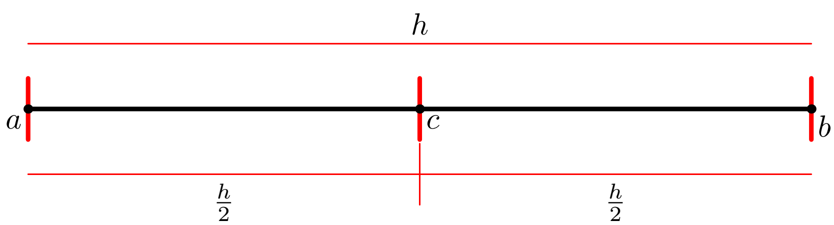
1. Introduzione ai metodi di Integrazione numerica.

Sviluppiamo in questa sezione un caso semplice, ma molto importante e significativo, che illustra il principio su cui si basano le formule di quadratura (integrazione) numerica basate sui polinomi interpolatori.

Consideriamo pertanto una funzione f di classe almeno $\mathcal{C}^3$ definita su un aperto contenente l'intervallo $[a, b]$ e sia c il punto medio di $[a, b]$ per modo che, posto $b - a = h$ si abbia

$$c - a = b - c = \frac{h}{2}$$



Consideriamo il problema di trovare un polinomio di grado minimo che coincida con f nei punti $(a, f(a))$ $(b, f(b))$ e $(c, f(c))$. E' intanto evidente che occorre imporre 3 condizioni e che quindi sono necessari e sufficienti 3 coefficienti, per cui il grado del polinomio cercato deve essere 2. L'esistenza e l'unicità del polinomio cercato si deduce facilmente imponendo le condizioni richieste; se ne ottiene un sistema in cui la matrice dei coefficienti è del tipo

$$\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante non nullo.

È facile vedere che il polinomio

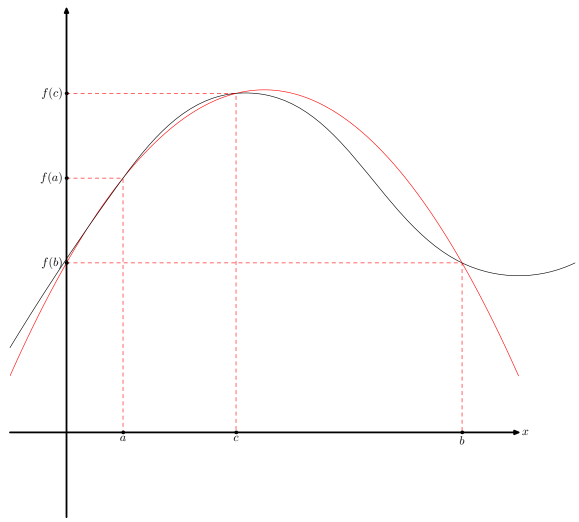
$$P(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

in quanto, ad esempio

$$\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}$$

si annulla in c e in b e vale 1 in a .

Figure 1.1:



Sia ora x fissato in $[a,b]$, distinto da a,b,c, sia $R(x)$ tale che

$$f(x)-P(x)=R(x)(x-a)(x-c)(x-b)$$

Consideriamo la funzione

$$F(t)=f(t)-P(t)=R(x)(t-a)(t-c)(t-b)$$

ed osserviamo che F si annulla in 4 punti distinti (a,b,c,x), per cui F' si annulla in almeno 3 punti distinti, F'' in almeno due punti distinti ed F''' si annulla in almeno un punto.

Ne deduciamo che esiste almeno un punto $\xi(x)$ (che dipende da x) tale che

$$0=F'''(\xi(x))=f'''(\xi(x))-3!R(x)$$

per cui

$$R(x)=\frac{f'''(\xi(x))}{3!}$$

Integrando tra a e b otteniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b P(x)\,dx=\int_a^b \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-a)(x-c)(x-b)\,dx$$

Nel caso in cui $f'''\equiv k$ sia costante, cioè nel caso in cui f sia un polinomio di terzo grado, possiamo calcolare

$$\int_a^b \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-a)(x-c)(x-b)\,dx=\int_a^b \frac{k}{3!}(x-a)(x-c)(x-b)\,dx=0$$

per la simmetria dell'integranda, e quindi si dimostra che ogni polinomio di grado fino a tre è integrato esattamente dalla formula trovata.

