1. Introduzione ai Modelli Differenziali

Uno degli argomenti più interessanti del calcolo differenziale è costituito dalle equazioni differenziali: si tratta di equazioni in cui l'incognita è una funzione $y(x)$ di cui sono noti i valori iniziali ed il fatto che deve essere verificata, per ogni x, una relazione tra la funzione stessa e la sua derivata prima $y'(x)$.

L'esempio più semplice e naturale di un problema di questo genere è dato dal modello che descrive la caduta di un grave.

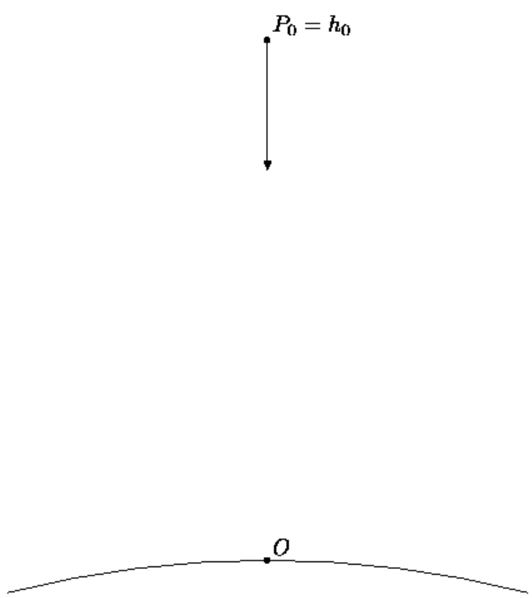


Figure 1.1: Un punto materiale soggetto alla gravità

Se consideriamo un punto di massa m posto ad un'altezza h dalla superficie terrestre e trascuriamo gli effetti della resistenza dell'aria, avremo che sul punto agisce solo la forza di gravità $F = mg$.

L'esperienza mostra che il punto materiale P si muove verso il basso; per descrivere il suo moto possiamo considerare un sistema di riferimento che coincide con la retta che il punto percorre cadendo.

Assumiamo l'origine in corrispondenza del suolo e consideriamo positive le altezze misurate dal suolo.

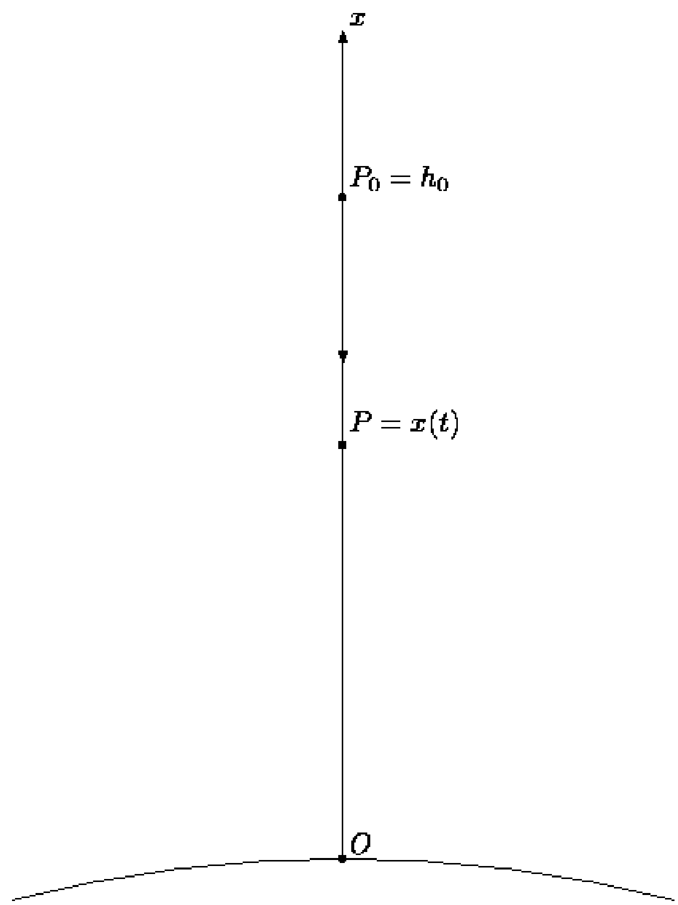


Figure 1.2: Il sistema di riferimento

La velocità con cui il punto P si muove verso il basso lungo la retta scelta come asse di riferimento è

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

e la sua accelerazione è

$$a(t) = \ddot{x}(t)$$

Come già detto, sul punto agisce la sola forza gravitazionale $F = mg$.

Per le leggi di Newton si avrà allora

$$ma(t) = -mg$$

e quindi

$$\ddot{x}(t) = g \tag{1.1}$$

La 1.1 è un semplicissimo esempio di equazione differenziale: essa impone una relazione che coinvolge una funzione e le sue derivate.

Il moto del punto si può ricavare integrando due volte tra t e $t_0 = 0$, es xassumiamo che il moto inizi all'istante $t_0 = 0$.

