1. Integrazione.

Consideriamo un punto materiale P che si muove lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano, ed è sottoposto ad una forza di richiamo costante a tratti verso un punto O della retta, che assumiamo come origine degli assi coordinati.

Più precisamente se x è lo spostamento da O del punto P la forza di richiamo R sarà espressa da:

$$R(x) = k_i \quad \text{se} \quad i \leq x < i+1 \qquad \text{con} \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Il lavoro svolto per muovere un punto su cui agisce una forza costante, si calcola moltiplicando l'intensità della forza per lo spostamento che il punto ha subito, pertanto il lavoro che occorre per spostare il punto P dall'origine è dato da:

$$\Lambda(x) = \sum_{j=0}^{i-1} k_j + k_i(x-i) \quad \text{se} \qquad i \leq x < i+1 \quad \text{con} \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Se supponiamo che la forza di richiamo R anzichè costante a tratti sia proporzionale alla distanza x di P da O, come ad esempio accade nel caso in cui su P agisca una forza elastica, cioè se ipotizziamo che

$$R(x) = kx \quad \text{con } k \in \mathbb{R}_+$$

avremo qualche problema in più per il calcolo del lavoro che non è più svolto da una forza costante, o costante a tratti. Possiamo allora tentare di calcolare il lavoro approssimando la forza di richiamo con una forza costante su tratti abbastanza piccoli.

Siano

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = x$$

n punti che conveniamo di indicare come

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

e possiamo chiamare partizione dell'intervallo $[0, x]$. Possiamo approssimare $\Lambda(x)$ con le quantità

$$\Lambda^+(P, x) \quad \text{e} \quad \Lambda^-(P, x)$$

definite mediante le

$$\Lambda^-(P,x)=\sum_{i=1}^{n} kx_{i-1}(x_i-x_{i-1}) \tag{1.1}$$

$$\Lambda^+(P,x)=\sum_{i=1}^{n} kx_{i}(x_i-x_{i-1}) \tag{1.2}$$

Per come sono state definite si ha

$$\Lambda^-(P,x)\le\Lambda(x)\le\Lambda^+(P,x).$$

ed inoltre se consideriamo le partizioni

$$P_n=\{ix/n\ ,\ i=0,1,2,..,n\}$$

si ha che

$$\begin{aligned}\frac{kx^2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}=\frac{kx^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\Lambda^-(P_n,x)\le\\ \le\sup\{\Lambda^-(P,x)\ :\ P\}\le\inf\{\Lambda^+(P,x)\ :\ P\}\le\\ \le\Lambda^+(P_n,x)=\frac{kx^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\ =\frac{kx^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned} \tag{1.3}$$

Per cui passando al limite per $n\to+\infty$ si ottiene che

$$\frac{kx^2}{2}\le\sup\{\Lambda^+(P,x)\ :\ P\}\le\inf\{\Lambda^-(P,x)\ :\ P\}\le\frac{kx^2}{2} \tag{1.4}$$

ed è lecito definire

$$\Lambda(x)=\inf\{\Lambda^+(P,x)\ :\ P\}=\sup\{\Lambda^-(P,x)\ :\ P\}=\frac{kx^2}{2} \tag{1.5}$$

Lo stesso problema si pone non appena cerchiamo di definire l'area dell'insieme

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le x^2\}$$

Siano $0=x_0<x_1<...<x_n=1$ e definiamo

$$P=\{x_0,x_1,...,x_n\};$$

possiamo approssimare, rispettivamente per eccesso e per difetto, l'area di D mediante le

$$A(P)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\ (x_i-x_{i-1})\quad,\quad a(P)=\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2(x_i-x_{i-1})$$

e possiamo definire l'area di D come l'eventuale valore comune di $\inf\{A(P)\ :\ P\}$ e $\sup\{a(P)\ :\ P\}$ dichiarando che D non è misurabile se tali valori non risultano coincidenti.

Considerata la partizione $P_n = \{i/n \ : \ i = 0, 1, 2, ..., n\}$ si calcola che

$$\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \leq$$
$$\leq \sup\{a(P) \ : \ P\} \leq \inf\{A(P) \ : \ P\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \leq \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1.6}$$

e per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\frac{1}{3} \leq \sup\{a(P) \ : \ P\} \leq \inf\{a(P) \ : \ P\} \leq \frac{1}{3} \tag{1.7}$$

onde è lecito definire

$$\text{area}(D) = \inf(A(P) \ : \ P\} = \sup\{a(P) \ : \ P\} = \frac{1}{3}$$

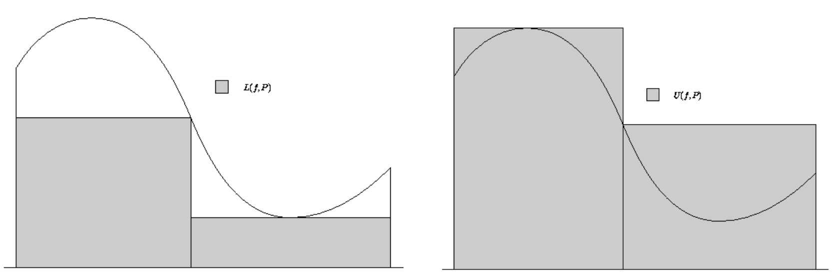
La definizione di integrale nasce dall'esigenza di formalizzare procedimenti del tipo che abbiamo esposto; in sostanza si tratta di definire l'estensione del concetto di somma discreta al caso in cui la somma sia fatta su insieme continuo di indici.

Definizione 1.1 *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$, chiamiamo partizione di $[a, b]$ un insieme*

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

di punti di $[a, b]$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b.$$



(a) Somme Inferiori (b) Somme superiori

Indichiamo con $\mathcal{P}(a, b)$ l'insieme delle partizioni di $[a, b]$.
Definiamo

$$I_k = [x_k, x_{k+1}] \quad , \quad \Delta I_k = x_{k+1} - x_k \tag{1.8}$$
$$I = [a, b] \quad , \quad \Delta I = b - a \tag{1.9}$$

ovviamente si avrà

$$I = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k \quad , \quad [a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] \tag{1.10}$$

Definiamo inoltre, per ogni $P \in \mathcal{P}(a,b)$,

$$\Delta(P) = \max\{\Delta I_k, k = 0..n-1\}$$

Definizione 1.2 *Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$ e sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata che supporremo sempre;*

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

poniamo

$$P = \{x_0, x_1, .., x_n\}$$

e definiamo

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$
$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}.$$

Definiamo inoltre

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta I_k \tag{1.11}$$

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta I_k \tag{1.12}$$

$$R(f,P,\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta I_k \tag{1.13}$$

ove si indichi con $\mathcal{S} = \{c_1, .., c_n\}$ una scelta di punti tale che $x_k \leq c_k \leq x_{k+1}$.

$L(f,P)$ ed $U(f,P)$ si dicono, rispettivamente, somme inferiori e somme superiori di f rispetto alla partizione P, mentre $R(f,P,\mathcal{S})$ si dice somma di Cauchy-Riemann.

Vale la pena di osservare che le somme di Cauchy-Riemann dipendono dalla scelta dei punti $\mathcal{S}$ oltre che dai punti c_k.

Definizione 1.3 *Siano $P, Q \in \mathcal{P}(a,b)$; diciamo che P è una partizione più fine di Q, e scriviamo $P \ll Q$, se $P \supset Q$.*

Diciamo inoltre che $P_n \in \mathcal{P}(a,b)$ è una successione ordinata di partizioni se

$$\begin{cases} P_{n+1} \ll P_n \\ \lim \ \Delta(P_n) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

e che $P_n \in \mathcal{P}(a,b)$ è una successione regolare di partizioni se

$$\lim \ \Delta(P_n) = 0 \tag{1.15}$$

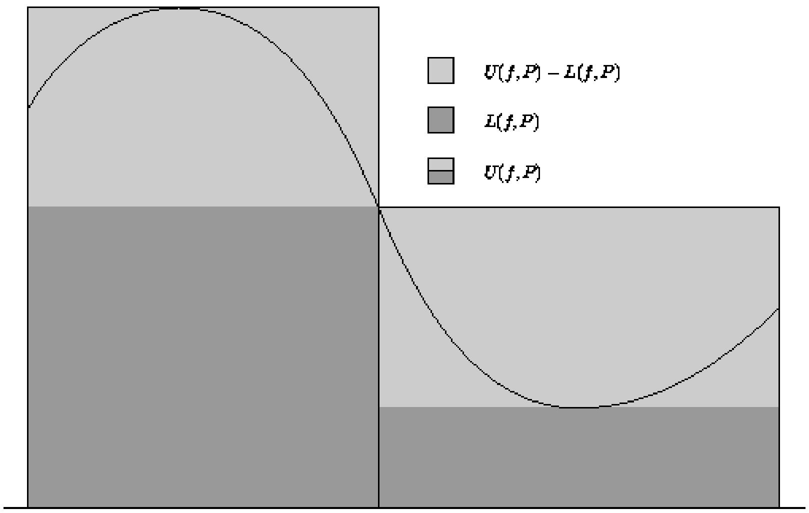


Figura 1.1: Confronto tra somme superiori e somme inferiori

È evidente dalle figure che valgono i seguenti fatti la cui dimostrazione può essere scritta formalizzando ciò che è suggerito da esse.

Lemma 1.1 *Siano $P, Q \in \mathcal{P}(a,b)$, $Q \ll P$, Allora*

$$\begin{aligned} m(b-a) \le L(f,P) \le L(f,Q) \le \\ \le R(f,Q,\mathcal{S}) \le \\ \le U(f,Q) \le U(f,P) \le M(b-a) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Inoltre, comunque si scelgano $R, S \in \mathcal{P}(a,b)$, si ha

$$L(f,R) \le U(f,S).$$

Dimostrazione. Dal momento che

$$m_i \ge m \quad \forall P \in \mathcal{P}(a,b)$$

si ha

$$L(f,P) \ge m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = m(b-a) \quad .$$

Il fatto che $L(f,P) \le L(f,Q)$ lo si può dedurre tenendo conto che se $u < v < w$, detti

$$\begin{aligned} m &= \inf\{f(x) \ : \ x \in [u,w]\} \\ \mu &= \inf\{f(x) \ : \ x \in [u,v]\} \\ \nu &= \inf\{f(x) \ : \ x \in [v,w]\} \end{aligned}$$

si ha $m \le \mu \quad , \quad m \le \nu$ e

$$m(w-u) = m(w-v) + m(v-u) \le \nu(w-v) + \mu(v-u) \quad .$$

La parte riguardante le somme superiori si prova in maniera analoga.