Nel caso si conosca un maggiorante di $|f'''|$

$$|f'''(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

possiamo stimare l'errore che si commette sostituendo $\int_a^b f(x)\,dx$ con $\int_a^b P(x)\,dx$ osservando che

$$\left|\int_a^b \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-a)(x-c)(x-b)\,dx\right| \leq \frac{M}{6}\int_a^b |(x-a)(x-c)(x-b)|\,dx$$

e che, posto $b-a=h$ e $x-c=t$, si ha

$$x-a = x-c+c-a = t+\frac{h}{2}$$

$$x-b = x-c+c-b = t-\frac{h}{2}$$

per cui

$$\frac{M}{6}\int_a^b |(x-a)(x-c)(x-b)|\,dx =$$

$$\frac{M}{6}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} |t||t^2-\frac{h^2}{4}|\,dt = \frac{M}{6}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} |t|(\frac{h^2}{4}-t^2)\,dt =$$

$$2\frac{M}{6}\int_0^{+\frac{h}{2}} t(\frac{h^2}{4}-t^2)\,dt = \frac{M}{3}\left(\frac{t^2h^2}{8}-\frac{t^4}{4}\right)_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{M}{3}\left(\frac{h^4}{32}-\frac{h^4}{64}\right) =$$

$$= \frac{M}{3}\frac{h^4}{64} = M\frac{h^4}{192} = \frac{M(b-a)^4}{192}$$

Inoltre

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$= f(a)\int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}dx + f(c)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}dx +$$

$$+ f(b)\int_a^b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}dx$$

e, posto $b-a=h$ e $x-c=t$, si ha $x-a=t+\frac{h}{2}$, $x-b=t-\frac{h}{2}$ e

$$\int_a^b (x-c)(x-b)dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t(t+\frac{h}{2})\,dt = \frac{t^3}{3}+\frac{ht^2}{4}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{2}{24}h^3$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (t^2-\frac{h^2}{4})\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}-\frac{h^2t}{4}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{2}{24}h^3 - \frac{h^3}{4} = -\frac{4}{24}h^3$$

$$\int_a^b (x-c)(x-a)dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t(t-\frac{h}{2})\;dt = \frac{t^3}{3} - \frac{ht^2}{4}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{2}{24}h^3$$

Per cui

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)\frac{\frac{2}{24}h^3}{\frac{h^2}{2}}dx + f(c)\frac{-\frac{4}{24}h^3}{-\frac{h^2}{4}}dx + f(b)\frac{\frac{2}{24}h^3}{\frac{h^2}{2}}dx =$$
$$= \frac{h}{6}(f(a)+4f(c)+f(b)) = \frac{(b-a)}{6}(f(a)+4f(c)+f(b)) =$$

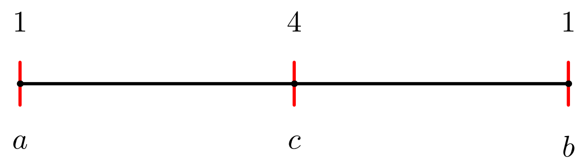


Figure 1.2:

Possiamo migliorare la stima dell'errore utilizzando una semplice osservazione.

Sia
$$\varphi(x) = (x-c)^3$$
e sia $Q(x)$ il suo polinomio interpolatore rispetto ai punti a, b, c.

Possiamo facilmente calcolare che
$$Q(x) = (c-a)^3\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + (b-c)^3\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$
per cui, posto $b-a=h$ e $x-c=t$, si ha $x-a = t+\frac{h}{2}$, $x-b = t-\frac{h}{2}$ ed anche

$$Q(x) = (-\frac{h}{2})^3\frac{t(t-\frac{h}{2})}{(h)(\frac{h}{2})} + (\frac{h}{2})^3\frac{(t+\frac{h}{2})t}{(h)(\frac{h}{2})} = \frac{h^2 t}{4} = \frac{(b-a)^4}{4}(x-c)$$

(Osserviamo che si sarebbe ottenuto con meno calcoli lo stesso risultato ricordando che il polinomio cercato deve avere grado al più 2 e che deve assumere i valori $P(a) = P(b) = (\frac{h}{2})^3$ e $P(c) = 0$; quindi Q deve essere una retta che passa per i tre punti assegnati ed è immediato verificare che il polinomio trovato è l'unico che verifica queste caratteristiche.)

