

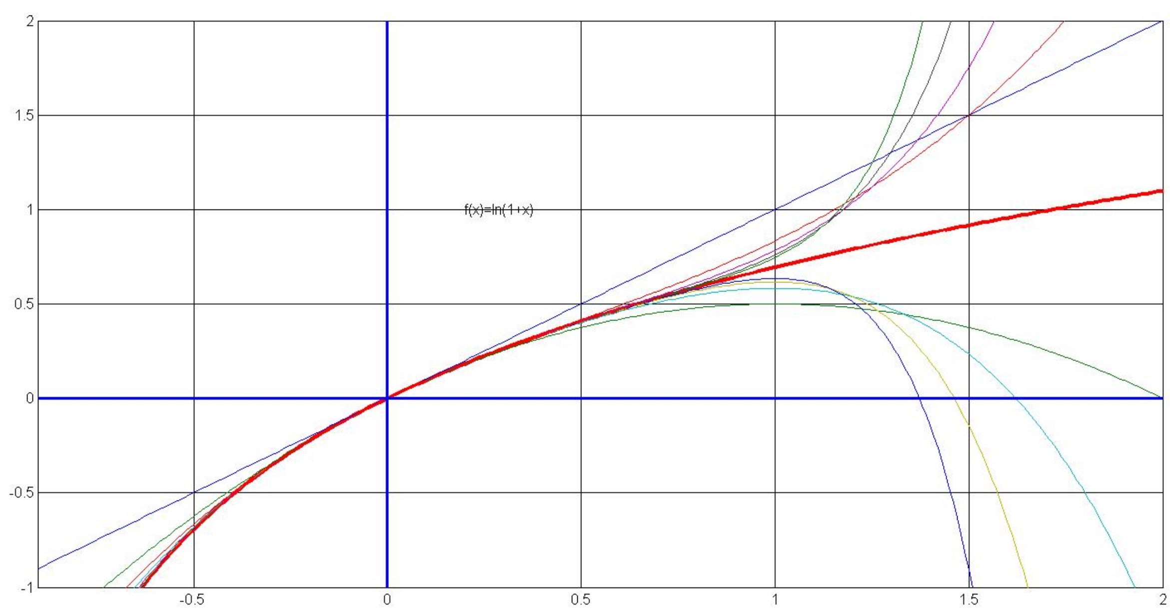
Ricordiamo che il termine di grado $2n+1$ è nullo.

Possiamo pertanto concludere che

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\omega(x) \tag{3.27}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+3} \qquad |c| \leq |x| \tag{3.28}$$

3.4 *Lo sviluppo di McLaurin di* $\ln(1+x)$



Sia

$$f(x) = \ln(1+x)$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}((-1,+\infty))$ e si ha

$$f(x) = \ln(1+x) \tag{3.29}$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \tag{3.30}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \tag{3.31}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \tag{3.32}$$
$$f^{(iv)}(x) = -\frac{3\cdot 2}{(1+x)^4} \tag{3.33}$$

Possiamo quindi congetturare che

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \tag{3.34}$$

La 3.36 si dimostra per induzione, infatti:

1. per $n = 1$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
e la 3.36 è vera.

2. se la 3.36 è vera per n allora è vera anche per $n+1$ infatti:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} =$$
$$(-1)(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}(-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \tag{3.35}$$