Per provare la seconda parte dell'enunciato, sia $T = R \cup S$, ovviamente $T \ll R$ e $T \ll S$; perciò

$$L(f,R) \leq L(f,T) \leq U(f,T) \leq U(f,S).$$

□

Definizione 1.4 *Definiamo*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,P) \ : \ P \in \mathcal{P}(a,b)\} \tag{1.17}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,P) \ : \ P \in \mathcal{P}(a,b)\} \tag{1.18}$$

Le precedenti quantità si dicono, rispettivamente, integrale superiore e integrale inferiore di f in $[a,b]$

È immediato verificare che

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a).$$

Definizione 1.5 *Diciamo che f è integrabile in $[a,b]$ se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \ .$$

In tal caso chiamiamo il valore comune ottenuto integrale di f tra a e b e lo denotiamo con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx \ .$$

Definiamo

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

ed osserviamo che

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Definizione 1.6 *Diciamo che f soddisfa la condizione di integrabilità in $[a,b]$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste una partizione $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b)$ tale che*

$$0 \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon \tag{1.19}$$

Dal momento che la quantità $U(f,P) - L(f,P)$ decresce al raffinarsi della partizione, restando non negativa, la precedente condizione è equivalente alla seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esiste } P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b) \text{ tale che}$$

$$0 \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

$$\forall P \in \mathcal{P}(a,b), P \ll P_\varepsilon$$

Teorema 1.1 *Sono fatti equivalenti:*

1. *f è integrabile su $[a, b]$*
2. *f soddisfa la condizione di integrabilità in $[a, b]$*

Dimostrazione. Se f è integrabile allora

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Ma per definizione

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\mathcal{P}} L(f, P) \qquad , \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathcal{P}} U(f, P) \tag{1.20}$$

e quindi possiamo trovare due partizioni P_ϵ e Q_ϵ tali che

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \leq L(f, Q_\epsilon) \leq \int_a^b f(x)dx \tag{1.21}$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq U(f, P_\epsilon) \leq \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} \tag{1.22}$$

Se ne deduce che

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, Q_\epsilon) \leq \epsilon \tag{1.23}$$

Se $R_\epsilon = Q_\epsilon \bigcup P_\epsilon$, si ottiene che

$$U(f, R_\epsilon) - L(f, R_\epsilon) \leq U(f, P_\epsilon) - L(f, Q_\epsilon) \leq \epsilon \tag{1.24}$$

e quindi vale la condizione di integrabilità.
Se viceversa si ha

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) \leq \epsilon \tag{1.25}$$

allora

$$U(f, P_\epsilon) \leq L(f, P_\epsilon) + \epsilon \tag{1.26}$$

e pertanto

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon \tag{1.27}$$

e, passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ottiene

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \tag{1.28}$$

poichè è ovvio che

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{1.29}$$

si può concludere che

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \tag{1.30}$$

e l'integrabilità di f è dimostrata.

□

Teorema 1.2 *Se f è monotona su $[a,b]$, allora f è integrabile in $[a,b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Il teorema segue da quanto illustrato nella figura

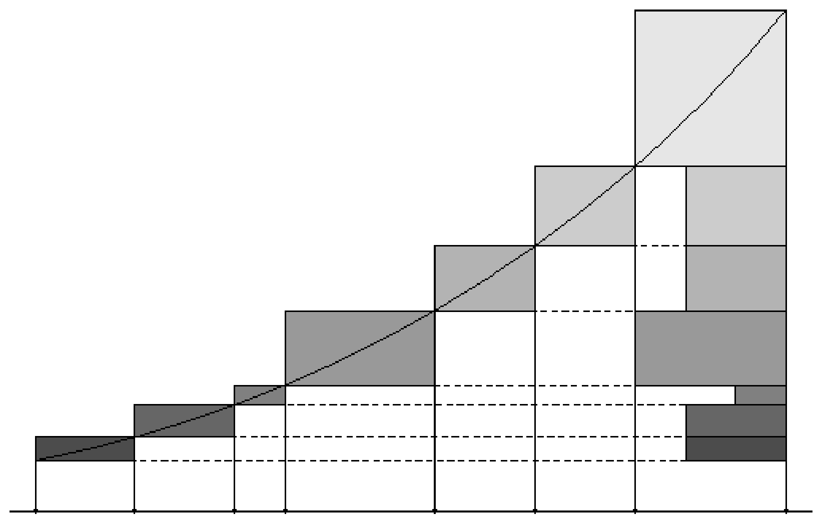


Figura 1.2: I monotone

Supponiamo ad esempio che f sia crescente in $[a,b]$; si ha

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad , \quad M_i = f(x_i)$$

per cui

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1})$$

e, scelta $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b)$ in modo che $\Delta(P_\varepsilon) < \varepsilon$, si ha

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \varepsilon[f(b) - f(a)].$$

□

Teorema 1.3 *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile in $[a,b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che f è una funzione continua su un insieme chiuso e limitato, allora f è uniformemente continua su $[a,b]$ e quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \;\; , \;\; \forall\, x,y \in [a,b] \;:\; |x-y| \le \delta$$

Pertanto se P_ε è una partizione di $[a,b]$ tale che $\Delta P_\varepsilon \le \delta$ si ha

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta I_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k) - f(y_k))\Delta I_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \Delta I_k = \epsilon(b-a) \quad (1.31)$$

essendo $|y_k - x_k| \le \Delta P_\varepsilon \le \delta$ □

Teorema 1.4 *Siano $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, e sia f limitata ed integrabile in $[a,b]$; se*

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b] \setminus N \ \ , \ N = \{y_1, ..., y_k\}$$

allora anche g è integrabile in $[a,b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \int_a^b g(x)dx.$$

Dimostrazione.È sufficiente provare che la funzione

$$h_c(x) = \begin{cases} 1 & , x = c \\ 0 & , \ x \ne c \end{cases}$$

con $c \in [a,b]$, è integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b h_c(x)dx = 0.$$

Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$; si ha

$$L(h_c, P) = 0 \quad , \quad U(h_c, P) \le 2\Delta(P).$$

Pertanto

$$\inf\{U(h_c,P) : P \in \mathcal{P}(a,b)\} = 0.$$

La tesi segue tenendo conto del fatto che

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{k} \ h_{y_k}(x) \ [f(y_k) - g(y_k)].$$

□

Possiamo anche dimostrare che

Teorema 1.5 *Se f è limitata in $[a,b]$ e continua in $[a,b] \setminus N$, $N = \{y_1, ..., y_k\}$; allora f è integrabile in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Proviamo che f è integrabile in $[y_{i-1}, y_i] = [\alpha, \beta]$.
Si consideri $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$, f è ivi integrabile e pertanto esiste $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ tale che $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sia $Q_\varepsilon = P_\varepsilon \cup \{\alpha, \beta\}$, allora

$$
\begin{aligned}
U(f, Q_\varepsilon) - L(f, Q_\varepsilon) &\leq \\
&\leq U(f, P_\varepsilon) + 2M\varepsilon - L(f, P_\varepsilon) - 2m\varepsilon < \\
&< \varepsilon + 2\varepsilon(M - m).
\end{aligned}
$$

□

Definizione 1.7 *Diciamo che f è integrabile secondo Cauchy-Riemann in $[a, b]$ se esiste $I \in \mathbb{R}$ per cui esiste una partizione $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a, b)$ tale che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che*

$$|R(f, P, \mathcal{S}) - I| < \varepsilon \tag{1.32}$$

per ogni $P \in \mathcal{P}(a, b)$, $P \ll P_\varepsilon$ e per ogni scelta di punti $\mathcal{S}$

Teorema 1.6 *Se f è integrabile su $[a, b]$ allora f è integrabile secondo Cauchy-Riemann ed il valore dell'integrale è lo stesso.*

Dimostrazione. Poichè

$$L(f, P) \leq R(f, P, \mathcal{S}) \leq U(f, P) \tag{1.33}$$

ed anche

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f, P) \tag{1.34}$$

si ha

$$|R(f, P, \mathcal{S}) - \int_a^b f(x)dx| \leq U(f, P) - L(f, P) \tag{1.35}$$

Quando f è integrabile $U(f, P) - L(f, P)$ può essere reso piccolo quanto si vuole, pur di raffinare la partizione e quindi per la precedente disuguaglianza è possibile verificare la definizione di integrale secondo Cauchy-Riemann. □

Nel teorema **??** può essere dimostrata anche l'implicazione opposta per cui

Teorema 1.7 *f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se f è integrabile secondo Cauchy-Riemann ed il valore dell'integrale è lo stesso.*

Dimostrazione. Dal momento che vale la definizione **??** avremo che se P è abbastanza fine allora

$$I - \varepsilon \leq R(f, P, \mathcal{S}) \leq I + \varepsilon \tag{1.36}$$

per ogni scelta di punti $\mathcal{S}$.

Poichè si ha

$$U(f,p) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta I_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(c_k) + \varepsilon)\Delta I_k =$$
$$= R(f,P,\mathcal{S}_1) + \varepsilon(b-a) \leq I + \varepsilon(b-a) + \varepsilon \tag{1.37}$$

$$L(f,p) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta I_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} (f(d_k) - \varepsilon)\Delta I_k =$$
$$= R(f,P,\mathcal{S}_2) - \varepsilon(b-a) \leq I - \varepsilon(b-a) - \varepsilon \tag{1.38}$$

Ne viene allora che

$$I - \varepsilon(b-a) - \varepsilon \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq I + \varepsilon(b-a) + \varepsilon \tag{1.39}$$

e quindi vale la condizione di integrabilità e

$$\int_a^b f(x)dx = I$$

□

Lemma 1.2 *Sia f una funzione integrabile e sia P_n una successione regolare di partizioni di $[a,b]$, allora*

$$\lim_n U(f,P_n) = \int_a^b f(x)ds = \lim_n L(f,P_n)$$
$$\lim_n\ R(f,P_n,\Xi_n) = \int_a^b f(x)ds$$

Dimostrazione. Dal momento che f è integrabile, possiamo trovare una partizione P_ϵ tale che

$$U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon$$

Se P_ϵ è costituita da N punti, dalla figura **??**
si vede che

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \leq U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) + N(M-m)\Delta P_n \tag{1.40}$$

infatti è evidente che **non si può affermare semplicemente** che

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \leq U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon)$$

a causa del fatto messo in evidenza dalla zona tratteggiata in figura **??**.

