1. Equazioni e Sistemi di Equazioni Differenziali Lineari

Un altro tipo importante di equazioni di equazioni differenziali è costituito dalle equazioni lineari. La più semplice equazione lineare può essere scritta nella forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \tag{1.1}$$

Se $a, b \in \mathcal{C}^0(I)$, l'equazione 1.1 ammette una ed una soluzione definita su tutto I; questa è forse una delle più importanti caratteristiche di questo tipo di equazioni e si può facilmente verificare, in questo caso, direttamente.

Sia $x_0 \in I$, ed $y_0 \in \mathbb{R}$, e sia A una primitiva di a in I. L'esistenza di A è assicurata dalla continuità di a; ad esempio possiamo porre $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$.

La 1.1 è vera se e solo se

$$e^{-A(x)}y'(x) - e^{-A(x)}a(x)y(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

e ciò è equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-A(x)}y(x)\right) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Integrando tra x_0 ed x, si ottiene

$$e^{-A(x)}y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt$$

ed infine

$$y(x) = e^{\ A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(x)}\ dt\right) \tag{1.2}$$

Quanto abbiamo esposto consente di affermare che tutte le soluzioni dell'equazione 1.1 si ottengono, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, dalla 1.2.

Osserviamo anche che la 1.2 stessa può essere riscritta nella seguente maniera:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds}dt$$

in accordo con i risultati che proveremo nel seguito per il caso più generale.

La 1.2 costituisce, al variare di y_0, l'integrale generale dell'equazione 1.1.

I passi successivi consistono nel considerare equazioni lineari di ordine superiore oppure sistemi di equazioni del primo ordine.

Un'equazione lineare di ordine n si può scrivere nella forma

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(x) + b(x) \tag{1.3}$$

dove $a_i, b \in \mathcal{C}^0$ mentre un sistema lineare di ordine n si scrive nella forma

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \tag{1.4}$$

dove $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ e $B(x) = \{b_i(x)\}$ sono una matrice ed un vettore i cui elementi sono funzioni continue su un intervallo I; (scriviamo $A \in \mathcal{C}^k(I)$, $B \in \mathcal{C}^k(I)$ quando intendiamo pertanto affermare che $a_{ij} \in \mathcal{C}^k(I)$, $b_i \in \mathcal{C}^k(I)$ per $i, j = 1, ..., n$).

Il sistema può essere riscritto usando le componenti di Y, A, B, nella seguente maniera

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

ed anche, in forma più compatta

$$y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j(x) + b_i(x) \quad , \quad i = 1, ..., n \tag{1.6}$$

Qualora $B \equiv 0$ il sistema si dice omogeneo e assume la forma

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{1.7}$$

Quando $n = 1$ il sistema si riduce ad una sola equazione differenziale lineare del primo ordine che, posto $A = (a_{11}) = a$ e $B = b_1 = b$, si scrive nella forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

L'insieme $\mathcal{T}$ di tutte le soluzioni di 1.4 si chiama integrale generale del sistema .

Quando si associa al sistema o all'equazione differenziale un opportuno insieme di condizioni iniziali parliamo di problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \quad , \quad \forall x \in I \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = a_n(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y(x) + b(x) \quad , \quad \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.9}$$

sono problemi di Cauchy.

Lo studio di un sistema consente di trovare risultati anche per l'equazione di ordine n; sia infatti

$$y^{(n)}(x) = a_n(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y(x) + b(x) \tag{1.10}$$

una equazione differenziale lineare di ordine n e poniamo

$$y_i(x) = y^{(i-1)}(x) \quad , \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.11}$$

(Per chiarire le idee osserviamo che si avrà $y_1(x) = y(x)$, ... , $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$).

Possiamo riscrivere l'equazione nella seguente forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n'(x) = a_n(x)y_n(x) + \ .... \ + a_1(x)y_1(x) + b(x) \end{cases} \tag{1.12}$$

ed anche come

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

non appena si sia definito

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(x) & a_2(x) & a_3(x) & \ldots & a_n(x) \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Vale il seguente teorema di cui è importante in questo contesto solo l'enunciato.

Teorema 1.1 *Siano A: $I \longrightarrow \mathcal{M}^n$, $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue e siano $x_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Allora esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \quad , \quad \forall x \in I \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Il teorema precedente consente di provare un risultato di esistenza anche per le equazioni differenziali lineari di ordine n.

Teorema 1.2 *Siano $a_i, b \in \mathcal{C}^0(I)$, $i = 1, ..., n$ e siano $x_0 \in I$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, ..., n-1$. Allora esiste una ed una sola soluzione $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \ a_i(x) y^{(i-1)}(x) + b(x) \\ y^{(i)}(x_0) = \ y_i \quad , \quad i = 0, ..., n-1 \end{cases} \tag{1.14}$$

Proviamo ora che l'insieme delle soluzioni di un sistema differenziale lineare, cioè l'integrale generale di un sistema differenziale omogeneo del primo ordine è uno spazio vettoriale avente dimensione uguale al numero di equazioni del sistema stesso.

Teorema 1.3 *Sia $A \in \mathcal{C}^0(I)$ e consideriamo il sistema differenziale lineare del primo ordine*

$$Y'(x) = \ A(x)Y(x);$$

sia $\mathcal{S}$ il suo integrale generale. Allora $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Dimostrazione. E' immediato verificare che $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale in quanto si vede subito che se y e z sono soluzioni del sistema assegnato tali risultano anche $\alpha y + \beta z$ ove α, β sono scalari.

Per provare che $\dim \mathcal{S} = n$ è sufficiente osservare che, per il teorema di esistenza ed unicità della soluzione l'applicazione lineare

$$\Gamma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$\Gamma(Y) = Y(x_0) \qquad , \qquad x_0 \in I$$

è un isomorfismo. □

In base al teorema precedente è possibile affermare che ogni soluzione di un sistema differenziale lineare omogeneo di n equazioni in n incognite può essere espressa mediante un combinazione lineare di n soluzioni linearmente indipendenti del sistema stesso.

Siano esse $Y_1, ..., Y_n$ e sia $(y_i)_j$ la componente j-esima della i-esima soluzione.

Possiamo allora costruire la matrice

$$G = \begin{pmatrix} (y_1)_1 & (y_2)_1 & \dots & (y_n)_1 \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \dots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1)_n & (y_2)_n & \dots & (y_n)_n \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

che indicheremo spesso come

$$G = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$

considerando gli Y_i come vettori colonna, e che si chiama matrice fondamentale del sistema assegnato.

È possibile verificare che se G è una matrice fondamentale del sistema omogeneo 1.7 allora si ha

$$G'(x) = A(x)G(x) \tag{1.16}$$

Il sistema 1.16 è un sistema differenziale lineare di n^2 equazioni in n^2 incognite.

Ogni soluzione del nostro sistema potrà allora essere scritta nella forma

$$Y(x) = \ G(x)C \ \ , \ \ C \in \mathbb{R}^n$$

ovvero, considerando le componenti,

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} (y_j)_i c_j.$$

Anche lo spazio delle soluzioni di un sistema differenziale lineare ordinario del primo ordine non omogeneo è strutturato in maniera molto precisa.

Teorema 1.4 *Siano $A \in \mathcal{C}^0(I)$ $B \in \mathcal{C}^0(I)$ e consideriamo il sistema differenziale lineare non omogeneo del primo ordine*

$$Y'(x) = \ A(x)Y(x) + B(x)$$

Sia $\mathcal{T}$ l'integrale generale del sistema assegnato e sia $\mathcal{S}$ l'integrale generale del sistema omogeneo ad esso associato

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

sia ancora $z \in \mathcal{C}^0(I)$ tale che

$$Z'(x) = A(x)Z(x) + B(x)$$

Allora

$$\mathcal{T} = Z + \mathcal{S}$$

e $\mathcal{T}$ è uno spazio lineare affine di dimensione n.

Dimostrazione. E' evidente che $\mathcal{T} \supset Z + \mathcal{S}$; sia viceversa $Y \in \mathcal{T}$, è facile verificare che $Y - Z$ soddisfa il sistema omogeneo associato e pertanto $Y - Z \in \mathcal{S}$ da cui $Y \in Z + \mathcal{S}$. □

Definizione 1.1 *Siano $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ n soluzioni del sistema differenziale lineare omogeneo*

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

Chiamiamo determinante wronskiano, o più semplicemente wronskiano, associato alle n soluzioni assegnate il determinante della matrice

$$(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$

In altri termini

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} (y_1(x))_1 & (y_2(x))_1 & \dots & (y_n(x))_1 \\ (y_1(x))_2 & (y_2(x))_2 & \dots & (y_n(x))_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1(x))_n & (y_2(x))_n & \dots & (y_n(x))_n \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Proviamo ora una interessante proprietà del wronskiano.

Teorema 1.5 *Siano verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità per il sistema differenziale lineare omogeneo*

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

e siano Y_1,Y_2,...,Y_n n soluzioni del sistema stesso.

Sono fatti equivalenti:

1. *$Y_1, ..., Y_n$ sono linearmente indipendenti;*
2. *$W(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$*
3. *esiste $x_0 \in I$ tale che $W(x_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo, per ogni x fissato in I l'applicazione lineare

$$\Gamma_x : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da $\Gamma_x(Y) = Y(x)$. Per il teorema di esistenza ed unicità Γ_x è un isomorfismo.

- $(1) \Rightarrow (2)$

  Se $Y_1, ..., Y_n$ sono linearmente indipendenti in $\mathcal{S}$, allora

  $$\Gamma_x(Y_1), ..., \Gamma_x(Y_n)$$

  sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e perciò

  $$0 \neq \det\,(\Gamma_x(Y_1), ..., \Gamma_x(Y_n)) = \det\,(Y_1(x), ..., Y_n(x)) = W(x)$$

  per ogni $x \in I$

- $(2) \Rightarrow (3)$

  È ovvio.

- $(3) \Rightarrow (1)$

  $W(x_0) \neq 0$ implica che $Y_1(x_0), ..., Y_n(x_0)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e perciò

  $$Y_1 = \Gamma_{x_0}^{-1}(Y_1(x_0)), ..., Y_n = \Gamma_{x_0}^{-1}(Y_n(x_0))$$

  sono linearmente indipendenti in $\mathcal{S}$

$\square$

Per il teorema precedente è essenziale che $Y_1, ..., Y_n$ siano soluzioni del sistema; se ciò non fosse, sarebbe vero solo che $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

Che le altre implicazioni siano false è facilmente visto se si considera il wronskiano associato alle funzioni $Y_{1,2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definite da

$$Y_1(x) = (x^2, 2x) \qquad , \qquad Y_2(x) = (2x, 2)$$

oppure

$$Y_1(x) = \begin{cases} (x^2, 2x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad , \qquad Y_1(x) = \begin{cases} (x^2, 2x) & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Altrettanti risultati possono essere ottenuti per le equazioni di ordine n.

Teorema 1.6 *Siano $a_i, b \in \mathcal{C}^0(I)$, $i = 1, ..., n$, e consideriamo l'equazione differenziale lineare di ordine n*

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(i-1)}(x)$$

Sia $\mathcal{S}$ il suo integrale generale, allora $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Sia

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(x) \ + \ b(x)$$

la corrispondente equazione differenziale lineare di ordine n non omogenea, e sia $\mathcal{T}$ il suo integrale generale.

$\mathcal{T}$ è uno spazio lineare affine di dimensione n ed inoltre

$$\mathcal{T} = z + \mathcal{S}$$

dove z è una soluzione della equazione non omogenea.

Il teorema precedente consente di affermare che ogni soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n si può esprimere come combinazione lineare di n soluzioni $y_1, ..., y_n$ dell'equazione stessa che siano linearmente indipendenti.