Si ottiene

$$\dot{x}(t) = -gt + c_1 \tag{1.2}$$

e

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_0 \tag{1.3}$$

e si vede che per determinare in maniera unica il moto dovremo procurarci dei valori per c_0 e c_1. Questo si può fare utilizzando informazioni sulla velocità e sulla posizione iniziale del punto. È subito visto infatti dalla 1.2 e dalla 1.3 rispettivamente che

$$v_0 = \dot{x}(0) = c_1 \qquad h_0 = x(0) = c_0 \tag{1.4}$$

Possiamo osservare che per determinare il moto abbiamo cioè bisogno di conoscere posizione e velocità iniziale del punto P e ciò corrisponde anche all'intuizione.

Se teniamo conto di tali dati, possiamo affermare che il punto P si muove sull'asse x seguendo la legge

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 \tag{1.5}$$

Possiamo descrivere lo stesso fenomeno anche usando il principio di conservazione dell'energia.

L'energia potenziale del punto P, soggetto al solo campo gravitazionale è, in ogni istante t,

$$U(t) = mgx(t)$$

mentre la sua energia cinetica è

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$$

e la sua energia totale

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + mgx(t)$$

si mantiene costante durante il moto

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + mgx(t) = mk \tag{1.6}$$

Se conosciamo le condizioni iniziali v_0 ed h_0 siamo anche in grado di calcolare

$$k = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

La 1.6 è una equazione differenziale, che è in grado di descrivere la posizione $x(t)$ del punto P in ogni istante t, tuttavia ricavare x da tale relazione è più difficile.

Possiamo riscrivere la 1.6 come

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) = k - gx(t) \tag{1.7}$$

e da questa uguaglianza possiamo ricavare una prima informazione:

> la quantità $k - gx(t)$ deve mantenersi positiva e quindi $x(t) \leq \frac{k}{g}$.

Abbiamo così ricavato una limitazione per la soluzione dell'equazione senza risolverla, abbiamo ottenuto cioè una limitazione a priori per la soluzione dell'equazione.

Osserviamo anche che

> $x(t) = \frac{k}{g}$ è una soluzione costante dell'equazione 1.7

Per cercare soluzioni non costanti possiamo applicare la radice ad entrambi i membri

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{2k - 2gx(t)} \tag{1.8}$$

e dividere per il secondo membro

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{2k - 2gx(t)}} = \pm 1 \tag{1.9}$$

Ora, se moltiplichiamo per g

$$\frac{g\dot{x}(t)}{\sqrt{2k - 2gx(t)}} = \pm g \tag{1.10}$$

ed integriamo tra $t_0 = 0$ e t, otteniamo

$$\int_0^t \frac{g\dot{x}(s)}{\sqrt{2k - 2gx(s)}} ds = \pm gt \tag{1.11}$$

dove tuttavia il primo integrale non può essere calcolato in quanto la funzione integranda dipende dalla funzione incognita $x(t)$.

Possiamo integrare per sostituzione ponendo

$$u = x(s) \qquad , \qquad du = \dot{x}(s)ds$$

osservando che per $s = 0$ e $s = t$ avremo $x(s) = x(0) = h_0$ e $x(s) = x(t)$, da cui si ricava che $v_0 = \pm\sqrt{2k - 2gx_0}$, avremo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{g du}{\sqrt{2k - 2gu}} = \pm gt \tag{1.12}$$

A questo punto possiamo calcolare l'integrale a sinistra ed ottenere che

$$\sqrt{2k-2gx(t)}-\sqrt{2k-2gx_0}=\mp gt \tag{1.13}$$

$$\sqrt{2k-2gx(t)}=\mp gt\pm v_0 \tag{1.14}$$

$$2k-2gx(t)=(\mp gt\pm v_0)^2 \tag{1.15}$$

$$x(t)=\frac{k}{g}-\frac{1}{2g}(\mp gt\pm v_0)^2 \tag{1.16}$$

Osserviamo esplicitamente che la scelta dei segni di $\mp gt$ e di $\pm v_0$ è coerente con i calcoli fatti.

Tale scelta si mantiene fino a quando la derivata di $x(t)$, cioè la velocità non si annulla; questa eventualità non si verifica mai se $v_0<0$ mentre ha luogo per $t_0=\frac{v_0}{g}$ nel caso in cui $v_0>0$.

In tal caso ci troviamo in uno stato descritto da

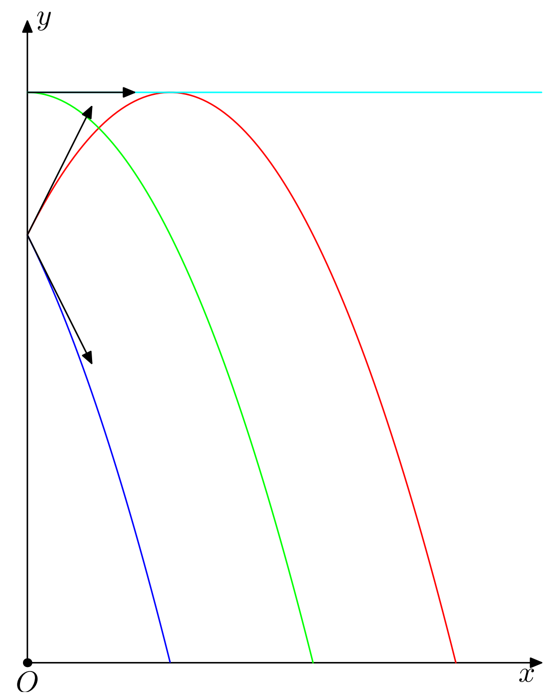
$$x(t_0)=\dot{x}(t_0)=0$$

e quindi non abbiamo indicazioni sul segno da attribuire alla radice che rappresenta la velocità nella 1.8.