Tuttavia l'area di tale zona può essere maggiorata con

$$(M-m)\Delta P_n$$

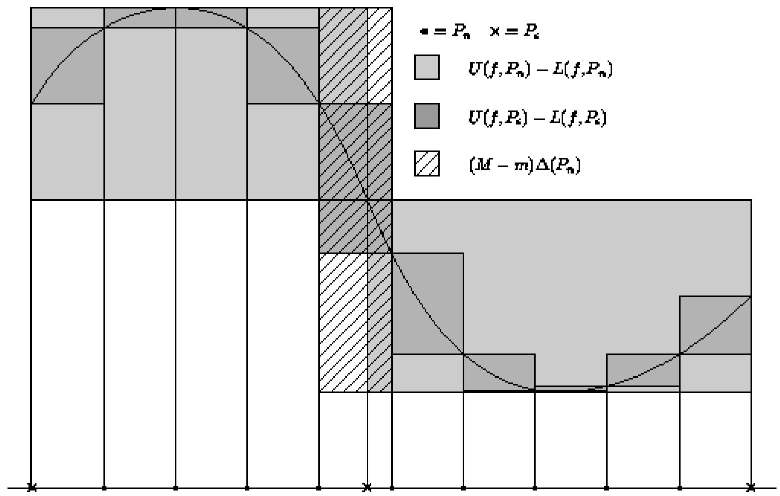


Figura 1.3: Confronto tra $U(f,P_n) - L(f,P_n)$ e $U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon)$

e tale evenienza ha luogo al più in tanti casi quanti sono i punti (N) di P_ϵ.

Pertanto, fissando opportunamente P_ϵ e scegliendo n abbastanza grande, si ottiene che $U(f,P_n) - L(f,P_n)$ diventa piccola quanto si vuole e quindi

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

Ne segue immediatamente che

$$U(f,P_n) - \int_a^b f(x)ds \le U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

$$\int_a^b f(x)ds - L(f,P_n) \le U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

$$R(f,P_n,,\Xi_n) - \int_a^b f(x)ds \le U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

□

Osservazione. Qualora f non sia integrabile l'asserto del lemma precedente può risultare falso; infatti il limite a secondo membro può dipendere dalla scelta dei punti ξ_n. Si consideri ad esempio la funzione che vale 0 sui razionali e 1 sugli irrazionali. □

Teorema 1.8 *Siano $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e sia $c \in (a,b)$; valgono i seguenti fatti:*

$$\overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]dx \;\leq\; \overline{\int_a^b} f(x)dx \;+\; \overline{\int_a^b} g(x)dx (1)$$

$$\underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]dx \;\geq\; \underline{\int_a^b} f(x)dx \;+\; \underline{\int_a^b} g(x)dx (2)$$

$$\overline{\int_a^b} \alpha f(x)dx \;=\; \alpha \overline{\int_a^b} f(x)dx \qquad\qquad \forall\alpha > 0 (3)$$

$$\underline{\int_a^b} \alpha f(x)dx \;=\; \alpha \underline{\int_a^b} f(x)dx \qquad\qquad \forall\alpha > 0 (4)$$

$$\underline{\int_a^b} \beta f(x)dx \;=\; \beta \overline{\int_a^b} f(x)dx \qquad\qquad \forall\beta < 0 (5)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \;=\; \overline{\int_a^c} f(x)dx \;+\; \overline{\int_c^b} f(x)dx (6)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \;=\; \underline{\int_a^c} f(x)dx \;+\; \underline{\int_c^b} f(x)dx. (7)$$

Dimostrazione. (1) segue dal fatto che, se P_n è una successione ordinata di partizioni, si ha

$$U(f+g, P_n) \leq U(f, P_n) + U(g, P_n) \quad .$$

(2) è analoga, (3),(4),(5) seguono da

$$U(\alpha f, P_n) = \alpha U(f, P_n) \quad , \quad L(\alpha f, P_n) = \alpha L(f, P_n),$$
$$L(\beta f, P_n) = \beta U(f, P_n).$$

Per provare (6) e (7) è sufficiente scegliere una successione ordinata di partizioni di [a,b] tale che $P_1 = \{a, c, b\}$. □

Teorema 1.9 *Siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e integrabili su $[a,b]$, siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; allora $\alpha f + \beta g$ e fg sono integrabili su $[a,b]$ e*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \;=\; \alpha \int_a^b f(x)dx \;+\; \beta \int_a^b g(x)dx \quad .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\alpha \int_a^b f(x)dx \;+\; \beta \int_a^b g(x)dx \;\leq\; \underline{\int_a^b} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \;\leq$$
$$\leq \overline{\int_a^b} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \;\leq\; \alpha \int_a^b f(x)dx \;+\; \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Proviamo ora che fg è integrabile. Supponiamo $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M \;\; \forall x \in [a,b]$.

Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$, sia $\varepsilon > 0$ e siano $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che

$$M_i - m_i \leq f(\alpha_i)g(\alpha_i) - f(\beta_i)g(\beta_i) + \varepsilon.$$

Si ha

$$M_i - m_i \ \leq \ f(\alpha_i)[g(\alpha_i) - g(\beta_i)] + g(\beta_i)[f(\alpha_i) - f(\beta_i)] + \varepsilon \leq$$
$$\leq \ M(M_i^g - m_i^g) + M(M_i^f - m_i^f \ ) + \varepsilon$$

e

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leq$$
$$\leq M[U(f, P) - L(f, P)] + M[U(g, P) - L(g, P)] + \varepsilon.$$

□

Teorema 1.10 *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata ed integrabile in $[a, b]$; sia $c \in (a, b)$, allora f è integrabile in $[a, c]$ ed in $[c, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \int_a^c f(x)dx \ + \ \int_c^b f(x)dx \ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq$$
$$\leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

e

$$\left(\underline{\int_a^c} f(x)dx - \overline{\int_a^c} f(x)dx\right) + \left(\underline{\int_c^b} f(x)dx - \overline{\int_c^b} f(x)dx\right) = 0$$

da cui f è integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$. □

Teorema 1.11 *Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$; allora*

$$\int_a^b f(x)dx \ \geq \ \int_a^b g(x)dx \ \ .$$

Dimostrazione. Sarà sufficiente provare che, se $f(x) \geq 0$,

$$\int_a^b f(x)dx \ \geq 0,$$

ma questo è ovvia conseguenza del fatto che $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \geq 0$. □

Teorema 1.12 *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e se definiamo*

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad , \quad f_-(x) = \min\{f(x), 0\}.$$

Allora f_+ ed f_- sono integrabili su $[a, b]$ se e solo se f è integrabile su $[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \int_a^b f_+(x)dx \ + \ \int_a^b f_-(x)dx.$$

Dimostrazione. Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$, allora

$$U(f_+,P) - L(f_+,P) \;\leq\; U(f,P) - L(f,P)$$

in quanto

$$\sup\{f_+(x) - f_+(y) : x,y \in [x_{i-1},x_i]\} \leq \sup\{f(x) - f(y) : x,y \in [x_{i-1},x_i]\}.$$

Inoltre si ha $f = f_+ + f_-$. □

Corollario 1.1 *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$, allora anche $|f|$ è integrabile in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Basta osservare che $|f| = f_+ - f_-$ □

Osserviamo che $|f|$ può essere integrabile senza che f sia tale; ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \; x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Teorema 1.13 *Se f è integrabile , allora*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \;\leq\; \left| \int_a^b |f(x)|dx \right|.$$

Dimostrazione. Si ha $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e la tesi segue dai risultati precedenti. □

Teorema 1.14 *Se f è integrabile in $[a,b]$, non negativa, e se $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$; allora*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \;\leq\; \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 1.15 *Se f è continua e non negativa e se*

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $\alpha \in [a,b]$ tale che $f(\alpha) > 0$; allora esiste $[c,d] \subset [a,b]$ in modo che $f(x) \geq m > 0$ in $[c,d]$.

Pertanto

$$\int_a^b f(x)dx \;\geq\; \int_c^d f(x)dx \;\geq\; m(d-c) \;>\; 0.$$

□

Gli sviluppi del calcolo integrale e le sue applicazioni dipendono dal legame strettissimo tra il concetto di integrale e quello di derivata che è espresso dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dalle proprietà di cui gode la funzione integrale $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$.

Definiamo pertanto

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \tag{1.41}$$

e dedichiamo un po' di attenzione allo studio della continuità e della derivabilità di F

Teorema 1.16 *Sia f integrabile in $[a,b]$ e consideriamo, per ogni $x \in [a,b]$, la funzione definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad .$$

Allora F è lipschitziana in $[a,b]$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in [a,b]$ e sia $|f(x)| \le M \ \forall x \in [a,b]$; si ha

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \le \left| \int_x^y |f(t)|dt \right| \le M|y-x|. \tag{1.42}$$

□

Teorema 1.17 *Sia f integrabile in $[a,b]$; consideriamo la funzione definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Se f è continua in $x_0 \in (a,b)$, allora F è derivabile in x_0 e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|t - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Perciò se $|h| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \le \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \right| \ \le \ \varepsilon.$$

□

Teorema 1.18 *della media - Sia f continua, allora esiste $c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Dimostrazione. Possiamo applicare il teorema di Lagrange alla Funzione $F(x)$ su $[a,b]$ □

Il precedente teorema può essere generalizzato nella seguente forma

Teorema 1.19 *- della media - Siano f, g continue, g non negativa; allora esiste $c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ = \ f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Dimostrazione. Il teorema è banale se g è identicamente nulla. In caso contrario si ha

$$\int_a^b g(x)dx > 0$$

e, posto

$$m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \ \ , \ \ M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

si ha

$$m\int_a^b g(x)dx \ \leq \ \int_a^b f(x)g(x)dx \ \leq \ M\int_a^b g(x)dx$$

e

$$m \ \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Pertanto la tesi segue dal fatto che f è continua in $[a,b]$ ed assume tutti i valori compresi tra il suo minimo m ed il suo massimo M. □

I precedenti risultati indicano la necessità di introdurre un nuovo concetto: quello di funzione la cui derivata è assegnata.

Definizione 1.8 *Diciamo che F è una primitiva di f in (a,b) se F è ivi derivabile e risulta*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Definiamo integrale indefinito di f e lo indichiamo con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

l'insieme delle primitive di f.

Teorema 1.20 *Supponiamo che F e G siano due primitive di f in (a,b), allora esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in (a,b).$$

Dimostrazione. Dal momento che $(F-G)'(x) = 0$ in (a,b) si può applicare il corollario del teorema di Lagrange che assicura che se una funzione ha derivata nulla allora è costante. □

Corollario 1.2 *Sia F una primitiva di f in (a,b) e sia f continua in (a,b); allora esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ + k.$$

Il precedente corollario permette di determinare l'integrale indefinito di una funzione. Ricordiamo tuttavia che la sua validità è limitata a funzioni definite su un intervallo.