L'insieme $y_1, ..., y_n$ si chiama sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione data; in altre parole ogni soluzione y può essere espressa mediante la

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

dove $c_i \in \mathbb{R}$

Definizione 1.2 *Siano $y_1, ..., y_n$ n soluzioni dell'equazione differenziale lineare di ordine n, omogenea*

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(i-1)}(x)$$

Chiamiamo wronskiano associato alle soluzioni $y_1, ..., y_n$ il determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Teorema 1.7 *Siano verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità e siano $y_1, ..., y_n$ n soluzioni dell'equazione differenziale omogenea di ordine n*

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(i-1)}(x)$$

Sono fatti equivalenti:

1. *$y_1, ..., y_n$ sono linearmente indipendenti;*
2. *$W(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$;*
3. *esiste $x_0 \in I$ tale che $W(x_0) \neq 0$.*

Come in precedenza, usando lo stesso esempio, si vede che, qualora $y_1, ..., y_n$ non siano soluzioni dell'equazione, le uniche implicazioni ancora vere sono $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

I risultati precedenti assicurano la possibilità di trovare l'integrale generale di un sistema non omogeneo non appena siano noti l'integrale generale del sistema omogeneo ad esso associato ed una soluzione del sistema non omogeneo; è pertanto molto importante avere a disposizione uno strumento che consenta, noto l'integrale generale del sistema omogeneo, di trovare una soluzione del sistema non omogeneo.

Sia G una matrice fondamentale del sistema lineare omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

e $x_0 \in I$. Una soluzione del sistema non omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

è data da

$$Z(x) = G(x) \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t) B(t) dt.$$

Infatti se cerchiamo soluzioni del sistema non omogeneo della forma

$$Z(x) = G(x)\lambda(x)$$

dove $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è derivabile, dovrà aversi

$$Z'(x) = A(x)Z(x) + B(x)$$

e pertanto, poiché si può verificare che la regola di derivazione del prodotto può essere estesa anche al prodotto righe per colonne, si ha

$$Z'(x) = G'(x)\lambda(x) + G(x)\lambda'(x)$$

deve essere

$$G'(x)\lambda(x) + G(x)\lambda'(x) = A(x)G(x)\lambda(x) + B(x)$$

Ma G è una matrice fondamentale e quindi,

$$G(x)\lambda'(x) = B(x) \quad e \quad \lambda'(x) = G^{-1}(x)B(x).$$

Se ne deduce che se

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t)B(t)dt$$

Z è soluzione del sistema completo.

Osserviamo inoltre che, essendo $G(x)\lambda'(x) = B(x)$, per il teorema di Cramer si ha

$$\lambda_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}$$

essendo

$$W_i = \det \begin{pmatrix} (y_1)_1 & (y_2)_1 & \dots & (y_{i-1})_1 & b_1 & (y_{i+1})_1 & \dots & (y_n)_1 \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \dots & (y_{i-1})_2 & b_2 & (y_{i+1})_2 & \dots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1)_n & (y_2)_n & \dots & (y_{i-1})_n & b_n & (y_{i+1})_n & \dots & (y_n)_n \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

e una soluzione del sistema non omogeneo è data da

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)Y_i(x).$$

Come conseguenza se G è una matrice fondamentale del sistema lineare omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

è dato da

$$Y(x) = G(x) \left(C + \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t) B(t) dt \right) \quad , \quad C \in \mathbb{R}^n$$

Dove $x_0 \in I$ mentre la soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati $Y(x_0) = Y_0$ è

$$Y(x) = G(x) \left(G^{-1}(x_0) Y_0 + \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t) B(t) dt \right)$$

Il metodo esposto si chiama della metodo di Lagrange di variazione delle costanti arbitrarie e può ovviamente essere applicato anche alle equazioni differenziali di ordine n non appena le si sia trasformate in un sistema. Tuttavia per le equazioni è più conveniente procedere direttamente; illustriamo qui di seguito, il caso di una equazione del secondo ordine.

Siano $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I)$ e consideriamo l'equazione lineare del secondo ordine

$$y''(x) = a(x) y'(x) + b(x) y(x) + c(x).$$

Supponiamo note due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea associata; avremo allora a disposizione l'integrale generale dell'equazione omogenea nella forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Cerchiamo soluzioni per l'equazione non omogenea nella forma

$$z(x) = \lambda_1(x) y_1(x) + \lambda_2(x) y_2(x)$$

Avremo

$$z' = \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 + \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$$

e posto

$$\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$$

si ha

$$z'' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''.$$

Sostituendo si ottiene

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' = \lambda_1 a y_1' + \lambda_2 a y_2' + \lambda_1 b y_1 + \lambda_2 b y_2 + c$$

e, tenuto conto che y_1 e y_2 sono soluzioni dell'omogenea,

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c.$$

Ne viene che λ_1' e λ_2' devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c \end{cases} \tag{1.20}$$

da cui si possono ricavare λ_1' e λ_2' e per integrazione λ_1 e λ_2.

Ricordiamo infine, per sommi capi, un metodo che consente di ridurre l'ordine di una equazione differenziale lineare, qualora sia nota una soluzione dell'equazione stessa.

Ci occuperemo qui di mostrare come esso funziona nel caso di una equazione del secondo ordine, essendo l'estensione del metodo del tutto ovvia per equazioni lineari di ordine superiore.

Consideriamo pertanto $a, b \in \mathcal{C}^0(I)$ e l'equazione differenziale di ordine 2

$$y''(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x).$$

Supponiamo nota una soluzione z dell'equazione, tale che $z(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.

Cerchiamo soluzioni dell'equazione nella forma $y(x) = u(x)z(x)$

Derivando e sostituendo nell'equazione otteniamo che

$$u''z + 2u'z' + uz'' = au'z + auz' + buz$$

e, tenuto conto che z è soluzione,

$$u''z + 2u'z' - au'z = 0$$

Posto $v = u'$ si ha

$$v'z + v(2z' - az) = 0$$

e quindi, poiché $z \neq 0$,

$$v' + v(2\frac{z'}{z} - a) = 0.$$

Se ne deduce che deve essere

$$v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} 2\frac{z'(t)}{z(t)}dt + \int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

e quindi

$$v(x) = \left(\frac{z(x_0)}{z(x)}\right)^2 \; e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}.$$

Pertanto una soluzione sarà

$$v(x) = \frac{1}{(z(x))^2} e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

e

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt$$

da cui si può ricavare la soluzione cercata.

La soluzione trovata risulta linearmente indipendente da z. Se infatti

$$c_1 z(x) + c_2 z(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \; = 0$$

per ogni $\forall x$ si ha, per $x = x_0$

$$c_1 z(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad c_1 = 0$$

Ne viene anche che

$$c_2 z(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt = 0$$

e $c_2 = 0$ in quanto il secondo fattore non può mai annullarsi, se $x \neq x_0$.

Possiamo pertanto scrivere l'integrale generale dell'equazione data come

$$y(x) = z(x) \left(c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \right).$$

Ci occupiamo ora della soluzione di equazioni e sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti della forma

$$Y'(x) = AY(x) + B(x)$$

$$Y'(x) = AY(x)$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x) + b(x)$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x)$$

In pratica l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x)$$

si può determinare come segue

1. si considera il polinomio caratteristico associato all'equazione data

   $$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{k-1}$$

   che si ottiene sostituendo formalmente la quantità algebrica λ^k ad $y^{(k)}(x)$

2. si trovano le n soluzioni, reali o complesse e coniugate, dell'equazione (a coefficienti reali)

   $$P(\lambda) = 0$$

   Consideriamo ogni soluzione $\lambda_1, .., \lambda_r$ con la sua molteplicità $\mu_1, .., \mu_r$

3. in corrispondenza ad ogni valore λ, avente molteplicità μ,

   - se λ è reale si considerano le funzioni

   $$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad y_2(x) = xe^{\lambda x} \quad \cdots \quad y_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\lambda x} \tag{1.21}$$

- se $\lambda = \alpha + \imath\beta$ è complesso, allora anche il suo complesso coniugato $\lambda = \alpha - \imath\beta$è autovalore in quanto i coefficienti dell'equazione sono reali, e si considerano le funzioni

$$u_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad u_2(x) = xe^{\alpha x} \sin \beta x \quad \cdots \quad u_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{1.22}$$

$$v_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad v_2(x) = xe^{\alpha x} \cos \beta x \quad \cdots \quad v_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \tag{1.23}$$

Si verifica che le soluzioni trovate sono tra loro linearmente indipendenti.

4. Si trovano così
   - in corrispondenza di ogni soluzione reale λ, μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti
   - in corrispondenza di ogni soluzione complessa e della sua coniugata, 2μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti
5. siano

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

le soluzioni trovate nei punti precedenti.

Avremo che le soluzioni sono proprio n in quanto la somma del numero delle soluzioni, contate con la loro molteplicità, è proprio n per il teorema fondamentale dell'algebra.

La soluzione dell'equazione sarà pertanto

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

In pratica l'integrale generale del sistema $Y' = AY$ si può determinare come segue

1. si trovano gli autovalori della matrice A, $\lambda_1, .., \lambda_r$ e la loro molteplicità $\mu_1, .., \mu_r$;
2. in corrispondenza ad ogni valore λ di A, avente molteplicità μ,
   - se λ è reale si considerano le funzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad y_2(x) = xe^{\lambda x} \quad \cdots \quad y_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\lambda x} \tag{1.24}$$

   - se λ è complesso, allora anche il suo complesso coniugato è autovalore in quanto i coefficienti del sistema sono reali, e si considerano le funzioni

$$u_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad u_2(x) = xe^{\alpha x} \sin \beta x \quad \cdots \quad u_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{1.25}$$

$$v_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad v_2(x) = xe^{\alpha x} \cos \beta x \quad \cdots \quad v_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \tag{1.26}$$

Si verifica che le soluzioni trovate sono tra loro linearmente indipendenti.

3. Si trovano così

   - in corrispondenza di ogni autovalore reale λ, μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti
   - in corrispondenza di ogni autovalore complesso e del suo coniugato, 2μ soluzioni del sistema linearmente indipendenti

4. siano

   $$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

   le soluzioni trovate nei punti precedenti.

   Avremo che le soluzioni sono proprio n in quanto la somma del numero delle soluzioni, contate con la loro molteplicità, è proprio n per il teorema fondamentale dell'algebra e possiamo cercare soluzioni

   $$Y = (Y_j)$$

   del sistema omogeneo che abbiano come componenti delle combinazioni lineari delle funzioni y_i cioè

   $$Y_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} y_i(x)$$

5. Le costanti introdotte $c_{i,j}$ sono in numero di n^2 e quindi superiore al numero di costanti n necessario e sufficiente per descrivere l'integrale generale del sistema differenziale lineare omogeneo di ordine n; onde determinare solo n costanti si procede quindi sostituendo nel sistema ed usando le uguaglianze trovate per ridurre il numero di costanti libere ad n

Abbiamo con ciò gli strumenti per risolvere ogni equazione differenziale ed ogni sistema differenziale lineare omogeneo, a coefficienti costanti; per risolvere i corrispondenti problemi non omogenei sarà sufficiente trovare una soluzione particolare dei problemi non omogenei stessi. Ciò può essere fatto, in generale, usando il metodo di variazione delle costanti di Lagrange, ma, nel caso dei coefficienti costanti, possiamo, se inoltre il termine noto è di forma particolarmente semplice, trovare una soluzione particolare di forma similmente semplice.

Più precisamente possiamo affermare che:

1. Se consideriamo l'equazione differenziale non omogenea 1.3 e se

   $$b(x) = q(x)e^{\lambda x}$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$ e q è un polinomio di grado m a coefficienti complessi, si può trovare un polinomio r di grado al più m tale che, se μ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico P ,

$$y(x) = x^{\mu} r(x) e^{\lambda x}$$

sia soluzione dell'equazione 1.3.

2. Se consideriamo il sistema differenziale non omogeneo 1.4 e se

$$B(x) = Q(x) e^{\lambda x}$$

dove Q è un vettore colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti complessi, di grado minore o uguale ad m, si può trovare un vettore colonna R i cui elementi sono polinomi a coefficienti complessi di grado al più $m + \mu$, dove μ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico P della matrice A, tale che

$$Y(x) = R(x) e^{\lambda x}$$

risolve il sistema 1.4.