Tuttavia possiamo osservare che essendo $\dot{x}(t)=0$ dalla 1.8 si deduce $x(t)=\frac{k}{g}$ per cui, dovendosi avere $x(t)\le\frac{k}{g}$ x non può più aumentare e quindi occorre considerare da quell'istante in poi,

$$\dot{x}(t)=-\sqrt{2k-2gx(t)} \tag{1.17}$$

Osserviamo che a questo punto occorre distinguere tra risultato del modello e soluzione dell'equazione differenziale: infatti il modello esprime la conservazione dell'energia, che si può ottenere anche con la soluzione costante che non è invece accettabile per la descrizione della caduta di un grave.



2. *Equazioni Differenziali a Variabili Separabili.*

Risolvere una equazione differenziale a variabili separabili, significa trovare una funzione y, che sia derivabile e per cui si abbia

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

con f, g assegnate.

Più precisamente possiamo dire che

Se $I, J \subset \mathbb{R}$ sono intervalli aperti e non vuoti ed $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni, diciamo che risolviamo l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \tag{2.1}$$

se troviamo un intervallo $I' \subset I$ ed una funzione $y : I' \longrightarrow J$ tale che la 2.1 sia soddisfatta per ogni $x \in I'$

Quando si cercano soluzioni di un'equazione differenziale che soddisfino anche un dato iniziale, si parla di problema di Cauchy.

Precisamente se

$I, J \subset \mathbb{R}$ sono intervalli aperti $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni; chiamiamo problema di Cauchy a variabili separabili il problema di trovare $I' \subset I$ ed $y : I' \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile, tali che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y(x)) \quad , \quad \forall x \in I' \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Vale il seguente teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy a variabili separabili, per dimostrare il quale procediamo in maniera costruttiva utilizzando un metodo che, di fatto, consente di risolvere l'equazione.

La dimostrazione è, in questo caso, molto più utile dell'enunciato, ma anche le condizioni di esistenza ed unicità della soluzione sono di fondamentale importanza.

Nei teorema che segue giocano un ruolo fondamentale il fatto che I e J siano intervalli aperti e che $g(y) \neq 0\ \forall y \in J$.

Quest'ultima condizione è certamente soddisfatta se g è continua e se $g(y_0) \neq 0$ a meno di considerare un'intervallo J più piccolo.

Teorema 2.1 *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$, intervalli aperti, siano $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ e siano $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue, supponiamo inoltre che $g(y) \neq 0$, per ogni $y \in J$.*

Allora esiste un intervallo $I' \subset I$ e una ed una sola soluzione $y : I' \longrightarrow J$ del problema di Cauchy 2.2.

Dimostrazione. y è soluzione del problema assegnato se e solo se

$$\begin{cases} \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

e ciò si verifica se e solo se

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t) dt \tag{2.4}$$

se e solo se

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t) dt \tag{2.5}$$

se e solo se, dette F e G due primitive di f ed $1/g$ su I e J rispettivamente,

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \tag{2.6}$$

$R(G - G(y_0))$ e $R(F - F(x_0))$ sono intervalli per la continuità delle medesime, entrambi contengono 0 e $R(G)$ contiene 0 al suo interno in virtù del fatto che G è strettamente monotona in quanto $g = G'$ ha segno costante inoltre G è invertibile.

Ciò assicura che esiste un intervallo I', aperto e contenente x_0 in cui l'uguaglianza vale ed in tale intervallo si può scrivere che

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0)). \tag{2.7}$$

□

È importante anche ricordare due risultati di esistenza e di unicità la cui dimostrazione non è opportuna a questo punto, che possiamo tuttavia utilizzare per ottenere informazioni sull'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy.

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$, intervalli aperti, siano $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ e siano $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue.

Allora esiste un intervallo $I' \subset I$ e una soluzione $y : I' \longrightarrow J$ del problema di Cauchy 2.2.

Se inoltre $g \in \mathcal{C}^1$,cioè se ammette derivata prima continua, allora la soluzione è anche unica.