Pertanto

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \tag{3.36}$$

e quindi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

ed il resto di Lagrange R_{2n} assume la forma

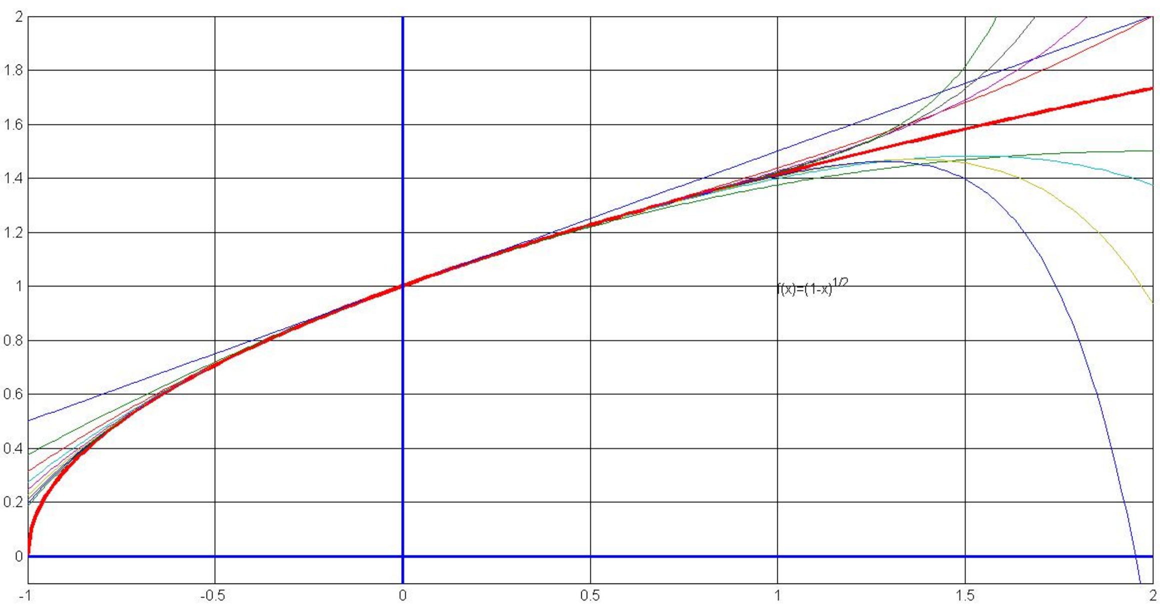
$$R_n(x) = (-1)^{n+2}\frac{(n)!}{(1+c)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \qquad |c| \le |x|$$

Possiamo pertanto concludere che

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + x^n \omega(x) \tag{3.37}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \qquad |c| \leq |x| \tag{3.38}$$

3.5 *Lo sviluppo di McLaurin di* $\sqrt{1+x}$



Sia

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

. Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}((-1, +\infty))$ e si ha

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \tag{3.39}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \tag{3.40}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \tag{3.41}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} \tag{3.42}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-7/2} \tag{3.43}$$

Possiamo quindi congetturare che

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} \tag{3.44}$$

La 3.44 si dimostra per induzione, infatti:

1. per $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

e la 3.44 è vera.

2. se la 3.44 è vera per n allora è vera anche per $n+1$ infatti:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} = \\ = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}-1} = \\ = (-1)^{n+2}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Pertanto

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n} \tag{3.46}$$

e quindi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{2^k}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}x^k$$