Si può inoltre provare che, nel caso in cui i coefficienti siano reali,

1. Se

$$b(x) = e^{\alpha x} [q_1(x) \cos(\beta x) + q_2(x) \sin(\beta x)]$$

dove q_1 e q_2 sono polinomi a coefficienti reali di grado massimo m e $\alpha \pm i\beta$ è radice del polinomio caratteristico P di molteplicità μ, si possono trovare due polinomi r_1, r_2 di grado al più m tali che

$$y(x) = x^{\mu} e^{\alpha x} [r_1(x) \cos(\beta x) + r_2(x) \sin(\beta x)]$$

sia soluzione della 1.3.

2. Se

$$B(x) = e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x)]$$

dove Q_1 e Q_2 sono vettori colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti reali di grado al più m e $\alpha \pm i\ \beta$ è radice del polinomio caratteristico della matrice A con molteplicità μ, si possono trovare R_1 ed R_2 , vettori colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti reali di grado al più $m + \mu$, tali che

$$Y(x) = e^{\alpha x} [R_1(x) \cos(\beta x) + R_2(x) \sin(\beta x)]$$

sia soluzione del sistema 1.4.

1.1 La matrice esponenziale

Per studiare le soluzioni del sistema

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

è quindi essenziale conoscere la matrice fondamentale G che possiamo individuare come l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} G'(x) = AG(x) \\ G(0) = I \end{cases}$$

Possiamo verificare, mediante sostituzione, che, se definiamo

$$e^{At} = \sum_0^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \lim_N \sum_0^N \frac{A^n t^n}{n!}$$

e^{At} soddisfa il problema assegnato e quindi, per il teorema di unicità

$$G(t) = e^{At}$$

Pertanto per conoscere la matrice fondamentale G è sufficiente calcolare e^{At}.

Allo scopo osserviamo che se $D(x)$ e $S(x)$ sono polinomi di grado n e maggiore di n, rispettivamente, si ha

$$S(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

dove Q ed R sono polinomi e il grado di R è inferiore ad n.

Tenendo conto che $e^x = \sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_N \sum_0^N \frac{x^n}{n!}$ possiamo allora affermare che

$$e^x = Q(x)D(x) + R(x)$$

dove il grado di R è inferiore ad n.

Ora, se

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

è il polinomio caratteristico della matrice A,

possiamo scrivere che

$$e^\lambda = Q(\lambda)D(\lambda) + R(\lambda)$$

e calcolando per $\lambda = \lambda_i$ dove λ_i è autovalore di A e quindi $D(\lambda_i) = 0$ otteniamo

$$e^{\lambda_i} = Q(\lambda_i)D(\lambda_i) + R(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

Otteniamo così tante equazioni algebriche di grado $n-1$ quanti sono gli autovalori distinti di A; inoltre possiamo osservare che, se λ_i

è un autovalore con molteplicità 2, oltre a D si annulla in λ_i anche la sua derivata prima e quindi si ha

$$e^{\lambda} = Q'(\lambda)D(\lambda) + Q(\lambda)D'(\lambda) + R'(\lambda)$$

per cui

$$e^{\lambda_i} = R'(\lambda_i)$$

Con simili argomenti si trovano quindi esattamente n equazioni algebriche da cui ricavare i coefficienti del polinomio R.

Poichè, per il teorema di Cayley-Hamilton possiamo affermare che A soddisfa il suo polinomio caratteristico, cioè che

$$D(A) = 0$$

possiamo dedurre che anche

$$e^{At} = R(At)$$

e quindi ricavare l'espressione di e^{At}

1.2 L'oscillatore armonico

Un esempio molto importante di modello matematico che utilizza la teoria delle equazioni differenziali lineari è costituto dall'oscillatore armonico.

Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$x''(t) + 2hx'(t) + \omega^2 x(t) = K\sin(\alpha t) \tag{1.27}$$

dove $h, K, \alpha > 0$.

Essa può descrivere il comportamento di diversi sistemi reali quali,

1. un punto materiale soggetto ad una forza di richiamo proporzionale alla distanza ed ad forza di attrito proporzionale alla velocità, sollecitato da una forza esterna sinusoidale di ampiezza K e di frequenza α.

2. l'intensità di corrente che circola in un circuito RLC alimentato da una forza elettromotrice sinusoidale.

Le soluzioni dell'equazione sono date da:

1. Se $h > \omega$
$$x(t) = c_1 e^{(-h+\theta)t} + c_2 e^{(-h-\theta)t} + \hat{x}(t)$$

I grafici di possibili soluzioni sono riportati nelle figure

Figure 1.1: Soluzioni del polinomio caratteristico reali distinte una positiva ed una negativa

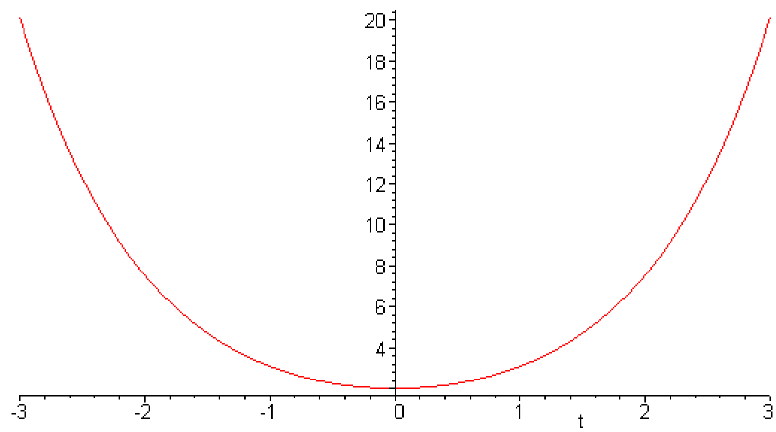


Figure 1.2: Soluzioni del polinomio caratteristico reali distinte una positiva ed una negativa

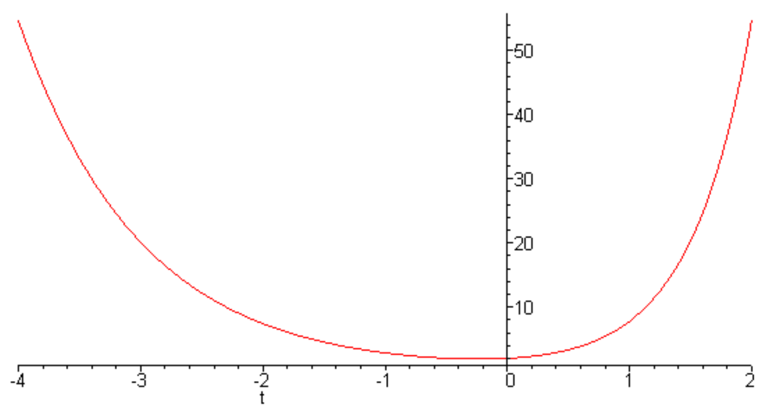
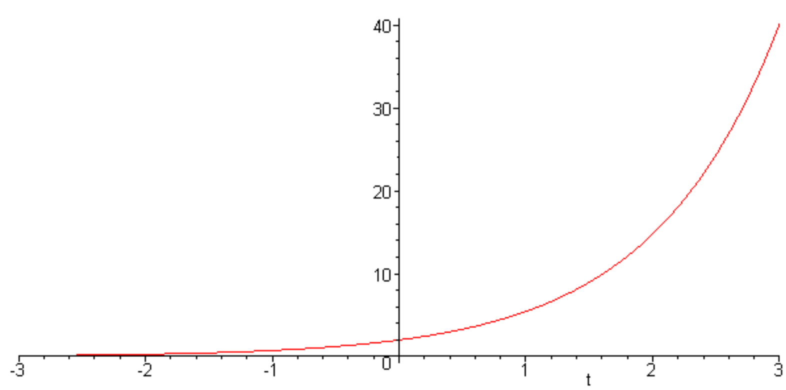


Figure 1.3: Soluzioni del polinomio caratteristico reali distinte entrambe positive



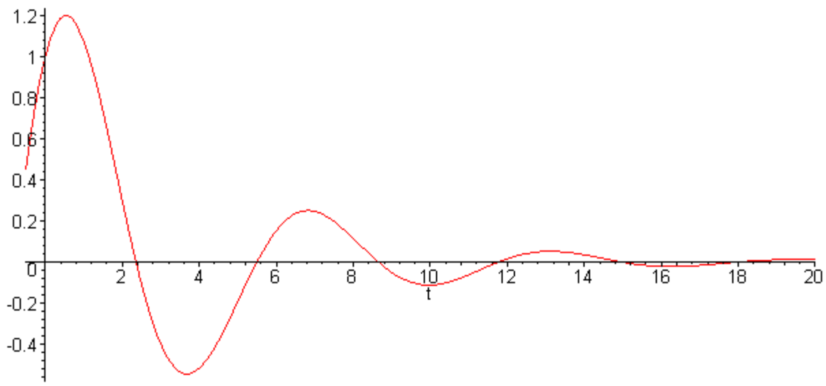


Figure 1.4: Soluzioni del polinomio caratteristico complesse e coniugate con parte reale negativa

2. Se $h = \omega$

$$x(t) = c_1 e^{-ht} + c_2 t e^{-ht} + \hat{x}(t)$$

   I grafici di possibili soluzioni sono riportati nelle figure

3. Se $h < \omega$

$$x(t) = e^{-ht}(c_1 \sin(\theta t) + c_2 \cos(\theta t)) + \hat{x}(t)$$

   I grafici di possibili soluzioni sono riportati nelle figure

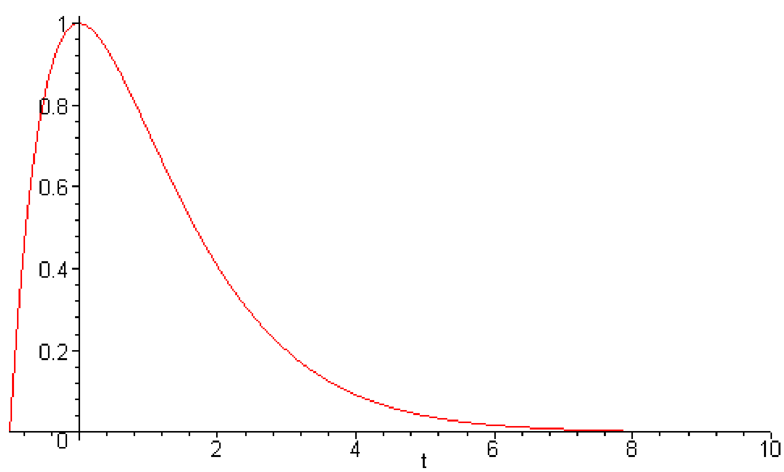


Figure 1.5: Soluzioni del polinomio caratteristico reali coincidenti negative

dove

$$\hat{x}(t) = \alpha \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t) = A \sin(\alpha t - \phi)$$

ed inoltre si è posto

$$\theta = |h^2 - \omega^2|^{1/2}$$

$$a = K \frac{\omega^2 - \alpha^2}{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$

$$b = -K\frac{2h\alpha}{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$
$$A = \frac{K}{\sqrt{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}}$$
$$\phi = \arccos\left(\frac{a}{A}\right)$$

Nel caso in cui $h = 0$ l'equazione diventa

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = K\sin(\alpha t)$$

con $k, \alpha > 0$ e rappresenta un oscillatore armonico non smorzato sollecitato da una forza esterna sinusoidale.