Anche il calcolo dell'integrale di f in $[a,b]$ beneficia di questo risultato vale infatti il seguente teorema.

Teorema 1.21 *Sia f integrabile in $[a,b]$, sia F una primitiva di f in (a,b) e sia $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$; allora*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \;=\; F(\beta) - F(\alpha).$$

Dimostrazione. Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$, $P = \{x_0, .., x_n\}$, si ha

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - [F(\beta) - F(\alpha)] \right| &= \\
&= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| = \\
&= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \\
&= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - R(f,P,\Xi) \right| \qquad (1.43)
\end{aligned}$$

e si può concludere scegliendo una partizione sufficientemente fine. □

Il teorema precedente consente di usare le primitive di una funzione per calcolare il valore di un integrale definito. È pertanto importante conoscere le primitive di alcune funzioni elementari. Rimandando all'appendice per una informazione più completa, ci limitiamo qui ad osservare che la tabella di derivate data nel paragrafo 8, letta da destra verso sinistra, fornisce le primitive delle principali funzioni elementari.

Le funzioni che sono primitive di qualche altra funzione godono di una certa regolarità che è precisata nel seguente enunciato.

Teorema 1.22 *Se f ha una primitiva in (a,b), per ogni $c \in (a,b)$ non è possibile che*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \;\neq\; \lim_{x \to c^-} f(x).$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f in (a,b); se i limiti in oggetto esistessero, si avrebbe, per le proprietà della derivabilità,

$$F'(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x).$$

□

Per il calcolo degli integrali definiti è molto utile servirsi delle seguenti regole di integrazione.

Teorema 1.23 *- integrazione per parti - Siano f, g di classe $\mathcal{C}^1$ e sia $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$; allora*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx \;=\; f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx.$$

Dimostrazione. Si ha

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

pertanto

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} (fg)'(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

ed osservando che fg è una primitiva di $(fg)'$ in (a,b) si deduce la tesi. □

Teorema 1.24 - *integrazione per sostituzione - Se $f \in \mathcal{C}^0$, $g \in \mathcal{C}^1$; sia $[\alpha,\beta] \subset (c,d)$, allora*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx \ = \ \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx.$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f in (a,b), allora $F(g(\cdot))$ è una primitiva di $f(g(\cdot))g'(\cdot)$ in (c,d) e si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$$

□

Se f è una funzione, indichiamo

$$f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

In tal modo risultano semplificati molti enunciati che coinvolgono gli integrali definiti.

Ad esempio si può dire che, se F è una primitiva della funzione continua f, allora

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ F(x)\Big|_a^b$$

Il secondo teorema della media.

Corollario 1.3 *Siano $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, $g \in \mathcal{C}^0$, f crescente, e sia $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, allora*

$$\exists \gamma \in [\alpha,\beta] \ : \ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \ = \ f(\alpha)\int_{\alpha}^{\gamma} g(x)dx + f(\beta)\int_{\gamma}^{\beta} g(x)dx.$$

Dimostrazione. Sia G una primitiva di g in (a,b), si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\beta)G(\beta) - f(\alpha)G(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)G(x)dx \ =$$
$$= f(\beta)G(\beta) - f(\alpha)G(\alpha) - G(\gamma)[f(\beta) - f(\alpha)] =$$
$$= f(\alpha)[G(\gamma) - G(\alpha)] + f(\beta)[G(\beta) - G(\gamma)]$$

□

Teorema 1.25 *formula di Taylor con il resto integrale - Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^{n+1}$; siano $x, x_0 \in [a,b]$, allora*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Dimostrazione. Sia $x \in [a,b]$, posto

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$$

si ha

$$Q(x) = f(x) \quad , \quad Q(x_0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} r(x-x_0)^i = P(x)$$

e

$$Q'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

e, dal teorema 15.32

$$f(x) - P(x) = Q(x) - Q(x_0) = \int_{x_0}^{x} Q'(t)dt.$$

□

La formula di Taylor con il resto di Lagrange può essere ottenuta dal precedente teorema facendo uso del teorema della media; il resto di Peano può a sua volta essere ottenuto dal resto di Lagrange; il tutto però con ipotesi sovrabbondanti.

2. *Integrali Impropri*

Ci siamo occupati fino ad ora del problema di integrare una funzione limitata su di un intervallo limitato che, in genere, è anche supposto chiuso.

Nella pratica è spesso necessario integrare funzioni non limitate o su intervalli non limitati, a questo scopo è necessario definire una estensione del concetto di integrale, che permetta di considerare anche questi casi.

La definizione non è strettamente collegata col procedimento di integrazione definita dato precedentemente, anche se da esso dipende in maniera essenziale, e, per questa ragione, viene denominato procedimento di integrazione impropria.

Definizione 2.1 *Sia f integrabile in $[x, b]$, per ogni $x \in (a, b]$. Diciamo che f ammette integrale improprio (finito) in $(a, b]$ se esiste (finito)*

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$$

In tal caso definiamo il suo valore

$$\int_a^b f(x)dx$$

Definizioni analoghe permettono di considerare facilmente l'integrale improprio su di un intervallo $[a, b]$ di una funzione f limitata e integrabile in ogni intervallo $[x, y] \subset [a, b] \setminus N$, dove N è un insieme finito di punti

Definizione 2.2 *Sia f integrabile in $[a, x]$, per ogni $x \geq a$. Diciamo che f ammette integrale improprio (finito) in $[a, +\infty)$ se esiste (finito)*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

In tal caso definiamo il suo valore

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Definizioni analoghe permettono di considerare l'integrale improprio di una funzione limitata e integrabile su ogni intervallo $[x, y]$, in $(-\infty, a]$ o $(-\infty, +\infty)$.

In entrambe le due precedenti definizioni diciamo che f ammette integrale improprio convergente o divergente, a seconda che il suo valore sia finito o infinito rispettivamente.

Per semplicità, nel seguito faremo riferimento solo ai casi contemplati nelle definizioni **??**, **??**, tuttavia i risultati che proveremo possono essere facilmente rienunciati e ridimostrati negli altri casi.

Possiamo considerare qualche esempio per illustrare i concetti introdotti

Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

allora:

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_0^1 f_\alpha(x)dx &= \frac{1}{1-\alpha} && se\ \ 0 < \alpha < 1 \\
\int_0^1 f_\alpha(x)dx &= +\infty && se\ \ \alpha \geq 1 \\
\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx &= \frac{1}{\alpha - 1} && se\ \ \alpha > 1 \\
\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx &= +\infty && se\ \ 0 < \alpha \leq 1
\end{aligned}}$$

I risultati esposti si possono ricavare applicando semplicemente le definizioni e le regole elementari di integrazione. Partendo da questi semplici punti fermi possiamo ricavare dei criteri che consentono di stabilire se una funzione è integrabile in senso improprio.

A questo scopo dobbiamo considerare una conseguenza del criterio di convergenza di convergenza di Cauchy.

Teorema 2.1 *Sia f integrabile in $[x, b]$, per ogni $x \in (a, b]$; allora f ammette integrale improprio convergente in $(a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se si considerano $x', x'' \in (a, a + \delta_\varepsilon)$ allora*

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

Teorema 2.2 *Sia f integrabile in $[a, x]$, per ogni $x \geq a$; allora f ammette integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x', x'' > \delta_\varepsilon$ allora*

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

I due precedenti teoremi seguono immediatamente dal criterio di convergenza di Cauchy.

Teorema 2.3 *Siano f, g integrabili in ogni $[x, y] \subset I$; valgono i seguenti fatti:*

1. *se $|f|$ ammette integrale improprio convergente in I, allora anche f ammette integrale improprio convergente in I;*
2. *se $|f| \leq g$ e g ammette integrale improprio convergente in I, allora anche $|f|$ (e quindi f) ammette integrale improprio convergente in I.*

Dimostrazione. Si ha

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} |f(x)|dx \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} g(x)dx \right|$$

□

Non è tuttavia vero che se f ammette integrale improprio convergente anche $|f|$ ammette integrale improprio convergente. Per esempio si consideri

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

sull'intervallo $[0, +\infty)$, (si veda teorema **??**).

Diamo ora un risultato che sarà di grande utilità per stabilire l'integrabilità in senso improprio di una funzione.

Teorema 2.4 *Sia f integrabile in $[x, b]$, per ogni $x \in (a, b]$, e supponiamo che f sia infinita per $x \to a^+$ di ordine β.*

1. *Se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\beta \leq \alpha < 1$ allora f ammette integrale improprio convergente in $(a, b]$.*
2. *se $\beta \geq 1$ allora f ammette integrale improprio divergente in $(a, b]$.*

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio $f(x) \to +\infty$ per $x \to a^+$ e proviamo (1). Si ha

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{1/(x-a)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}_+$$

e pertanto esistono $k, \delta > 0$ tali che

$$0 \leq f(x) \leq \frac{k}{(x-a)^\alpha} \qquad \forall x \in (a, a+\delta)$$

e la tesi segue dal teorema **??** e dalle **??**, non appena si sia tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt \;=\; \int_{a+\delta}^b f(t)dt + \lim_{x \to a^+} \int_x^{a+\delta} f(t)dt.$$

Proviamo ora (2); se $x \in (a, a+\delta)$, con $k, \delta > 0$ opportunamente scelti, si ha

$$f(x) \geq \frac{k}{x-\alpha}$$

e come prima segue la tesi. □

Teorema 2.5 *Sia f integrabile in $[a, x]$, per ogni $x \geq a$; supponiamo che f ammetta integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$ e che*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Allora $\ell = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio che sia $\ell > 0$; allora, se $x > \delta$, $f(x) > \ell/2$. Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = \int_a^\delta f(t)dt + \lim_{x \to +\infty} \int_\delta^x f(t)dt \geq$$
$$\geq \int_a^\delta f(t)dt + \lim_{x \to +\infty} (x-\delta)\ell/2 = +\infty \qquad (2.1)$$

□

Osserviamo che f può ammettere integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$ senza che esista il limite di f per $x \to +\infty$, se ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & i < x \leq i + 1/2^i \\ 0 & i + 1/2^i \leq x \leq i+1 \end{cases} \quad , \qquad i \in \mathbb{N} \qquad (2.2)$$

si ha

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = \lim_n \frac{1}{2} \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 1$$

Si può analogamente provare che

Teorema 2.6 *Sia f integrabile in $[a, x]$, per ogni $x \geq a$, e supponiamo che f sia infinitesima di ordine β per $x \to +\infty$.*

1. *Se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\beta \geq \alpha > 1$, allora f ammette integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$.*
2. *Se $\beta \leq 1$ allora $|f|$ ammette integrale improprio divergente in $[a, +\infty)$.*

Osserviamo, a proposito dei teoremi **??**,**??** che qualora $\beta \in \mathbb{R}$, in (1) è sufficiente prendere $\alpha = \beta$.