ed il resto di Lagrange R_{2n} assume la forma

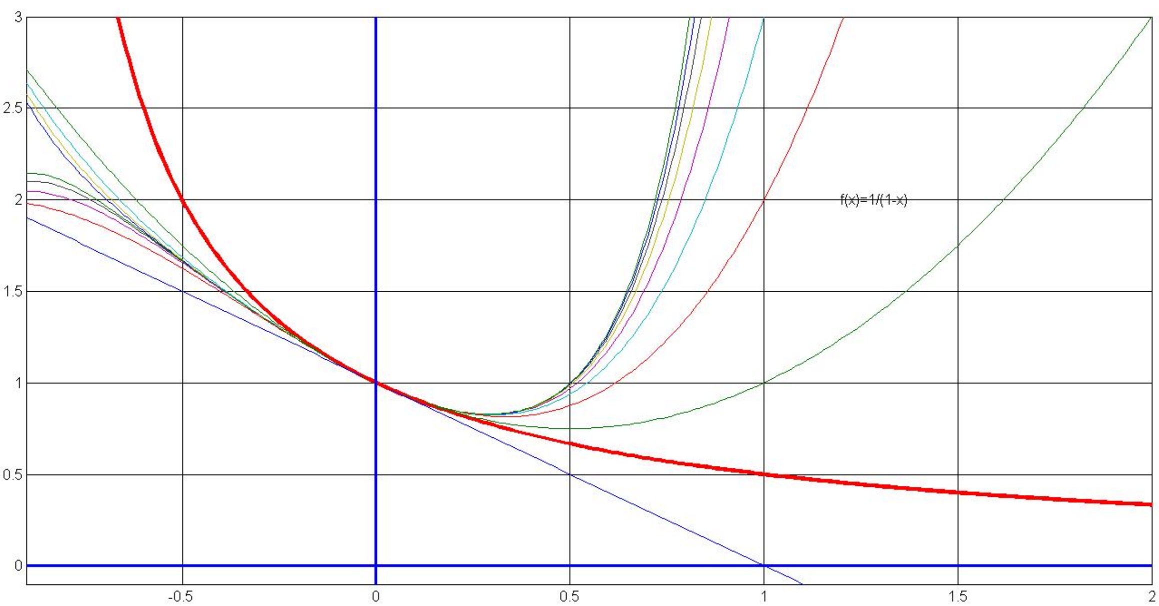
$$R_n(x) = (-1)^{n+2}\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}}(1+c)^{-\frac{2n+1}{2}} \qquad |c| \leq |x|$$

Possiamo pertanto concludere che

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(2k-3)!!}{k!2^k} x^k + x^n \omega(x) \tag{3.47}$$

$$\sqrt{1+x} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(2k-3)!!}{2^k} \frac{x^k}{k!} + (-1)^{n+2} \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}} (1+c)^{-\frac{2n+1}{2}}$$
$$|c| \leq |x| \tag{3.48}$$

3.6 *Lo sviluppo di McLaurin di* $\frac{1}{1+x}$



Sia

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Avremo che $f \in \mathcal{C}^{+\infty}((-1,1))$ e si ha

Definiamo

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

ed osserviamo che

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \tag{3.49}$$

$$xS_n(x) = x\sum_{k=0}^{n} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1} \tag{3.50}$$

Sommando le due uguaglianze otteniamo

$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1} \tag{3.51}$$

$$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{3.52}$$

e

$$S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{3.53}$$

Ne deduciamo che

$$\frac{1}{1-x} = S_n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{3.54}$$

ed osservando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0 \tag{3.55}$$

di ordine $n+1 \in \mathbb{N}$ possiamo concludere ricordando la 2.4 che

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \tag{3.56}$$

è il polinomio di McLaurin di $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
Pertanto