Le soluzioni in questo caso sono

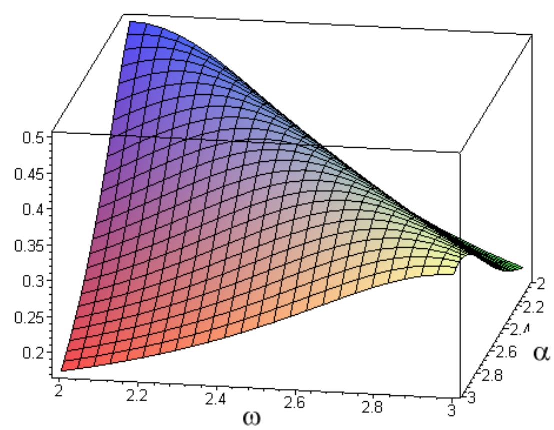
1. Se $\alpha \neq \omega$

$$x(t) = c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t) + \frac{K}{\omega^2 - \alpha^2}\sin(\alpha t)$$

2. Se $\alpha = \omega$

$$x(t) = c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t) - \frac{K}{2\omega}t\cos(\omega t)$$

Figure 1.6: Grafico di A in funzione di α ed ω



$$A = \frac{K}{(4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2)^{1/2}} =$$
$$= \frac{K/\omega^2}{(4(h/\omega)^2(\alpha/\omega)^2 + (1 - (\alpha/\omega)^2)^2)^{1/2}} \quad (1.28)$$

con

$$K/\omega^2 = .5$$

2. *Esistenza ed Unicità per Problemi di Cauchy Lineari*

Lemma 2.1 *Siano $A : I \longrightarrow \mathcal{M}^n$ e $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, continue e siano $x_0 \in I$, $Y_0 \in R^n$. Sono problemi equivalenti:*

trovare $Y : I \longrightarrow R^n$ derivabile, tale che

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

trovare $Y : I \longrightarrow R^n$ continua, tale che

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)Y(t) + B(t))dt. \tag{2}$$

Dimostrazione. E' intanto ovvio che, se vale (1), per integrazione si ottiene subito (2). Se viceversa (2) è vera, Y è derivabile ed anche (1) vale come si constata derivando e calcolando in x_0. □

Teorema 2.1 *Siano A: $I \longrightarrow \mathcal{M}^n$, $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue e siano $x_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Allora esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \quad , \quad \forall x \in I \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Proveremo l'esistenza di una funzione Y soddisfacente il problema (2) del lemma precedente. Troveremo Y come limite della successione di funzioni definita da

$$Y_0(x) \equiv Y_0$$

$$Y_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)Y_{k-1}(t) + B(t))dt.$$

Occorrerà pertanto provare innanzittutto che $Y_k(x)$ è convergente per ogni $x \in I$.

Fissato un intervallo limitato $I' \subset I$ si ha

$$\sup\{\|A(x)\| : x \in I'\} = L_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad \sup\{\|B(x)\| : x \in I'\} = N \in \mathbb{R}$$

e pertanto

$$\sup\{\|A(x)Y_0 + B(x)\| \ : \ x \in I'\} \leq L\|Y_0\| + N = M \in \mathbb{R}$$

essendo $L = nL_0$.

Proviamo per induzione che

$$\|Y_{k+1}(x) - Y_k(x)\| \leq M\frac{L^k|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad , \quad k \geq 0.$$

Si ha infatti

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x}(A(t)Y_0 + B(t))dt\right\| \leq$$
$$\leq \left|\int_{x_0}^{x}\|A(t)Y_0 + B(t)\|dt\right| \leq M|x-x_0|$$

ed inoltre

$$\|Y_{k+1}(x) - Y_k(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x} A(t)(Y_k(t) - Y_{k-1}(t))dt\right\| \leq$$
$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} n\|A(t)\|\|Y_k(t) - Y_{k-1}(t)\|dt\right| \leq$$
$$\leq L\left|\int_{x_0}^{x} M\frac{L^{k-1}|t-x_0|^k}{k!}dt\right| =$$
$$= M\frac{L^k|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Pertanto è lecito affermare che

$$\|Y_{k+p}(x) - Y_k(x)\| \leq \sum_{i=1}^{p}\|Y_{k+i}(x) - Y_{k+i-1}(x)\| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{p}\frac{M}{L}\frac{L^{k+i}|x-x_0|^{k+i}}{(k+i)!} =$$
$$= \frac{M}{L}\sum_{i=k+1}^{k+p}\frac{(L|x-x_0|)^i}{i!}$$

Ora si ha

$$\|Y_{k+p}(x) - Y_k(x)\| \leq \frac{M}{L}\sum_{i=k+1}^{k+p}\frac{(L\delta)^i}{i!} \quad , \forall x \in I'$$

essendo δ scelto in modo che $|x-x_0| \leq \delta$ per $x \in I'$.

Ma
$$e^{L\delta} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(L\delta)^i}{i!} + e^{\xi}\frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} \quad , \ 0 < \xi < L\delta$$
e pertanto
$$\sum_{i=k+1}^{k+p} \frac{(L\delta)^i}{i!} = e^{L\delta} - e^{\xi_1}\frac{(L\delta)^{k+p+1}}{(k+p+1)!} - e^{L\delta} + e^{\xi_2}\frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} \leq$$
$$\leq e^{\xi_2}\frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} \leq e^{L\delta}\frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} = E'_k$$

Quindi
$$\|Y_{k+p}(x) - Y_k(x)\| \leq E'_k \frac{M}{L} = E_k \quad , \ \forall x \in I'.$$
e
$$\lim \ E_k = 0 \ .$$

Quanto provato, assieme al criterio di convergenza di Cauchy, permette di concludere che
$$\lim \ Y_k(x) = Y(x) \quad , \ \forall x \in I' \ ;$$
passando poi al limite per $p \to +\infty$ si ha
$$\|Y(x) - Y_k(x)\| \leq E_k \quad , \ \forall x \in I'.$$

Proviamo ancora che Y è continua in I' e che per essa risulta
$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)Y(t) + B(t))dt \quad , \ \forall x \in I'.$$

A questo scopo ricordiamo che è facile provare, per induzione, che Y_k è continua su I e quindi anche su I'. Vediamo come da ciò discende che Y è continua su I'.

Sia $\hat{x} \in I'$ e sia k_ε tale che, se $k \geq k_\varepsilon$, $E_k < \varepsilon/3$; per $|x - \hat{x}| < \delta_\varepsilon$ si ha $\|Y_{k_\varepsilon}(x) - Y_{k_\varepsilon}(\hat{x})\| < \varepsilon/3$ e perciò
$$\|Y(x) - Y(\hat{x})\| \leq \|Y(x) - Y_{k_\varepsilon}(x)\| + \|Y_{k_\varepsilon}(x) - Y_{k_\varepsilon}(\hat{x})\| +$$
$$+ \|Y_{k_\varepsilon}(\hat{x}) - Y(\hat{x})\| \leq 2E_{k_\varepsilon} + \|Y_{k_\varepsilon}(x) - Y_{k_\varepsilon}(\hat{x})\| \leq$$
$$\leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Inoltre
$$\lim \int_{x_0}^{x} (A(t)Y_k(t) + B(t))dt = \int_{x_0}^{x} (A(t)Y(t) + B(t))dt \quad , \quad \forall x \in I' \ .$$
Infatti
$$\left\| \int_{x_0}^{x} (A(t)Y_k(t) + B(t))dt - \int_{x_0}^{x} (A(t)Y(t) + B(t))dt \right\| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} n\|A(t)\|\|Y_k(t) - Y(t)\|dt \right| \leq L\delta E_k \to 0$$

Ciò prova che, essendo

$$Y_{k+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)Y_k(t) + B(t))dt \quad , \ \forall x \in I',$$

si ha

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)Y(t) + B(t))dt \quad , \ \forall x \in I'.$$

Quanto abbiamo fatto per I' può essere ripetuto per ogni intervallo limitato contenuto in I e ciò consente di affermare che la Y è definita e continua in I ed ivi risolve il problema assegnato.

Si è con ciò provata l'esistenza della soluzione cercata; per quanto concerne l'unicità, siano Y e Z due soluzioni del problema assegnato, si ha

$$\|Y(x) - Z(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} A(t)(Y(t) - Z(t))dt \right\| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L\|Y(t) - Z(t)\|dt \right|$$

e per il corollario 16.6, $\|Y(x) - Z(x)\| = 0$. □

Il teorema che abbiamo appena dimostrato consente di provare, senza fatica, un risultato di esistenza anche per le equazioni differenziali lineari di ordine n.

Sia infatti

$$y^{(n)}(x) = a_n(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y(x) + b(x)$$

una equazione differenziale lineare di ordine n e poniamo

$$y_i(x) = y^{(i-1)}(x) \quad , \ i = 1, \ldots, n.$$

(Per chiarire le idee osserviamo che si avrà $y_1(x) = y(x)$, ... , $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$).

Possiamo allora riscrivere la nostra equazione nella seguente forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n'(x) = a_n(x)y_n(x) + \ .... \ + a_1(x)y_1(x) + b(x) \end{cases}$$

ed anche come

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

non appena si sia definito

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(x) & a_2(x) & a_3(x) & \ldots & a_n(x) \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Ci occuperemo qui di mostrare come esso funziona nel caso di una equazione del secondo ordine, essendo l'estensione del metodo del tutto ovvia per equazioni lineari di ordine superiore.

Consideriamo pertanto $a, b \in \mathcal{C}^o(I)$ e l'equazione differenziale di ordine 2

$$y''(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x).$$

Supponiamo nota una soluzione z dell'equazione, tale che $z(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.

Cerchiamo soluzioni della nostra equazione nella forma $y(x) = u(x)z(x)$.

Derivando e sostituendo nell'equazione otteniamo che

$$u''z + 2u'z' + uz'' = au'z + auz' + buz$$

e, tenuto conto che z è soluzione,

$$u''z + 2u'z' - au'z = 0.$$

Posto $v = u'$ si ha

$$v'z + v(2z' - az) = 0$$

e quindi, poiché $z \neq 0$,

$$v' + v(2\frac{z'}{z} - a) = 0.$$

Se ne deduce che deve essere

$$v(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} 2\frac{z'(t)}{z(t)}dt + \int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

e quindi

$$v(x) = \left(\frac{z(x_0)}{z(x)}\right)^2 \, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}.$$

Pertanto una soluzione sarà

$$v(x) = \frac{1}{(z(x))^2} \, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

e

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt$$

da cui si può ricavare la soluzione cercata.

Proviamo che tale soluzione risulta linearmente indipendente da z. Se infatti

$$c_1 z(x) + c_2 z(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \; = 0 \qquad \forall x$$

si ha, per $x = x_0$

$$c_1 z(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad c_1 = 0.$$

Ne viene anche che

$$c_2 z(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \; = 0$$

e $c_2 = 0$ in quanto il secondo fattore non può mai annullarsi, se $x \neq x_0$.

Possiamo pertanto scrivere l'integrale generale dell'equazione data come

$$y(x) = z(x) \left(c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(z(t))^2} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \right).$$

Osservazione. Notiamo che i risultati fin qui ottenuti possono essere provati anche nel caso in cui i coefficienti siano complessi.

In particolare si può provare che lo spazio delle soluzioni della versione complessa del sistema omogeneo (17.2) è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$ e di dimensione $2n$ su $\mathbb{R}$. Rimandiamo all'appendice per precisazioni sulla struttura dello spazio vettoriale $\mathcal{S}$. Ci occupiamo ora della soluzione di equazioni e sistemi differenziali

lineari a coefficienti costanti della forma

$$Y'(x) = AY(x) + B(x) \tag{17.8}$$

$$Y'(x) = AY(x) \tag{17.9}$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x) + b(x) \tag{17.10}$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x). \tag{17.11}$$

La possibilità di scrivere esplicitamente l'integrale generale di un sistema differenziale lineare omogeneo a coefficienti costanti (17.9) dipende dalla conoscenza della decomposizione canonica di Jordan della matrice A. In particolare, con argomenti di calcolo matriciale si prova che (si veda L.S.Pontryagin, Ordinary differential equations):

Teorema 2.2 *- di decomposizione di Jordan - Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi e siano*

$$\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$$

i suoi autovalori; per $m = 1, .., r$ esistono $s(m) \in \mathbb{N}$, $q_1, .., q_{s(m)} \in \mathbb{N}$ e

$$h_1^1, .., h_{q_1}^1; h_1^2, .., h_{q_2}^2; ...; h_1^{s(m)}, .., h_{q_{s(m)}}^{s(m)}$$

vettori linearmente indipendenti tali che

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{i=1}^{s(m)} q_i \; = \; n$$

ed inoltre

$$Ah_1^i = \lambda_m h_1^i \quad , \quad Ah_2^i = \lambda_m h_2^i + h_1^i$$

$$\text{(17.12)} \qquad \ldots \quad , \quad Ah^i_{q_{s(m)}} = \lambda_m h^i_{q_{s(m)}} + h^i_{q_{s(m)}-1}$$

$$m = 1, ..., r \quad , \quad i = 1, ..., s(m)$$

Osserviamo esplicitamente che ad ogni autovalore λ può corrispondere più di una serie di vettori h.