Teorema 2.7 *Siano f, g, $f \in \mathcal{C}^0$, $g \in \mathcal{C}^1$, e sia F una primitiva di f; allora le seguenti condizioni sono sufficienti per la convergenza dell'integrale improprio di fg in $[a, +\infty)$:*

1. *F limitata in $[a, +\infty)$ e g monotona a 0 per $x \to +\infty$;*
2. *F convergente per $x \to +\infty$ e g monotona e limitata.*

Segue da

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)dt.$$

3. *Qualche Integrale Elementare.*

Forniamo qui una tabella di primitive F delle principali funzioni elementari f, essendosi trascurato di precisare l'insieme di definizione delle funzioni stesse.

$f(x)$	$F(x)$
0	1
1	x
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{\cos x}{\sin x}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\arcsin x$
$-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\frac{\cosh x}{\sinh x}$

$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
$\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\sinh^{-1} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\cosh^{-1} x$

Per l'integrazione indefinita, oltre che della precedente tabella, si fa uso delle usuali regole di integrazione (linearità dell'integrale, integrazione per parti e per sostituzione). Inoltre esistono una serie di integrali che possono essere studiati in maniera standard; ne elenchiamo qui i principali, rimandando ad un libro di tavole matematiche, per un più completo assortimento.

- se
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
dove P e Q sono polinomi, si procede come segue
  - ci si riduce, eventualmente effettuando una divisione di polinomi, al caso in cui il grado di P sia inferiore al grado di Q (si ricordi che, se $P(x) = A(x)Q(x) + B(x)$, si ha $P(x)/Q(x) = A(x) + B(x)/Q(x)$ con grado di B minore del grado di Q).
  - si trovano le radici di Q; siano esse
  $$\lambda_1, .., \lambda_n \ \ e \ \ \alpha_1 \pm i\beta_1, .., \alpha_m \pm i\beta_m$$
  con molteplicità $\nu_1, .., \nu_n$ e $\mu_1, .., \mu_m$. Osserviamo che, se $\alpha + i\beta$ è una soluzione di $Q(x) = 0$, allora tale è anche $\alpha - i\beta$ in quanto Q ha coefficienti reali. Se
  $$p = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ \ e \ \ q = \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$
  risulterà $p + 2q$ uguale al grado di Q.
  - In corrispondenza di una radice reale λ, con molteplicità ν, si considerano le seguenti frazioni (dette fratti semplici)
  $$\frac{A_1}{x-\lambda}, \ \frac{A_2}{(x-\lambda)^2}, \ \dots, \ \frac{A_\nu}{(x-\lambda)^\nu} \quad .$$
  In corrispondenza di una radice complessa $\alpha \pm i\beta$, con molteplicità μ, si considera il trinomio di secondo grado a coefficienti reali
  $$t(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$
  ed i fratti semplici
  $$\frac{B_1 x + C_1}{t(x)}, \ \frac{B_2 x + C_2}{(t(x))^2}, \ \dots, \ \frac{B_\mu x + C_\mu}{(t(x))^\mu}.$$

– Si determinano poi, imponendo le opportune uguaglianze, le costanti A, B e C in modo che $P(x)/Q(x)$ sia la somma dei fratti semplici relativi a tutte le radici, cioè

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{\nu_i} \frac{A_{h,i}}{(x-\lambda_i)^h} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{B_{k,j}x + C_{k,j}}{(t_j(x))^k}.$$

– Gli integrali dei fratti semplici possono essere catalogati come segue: $(x-\lambda)^{-1}$ ammette come primitiva $\ln|x-\lambda|$; $(x-\lambda)^{-h}$ ammette come primitiva $[(1-h)(x-\lambda)^{h-1}]^{-1}$

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{A}{2a}\left(\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m} + \right.$$
$$\left. + \frac{(2aB/A)-b}{(ax^2+bx+c)^m}\right)$$

Una primitiva della prima frazione entro parentesi può essere trovata mediante la sostituzione

$$t = ax^2+bx+c$$

mentre una primitiva della seconda frazione può essere trovata mediante la sostituzione

$$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

che riduce il problema alla ricerca delle primitive della funzione

$$\frac{1}{(t^2+1)^m}.$$

Una primitiva di tale funzione si trova infine osservando che

$$\frac{1}{(t^2+1)^m} = \frac{1}{(t^2+1)^{m-1}} - \frac{t}{2}\frac{(d/dt)(t^2+1)}{(t^2+1)^m}$$

e ricavando una formula iterativa.

– Un modo alternativo per decomporre la frazione $P(x)/Q(x)$ è dato dal metodo di Hermite: si determinano $A_h, B_k, C_k \in \mathbb{R}$, $h = 1,..,n$, $k = 1,..,m$, e due polinomi $N(x)$ e $D(x)$ in modo che

$$D(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\lambda_i)^{\nu_i - 1} \prod_{j=1}^{m} (t_j(x))^{\mu_j - 1} \quad ,$$

N abbia grado inferiore di una unità al grado di D e

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{A_h}{x-\lambda_h} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{t_k(x)} + \frac{d}{dx}\frac{N(x)}{D(x)} \quad .$$

- $x^m \sin x$, $x^m \cos x$, $\sin^m x$, $\cos^m x$, $x^n a^{\alpha x} \sin mx$, $x^n a^{\alpha x} \cos mx$, $x^m a^{\alpha x}$, $x^\alpha \log_a^m x$, $x^n \arctan^m x$, con $n, m \in \mathbb{N}$, si integrano iterativamente per parti.

- $\sin(mx)\cos(nx)$ si integra usando le formule di prostaferesi.

- $\cos(a_1 x + b_1) \ldots \cos(a_n x + b_n)$ si integra usando le formule di Werner iterativamente.

  Molti integrali possono essere risolti per sostituzione: indichiamo qui di seguito le sostituzioni più comuni. Nelle righe che seguono R indica una funzione razionale dei suoi argomenti.

- $R(x^{p_1/q_1}, .., x^{p_n/q_n})$ si integra ponendo $x = t^\mu$ dove

$$\mu = \text{m.c.m.}(q_1, ..., q_n) \quad .$$

- Lo stesso vale se in luogo di x c'è

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad .$$

- $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$; se α, β sono radici di $ax^2+bx+c=0$ si esegue una delle seguenti tre sostituzioni (di Eulero), purché possibile

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

- $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$; si pone $\sqrt{ax+b} = t$ e ci si riconduce ad uno dei precedenti

- $x^q(a+bx^r)^s$, $q, r, s \in \mathbb{Q}$, $s = m/n$ (integrali binomi).
  - se $(q+1)/r \in \mathbb{Z}$ si pone $a + bx^r = t^n$
  - se $s + (q+1)/r \in \mathbb{Z}$ si pone $b + ax^{-r} = t^n$.
  - qualora $q, r, s \in \mathbb{R}$, le sostituzioni indicate sono ancora valide purché
  $$(q+1)/r \in \mathbb{N} \;\; e \;\; s + (q+1)/r \in (-\mathbb{N})$$

  e si ponga $n = 1$.

- $R(a^{\alpha x})$; si pone $a^{\alpha x} = t$

- $R(a^{p_1 x/q_1}, .., a^{p_n x/q_n})$; si pone $a^x = t^\mu$ dove

$$\mu = \text{m.c.m.}(q_1, ..., q_n) \quad .$$

- $R(\sin x, \cos x)$; si pone $t = \tan(t/2)$

- $\sin^m x \cos^n x$; si pone $t = \sin x$ e diventa un integrale binomio.
- $R(x, f(x))$, dove R è una funzione razionale, si può ridurre per sostituzione ad un integrale razionale se esiste una parametrizzazione razionale

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

della curva

$$y = f(x)$$

cioè se esistono due funzioni ϕ e ψ razionali tali che

$$\psi(t) = f(\phi(t)).$$

In tal caso infatti è sufficiente operare la sostitizione $x = \phi(t)$.

Aggiungiamo che una parametrizzazione razionale della curva $y = f(x)$ può essere ottenuta trovando al variare di t l'intersezione della retta

$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

con il grafico di $y = f(x)$, essendo (x_0, y_0) scelto in modo che $y_0 = f(x_0)$ e l'ulteriore intersezione sia unica.

Osserviamo ancora che nel caso in cui la curva $y = f(x)$ sia una conica o una parte di conica ciò può essere sempre fatto eventualmente scegliendo come (x_0, y_0) un punto improprio.

4. Qualche Studio di Funzione Integrale

Lo studio di una funzione che sia data mediante un integrale ricorre in molti casi: ad esempio quando si studiano le soluzioni di equazioni differenziali in cui compaiono funzioni che non ammettono primitive elementari o che ammettono primitive elementari non facilmente calcolabili.

Per funzione integrale si intende una funzione definita da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{4.1}$$

I risultati che occorre tener ben presenti quando si studia una funzione integrale sono i seguenti:

1. I risultati che sono sufficienti a garantire l'integrabilità di una funzione: sono quelli contenuti nei teoremi **??** e si possono brevemente riassumere dicendo che:

   - f è integrabile su ogni intervallo su cui è continua
   - f è integrabile su ogni intervallo su cui è monotona
   - f è integrabile su ogni intervallo su cui è limitata e continua a meno di un numero finito di punti
   - f è integrabile su ogni intervallo su cui differisce da una funzione integrabile a meno di un insieme finito di punti

2. Il risultato che assicura che se f è limitata allora F è continua.

3. il teorema fondamentale del calcolo che assicura che se f è continua in x allora F è derivabile in x e

$$F'(x) = f(x)$$

4. la definizione di integrale improprio per cui:

- Se f è integrabile in senso improprio in c^+

$$\lim_{x\to c^+} F(x) = \int_{x_0}^{c} f(t)dt$$

- Se f è integrabile in senso improprio a $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$$

Vale inoltre la pena di ricordare che se

$$G(x) = \int_{x_0}^{\beta(x)} f(t)dt \tag{4.2}$$

allora

$$G(x) = F(\beta(x)) \tag{4.3}$$

e quindi, se le funzioni in gioco sono derivabili

$$G'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) \tag{4.4}$$

Inoltre se

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \tag{4.5}$$

allora se c è scelto nel campo di integrabilità di f, si ha

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_{\alpha(x)}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_{c}^{\beta(x)} f(t)dt - \int_{c}^{\alpha(x)} f(t)dt \tag{4.6}$$

e quindi

$$G'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \tag{4.7}$$

4.1 *Esempio*

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^t}(t-1)\sqrt{t+2}}dt$$

Cominciamo a determinare il dominio di f.