L'unicità è anche assicurata dalla lipschitzianità di g cioè dalla condizione

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \tag{2.8}$$

Vale la pena di ricordare che, usando il teorema di Lagrange, si può dimostrare che una funzione che abbia derivata prima limitata è lipschitziana: infatti se $|g'(c)| \leq L$ si ha

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)||x - y| \leq L|x - y| \tag{2.9}$$

Ricordiamo anche che se $g \in \mathcal{C}^1$, il teorema di Weierstraß assicura che $|g'|$ (che è continua) ammette massimo su ogni intorno chiuso e limitato di x_0

Possiamo procedere alla soluzione dell'equazione differenziale a variabili separabili anche senza precisi riferimenti ai dati iniziali seguendo essenzialmente gli stessi passi percorsi in precedenza

Siano f e g continue sugli intervalli aperti I e J e supponiamo che $g(y) \neq 0$ su J;

Consideriamo l'equazione a variabili separabili

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \tag{2.10}$$

Dal momento che $g(y) \neq 0$ in J, avremo che la 2.10 è soddisfatta in I' se e solo se

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

e, dette F e G due primitive in I e J di f ed $1/g$ rispettivamente, l'ultima uguaglianza è equivalente a

$$G(y(x)) = F(x) + c \tag{2.11}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (ricordiamo che stiamo lavorando su intervalli e quindi due primitive differiscono per costante).

Ora, se fissiamo x_0 interno ad I e chiamiamo $y(x_0) = y_0 \in J$, posto
$$c = G(y_0) - F(x_0)$$
avremo che la 2.11 diventa
$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \tag{2.12}$$
ed è verificata almeno in un intervallo $I' \subset I$.

Infatti $R(G - G(y_0))$ e $R(F - F(x_0))$ sono intervalli per la continuità delle medesime, entrambi contengono 0 e $R(G)$ contiene 0 al suo interno in virtù del fatto che G è strettamente monotona in quanto $g = G'$ ha segno costante inoltre G è invertibile.

Pertanto possiamo ricavare
$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$
per $x \in I'$.

Il procedimento sopra esposto fornisce, al variare di c, l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale a variabili separabili considerata. Allorquando necessiti trovare le soluzioni dell'equazione considerata, che soddisfino di più la condizione $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, è sufficiente considerare $c = G(y_0) - F(x_0)$ ed osservare che tale scelta di c consente di determinare $I' \subset I$ tale che $F(I') + c \subset G(J)$. In tal caso si risolve un problema di Cauchy.

Per una corretta risoluzione di un'equazione a variabili separabili non va trascurato di considerare quanto accade se g si annulla in qualche punto.

Ricordiamo che per separare le variabili occorre dividere per g e quindi in questo caso non si può procedere già dall'inizio.

È ragionevole limitarci al caso in cui y_0 è uno zero isolato di g, cioè se esiste un intorno di y_0 in cui g non si annulla altre volte.

In tal caso possiamo osservare che la funzione
$$y(x) = y_0$$
è una soluzione dell'equazione, che in presenza di condizioni che assicurino l'unicità è anche la sola soluzione possibile.

Qualora non sussistano tali condizioni occorre indagare l'esistenza di altre soluzioni; a questo scopo si procede studiando l'equazione per $y \neq y_0$ e, giunti al punto di considerare
$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{2.13}$$

prima di procedere, occorre studiare l'esistenza in senso improprio dell'integrale a sinistra.

Le informazioni che abbiamo sull'integrazione impropria ci consentono allora di capire che:

- se g è infinitesima in y_0 di ordine $\alpha \geq 1$. la primitiva G di $1/g$ non può essere prolungata per continuità in y_0 e pertanto la soluzione costante è l'unica possibile.
- Se invece g è infinitesima in y_0 di ordine $\alpha \leq \beta < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Allora G può essere prolungata per continuità in y_0 e, si può procedere oltre.

Nei teoremi 16.2 e 16.4 giocano un ruolo fondamentale il fatto che I e J siano intervalli aperti e che $g(y) \neq 0 \; \forall y \in J$.

Quest'ultima condizione è certamente soddisfatta se $g(y_0) \neq 0$.

Esaminiamo brevemente cosa accade se mancano queste ipotesi.

Cominciamo con il considerare il caso in cui I e J siano intervalli chiusi; in questa situazione si è naturalmente condotti al concetto di soluzione definita solo a destra o solo a sinistra del punto iniziale.

L'esistenza di una tale soluzione si prova, esattamente come nel teorema 16.4, nel caso in cui si possa invertire G per risolvere rispetto ad $y(x)$

$$G(y(x)) = G(y_0) + F(x) - F(x_0) \quad .$$

Ciò è possibile se e solo se G è localmente monotona in un intorno di y_0 e

$$\operatorname{sgn}(G(y) - G(y_0)) = \operatorname{sgn}(F(x) - F(x_0)) \quad .$$

Una condizione sufficiente affinché ciò accada è che

$$g(y)f(x)(x - x_0)(y - y_0) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{int} I, \; \forall y \in \operatorname{int} J \, .$$

Quando invece $g(y_0) = 0$, lo studio dell'esistenza di una soluzione per il Problema di Cauchy (16.2) diventa banale in quanto è sempre possibile considerare la soluzione costante

$$y(x) \equiv y_0 \quad ,$$

mentre si complica lo studio dell'unicità.