Ora, fissati $m = 1, .., r;\ i = 1, .., s(m)$ e $t = 1, .., q_i$ possiamo considerare il polinomio

$$P_m^{t,i}(x) = \sum_{j=1}^{t} \frac{x^{t-j}}{(t-j)!}\ h_j^i.$$

Come si verifica facilmente si ha

$$\frac{d}{dx}\ P_m^{t,i}(x) = P_m^{t-1,i}(x)$$

e

$$AP_m^{t,i}(x) = \lambda_m P_m^{t,i}(x) + P_m^{t-1,i}(x)$$

Per cui le funzioni

$$Y_m^{t,i}(x) = P_m^{t,i}(x) e^{\lambda_m x}$$

sono soluzioni del sistema assegnato.

Pertanto, dal momento che

$$Y_m^{t,i}(0) = P_m^{t,i}(0) = h_t^i$$

avremo che

$$W(0) = [h_1^1, .., h_{q_1}^1, h_1^2, .., h_{q_2}^2, ..., h_1^{s(r)}, .., h_{q_{s(r)}}^{s(r)}] \neq 0$$

in quanto i vettori considerati sono linearmente indipendenti.

Pertanto le funzioni $Y_m^{t,i}$ sono in numero di n, risultano linearmente indipendenti e costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni del sistema assegnato.

In pratica l'integrale generale del sistema $Y' = AY$ si può determinare come segue

1. si trovano gli autovalori della matrice A, $\lambda_1, .., \lambda_r$ e la loro molteplicità $\mu_1, .., \mu_r$;

2. in corrispondenza ad ogni valore λ di A, avente molteplicità μ, occorre trovare le serie di autovettori associate; ciò può essere fatto nella seguente maniera: si trovano i vettori h tali che

$$(A - \lambda I)h = 0.$$

Tali vettori generano uno spazio vettoriale V_1 di dimensione $\nu_1 \leq \mu$; siano $h_1, .., h_{\nu_1}$ i vettori di una base di V_1; se $\nu_1 = \mu$ non occorre proseguire; se invece $\nu_1 < \mu$, in corrispondenza di ogni vettore h_i, $i = 1, .., \nu_1$, si cercano i vettori h tali che

$$(A - \lambda I)h = h_i.$$

Sia V_2^i lo spazio affine delle soluzioni trovate e sia $\nu_2^i = \dim V_2^i$, avremo che

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} \nu_2^i + \nu_1 \leq \mu.$$

Se vale l'uguaglianza non occorre proseguire, altrimenti, in corrispondenza di ognuno dei vettori di una base di V_2^i si procede come sopra.

3. Si trovano così le serie di Jordan corrispondenti ad ogni autovalore λ e si costruiscono le soluzioni del sistema come è stato visto in precedenza.

Osserviamo infine che, con le notazioni usate nel teorema di decomposizione di Jordan, l'integrale generale del sistema $Y' = A\ Y$, è dato da

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{i=1}^{s(m)} \sum_{t=1}^{q(i)} c_m^{t,i}\ P_m^{t,i}(x)\ e^{\lambda_m x}.$$

Passiamo ora a considerare il caso di una equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x)$$

e chiamiamo

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} a_k\ \lambda^{(k-1)}$$

polinomio caratteristico associato all'equazione assegnata.

Osserviamo che, se definiamo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

e se poniamo

$$y_k(x) = y^{(k-1)}(x) \quad , \; Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

l'equazione data è equivalente al sistema differenziale lineare

$$Y'(x) = AY(x)$$

e

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

E' possibile pertanto usare i risultati ottenuti per i sistemi allo scopo di risolvere l'equazione assegnata; tuttavia ciò non risulta conveniente: è infatti molto più facile, data la particolarità della matrice A, seguire una via più diretta e specifica.

Sia λ una radice di molteplicità μ dell'equazione $P(\lambda) = 0$; proviamo che

$$e^{\lambda x} \; , \; xe^{\lambda x} \; , \; x^2 e^{\lambda x} \; , \; ..... \; , \; x^{\mu-1} e^{\lambda x}$$

sono soluzioni dell'equazione data.

Definiamo, allo scopo, $L : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^o(\mathbb{R})$ mediante la:

$$L(y)(x) = y^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \, y^{(k-1)}(x);$$

è immediato verificare che l'equazione assegnata si può riscrivere come:

$$L(y)(x) = 0$$

e che

$$\begin{aligned} L(x^r e^{\lambda x}) = L\left(\frac{d^r}{d\lambda^r} e^{\lambda x}\right) = \frac{d^r}{d\lambda^r} \, L(e^{\lambda x}) = \frac{d^r}{d\lambda^r} (P(\lambda) e^{\lambda x}) = \\ = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x} \; \frac{d^{r-k}}{d\lambda^{r-k}} P(\lambda) = \\ = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k P^{(r-k)}(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

se si sceglie $r \leq \mu - 1$, non appena si tenga conto che λ è soluzione di $P(\lambda) = 0$ con molteplicità μ.

E' inoltre immediato verificare, usando il Wronskiano, che le μ soluzioni ottenute sono tra di loro linearmente indipendenti.

Si può con ciò concludere che se λ_1, λ_2, ..., λ_p sono soluzioni dell'equazione algebrica $P(\lambda) = 0$ con molteplicità μ_1, μ_2, ..., μ_p essendo $\mu_1 + \mu_2 + \; .... \; + \mu_p = n$, si avrà che

$$e^{\lambda_k x}, \; x e^{\lambda_k x}, \ldots x^{\mu_k - 1} e^{\lambda_k x} \quad , \; k = 1, 2, ..., p,$$

sono n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione assegnata il cui integrale generale può pertanto essere scritto come:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{r=0}^{\mu_k - 1} c_{r,k} x^r e^{\lambda_k x} \ .$$

Se i coefficienti sono reali, qualora

$$x^m e^{\lambda x} = x^m e^{\Re\mathrm{e}\ \lambda x}[\cos(\Im\mathrm{m}\ \breve{}\mathrm{x}) + \mathrm{i}\sin(\Im\mathrm{m}\ \breve{}\mathrm{x})]$$

sia soluzione dell'equazione assegnata, anche

$$x^m e^{\Re\mathrm{e}\ \lambda x}[\cos(\Im\mathrm{m}\ \lambda x) - i\sin(\Im\mathrm{m}\ \lambda x)]$$

è soluzione (si ricordi che se un polinomio a coefficienti reali ammette una soluzione complessa, ammette anche la soluzione complessa coniugata).

Pertanto se ne deduce che, dette

$$\lambda_1 \ , .., \ \lambda_k \ , \ \alpha_1 \pm i\beta_1 \ , .., \ \alpha_h \pm i\beta_h$$

le radici del polinomio caratteristico, aventi rispettivamente molteplicità $\mu_1, .., \mu_k, \nu_1, .., \nu_h$, una base di $\mathcal{S}$ è data da

$$e^{\lambda_i x}, \ x e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{\mu_i - 1} e^{\lambda_i x} \quad , \quad i = 1, 2, ..., k$$

$$e^{\alpha_i x}\cos(\beta_i x), e^{\alpha_i x}\sin(\beta_i x), ..., x^{\nu_i - 1} e^{\alpha_i x}\cos(\beta_i x), x^{\nu_i - 1} e^{\alpha_i x}\sin(\beta_i x)$$

$$i = 1, ..., h.$$

Qualora il sistema sia di forma generale, e non generato da un'equazione, dette

$$\phi_1, ..., \phi_n$$

le n soluzioni linearmente indipendenti precedentemente trovate, si potranno cercare soluzioni della forma

$$Y(x) = (y_1(x), ..., y_n(x))$$

ove

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^i \ \phi_j(x) \quad , \quad c_j^i \text{ costanti.}$$

Ovviamente le c_j^i sono in numero di n^2; per ridurle ad n, come è necessario, si sostituiscono le y_i nel sistema e si eliminano le costanti superflue. La struttura dello spazio delle soluzioni reali di un sistema differenziale lineare a coefficienti reali può anche essere studiata a partire dai risultati sopra esposti per le equazioni non appena si sia in grado di ridurre ogni sistema ad n equazioni indipendenti. Ciò verrà fatto successivamente nell'appendice. Sempre usando la riduzione citata si possono provare i risultati che enunciamo qui di seguito per equazioni e sistemi, ma proviamo solo nel caso delle equazioni.

Abbiamo con ciò gli strumenti per risolvere ogni equazione differenziale ed ogni sistema differenziale lineare omogeneo, a coefficienti costanti; per risolvere i corrispondenti problemi non omogenei sarà sufficiente trovare una soluzione particolare dei problemi non omogenei stessi. Ciò può essere fatto, in generale, usando i risultati del teorema 17.16, ma, nel caso dei coefficienti costanti, possiamo, se inoltre il termine noto è di forma particolarmente semplice, trovare una soluzione particolare di forma similmente semplice.

Più precisamente possiamo affermare che:

1. Se consideriamo l'equazione differenziale non omogenea (17.10) e se
$$b(x) = q(x)e^{\lambda x}$$
dove $\lambda \in \mathbb{C}$ e q è un polinomio di grado m a coefficienti complessi, si può trovare un polinomio r di grado al più m tale che, se μ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico P ,
$$y(x) = x^{\mu} r(x) e^{\lambda x}$$
sia soluzione dell'equazione (17.10).

2. Se consideriamo il sistema differenziale non omogeneo (17.8) e se
$$B(x) = Q(x)e^{\lambda x}$$
dove Q è un vettore colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti complessi, di grado minore o uguale ad m, si può trovare un vettore colonna R i cui elementi sono polinomi a coefficienti complessi di grado al più $m + \mu$, dove μ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico P della matrice A, tale che
$$Y(x) = R(x)e^{\lambda x}$$
risolve il sistema (17.8).

Si può inoltre provare che, nel caso in cui i coefficienti siano reali,

1. Se
$$b(x) = e^{\alpha x}[q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)]$$
dove q_1 e q_2 sono polinomi a coefficienti reali di grado massimo m e $\alpha \pm i\beta$ è radice del polinomio caratteristico P di molteplicità μ, si possono trovare due polinomi r_1, r_2 di grado al più m tali che
$$y(x) = x^{\mu} e^{\alpha x}[r_1(x)\cos(\beta x) + r_2(x)\sin(\beta x)]$$
sia soluzione della (17.10).

2. Se
$$B(x) = e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)]$$
dove Q_1 e Q_2 sono vettori colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti reali di grado al più m e $\alpha \pm i\,\beta$ è radice del polinomio caratteristico della matrice A con molteplicità μ, si possono trovare R_1 ed R_2 , vettori colonna i cui elementi sono polinomi a coefficienti reali di grado al più $m + \mu$, tali che
$$Y(x) = e^{\alpha x}[R_1(x)\cos(\beta x) + R_2(x)\sin(\beta x)]$$
sia soluzione del sistema (17.8).

Ci limitiamo a verificare la (1) e la (1′), essendo (2) e (2′) conseguenza di (1) ed (1′) e dei risultati provati in appendice, in cui si mostra come ridurre un sistema ad n equazioni indipendenti.