La funzione integranda risulta definita e continua (e quindi integrabile) per $t \in (-2,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Inoltre

$$\lim_{t\to -2} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = -\infty$$

di ordine $\frac{1}{2}$ in quanto l'integranda è infinita a causa del fattore $\sqrt{t+2}$ presente nel denominatore;

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = -\infty$$

di ordine $\frac{1}{3}$ a causa del fattore a denominatore $\sqrt[3]{1-e^t}$ (si ricordi che $1-e^t$ è infinitesimo in zero di ordine 1); analogamente

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = +\infty$$

di ordine $\frac{1}{3}$

Infine

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} = +\infty$$

di ordine 1 a causa del fattore $t-1$ a denominatore.

Ne segue che la funzione integranda è integrabile (eventualmente in senso improprio) in $[-2,1)\cup(1,+\infty)$.

Poichè gli estremi di integrazione sono 0 ed x dovrà essere $x \in [-2,1)$.

Dal momento che

- la funzione integranda è continua per $t \in (-2,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$
- f è definita in $[-2,1))$

il teorema fondamentale del calcolo assicura che

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{1-e^x}(x-1)\sqrt{x+2}}$$

Per ogni $x \in (-2,0)\cup(0,1)$

Per quanto riguarda i punti $x=-2$ e $x=0$ si è già visto che

$$\lim_{t\to -2} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{t\to 0^-} f'(x) = -\infty$$

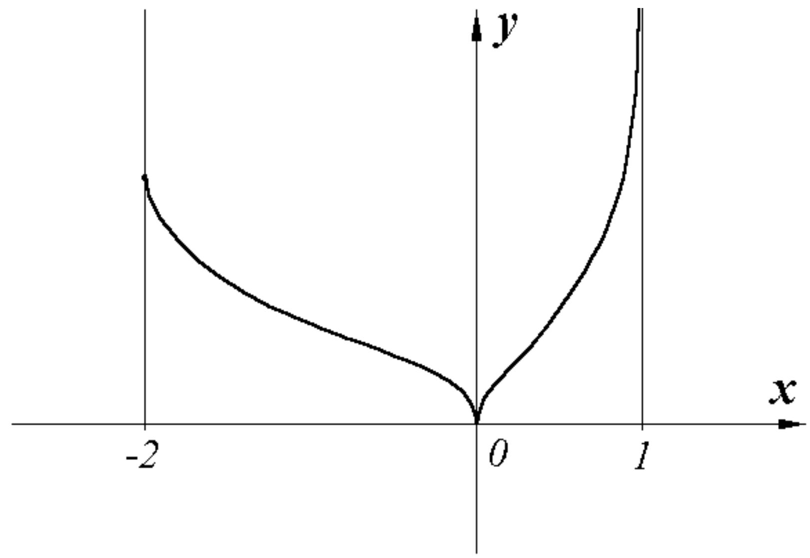
$$\lim_{t\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

cui f non è derivabile per $x=-1$ ed $x=0$.

Per tracciare il grafico di f dobbiamo tenere conto che

- $f'(x) > 0$ per $x \in (0,1)$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$,
- f non è derivabile in -2 ed in 0

Figura 4.1: Grafico di $f(x)$



- in -2 ed in 0 il grafico ha tangente verticale

Pertanto il grafico di f risulta:
Consideriamo ora

$$g(x) = \int_0^{|x|} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} dt$$

Dal momento che

$$g(x) = f(|x|)$$

il grafico di g sarà uguale a quello di f per gli $x \in [0,1)$ ed il simmetrico rispetto all'asse y per gli $x \in (-1,0]$.

Se infine consideriamo

$$h(x) = \int_{x^3}^{x^2+2} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}} dt$$

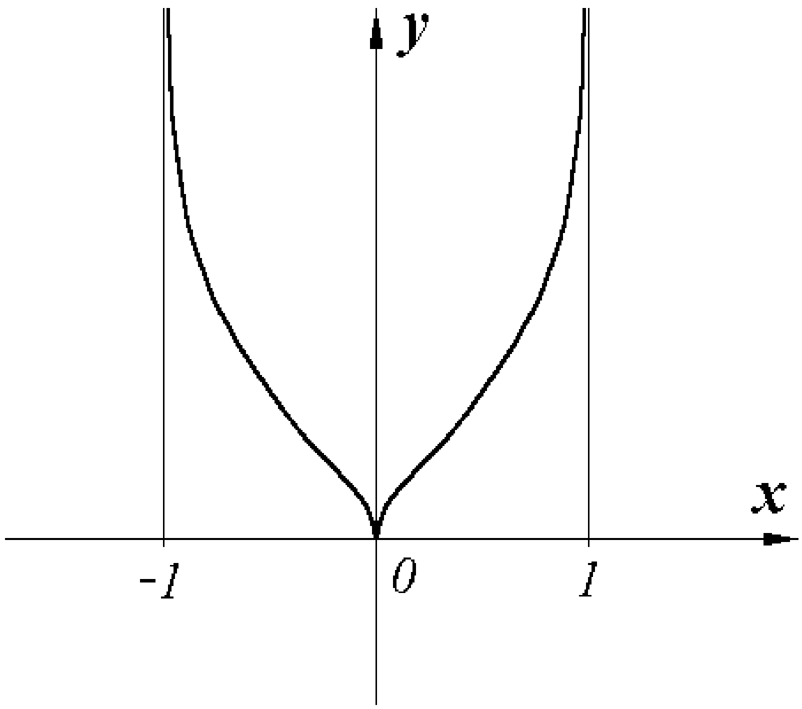
per quanto visto ai punti precedenti, (f è integrabile in $[-2,1) \cup (1,+\infty)$) L'intervallo di integrazione dovrà essere contenuto nell'insieme in cui è possibile calcolare l'integrale; dovrà cioè risultare che

$$[x^3, x^2+2] \subset [-2,1) \cup (1,+\infty)$$

e quindi la funzione h risulta definita per $x^3 > 1$ ovvero per $x > 1$.

Poiché l'integranda è continua per $t > 1$ e gli estremi di integrazione sono derivabili, si ha, per $x \in (1,+\infty)$

$$h'(x) = \frac{2xe^{(x^2+2)^2}}{\sqrt[3]{1-e^{x^2+2}}(x^2-1)\sqrt{x^2+4}} - \frac{3x^2e^{x^6}}{\sqrt[3]{1-e^{x^3}}(x^3-1)\sqrt{x^3+2}}$$



4.2 *Esempio*

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_x^{4-x} \frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}} dt$$

La funzione integranda è definita e continua (e quindi integrabile) in $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Inoltre

$$\lim_{t\to 1} \left| \frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}} \right| = +\infty \qquad \text{di ordine } \frac{1}{3}$$

mentre

$$\lim_{t\to 4} \left| \frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}} \right| = +\infty \qquad \text{di ordine } 1$$

Pertanto l'integranda risulta integrabile (anche in senso improprio) in $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

Dovrà allora essere

$$\begin{cases} x < 4 \\ 4 - x < 4 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x > 4 \\ 4 - x > 4 \end{cases}$$

ovvero $0 < x < 4$.

Essendo gli estremi di integrazione due funzioni continue e derivabili, f risulta continua in tutto il suo dominio (perché l'integranda è integrabile) e derivabile per $x \neq 1$ e $4 - x \neq 1$ essendo l'integranda continua per $t \neq 1$ (per $t = 1$ l'integranda è infinita).

Pertanto l'insieme di continuità è $(0, 4)$ e l'insieme di derivabilità è $(0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 4)$.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dalla formula di derivazione delle funzioni composte si ha, se $x \in (0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 4)$

$$f'(x) = -\frac{3 + \cos(4 - x)}{(-x)\sqrt[3]{(4 - x)^5 - 1}} - \frac{3 + \cos(x)}{(x - 4)\sqrt[3]{x^5 - 1}}$$

4.3 *Esempio*

Si considerino le funzioni

$$h(x) = x^4 + 8x + k \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{h(x)}$$

Si ha, per ogni $k \in \mathbb{R}$,

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{continua} \quad , \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = +\infty$$

per cui h non è limitata superiormente (e quindi non ammette massimo globale), mentre, per il teorema di Weierstrass generalizzato, ammette minimo assoluto, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Se g risulta continua allora ha primitive in $\mathbb{R}$ ed inoltre, (essendo infinita dove non è continua, g ammette primitive se e solo se $h(x) = x^4 + 8x + k \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Poiché come visto nel punto precedente h ha minimo assoluto, e tale valore è assunto nel punto $x = -\sqrt[3]{2}$ (ove si annulla $h'(x) = 4x^3 + 8$) e si ha $h(-\sqrt[3]{2}) = k - 6\sqrt[3]{2}$, si conclude che g ha primitive in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k - 6\sqrt[3]{2} > 0 \qquad \text{ovvero} \qquad k > 6\sqrt[3]{2}$$

Similmente g ha primitive in $[-1, +\infty)$ se e solo se risulta continua in tale intervallo ovvero se e solo se $h(x) = x^4 + 8x + k \neq 0$ per ogni $x \geq -1$.

Essendo h crescente per $x \geq -\sqrt[3]{2}$, e quindi per $x \geq -1$, g ha primitive in $[-1, +\infty)$ se e solo se $h(-1) = k - 7 > 0$ ovvero

$$k > 7$$

Posto $k = 0$ si ha $g(x) = \frac{1}{x^4 + 8x}$, che è definita e continua in $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Utilizzando la decomposizione in fratti semplici si ha

$$\frac{1}{x^4+8x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2-2x+4} = \\ \frac{(a+b+c)x^3+(2c-2b+d)x^2+(4b+2d)x+8a}{x^4+8x}$$

da cui

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2c-2b+d=0 \\ 4b+2d=0 \\ 8a=1 \end{cases}$$

che risolto fornisce $a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{1}{24}$, $c=-\frac{1}{12}$, $d=\frac{1}{12}$; pertanto

$$\frac{1}{x^4+8x} = \frac{1}{24}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\right)$$

Una primitiva di g è quindi

$$\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^3}{(x+2)(x^2-2x+4)}\right| = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+8}\right|$$

Tutte le primitive di g in $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ sono pertanto

$$\begin{cases} \frac{1}{24}\ln\frac{x^3}{x^3+8}+c_1 & \text{, se} \quad x<-2 \\ \frac{1}{24}\ln\frac{-x^3}{x^3+8}+c_2 & \text{, se} \quad -2<x<0 \\ \frac{1}{24}\ln\frac{x^3}{x^3+8}+c_3 & \text{, se} \quad x>0 \end{cases}$$

Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} y''(x)=g(x) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Il problema ha soluzioni in $\mathbb{R}$ se e solo se g ha primitive in $\mathbb{R}$, poiché y' è la primitiva di g che soddisfa $y'(0)=0$ e di conseguenza y è la primitiva di $\int_0^x g(t)dt$ che soddisfa $y(0)=0$ cioè

$$y(x) = \int_0^x \left(\int_0^s g(t)dt\right) ds$$

Pertanto il problema dato ha una ed una sola soluzione per $k > 6\sqrt[3]{2}$.