Accenniamo qui a quanto accade se y_0 è uno zero isolato di g, cioè se g non si annulla in un intorno di y_0, e distinguiamo due casi.

(1^o caso). g è infinitesima in y_0 di ordine $\alpha \geq 1$. In questo caso

la primitiva G di $1/g$ non può essere prolungata per continuità in y_0 e pertanto la soluzione costante è l'unica possibile. (2^o caso). g

è infinitesima in y_0 di ordine $\alpha \leq \beta < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Questa volta

G può essere prolungata per continuità in y_0 e, dal momento che y_0 è uno zero isolato di g , si ha che G è localmente monotona in un intorno, anche solo destro o sinistro di y_0. Pertanto, fissato $\hat{x} \in I$, eventualmente $\hat{x} = x_0$, si può risolvere rispetto ad $y(x)$ l'uguaglianza

$$G(y(x)) = G(y_0) + F(x) - F(\hat{x})$$

non appena si supponga che

$$f(x)g(y)(x - \hat{x})(y - y_0) > 0 \quad \forall x \in \text{int } I', \ \forall y \in \text{int } J \ .$$

Posto

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(\hat{x}) + G(y_0)) \qquad x \in I'$$

ove I' è un intorno eventualmente solo destro o sinistro di $\hat{x}$, si può subito osservare che

$$y'(x) = \lim_{x \to \hat{x}} f(x)g(y(x)) \ = \ f(\hat{x})g(y(\hat{x})) \ = \ 0.$$

Pertanto y è derivabile in $\hat{x}$ e si può ivi raccordare con derivabilità alla soluzione $y(x) \equiv y_0$.

Ciò permette di costruire infinite soluzioni del problema di Cauchy (16.2). Si può provare, nell'ambito di una più generale trattazione delle equazioni differenziali, che la soluzione del problema di Cauchy (16.2) esiste ed è unica nel caso in cui

$$f \in \mathcal{C}^0(I) \ \ , \ \ g \in \mathcal{C}^1(J) \ \ .$$

Usando le tecniche sopra descritte si può provare il seguente risultato che, nonostante la sua semplicità, è di fondamentale importanza quando si trattano equazioni differenziali ordinarie ed anche alle derivate parziali.

Proviamo infine un risultato riguardante una disequazione differenziale che è spesso utile per trovare limitazioni a priori per soluzioni di equazioni differenziali che non si è in grado di risolvere.

Lemma 2.1 *- di Gronwall - Siano $y, f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ funzioni continue, I intervallo, e siano $c > 0$, $x_0 \in I$; allora se*

$$y(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt \right| + c$$

per ogni $x \in I$ si ha

$$0 \leq y(x) \leq ce^{\left| \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right|}$$

per ogni $x \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $x \geq x_0$; dividendo ambo i membri per il secondo e moltiplicando poi per $f(x)$ si ottiene (si ricordi che $f \geq 0$, $c > 0$)

$$\frac{y(x)f(x)}{c + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt} \leq f(x)$$

da cui

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(c + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right)\right] \leq f(x).$$

Integrando ora tra x_0 ed x si ha

$$\ln\left(c + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right) - \ln c \ \leq \ \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

onde

$$c + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt \ \leq \ ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}.$$

e

$$y(x) \leq c + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt \leq ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

Se $x \leq x_0$ si procede in modo analogo solo tenendo conto di un cambiamento di segno. □

Corollario 2.1 *Siano $y, f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ continue, I intervallo, e sia $x_0 \in I$; allora se*

$$y(x) \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right| \qquad \forall x \in I$$

si ha

$$y(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$y(x) \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right| + c \qquad \forall c > 0$$

e pertanto

$$0 \leq y(x) \leq ce^{\left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right|} \qquad \forall c > 0$$

per cui, al limite per $c \to 0^+$, si ha $y(x) \equiv 0$. □

Se nel lemma di Gronwall si suppone

$$y(x) \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(t)y(t)dt\right| + c(x)$$

con c crescente, si prova che

$$0 \leq y(x) \leq c(x)e^{\left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right|}$$

3. Esempi Notevoli di Problemi di Cauchy

3.1 Esempio

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = y^2(x) \tag{3.1}$$

Osserviamo innanzi tutto che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione. Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1 \tag{3.2}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = x - x_0 \tag{3.3}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{s^2} = x - x_0 \tag{3.4}$$

Poichè $\frac{1}{s^2}$ è infinita in $s = 0$ di ordine 2, non è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che non è integrabile in intervalli che contengano 0). Pertanto y ed y_0 dovranno avere sempre lo stesso segno: soluzioni che partono con valori y_0 positivi (negativi), rimangono positive (negative).