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \omega(x) \tag{3.57}$$

e

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{3.58}$$

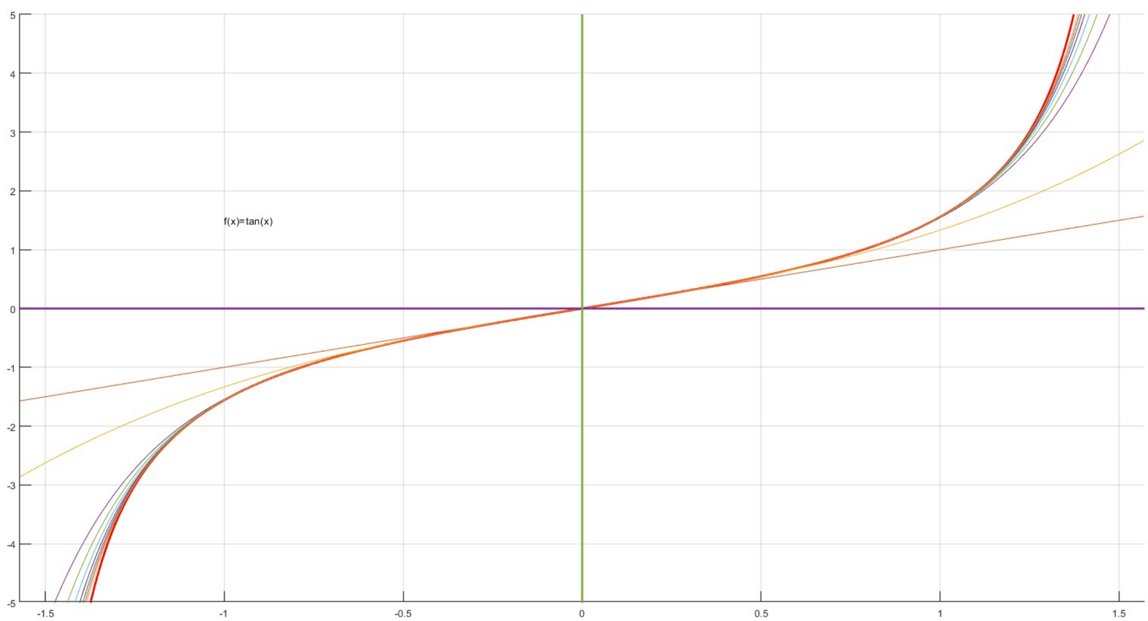
Allo stesso risultato si può pervenire dimostrando per induzione che

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \qquad . \qquad f^{(n)}(0) = 1 \tag{3.59}$$

In questo modo si trova che che

$$R_n = \frac{1}{(1-c)^{n+1}} \qquad |c| \leq |x| \tag{3.60}$$

3.7 *Lo sviluppo di McLaurin di* $\tan(x)$



Sia $f(x) = \tan(x)$ si ha

$$f'(x) = 1 + f^2(x) \qquad , \qquad f(0) = 0$$

Inoltre

$$f''(x) = 2f(x)f'(x)$$

e ne segue che

$$f^{(n+2)}(x) = 2\frac{d^n}{dx^n} f(x)f'(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)f^{(n-k)}(x)$$

Se definiamo $\delta_n = f^{(n)}(0)$ avremo allora

$$\begin{cases} \delta_0 = 0 \\ \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_{n+2} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{k+1}\delta_{n-k} \end{cases}$$

3.8 *Come ricavare altri sviluppi*

Le precedenti formule possono essere utilizzate per ricavare nuovi sviluppi di Taylor mediante semplice sostituzione.

Ad esempio dalla 3.7 possiamo ricavare, sostituendo x con $-x^2$ che

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} + x^{2n}\omega(x) \tag{3.61}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} + (-1)^{n+1} \frac{e^c}{(n+1)!} x^{2n+2} \qquad |c| \leq |x^2| \tag{3.62}$$

Da quest'ultima, osservando che

$$x^{2n}\omega(x)$$

è un infinitesimo di ordine superiore ad $2n$ e ricordando la 2.4 possiamo affermare che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$

è il polinomio di McLaurin di e^{-x^2} di grado n.

L'affermazione è giustificata dal fatto che $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$ differisce da e^{-x^2} per infinitesimi di ordine superiore a $2n$.

Si capisce quindi che può essere utile disporre di criteri che consentano di affermare che la differenza tra un polinomio ed una funzione è infinitesima di ordine superiore al grado del polinomio.

Possiamo a questo proposito dire che

Se f è derivabile e se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{3.63}$$

allora

$$f'(x) = (P_n(x))' + (R_n(x))\prime \tag{3.64}$$

(R_n è derivabile perchè $R_n = f - P_n$ e quindi è la differenza di due funzioni derivabili.)

Ora se $(R_n(x))\prime$ è un infinitesimo di ordine superiore ad $n-1$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(R_n(x))\prime}{x^{n-1}} = 0 \tag{3.65}$$

e, per la regola di De l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{(R_n(x))}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{(R_n(x))\prime}{nx^{n-1}} = 0 \tag{3.66}$$