5. Integrazione secondo Riemann-Stieltjes.

Definizione 5.1 *Siano* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *due funzioni limitate; sia* $P \in \mathcal{P}(a, b)$, $P = \{x_0, ..., x_n\}$ *ed indichiamo con* $\Xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ *una scelta di punti* $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ *associata alla partizione* P.

Definiamo

$$R(f, g, P, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})];$$

$R(f, g, P, \Xi)$ *si dice somma di* $Riemann - Stieltjes$ *di* f *rispetto a* g *relativa alla partizione* P *ed alla scelta di punti* Ξ.

Diciamo che f *è integrabile secondo* $Riemann - Stieltjes$ *in* $[a, b]$ *se esiste* $I \in R$ *tale che* $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a, b)$ *tale che se* $P < P_\varepsilon$ *si ha*

$$|R(f, g, P, \Xi) - I| < \varepsilon \qquad , \qquad \forall \Xi.$$

In tal caso chiamiamo I *integrale di Riemann-Stieltjes di* f *rispetto a* g *e scriviamo*

$$I = \int_a^b f(x) dg(x).$$

f *si dice integranda,* g *si dice integratrice.*

Si può subito provare il seguente fondamentale risultato:

Teorema 5.1 *Siano* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *due funzioni limitate; allora* f *è integrabile rispetto a* g *se e solo se* g *è integrabile rispetto ad* f.

Si ha inoltre che

$$\int_a^b f(x) dg(x) + \int_a^b g(x) df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Dimostrazione. Data la simmetria dell'enunciato è sufficiente provare una sola implicazione.

Supponiamo pertanto che f sia integrabile rispetto a g. Si ha che $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a, b)$ tale che se $P \in \mathcal{P}(a, b)$, $P < P_\varepsilon$

$$\left| R(f, g, P, \Xi) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| < \varepsilon \ \ , \ \ \forall \Xi.$$

Sia ora $Q \in \mathcal{P}(a, b)$, $Q < P_\varepsilon$, $Q = \{x_0, ..., x_n\}$ e sia $\Xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ una scelta di punti $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

Avremo che

$$R(g,f,Q,\Xi) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

Consideriamo ora la partizione

$$P_1 = Q \cup \Xi = \{x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, .., \xi_n, x_n\}$$

e la scelta di punti Ξ_1 che associa il punto x_{i-1} all'intervallo $[x_{i-1}, \xi_i]$ ed il punto x_i all'intervallo $[\xi_i, x_i]$. Si ha

$$\begin{aligned} R(f,g,P_1,\Xi_1) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[g(\xi_i) - g(x_{i-1})] + \\ + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[g(x_i) - g(\xi_i)] = \\ = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)[f(x_{i-1}) - f(x_i)] + \\ + \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})] = \\ = f(b)g(b) - f(a)g(a) - R(g,f,Q,\Xi) \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} \left| R(g,f,Q,\Xi) - [f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)dg(x)] \right| = \\ = \left| R(f,g,P_1,\Xi_1) - \int_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

non appena si ricordi che $P_1 < Q < P_\varepsilon$.

Ciò prova il teorema. □

Possiamo anche provare il seguente risultato, che permette di effettuare cambi di variabili negli integrali di Riemann-Stieltjes.

Teorema 5.2 *- integrazione per sostituzione - Supponiamo che $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ siano limitate e sia $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ continua e strettamente crescente, $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$. Allora si ha che f è integrabile su $[a,b]$ rispetto a g se e solo se $f(\phi(\cdot))$ è integrabile rispetto a $g(\phi(\cdot))$. Inoltre*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_c^d f(\phi(x))dg(\phi(x)).$$

Dimostrazione. Dato che ϕ è strettamente crescente, si ha

$$P \in \mathcal{P}(c,d) \iff \phi(P) \in \mathcal{P}(a,b)$$

e $P, Q \in \mathcal{P}(c,d)$, $P < Q$ se esolo se $\phi(P), \phi(Q) \in \mathcal{P}(a,b)$, $\phi(P) < \phi(Q)$

Pertanto

$$R(f(\phi), g(\phi), P, \Xi) = R(f, g, \phi(P), \phi(\Xi))$$

e

$$|R(f(\phi), g(\phi), P, \Xi) - I| < \varepsilon \quad , \forall P < P_\varepsilon \; , \; \forall \Xi$$

se e solo se

$$|R(f, g, P', \Xi') - I| < \varepsilon \quad , \forall P' < \phi(P_\varepsilon) \; , \; \forall \Xi' \; .$$

$\square$

Nel caso in cui $g(x) = x$ la definizione A1.1 si riduce alla usuale definizione di integrale secondo Riemann. Se f è integrabile rispetto a $g(x) = x$, diremo semplicemente che f è integrabile.

Valgono i due seguenti risultati che consentono di calcolare facilmente gli integrali di Riemann-Stieltjes.

Teorema 5.3 *Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e supponiamo che $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$; allora, se f è integrabile rispetto a g, si ha che fg' è integrabile e*

$$\int_a^b f(x)dg(x) \;=\; \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Dimostrazione. Dal momento che f è integrabile rispetto a g, se $P < P_\in$ si ha

$$\left|R(f, g, P, \Xi) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| < \varepsilon \quad , \quad \forall \Xi$$

Inoltre, se $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$, dal momento che g' è uniformemente continua su $[a, b]$, si ha

$$|g'(\xi_i) - g'(\eta_i)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

pertanto, se scegliamo $P'_\varepsilon \in \mathcal{P}(a, b)$, $P'_\varepsilon < P_\varepsilon$ e $\Delta(P'_\varepsilon) < \delta_\varepsilon$ si ha, per $P < P'_\varepsilon$

$$R(f, g, P, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$$

$\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$R(fg', P, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
&\left| \; R(fg', P, \Xi) \; - \int_a^b \; f(x) dg(x) \right| = \\
&\qquad \leq \left| \; R(f, g, P, \Xi) - \int_a^b \; f(x) dg(x) \right| + \\
&\qquad\qquad + |R(f, g, P, \Xi) - R(fg', P, \Xi)| \leq \\
&\qquad \leq \varepsilon + \left| \; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g'(\xi_i) - g'(\eta_i)](x_i - x_{i-1}) \right| \leq \\
&\qquad\qquad \leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}
\end{aligned}$$

e la tesi. □

Teorema 5.4 *Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e sia g derivabile con g' limitata; supponiamo inoltre che f e g' siano integrabili su $[a, b]$; allora f è integrabile rispetto a g e si ha*

$$\int_a^b \; f(x) dg(x) \; = \; \int_a^b \; f(x) g'(x) dx.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che fg' è integrabile su $[a, b]$ e che valgono i seguenti fatti:

1. $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$

2. se $P \in \mathcal{P}(a, b)$ è sufficientemente fine

$$0 \leq U(g', P) - L(g', P) < \varepsilon$$

3. se $P \in \mathcal{P}(a, b)$ è sufficientemente fine si ha

$$\left| R(fg', P, \Xi) - \int_a^b \; f(x) g'(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Si ha pertanto, se $P < P_\varepsilon$ e P_ε è scelto in modo che siano verificate

2) e 3),

$$
\begin{aligned}
&\left| R(f,g,P,\Xi) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \right| = \\
&\qquad = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)g'(x)dx \right| = \\
&\qquad = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \right| \le \\
&\qquad \le \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \right| + \\
&\qquad\quad + \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g'(\eta_i) - g'(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) \right| \le \\
&\qquad\qquad \le \left| R(fg',P,\Xi) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \right| + \\
&\qquad\qquad\quad + [U(g',P) - L(g',P)]M \le \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \le \varepsilon(1+M).
\end{aligned}
$$

□

Cominciamo a questo punto a considerare una situazione apparentemente più particolare, supponiamo cioè che l'integratrice sia monotona. Non sarà restrittivo supporre che tale funzione sia crescente ed è ovvio che alcuni dei risultati esposti si intendono estesi anche alle funzioni decrescenti ed alle funzioni che sono differenza di funzioni crescenti.

Quest'ultima classe di funzioni è di notevole interesse; una funzione che si possa esprimere come differenza di funzioni crescenti, si dice di variazione limitata .

Solitamente non si considerano, come integratrici, funzioni che siano più generali delle funzioni di variazione limitata ed è per questo che abbiamo definito l'attuale situazione solo apparentemente più particolare.

Definizione 5.2 *Siano $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e supponiamo che g sia monotona crescente. Sia $P \in \mathcal{P}(a,b)$, $P = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ e definiamo*

$$m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ \ , \ \ M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$L(f,g,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(g(x_i) - g(x_{i-1}))\ ,\ U(f,g,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

Definiamo inoltre

$$\underline{\int_a^b} f(x)dg(x) = \sup\{L(f,g,P) \ : \ P \in \mathcal{P}(a,b)\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dg(x) = \inf\{U(f,g,P) \ : \ P \in \mathcal{P}(a,b)\}$$

e
$$\int_a^b f(x)dg(x) = \underline{\int_a^b} f(x)dg(x) = \overline{\int_a^b} f(x)dg(x)$$

qualora la seconda uguaglianza sia verificata.

Si può vedere, come nel paragrafo 15, che se $P, Q, P', Q' \in \mathcal{P}(a,b)$, $P < P'$, $Q < Q'$ e se $m \le f(x) \le M$ in [a,b], si ha

$$m(g(b) - g(a)) \le L(f,g,P') \le L(f,g,P) \le \\ \le U(f,g,Q) \le U(f,g,Q') \le M(g(b) - g(a))$$

e, di conseguenza,

$$m(g(b) - g(a)) \le \underline{\int_a^b} f(x)dg(x) \le \overline{\int_a^b} f(x)dg(x) \le M(g(b) - g(a))$$

Si ha inoltre

$$L(f,g,P) \le R(f,g,P,\Xi) \le U(f,g,P) \quad \forall \Xi$$

e si può provare che non c'è ambiguità nelle definizioni di integrale e nelle notazioni adottate nelle definizioni A1.1 e A1.6 in quanto sussiste il seguente teorema.