Sotto tale condizione avremo che

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x - x_0 \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} + x_0 - x = c - x \tag{3.6}$$

dove si sia definito

$$c = \frac{1}{y_0} + x_0$$

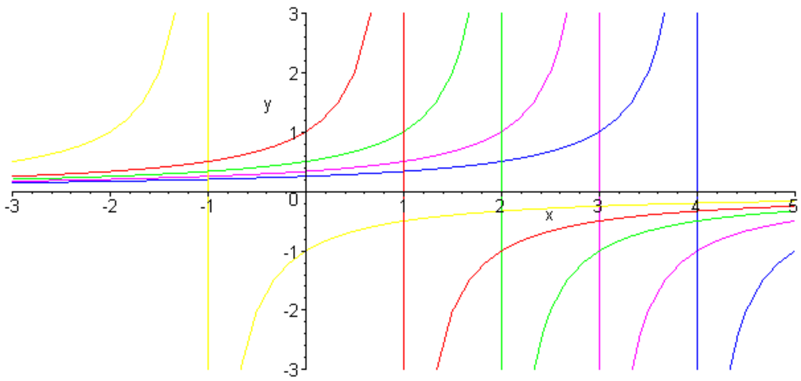
Osserviamo inoltre che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali.

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \frac{1}{c - x} \tag{3.7}$$

ed il loro grafico è indicato in figura 3.1.

Figure 3.1:



3.2 *Esempio*

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} \tag{3.8}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $y(x) \geq 0$ e che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione.

Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 1 \tag{3.9}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} dt = x - x_0 \tag{3.10}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = x - x_0 \tag{3.11}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{s}}$ è infinita in $s = 0$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano 0).

Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore 0. Avremo

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = x - x_0 \tag{3.12}$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x - x_0 + 2\sqrt{y_0}) = \frac{1}{2}(x + c) \tag{3.13}$$

dove si sia definito

$$c = 2\sqrt{y_0} - x_0$$

Osserviamo inoltre che la 3.13 impone che deve essere

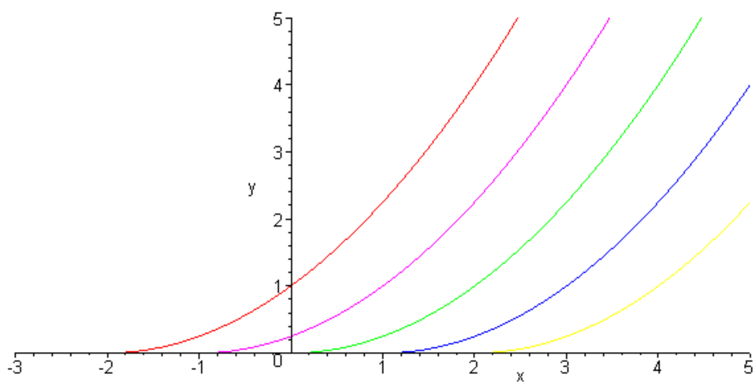
$$\frac{1}{2}(x + c) \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad x \geq -c$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali.

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \frac{1}{4}(x + c)^2 \qquad \text{per} \qquad x \geq -c \tag{3.14}$$

ed il loro grafico è indicato in figura 3.2.



3.3 *Esempio*

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = x\sqrt{y(x)} \tag{3.15}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $y(x) \geq 0$ e che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione.

Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = x \tag{3.16}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} dt = \int_{x_0}^{x} t dt \tag{3.17}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \tag{3.18}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{s}}$ è infinita in $s = 0$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano 0). Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore 0. Avremo

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \tag{3.19}$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + (\sqrt{y_0} - \frac{x_0^2}{2}) = \frac{x^2}{4} + c \tag{3.20}$$

dove si sia definito

$$c = \sqrt{y_0} - \frac{x_0^2}{2}$$

Osserviamo che la 3.19 impone che deve essere

$$\frac{x^2}{4} + c \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \text{sempre} & \text{se } c > 0 \\ |x| \geq -2c & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali.

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2 \tag{3.21}$$

sotto le condizioni indicate per x ed il loro grafico è indicato in figura 3.3.

3.4 *Esempio*

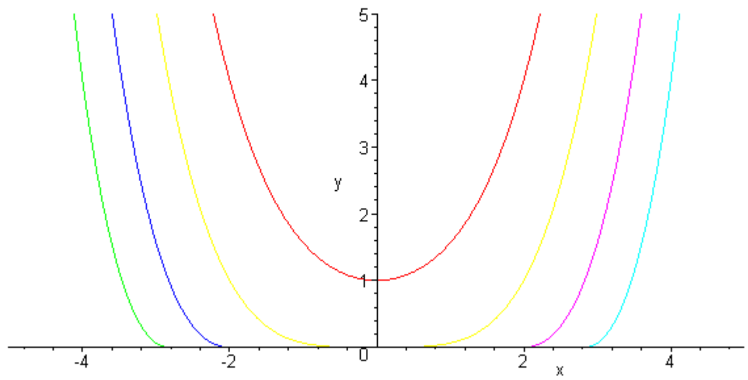
Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = -x\sqrt{y(x)} \tag{3.22}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $y(x) \geq 0$ e che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione.