Sarà sufficiente provare che se
$$b(x) = x^m e^{\lambda x}$$
e λ è radice dell'equazione caratteristica associata $P(\lambda) = 0$ di molteplicità μ, si può trovare un polinomio q di grado al più m tale che
$$y(x) = x^\mu q(x) e^{\lambda x}$$
sia soluzione dell'equazione (17.10).

Si ha
$$x^\mu q(x) = \sum_{j=0}^{m} q_j x^{j+\mu}$$
e
$$\left(\sum_{j=0}^{m} q_j x^{j+\mu} e^{\lambda x}\right) = \sum_{j=0}^{m} q_j L\left(\frac{d^{j+\mu}}{d\lambda^{j+\mu}} e^{\lambda x}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \frac{d^{j+\mu}}{d\lambda^{j+\mu}} L(e^{\lambda x}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \frac{d^{j+\mu}}{d\lambda^{j+\mu}} P(\lambda) e^{\lambda x} =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{k=0}^{j+\mu} \binom{j+\mu}{k} \frac{d^{j+\mu-k}}{d\lambda^{j+\mu-k}} e^{\lambda x} P^{(k)}(\lambda) =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{k=0}^{j+\mu} \binom{j+\mu}{k} x^{j+\mu-k} e^{\lambda x} P^{(k)}(\lambda) =$$
dal momento che λ è radice di P con molteplicità μ

$$= e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{k=\mu}^{j+\mu}\binom{j+\mu}{k} x^{j+\mu-k} P^{(k)}(\lambda) =$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{h=0}^{j}\binom{j+\mu}{j+\mu-h} x^{h} P^{(j+\mu-h)}(\lambda) =$$

e definito $\alpha_{jh} = P^{(j+\mu-h)}(\lambda)\binom{j+\mu}{j+\mu-h}$

$$= e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{h=0}^{j} \alpha_{jh} x^h =$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{h=0}^{m} x^h \sum_{j=h}^{m} \alpha_{jh} q_j$$

(essendo l'ultima uguaglianza evidente se si somma prima per righe anziché per colonne).

Dovrà pertanto risultare, affinché $L(y(x)) = x^m e^{\lambda x}$

$$\alpha_{mm} q_m = 1$$

e

$$\sum_{j=h}^{m} \alpha_{jh} q_j = 0 \quad , \quad h = 0, 1, ..., m-1.$$

Ciò equivale a risolvere un sistema algebrico di $m+1$ equazioni in $m+1$ incognite la cui matrice associata è

$$c = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \dots & \alpha_{m0} \\ 0 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

Poiché C è triangolare si ha $\det C = \prod \alpha_{hh}$ ed essendo

$$\alpha_{hh} = P^{(\mu)}(\lambda)\,(\mu + h\mu) \neq 0$$

perché P ha radice λ di molteplicità μ e non $\mu+1$ tale sistema ammette una ed una sola soluzione.

Proviamo infine la (1'); sarà sufficiente verificare che, se

$$b(x) = x^m e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

e se $\alpha +_i \beta$ è radice dell'equazione caratteristica associata $P(\lambda) = 0$ di molteplicità μ, si possono trovare due polinomi q ed r, di grado al più m, tali che

$$y(x) = x^m e^{\alpha x}[q(x)\cos(\beta x) + r(x)\sin(\beta x)]$$

è soluzione dell'equazione (17.10).

Sia infatti z una funzione a valori complessi tale che

$$L(z(x)) = x^m e^{(\alpha+i\beta)x} \ ;$$

per quanto dimostrato al punto (1) si può asserire che

$$z(x) = x^\mu q(x) e^{(\alpha+i\beta)x} =$$

$$= x^\mu e^{\alpha x}[\Re\mathrm{e}\, q(x)\cos(\beta x) - \Im\mathrm{m}\, q(x)\sin(\beta x)] +$$

$$+ix^\mu e^{\alpha x}[\Re\mathrm{e}\, q(x)\sin(\beta x) + \Im\mathrm{m}\, q(x)\cos(\beta x)] =$$

$$= z_1(x) + iz_2(x) \ .$$

Si avrà pertanto

$$L(z_1(x) + iz_2(x)) = L(z_1(x)) + iL(z_2(x)) = \\ = x^m e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ix^m e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

e la (1') è verificata.

3. Ancora su Sistemi Ed Equazioni Differenziali Lineari.

3.1 Qualche preliminare sugli spazi Euclidei.

Per il trattare i sistemi differenziali ci occorrono alcune nozioni che riguardano gli spazi vettoriali e le funzioni a valori vettoriali (reali e complessi).

Allo scopo ricordiamo qui, sommariamente, le proprietà e le definizioni di cui faremo uso.

Denotiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo ad n dimensioni, per cui ogni elemento $x \in \mathbb{R}^n$ è individuato da una $n - pla$ ordinata di numeri reali i cui elementi saranno indicati con x_i , $i = 1, ..., n$.

Denotiamo inoltre con $\mathcal{M}^n$ lo spazio delle matrici $n \times n$ e se $A \in \mathcal{M}^n$ individueremo A scrivendo

$$A = (a_{ij})$$

e intendendo con ciò che a_{ij} è l'elemento della $i - esima$ riga e della $j - esima$ colonna di A, e che $i, j = 1, ..., n$.

E' pertanto naturale stabilire che $\mathcal{M}^n$ è isomorfo ad $\mathbb{R}^{n^2}$.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Definiamo in V una funzione che chiamiamo norma ed indichiamo con

$$\| \cdot \| \ : V \longrightarrow \overline{R}_+$$

soddisfacente le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V \ ; \ \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in V \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$.

Se ad esempio $V = \mathbb{R}^n$, possiamo definire

$$\|x\| = \max \{|x_i| \ : \ i = 1, ..., n \} ;$$

tale scelta non è l'unica possibile, né la più usuale, ma è quella di cui faremo uso nel perché è la più semplice per i nostri scopi.

Analogamente si può definire in $\mathcal{M}^n$ la norma come

$$\|A\| = \max \{|a_{ij}| \ : \ i, j = 1, ..., n \} .$$

E' evidente che quando $n = 1$ si ha $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ e $\|x\| = |x|$.

Se $A \in \mathcal{M}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

e

$$(xA)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i .$$

Osserviamo che, mentre xA è un vettore riga, Ax è un vettore colonna; in altre parole xA è una matrice ad una riga ed n colonne, mentre Ax è una matrice ad n righe ed una colonna.

Ci è indispensabile provare il seguente risultato

Lemma A8.1 - *Sia* $A \in \mathcal{M}^n$ *e sia* $x \in \mathbb{R}^n$ *, allora*

$$\|Ax\| \leq n\|A\|\|x\| .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\|Ax\| = \max\{|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j| \ : \ i = 1, ..., n \} \ \leq$$

$$\leq \max\{\|x\| \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ : \ i = 1, ..., n \} \ \leq \ n\|A\|\|x\|$$

Ricordiamo anche alcuni risultati e definizioni.

Sia x_k *una successione a valori in* $\mathbb{R}^n$*. diciamo che*

$$\lim_k \ x_k \ = \ x$$

e scriviamo anche

$$x_k \to x \ , \ x \in \mathbb{R}^n$$

se

$$\lim_k \ \|x_k - x\| \ = \ 0.$$

E' immediato dimostrare che:

Lemma A8.2 - Se $x_k \in \mathbb{R}^n$ *è una successione,* $\lim_k \ x_k = x$ *se e solo se* $\lim_k \ (x_k)_i = x_i$*. Dimostrazione.* $|(x_k)_i - x_i| \leq \|x_k - x\|$ *, per ogni*

$i = 1, ..., n$ *e pertanto è provato che se* $x_k \to x$ *si ha* $(x_k)_i \to x_i$ *,* $i = 1, ..., n$.

Se viceversa $(x_k)_i \to x_i$ *, per* $k > k_i^\varepsilon$ *si ha* $|(x_k)_i - x_i| \leq \varepsilon$*; ora se* $k > k_\varepsilon = \max\{ k_i^\varepsilon \ : \ i = 1, ..., n\}$ *si ha* $\|x_k - x\| < \varepsilon$ *e la tesi.* ■

Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *, per* $a, b \in \mathbb{R}$*, si definisce in modo ovvio*

$$(\int_a^b x(t)dt)_i = \int_a^b x_i(t)dt \quad e \quad (\frac{d}{dt}\, x(t))_i = \frac{d}{dt}\, x_i(t).$$

Queste poche considerazioni permettono di vedere come per studiare le funzioni definite su $\mathbb{R}$ *a valori in* $\mathbb{R}^n$ *o le successioni a valori in* $\mathbb{R}^n$*, ci si possa generalmente ricondurre alle funzioni e alle successioni reali che sono definite dalle componenti delle funzioni o successioni stesse.*

Un ultimo cenno sulle funzioni e sulle successioni complesse: $\mathbb{C}$*, come spazio vettoriale, è isomorfo ad* $\mathbb{R}^2$ *(ma si ricordi e si tenga presente che di più* $\mathbb{C}$ *è un'algebra). Pertanto quanto detto sopra può essere riscritto per le funzioni e le successioni a valori complessi.*

Ricordiamo soltanto che, nel caso in cui $x \in \mathbb{C}$*, indicheremo con* $\Re_e x$ *e* $\Im_m x$ *la sua parte reale e la sua parte immaginaria; avremo pertanto che*

$$x = \Re_e x + i \Im_m x\ .$$

Richiamiamo infine alcune nozioni sugli spazi vettoriali.

Sia V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*. Siano* $v_1, v_2.., v_n \in V$ *, diciamo che* $v_1, ..., v_n$ *sono linearmente dipendenti se esistono n scalari* $\alpha_i \in K$ *non tutti nulli tali che*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ = 0\ .$$

Al contrario n vettori si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti.

Chiamiamo base di uno spazio vettoriale un insieme massimale di elementi linearmente indipendenti. Si prova che comunque si scelgano due basi di V, esiste una corrispondenza biunivoca tra di loro. Pertanto, se V ammette una base costituita da un numero finito di elementi, diciamo che V ha dimensione finita e chiamiamo dimensione di V (dim V) il numero di elementi della base stessa.

3.2 *Equazioni e sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti.*

Ci occuperemo qui della soluzione di equazioni e sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti.

A questo scopo è più utile considerare, sia dal punto di vista pratico che da quello teorico, equazioni e sistemi i cui coefficienti siano complessi e pertanto bisognerà cercare soluzioni a valori, esse pure, complessi.

Ciò non è concettualmente molto complicato e riposa sui risultati ottenuti nel caso reale, a meno dell'usuale isomorfismo di spazi vettoriali che si può definire tra $\mathbb{C}^n$ *ed* $\mathbb{R}^{2n}$ *mediante la corrispondenza che ad ogni elemento* $a + ib \in \mathbb{C}^n$ *associa* $(a, b) \in \mathbb{R}^{2n}$*.*

Per quanto ci riguarda portiamo avanti questo argomento solo nel caso in cui i coefficienti siano costanti, ma le idee e i metodi usati sono per lo più validi anche nel caso di coefficienti non costanti.

Per tutto il seguito avremo a che fare con due problemi che enunciamo qui per la prima, ed unica, volta ed a cui faremo riferimento d'ora innanzi. Ricordiamo anche alcune notazioni di cui faremo abbondante uso.

Sia A una matrice $n \times n$ a valori complessi e sia $B \in \mathbb{C}^n$; indichiamo con $\Re_e A$ ed $\Im_m A$ la parte reale e la parte immaginaria di A, e cioè le matrici i cui elementi sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria degli elementi di A.

Avremo ovviamente

$$A = \Re_e A + i\Im_m A$$

ed in maniera del tutto analoga

$$B = \Re_e B + i\Im_m B\ .$$

Consideriamo il sistema differenziale lineare

$$Y'(x) = AY(x) + B(x) \tag{A8.1}$$

dove ovviamente Y è cercato a valori in $\mathbb{C}^n$ e consideriamo l'equazione differenziale lineare di ordine n

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k-1)}(x) + b(x) \tag{A8.2}$$

dove $a_k \in \mathbb{C}$, b è a valori complessi ed y è cercato esso pure a valori complessi.