Teorema 5.5 *Siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e sia g monotona crescente. Sono equivalenti le seguenti condizioni;*

1. *$\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b)$ tale che se $P < P_\varepsilon$ si ha*
$$\left| R(f,g,P,\Xi) - \int_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon$$
$\forall \Xi$;
2. *$\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a,b)$ tale che*
$$0 \le U(f,g,P_\varepsilon) - L(f,g,p_\varepsilon) < \varepsilon$$
3. $\underline{\int_a^b} f(x)dg(x) = \overline{\int_a^b} f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$.

Usando ancora le dimostrazioni del paragrafo 15 si prova che:

Teorema 5.6 *Siano $f, h, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e sia g monotona. Allora se f ed h sono integrabili rispetto a g, tale risulta anche $\alpha f + \beta h$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si ha;*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta h(x)]dg(x) = \alpha \int_a^b f(x)dg(x) + \beta \int_a^b h(x)dg(x).$$

Inoltre si ha che fh è integrabile rispetto a g.

Dualmente, ricordando il teorema A1.2 di integrazione per parti, si prova che:

Teorema 5.7 *Siano f,g,h:* $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitate e siano g ed h monotone crescenti. Allora se f è integrabile rispetto a g e rispetto ad h si ha anche che f è integrabile rispetto ad* $\alpha g + \beta h$ *e*

$$\int_a^b f(x)d[\alpha g(x) + \beta h(x)] = \alpha \int_a^b f(x)dg(x) + \beta \int_a^b f(x)dh(x).$$

Risulta inoltre che f è integrabile rispetto a gh.

Usando i teoremi 15.12 e 15.6 (vi,vii) si ottiene che

Teorema 5.8 *Siano* $f, h, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitate e supponiamo che g sia monotona crescente; allora*

1. *Se* f, h *sono integrabili rispetto a g e se* $f \geq h$ *si ha*
$$\int_a^b f(x)dg(x) \geq \int_a^b h(x)dg(x);$$
2. *se definiamo* $f_+ = \max\{f, 0\}$ *ed* $f_- = \min\{f, 0\}$, *f è integrabile rispetto a g se e solo se* f_+ *ed* f_- *sono integrabili rispetto a g;*
3. *f è integrabile rispetto a g se e solo se* $|f|$ *è integrabile rispetto a g e si ha*
$$\left| \int_a^b f(x)dg(x) \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|dg(x) \right| ;$$
4. *se f è integrabile rispetto a g , se* $f \geq 0$ *e se* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$
$$0 \leq \int_\alpha^\beta f(x)dg(x) \leq \int_a^b f(x)dg(x)$$
5. *se f è continua, g è strettamente crescente,* $f \geq 0$ *e*
$$\int_a^b f(x)dg(x) = 0$$
allora $f \equiv 0$.

Per quel che concerne l'integrabilità possiamo stabilire il seguente risultato

Teorema 5.9 *- Siano f,g:* $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *f continua, g monotona crescente; allora f è integrabile rispetto a g e g è integrabile rispetto ad f.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare che f è integrabile rispetto a g, appellandoci al teorema A1.2 per il resto della tesi.

Dal momento che f è uniformemente continua su $[a, b]$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $|x - y| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Sia $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(a, b)$ tale che $\Delta(P_\varepsilon) < \delta_\varepsilon$, allora si ha

$$0 \leq U(f, g, P_\varepsilon) - L(f, g, P_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq$$
$$\leq \varepsilon(g(b) - g(a))$$

□

Passiamo ora a provare alcuni teoremi della media per gli integrali di Riemann-Stieltjes.

Teorema 5.10 *Consideriamo $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua e g crescente, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(c) \int_a^b dg(x) = f(c)(g(b) - g(a))$$

Dimostrazione. Siano

$$m = \min\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\} \ \ , \ \ M = max\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\};$$

si ha

$$m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f(x)dg(x) \leq M(g(b) - g(a)).$$

Se $g(b) = g(a)$ la tesi è banale; in caso contrario si ha

$$m \leq \int_a^b f(x)dg(x)/(g(b) - g(a)) \leq M$$

e si può concludere per il teorema dei valori intermedi. □

Teorema 5.11 *Siano f,g: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua, g crescente; supponiamo che g sia derivabile in $x_0 \in [a, b]$, allora*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dg(t)$$

è derivabile in x_0 e

$$F'(x_0) = f(x_0)g'(x_0).$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dg(t) = f(c_h)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

con $|c_h - x_0| < |h|$, e si conclude per la continuità di f e la derivabilità di g in x_0. □

Teorema 5.12 *Consideriamo $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f crescente, g continua; allora esiste $c \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a) \int_a^c dg(x) + f(b) \int_c^b dg(x).$$

Dimostrazione. Dal momento che g è continua ed f è crescente, g è integrabile rispetto ad f e per il teorema A1.12 si ha

$$\int_a^b g(x)df(x) = g(c)(f(b)-f(a)) \ , \ c \in [a,b].$$

Ma, per il teorema A1.2

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x) = \\ = f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c)(f(b)-f(a)) = \\ = f(b)(g(b)-g(c)) + f(a)(g(c)-g(a)) = \\ = f(b)\int_c^b dg(x) + f(a)\int_a^c dg(x)\end{aligned}$$

□

Per particolari scelte delle funzioni integratrici si provano i seguenti risultati per gli integrali di Riemann.

Teorema 5.13 *Siano $f, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $h \geq 0$. Allora esiste $c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = f(c)\int_a^b h(x)dx.$$

Dimostrazione. Dal teorema A1.12 con

$$g(x) = \int_a^x h(t)dt.$$

□

Teorema 5.14 *Siano f,h: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f crescente, h continua; allora esiste $c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = f(a)\int_a^c h(x)dx + f(b)\int_c^b h(x)dx.$$

Dimostrazione. Dal teorema A1.14 con

$$g(x) = \int_a^x h(t)dt.$$

□

Teorema 5.15 *Siano $f, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f crescente $f \geq 0$, h continua, allora $\exists c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)dh(x) = f(b)\int_c^b h(x)dx.$$

Dimostrazione. Dal teorema precedente applicato alla funzione f_1 definita da

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b] \\ 0, & x = a \end{cases}$$

□

Consideriamo ora il problema di definire l'integrale di Riemann-Stieltjes anche su sottoinsiemi non limitati di $\mathbb{R}$.

Definizione 5.3 *Siano $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile rispetto a g in $[a, \delta]$ $\forall\delta > a$.*

Qualora

$$\lim_{\delta\to+\infty}\int_a^\delta f(x)dg(x)$$

esista, diciamo che f è integrabile rispetto a g su $[a, +\infty)$ e definiamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)dg(x) = \lim_{\delta\to+\infty}\int_a^\delta f(x)dg(x).$$

Possiamo provare facilmente, usando il teorema 6.20, che

Teorema 5.16 *Siano $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile rispetto a g in $[a, \delta]$ $\forall\delta > a$; allora f è integrabile rispetto a g in $[a, +\infty)$ se e solo se*

$\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_\varepsilon > 0$ *tale che, se* $x', x'' > \delta_\varepsilon$

$$\Big|\int_{x'}^{x''} f(t)dg(t)\Big| < \varepsilon$$

E' conseguenza immediata del teorema A1.19 il seguente

Corollario 5.1 *Siano $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che g sia crescente. Allora, se $|f|$ è integrabile rispetto a g, anche f è integrabile rispetto a g su $[a, +\infty)$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\Big|\int_{x'}^{x''} f(t)dg(t)\Big| \le \Big|\int_{x'}^{x''} |f(t)|dg(t)\Big|.$$

□

Teorema 5.17 *Siano f,g: $[a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, f limitata e g crescente e limitata su $\mathbb{R}$. Allora f è integrabile rispetto a g su $[a, +\infty)$.*

Dimostrazione. La funzione

$$\delta \longrightarrow \int_a^\delta |f(t)|dg(t)$$

è monotona crescente e pertanto ammette limite per $\delta \to +\infty$.

Si ha inoltre

$$\int_a^\delta |f(t)|dg(t) \le M(g(\delta) - g(a)) \le 2MN$$

se M è un maggiorante per $|f|$ ed N è un maggiorante per $|g|$.

Ne deduciamo che

$$\lim_{\delta\to+\infty} \int_a^\delta |f(t)|dg(t)$$

esiste finito e per il corollario A1.20 concludiamo. □

Per finire occupiamoci del problema degli integrali di Riemann-Stieltjes dipendenti da un parametro.

Ci limitiamo a provare i seguenti risultati.

Teorema 5.18 *Siano $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e crescente, e sia $h : [a,b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $I \subset \mathbb{R}$; allora*

$$F(s) = \int_a^b h(t,s)dg(t)$$

è continua in I.

Se inoltre h è derivabile rispetto ad s e $\partial h(t,s)/\partial s$ è continua in $[a,b] \times I$, allora F è derivabile in I e si ha

$$F'(s) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial s}(t,s)dg(t).$$

Dimostrazione. Si ha

$$|F(s) - F(s_0)| \le \int_a^b |h(t,s) - h(t,s_0)|dg(t) \le$$
$$\le \varepsilon(g(b) - g(a))$$

se ricordiamo che h è uniformemente continua in $[a,b] \times [c,d]$.

Inoltre

$$\left| \frac{F(s+r) - F(s)}{r} - \int_a^b h_s(t,s)dg(t)\right| =$$
$$= \left|\int_a^b \left(\frac{h(t,s+r) - h(t,s)}{r} - h_s(t,s)\right) dg(t)\right| \le$$
$$\le \int_a^b |h_s(t,\sigma) - h_s(t,s)|dg(t) \le \varepsilon(g(b) - g(a))$$

con $|\sigma - s| \le |r|$ e si conclude come prima, usando l'uniforme continuità di h_s . □

Teorema 5.19 *- Siano $g : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e crescente, $h : [a,+\infty) \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata, $I \subset \mathbb{R}$; supponiamo inoltre che*

$$|h(t,s)| \le \phi(t)$$

con ϕ integrabile rispetto a g in $[a,+\infty)$; allora

$$F(s) = \int_a^{+\infty} h(t,s)dg(t)$$

è continua in I .

Se inoltre h_s esiste in $[a, +\infty) \times I$ e

$$|h_s(t, s)| \leq \psi(t)$$

con ψ integrabile rispetto a g su $[a, +\infty)$, allora F è derivabile e si ha

$$F'(s) = \int_a^{+\infty} h_s(t, s) dg(t).$$

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 26.34 .