Se $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = -x \tag{3.23}$$



ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} dt = -\int_{x_0}^{x} t dt \tag{3.24}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} \tag{3.25}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{s}}$ è infinita in $s = 0$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = 0$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano 0). Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore 0. Avremo

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} \tag{3.26}$$

$$\sqrt{y} = -\frac{x^2}{4} + (\sqrt{y_0} + \frac{x_0^2}{2}) = -\frac{x^2}{4} + c \tag{3.27}$$

dove si sia definito

$$c = \sqrt{y_0} + \frac{x_0^2}{2}$$

Osserviamo che la 3.27 impone che deve essere

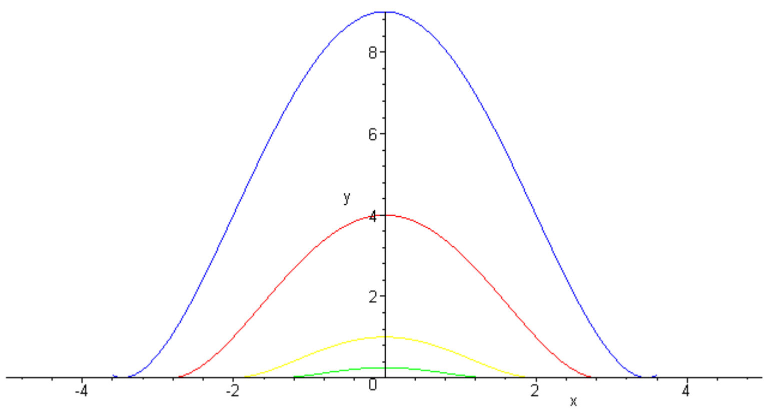
$$-\frac{x^2}{4} + c \geq 0 \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \text{mai} & \text{se } c < 0 \\ |x| \leq -2c & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere solo valori positivi.

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \left(-\frac{x^2}{4} + c\right)^2 \tag{3.28}$$

sotto le condizioni indicate per x ed il loro grafico è indicato in figura 3.4.



3.5 *Esempio*

Consideriamo l'equazione

$$y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)} \tag{3.29}$$

Osserviamo innanzi tutto che deve essere $|y(x)| \le 1$ e che $y(x) \equiv \pm 1$ è soluzione dell'equazione.

Se $y(x) \ne \pm 1$ possiamo separare le variabili

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y^2(x)}} = 1 \tag{3.30}$$

ed integrando tra x_0 ed x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{\sqrt{1 - y^2(t)}} dt = x - x_0 \tag{3.31}$$

posto $s = y(t)$, avremo $ds = y'(t)dt$ e

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = x - x_0 \tag{3.32}$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ è infinita in $s = \pm 1$ di ordine $1/2$, è integrabile in $s = \pm 1$ (intendiamo con ciò che è integrabile in intervalli che contengano ± 1). Pertanto y ed y_0 potranno assumere anche il valore ± 1. Avremo

$$\arcsin y(x) - \arcsin y_0 = x - x_0 \tag{3.33}$$

$$\arcsin y(x) = x - x_0 + \arcsin y_0 = x + c \tag{3.34}$$

dove si sia definito

$$c = \arcsin y_0 - x_0$$

Osserviamo che la 3.34 impone che deve essere

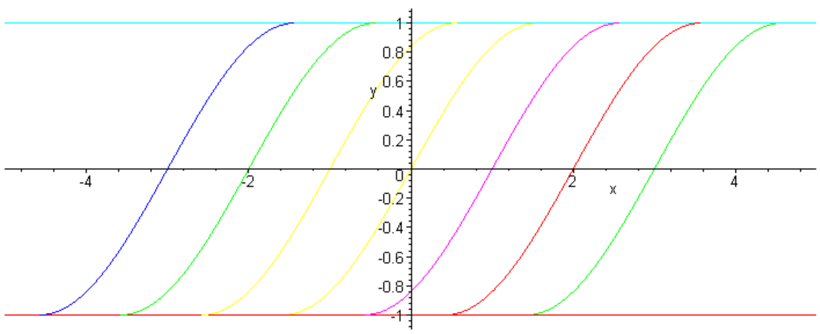
$$|x+c| \le \frac{\pi}{2}$$

Osserviamo che al variare di x_0 ed y_0 c può assumere tutti i valori reali.

Le soluzioni dell'equazione saranno pertanto date da

$$y(x) = \sin(x+c) \tag{3.35}$$

sotto le condizioni indicate per x ed il loro grafico è indicato in figura 3.5.



3.6 *Esempio*

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-(y(x))^4} - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Possiamo scrivere

$$y'(x) = f(x)g(y(x)$$

se definiamo $f(x) = 1$ e $g(y) = e^{-y^4} - 1$;

Si ha $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, e quindi si avrà una ed una sola soluzione per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $y_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione ammette soluzioni costanti che possono essere trovate ponendo $y(x) = c$ e sostituendo; avremo

$$0 = e^{-c^4} - 1$$

per cui la sola soluzione costante è $y(x) = c = 0$.

Nel caso in cui $y_0 = 0$ la soluzione costante è anche l'unica soluzione del problema di Cauchy .