Tanto l'equazione (A8.2) che il sistema (A8.1) possono essere facilmente ridotte al caso reale e quindi possono avvalersi dei risultati provati nel caso reale.

Provvediamo qui di seguito a studiare il sistema (A8.1) nel nuovo ambito scelto. Indichiamo, in accordo con quanto sopra, $Y = \Re_e Y + i\Im_m Y$; avremo che il sistema (A8.1) è equivalente a

$$\Re_e Y' + i\Im_m Y' = (\Re_e A + i\Im_m A)(\Re_e Y + i\Im_m Y) + \Re_e B + i\Im_m B$$

e tenuto conto che un numero complesso è nullo se e solo se sono nulle la sua parte reale e la sua parte immaginaria, si ha che il sistema (A8.1) è equivalente al seguente sistema reale:

$$\begin{cases} \Re_e Y' = \Re_e A\ \Re_e Y - \Im_m A\ \Im_m Y + \Re_e B \\ \Im_m Y' = \Im_m A\ \Re_e Y + \Re_e A\ \Im_m Y + \Im_m B \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è di dimensione $2n \times 2n$.

Se ora poniamo $Z = (\Re_e Y, \Im_m Y) \in \mathbb{R}^{2n}$ e definiamo

$$D = \begin{pmatrix} \Re_e A & -\Im_m A \\ \Im_m A & \Re_e A \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} \Re_e B \\ \Im_m B \end{pmatrix}$$

avremo $D \in \mathcal{M}^{2n}$, $E \in \mathbb{R}^{2n}$ ed il sistema in questione si può riscrivere, nel campo reale, come

$$Z' = DZ + E$$

o più esplicitamente come

$$(A8.3)\qquad \begin{pmatrix} \Re_e Y' \\ \Im_m Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re_e A & -\Im_m A \\ \Im_m A & \Re_e A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re_e Y \\ \Im_m Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Re_e B \\ \Im_m B \end{pmatrix}$$

non appena si ricordino le regole di calcolo per le matrici a blocchi.

Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x) = AY(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 & x_0 \in \mathbb{R}\ ,\ Y_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases}$$

Tale problema risulta equivalente al problema di Cauchy reale

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \Re_e Y' \\ \Im_m Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re_e A & -\Im_m A \\ \Im_m A & \Re_e A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Re_e Y \\ \Im_m Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Re_e B \\ \Im_m B \end{pmatrix} \\ (\Re_e Y(x_0), \Im_m Y(x_0)) = (\Re_e Y_0, \Im_m Y_0) \end{cases}$$

e pertanto è conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (17.7) che la soluzione dei problemi (A8.4) e (A8.5) esiste ed è unica in $\mathbb{C}^n$ ed $\mathbb{R}^{2n}$ rispettivamente.

A seguito di ciò si può facilmente provare che lo spazio Σ delle soluzioni della versione omogenea del sistema (A8.1) è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$ e di dimensione $2n$ su $\mathbb{R}$.

Siano ora $Y_1, ..., Y_n$ n soluzioni a valori complessi di tale sistema che risultino linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$; chiameremo matrice fondamentale del sistema omogeneo (A8.1) la matrice

$$G = \begin{pmatrix} (Y_1)_1 & (Y_2)_1 & \dots & (Y_n)_1 \\ (Y_1)_2 & (Y_2)_2 & \dots & (Y_n)_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ (Y_1)_n & (Y_2)_n & \dots & (Y_n)_n \end{pmatrix}$$

Ora se consideriamo

$$(\Re_e Y_1, \Im_m Y_1),\ (\Re_e Y_2, \Im_m Y_2), \dots, (\Re_e Y_n, \Im_m Y_n)$$

è ovvio che esse risultino linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ e risolvano il sistema omogeneo corrispondente ad (A8.3), ma di più si può osservare che anche

$$(-\Im_m Y_1, \Re_e Y_1),\ (-\Im_m Y_2, \Re_e Y_2), \dots, (-\Im_m Y_n, \Re_e Y_n)$$

sono soluzioni dello stesso sistema. Infatti è facile verificare che si ha

$$\begin{pmatrix} -\Im_m Y' \\ \Re_e Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re_e A & -\Im_m A \\ \Im_m A & \Re_e A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Im_m Y \\ \Re_e Y \end{pmatrix}$$

in quanto ciò equivale a dire

$$\begin{cases} -\Im m Y' = -\Re e A \Im m Y - \Im m A \ \Re e Y \\ \Re e Y' = -\Im m A \ \Im m Y + \Re e A \ \Re e Y \end{cases}$$

Di più si può verificare che le nuove soluzioni sono linearmente indipendenti dalle prime; infatti supponiamo che esistano $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$ *tali che*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \begin{pmatrix} \Re e Y_k \\ \Im m Y_k \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \begin{pmatrix} -\Im m Y_k \\ \Re e Y_k \end{pmatrix} = 0$$

Si avrebbe

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \Re e Y_k \ - \ \beta_k \Im m Y_k\right) \ = \ 0 \\ \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \Im m Y_k \ + \ \beta_k \Re e Y_k\right) = 0 \end{cases}$$

e pertanto

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)(\Re e_k + i \Im m Y_k) \ = \ 0$$

da cui $\alpha_k = \beta_k = 0$ *perché* $Y_1, ..., Y_n$ *sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{C}$.

Pertanto una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato ad (A8.3) sarà dato da

$$F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} (\Re e Y_1)_1 & \dots & (\Re e Y_n)_1 & (-\Im m Y_1)_1 & \dots & (-\Im m Y_n)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Re e Y_1)_n & \dots & (\Re e Y_n)_n & (-\Im m Y_1)_n & \dots & (-\Im m Y_n)_n \\ \hline (\Im m Y_1)_1 & \dots & (\Im m Y_n)_1 & (\Re e Y_1)_1 & \dots & (\Re e Y_n)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Im m Y_1)_n & \dots & (\Im m Y_n)_n & (\Re e Y_1)_n & \dots & (\Re e Y_n)_n \end{array}\right)$$

$$F = \left(\begin{array}{c|c} \ & \ \\ \hline \ & \ \end{array}\right)$$

ed avremo che F può essere scritta (a blocchi)

$$F = \begin{pmatrix} \Re e G & -\Im m G \\ \Im m G & \Re e G \end{pmatrix}$$

Pertanto l'integrale generale del sistema omogeneo associato ad (A8.1) può essere scritto, per $\lambda \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} Y = G\lambda = (\Re e G + i \Im m G)(\Re e \lambda + i \Im m \lambda) = \\ = (\Re e G \ \Re e \lambda - \Im m G \ \Im m \lambda) + i(\Im m G \ \Re e \lambda + \Re e G \ \Im m \lambda) \end{aligned}$$

mentre l'integrale generale del sistema omogeneo ad esso equivalente (A8.3) si può scrivere, per $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$Z = F\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Re_e G - \Im_m G\\ \Im_m G \Re_e G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} =$$
$$= \Re_e G\ \lambda_1 + \Im_m G\ \lambda_2 - \Im_m G\ \lambda_1 + \Re_e G\ \lambda_2$$

il che mostra, a meno del solito isomorfismo tra $\mathbb{C}^n$ *e* $\mathbb{R}^{2n}$*, come i risultati ottenuti siano equivalenti.*

Senza maggiormente indagare il sistema reale omogeneo (A8.3) ricordiamo che, detto $W(x)$ *il determinante associato ad* n *soluzioni del sistema omogeneo (A8.1) come nel caso reale, si può affermare che sono fatti equivalenti*

1. $Y_1, ..., Y_n$ *sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{C}$*;*
2. $W(x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ *;*
3. $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $W(x_0) \neq 0$*.*

Diamo infine uno sguardo a quanto accade se cerchiamo soluzioni complesse di un sistema i cui coefficienti siano reali.

In tal caso il sistema omogeneo omogeneo associato ad (A8.3) assumerà la forma, tenuto conto che $\Im_m A = 0$*,*

$$\begin{cases}\Re_e Y' = \Re_e A\ \Re_e Y\\ \Im_m Y' = \Re_e A\ \Im_m Y\end{cases}$$

Risulta pertanto essere costituito di due equazioni completamente indipendenti tra di loro e relative alla stessa matrice $\Re_e A = A$*; quindi ogni sua soluzione complessa sarà della forma*

$$Y(x) = \Re_e Y(x) + i\Re_e Y(x) = \Im_m Y(x) + i\Im_m Y(x)\ .$$

Lo spazio vettoriale Σ *delle soluzioni complesse avrà dimensione* n *su* $\mathbb{C}$ *e sarà della forma*

$$\Sigma = \mathcal{S} + i\mathcal{S}$$

dove $\mathcal{S}$ *è lo spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$*, di dimensione* n*, delle soluzioni reali del sistema a coefficienti reali considerato.*

In particolare, se

$$(A8.6) \qquad \rho_1 + i\sigma_1, ..., \rho_n + i\sigma_n$$

è una base di Σ *su* $\mathbb{C}$*, avremo che*

$$(A8.7); \qquad \rho_1, ..., \rho_n, \sigma_1, ..., \sigma_n\ \ \in \mathcal{S}$$

poiché $\dim \mathcal{S} = n$ *avremo che al più* n *tra essi sono linearmente indipendenti. D'altro canto almeno* n *tra essi sono linearmente indipendenti perché, dal momento che i vettori della (A8.6) formano una base di* Σ*, i vettori della (A8.7) generano* $\mathcal{S}$.

Infatti sia $s \in \mathcal{S}$*, esistono* $\alpha_1, .., \alpha_n$ *,* $\beta_1, .., \beta_n \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$is = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)(\rho_k + i\sigma_k)$$

e pertanto si ha

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\, \rho_k - \beta_k\, \sigma_k) = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\, \sigma_k + \beta_k\, \rho_k) = s\ .$$

Si può inoltre affermare che, se $\rho + i\sigma \in \Sigma$ *,* $\rho, \sigma, -\rho, -\sigma \in \mathcal{S}$*, per cui* $\rho - i\,\sigma \in \Sigma$.

3.3 *Riduzione dei sistemi a coefficienti costanti ad equazioni indipendenti*

Nostro scopo in questa parte è mostrare come ogni sistema lineare a coefficienti costanti può essere ricondotto ad un insieme di equazioni di ordine superiore che coinvolgono una sola delle variabili in gioco.

Questo risultato riposa su alcuni fatti che riguardano la teoria delle matrici a coefficienti polinomiali.

Consideriamo una matrice A*,* $n \times n$*, a coefficienti complessi e supponiamo di voler risolvere il sistema differenziale lineare*

$$Y'(x) = AY(x) + B(x)\ \ ;$$

indicando con D *il simbolo di derivazione, possiamo formalmente riscrivere il sistema assegnato nella forma*

$$(DI)Y = AY + B$$

ed anche come

$$(DI - A)Y = B\ \ .$$

Pertanto, osservando che il simbolo D *può essere trattato formalmente come una variabile numerica, possiamo ridurre il nostro sistema ad una forma più semplice, con trasformazioni elementari sulla matrice* $DI - A$ *.*

Chiamiamo trasformazioni elementari su una matrice le seguenti:

1. *scambio di due righe o due colonne;*
2. *moltiplicazione di una riga o di una colonna per un polinomio non nullo;*
3. *addizione ad una riga o ad una colonna di un'altra riga od un'altra colonna.*

Ciascuna delle trasformazioni si può ottenere moltiplicando a destra, se la trasformazione è sulle colonne, o a sinistra, se è sulle righe, per una opportuna matrice non singolare.

Si può provare (si veda A. Maltsev,Fondamenti di algebra lineare) che, mediante trasformazioni elementari, è possibile ridurre la matrice $DI - A$ alla matrice diagonale

$$N(D) = \begin{pmatrix} f_1(D) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(D) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(D) \end{pmatrix}$$

dove f_i è un polinomio che divide f_{i+1}; gli f_i si chiamano invarianti della matrice A e si può provare che $f_n(D)$ è il polinomio minimo della matrice A che, come è noto, divide il polinomio caratteristico det $(DI - A)$.

Più precisamente si può provare l'esistenza di due matrici non degeneri a coefficienti polinomiali $S(D)$ e $T(D)$ tali che

$$S(D)(DI - A)T(D) \;=\; N(D) \;\; ,$$

essendo $S(D)$ il prodotto delle matrici che generano le trasformazioni sulle righe e $T(D)$ il prodotto delle matrici che generano le trasformazioni sulle colonne, operate per passare da $(DI - A)$ ad $N(D)$.

Ora, se Z soddisfa

$$N(D)Z(x) = S(D)B(x)$$

avremo che

$$S(D)(DI - A)T(D)Z(x) = S(D)B(x)$$

e

$$Y(x) = T(D)Z(x)$$

soddisfa

$$S(D)(DI - A)Y(x) = S(D)B(x)$$

ed anche

$$(DI - A)Y(x) = B(x) \; .$$

Osserviamo che, per poter ricondurre i risultati provati per le equazioni al caso dei sistemi, è sufficiente osservare che:

- *se $Z(x), B(x)$ sono della forma $Q(x)e^{\lambda x}$, dove Q è un vettore colonna i cui elementi sono polinomi di grado al più m, tali restano $S(D)B(x)$ e $T(D)Z(x)$;*

- *i polinomi caratteristici delle n equazioni ottenute sono*

$$f_i(\lambda) \qquad , \qquad i = 1, .., n,$$

  e pertanto hanno come radici tutte e sole le radici di $P(\lambda) = 0$ con molteplicità minore o uguale a quella con cui ivi compaiono.

3.4 Dipendenza dai dati iniziali e stabilità dei sistemi differenziali lineari.

Ci occupiamo ora di un problema di estremo interesse applicativo. I sistemi differenziali sono di grande utilità per simulare modelli di fenomeni fisici e prevederne l'evoluzione futura; la costruzione del modello però dipende dalla determinazione dei dati del sistema, nel nostro caso la matrice A, il vettore B ed il dato iniziale Y_0, e la sua affidabilità è collegata alla precisione con cui i dati sono stati rilevati.

Poiché deve prevedersi un errore nella determinazione dei dati, la soluzione fornita dal sistema rappresenterà non tanto l'evoluzione del fenomeno cui siamo interessati, bensì l'evoluzione di un fenomeno del tutto analogo relativo a dati che differiscono di poco, l'errore con cui si effettuano i rilevamenti, dai dati effettivi.

E' pertanto importante conoscere come variano le soluzioni dei sistemi differenziali in funzione delle variazioni dei dati inziali.

Lo studio di questo problema viene indicato come studio della dipendenza dai dati iniziali nel caso in cui si consideri l'evoluzione del fenomeno in un intervallo finito, mentre si definisce studio della stabilità del sistema se ci interessa il comportamento della soluzione per grandi valori della variabile indipendente, cioè su un intervallo infinito. Cominciamo col dare alcuni risultati che precisano la dipendenza dai valori iniziali della soluzione dei sistemi lineari.

Teorema 3.1 *Sia $I = [x_0, x_0 + a]$, $a > 0$, e siano $A : I \longrightarrow \mathcal{M}^n$, $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue; siano inoltre $Y_0, Z_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Consideriamo le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z'(x) = A(x)Z(x) + B(x) \\ Z(x_0) = Z_0 \end{cases}$$

allora

$$\|Y(x) - Z(x)\| \leq \|Y_0 - Z_0\| e^{n\int_{x_0}^{x} \|A(t)\| dt}.$$

Dimostrazione. *Si ha*

$$\|Y(x) - Z(x)\| \leq \|Y_0 + Z_0\| + \int_{x_0}^{x} n\|A(t)\|\|Y(t) - Z(t)\| dt$$

e si può concludere usando il lemma di Gronwall. □

Teorema 3.2 *Sia $I = [x_0, x_0 + a]$, $a > 0$, siano $A_1, A_2 : I \longrightarrow \mathcal{M}^n$, $B_1, B_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, continue e sia $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Consideriamo le soluzioni Y e Z dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x) = A_1(x)Y(x) + B_1(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z'(x) = A_2(x)Z(x) + B_2(x) \\ Z(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Si ha allora

$$
\begin{aligned}
&\|Y(x) - Z(x)\| \le \\
&\qquad \le \left(\int_{x_0}^{x} \|(A_1(t) - A_2(t))Z(t)\| dt + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_{x_0}^{x} \|B_1(t) - B_2(t)\| dt \right) e^{n \int_{x_0}^{x} \|A_1(t)\| dt}
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. *Si ha*

$$
\begin{aligned}
&\|Y(x) - Z(x)\| \le \\
&\quad \le \int_{x_0}^{x} \|A_1(t)Y(t) - A_2(t)Z(t) + B_1(t) - B_2(t)\| dt \le \\
&\qquad \le \int_{x_0}^{x} (\|A_1(t)(Y(t) - Z(t))\| + \\
&\quad + \|(A_1(t) - A_2(t))Z(t)\| + \|B_1(t) - B_2(t)\|) dt \le \\
&\qquad \le n \int_{x_0}^{x} \|A_1(t)\| \|Y(t) - Z(t)\| dt + \\
&\qquad + \int_{x_0}^{x} \|(A_1(t) - A_2(t))Z(t)\| dt + \\
&\qquad\qquad + \int_{x_0}^{x} \|B_1(t) - B_2(t)\| dt
\end{aligned}
$$

e si può concludere usando il lemma di Gronwall. □

Corollario 3.1 *Nelle condizioni del teorema A8.3, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $\|Y_0 - Z_0\| < \delta_\varepsilon$ si ha $\|Y(x) - Z(x)\| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.*

Corollario 3.2 *Nelle condizioni del teorema ., $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $\sup\{\|A_1(x) - A_2(x)\| : x \in I\} < \delta_\varepsilon$ e $\sup\{\|B_1(x) - B_2(x)\| : x \in I\} < \delta_\varepsilon$, si ha $\|Y(x) - Z(x)\| < \varepsilon$*

Possiamo infine discutere brevemente la stabilità dei sistemi differenziali lineari.

Definizione 3.1 *Supponiamo che $I = [x_0, +\infty)$; A: $I \longrightarrow \mathcal{M}^n$, $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue, e consideriamo il sistema differenziale lineare*

$$
Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \ .
$$

Diciamo che la soluzione Y è stabile per il sistema se, detta Z un'altra sua soluzione, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $\|Y(x_0) - Z(x_0)\| < \delta_\varepsilon$ si ha $\|Y(x) - Z(x)\| < \varepsilon$ $\forall x \ge x_0$.

Diciamo che Y è asintoticamente stabile per il sistema se è stabile ed inoltre $lim_{x \to +\infty} \|Y(x) - Z(x)\| = 0$.

Dal momento che Y e Z sono soluzioni di un sistema lineare non omogeneo si ha, per i precedenti risultati, che $Y - Z$ è soluzione del sistema lineare *omogeneo corrispondente. E′ pertanto evidente che studiare la stabilità di Y per il sistema assegnato è equivalente a studiare la stabilità della soluzione identicamente nulla per il sistema lineare omogeneo ad esso associato. Solitamente inoltre ci si limita a studiare, per quanto riguarda la stabilità, il caso autonomo; di conseguenza considereremo soltanto sistemi lineari a coefficienti costanti.*

In tal caso si può provare il seguente risultato.

Teorema 3.3 *Si consideri il sistema $Y'(x) = AY(x)$. Se la matrice A ha tutti gli autovalori con parte reale negativa, allora la soluzione identicamente nulla è asintoticamente stabile.*

Se la matrice A ha tutti gli autovalori con parte reale negativa o nulla, ed inoltre gli autovalori con parte reale nulla hanno molteplicità 1, la soluzione identicamente nulla è stabile.

Negli altri casi la soluzione identicamente nulla non è stabile.

3.5 L′oscillatore armonico.

Si consideri l′equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$x''(t) + 2hx'(t) + \omega^2 x(t) = K\sin(\alpha t) \qquad h, K, \alpha > 0.$$

Essa descrive il comportamento di un oscillatore armonico smorzato, cioè di un punto materiale soggetto ad una forza di richiamo proporzionale alla distanza ed ad forza di attrito proporzionale alla velocità, sollecitato da una forza esterna sinusoidale di ampiezza K e di frequenza α.

Le soluzioni dell′equazione sono date da:

1. $h > \omega$
$$x(t) = c_1 e^{(-h+\theta)t} + c_2 e^{(-h-\theta)t} + \hat{x}(t)$$

2. $h = \omega$
$$x(t) = c_1 e^{-ht} + c_2 t e^{-ht} + \hat{x}(t)$$

3. $h < \omega$
$$x(t) = e^{-ht}(c_1 \sin(\theta t) + c_2 \cos(\theta t)) + \hat{x}(t)$$

dove
$$\hat{x}(t) = \alpha \sin(\alpha t) + b\cos(\alpha t) = A\sin(\alpha t - \phi)$$

ed inoltre si è posto
$$\theta = |h^2 - \omega^2|^{1/2}$$
$$a = K\frac{\omega^2 - \alpha^2}{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$
$$b = -K\frac{2h\alpha}{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$

$$A = \frac{K}{\sqrt{4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{a}{A}\right) .$$

Nel caso in cui $h = 0$ *l'equazione diventa*

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = K\sin(\alpha t) \qquad k, \alpha > 0$$

e rappresenta un oscillatore armonico non smorzato sollecitato da una forza esterna sinusoidale.

Le soluzioni in questo caso sono

1. $\alpha \neq \omega$

$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) + \frac{K}{\omega^2 - \alpha^2}\sin(\alpha t)$$

2. $\alpha = \omega$

$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) - \frac{K}{2\omega} t\cos(\omega t) .$$

Il comportamento delle soluzioni di queste due equazioni è illustrato nelle figure A.8.1-A.8.2-..-A.8.11. Più precisamente le figure A.8.1-A.8.2-A.8.3-A.8.4-A.8.5 riguardano la funzione

$$A = \frac{K}{(4h^2\alpha^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2)^{1/2}} = $$
$$= \frac{K/\omega^2}{(4(h/\omega)^2(\alpha/\omega)^2 + (1 - (\alpha/\omega)^2)^2)^{1/2}}$$

con

$$K/\omega^2 = .5 \ .$$

Le figure A.8.1-A.8.2-A.8.3-A.8.4 rappresentano, da diversi punti di vista, il grafico di A *in funzione di* $\frac{h}{\omega}$ *e* $\frac{\alpha}{\omega}$*, mentre la figura A.8.5 ne rappresenta le curve di livello.*

E' facile vedere come per valori di $\frac{\alpha}{\omega}$ *vicini ad* 1 *e di* $\frac{h}{\omega}$ *vicini a 0, la funzione diventi molto grande (risonanza).*

Le figure A.8.6-A.8.7 riguardano la funzione

$$x(t, \alpha) = \frac{K}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)}\ (\alpha \sin(\omega t) - \omega \sin(\alpha t))$$

che è la soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico non smorzato soddisfacente le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$.

Le costanti K ed ω *sono fissate:* $K = 2$, $\omega = 2$ *ed i grafici mostrano l'andamento di x in funzione di t e di* α.

Le figure A.8.8-A.8.9 riguardano la funzione

$$x(t, \omega) = \frac{K}{2\omega^2}\ (\omega t \cos(\omega t) - \sin(\omega t))$$

che è la soluzione dell'oscillatore armonico non smorzato, nel caso $\alpha = \omega$ *(risonanza) soddisfacente le condizioni iniziali* $x(0) = x'(0) = 0$.

Le figure A.8.9 e A.8.10 riguardano la funzione $x(t, h)$*, soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico smorzato, per valori di* K *e* ω *fissati:* $K = 2$, $\omega = 3$, *soddisfacente i dati iniziali* $x(0) = 4$, $x'(0) = 0$.

E' evidente l'effetto dello smorzamento al crescere di h *.*