Se fissiamo $x_0 = 0$ ed $y_0 = 1$. possiamo supporre $y(x) \neq 0$ in un intorno di 0 e separando le variabili ed integrando tra 0 ed x si ottiene

$$\frac{y'(x)}{e^{-(y(x))^4} - 1} = 1 \tag{3.37}$$

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{e^{-(y(t))^4} - 1} dt = \int_0^x dt \tag{3.38}$$

ovvero

$$\int_1^{y(x)} \frac{ds}{\mathrm{e}^{-s^4} - 1} = x$$

Studiamo ora la funzione integrale a primo membro $h(y) = \int_1^y \frac{ds}{\mathrm{e}^{-s^4}-1}$.

Poiché l'integranda è definita e continua per $s \neq 0$ e

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{e^{-s^4} - 1} = -\infty$$

di ordine 4, l'integrale è divergente per in 0; ne segue che, essendo il primo estremo di integrazione positivo, la funzione è definita per $y > 0$.

Inoltre

$$\lim_{s\to +\infty} \frac{1}{e^{-s^4} - 1} = -1$$

da cui l'integrale è divergente anche per $y \to +\infty$.

Si ha infine $h(1) = 0$ e $h'(y) =]frac1e^{-y^4} - 1$ essendo l'integranda continua per $y > 0$, e tale derivata risulta sempre negativa.

Possiamo anche osservare che

$$h''(y) = \frac{4y^3 e^{-y^4}}{(e^{-y^4} - 1)^2} > 0$$

per ogni $y > 0$, per cui la funzione risulterà convessa; inoltre, poiché

$$\lim_{y\to+\infty} h'(y) = -1$$

il grafico della funzione tenderà a diventare parallelo alla bisettrice del secondo e quarto quadrante)

Il grafico della funzione h è indicato nella figura;

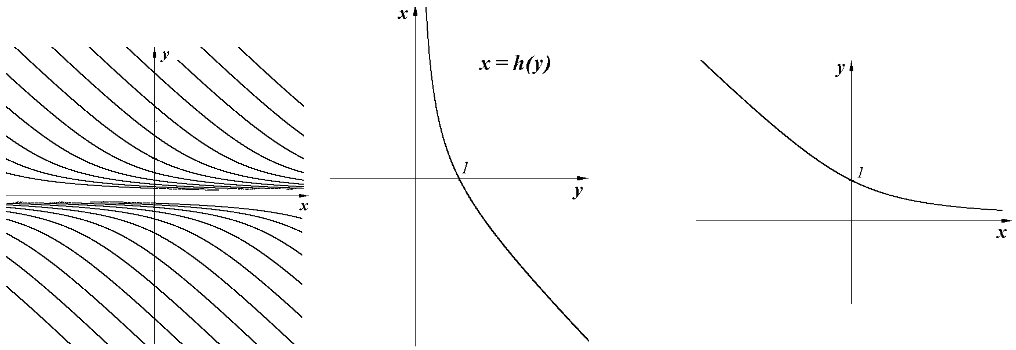
Poichè deve aversi

$$h(y(x)) = x$$

il grafico della soluzione del problema di Cauchy sarà quello dell'inversa di h, come riportato nella figura 3.6.3.6.

Per disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. possiamo osservare che l'equazione data è un'equazione differenziale autonoma, e quindi se $y(x)$ è soluzione, anche $y(x+a)$ è soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Pertanto tutte le traslate (in orizzontale) della soluzione trovata sono ancora soluzioni, per $y > 0$.



(a) Grafico 1 (b) Grafico2 (c) Grafico3

Per quanto riguarda le soluzioni per $y < 0$, ripetendo i calcoli fatti, ad esempio con $x_0 = 0$ e $y_0 = -1$, si ha

$$\int_{-1}^{y(x)} \frac{ds}{e^{-s^4} - 1} = x$$

e con considerazioni analoghe si ottengono le curve indicate in figura 3.6.3.6

(Si noti che, se $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale, tale è pure $-y(-x)$, ovvero i grafici delle soluzioni sono simmetrici rispetto all'origine).

3.7 *Esempio*

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 6x^2\sqrt{y(x)} \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un problema a variabili separabili con $f(x) = 6x^2$ definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, e $g(y) = \sqrt{y}$ definita e di classe C^1 per $y > 0$; pertanto essendo $y_0 = 1$, per il teorema di esistenza ed unicità, esiste una ed una sola soluzione del problema dato, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Separando le variabili, per $y(x) > 0$, si ottiene

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 6x^2$$

ed integrando tra 0 ed x

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} dt = \int_0^x 6t^2\, dt$$

ovvero

$$2\sqrt{y(x)} - 2\sqrt{y(0)} = 2x^3 \qquad \text{da cui} \qquad \sqrt{y(x)} = 1 + x^3$$

Elevando al quadrato i due membri, dopo aver osservato che $1 + x^3 > 0$ e cioè $x > -1$, si ottiene

$$y(x) = (1 + x^3)^2 \qquad , \qquad x > -1$$

(si noti che la soluzione è prolungabile, in modo unico, con $y(x) = 0$ per $x \leq -1$).

Il grafico delle soluzioni è riportato in figura 3.7