Consideriamo ora, per $\beta \in \mathbb{R}$, e per $x \in (a,b)\setminus\{c\}$ il valore $R(x)$ per cui si ha
$$(f(x)+\beta\varphi(x)) - (P(x)+\beta Q(x)) = R(x)(x-c)^2(x-a)(x-b)$$
e la funzione
$$F(t) = (f(t)+\beta\varphi(t)) - (P(t)+\beta Q(t)) = R(x)(t-c)^2(t-a)(t-b)$$

Si ha che
$$F(a) = F(c) = F(b) = F(x) = 0$$
per cui, per il teorema di Rolle, esistono tre punti distinti da a, b, c, x in cui F' si annulla e
$$F'(t) = (f'(t) + \beta\varphi'(t)) - (P'(t) + \beta Q'(t)) = R(x)((t-c)^2(t-a)(t-b))'$$
ma
$$F'(c) = f'(c) - (P'(c) + \beta Q'(c))$$
e pertanto si può scegliere $\beta = \frac{f'(c)-P'(c)}{Q'(c))}$ per modo che
$$F'(c) = 0$$
Ne segue che F' si annulla ancora in almeno 4 punti per cui F'', F''', F'''' si annullano in almeno, rispettivamente, 3, 2 ed un punto in (a, b).

Pertanto esiste $\xi \in [a, b]$ tale che
$$0 = F''''(\xi) = f''''(\xi) - R(x)4!$$
da cui
$$R(x) = \frac{f''''(\xi)}{4!}$$
Ne deduciamo che
$$\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b P(x)dx + \beta\int_a^b Q(x)dx = \\ = \int_a^b \frac{f''''(\xi)}{4!}(x-c)^2(x-a)(x-b)dx$$
e, dal momento che φ e Q hanno integrale nullo su $[a, b]$ per ragioni di simmetria, se $|f''''(\xi)| \leq H|$, si ha
$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)dx\right| \leq \frac{H}{4!}\int_a^b |(x-c)^2(x-a)(x-b)|dx$$
Inoltre possiamo calcolare che
$$\frac{H}{4!}\int_a^b |(x-c)^2(x-a)(x-b)|dx = \frac{H}{4!}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |t^2(t^2 - \frac{h^2}{4})|dt = \\ = \frac{H}{4!}\left[-\frac{t^5}{5} + \frac{t^3h^2}{12}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{H}{4!}\frac{4h^5}{480} = \frac{H}{2880}h^5 = \frac{H}{2880}(b-a)^5$$
Come si vede la maggiorazione del resto è tanto più precisa quanto più piccola è la lunghezza dell'intervallo $(b-a)$ in particolare la maggiorazione è utilizzabile quando
$$b - a < 1$$

Pertanto è opportuno suddividere l'intervallo su cui si lavora ed applicare su ogni sottointervallo le formule trovate.

Se $[a,b]$ è suddiviso in n parti uguali dai punti

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$$

e se y_i è il punto medio di $[x_{i-1}, x_i]$ Possiamo calcolare un valore approssimato di

$$\int_a^b f(x)dx$$

mediante la

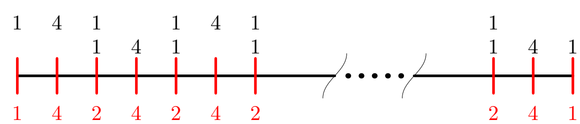
$$(b-a)\sum_1^n \frac{f(x_{i-1}) + 4f(y_i) + f(x_i)}{6}$$

e possiamo affermare che

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)\sum_1^n \frac{f(x_{i-1}) + 4f(y_i) + f(x_i)}{6} \right| \leq$$

$$\leq n\frac{H}{2880}\left|\frac{(b-a)^5}{n^5}\right| = \frac{H(b-a)^5}{2880n^4}$$

Figure 1.3:



È ovvio che è possibile fare simili considerazioni anche nel caso in cui si usi la maggiorazione che coinvolge la derivata quarta di f.

1.1 METODI DI INTEGRAZIONE NUMERICA

Per eseguire calcoli numerici è spesso opportuno disporre di un polinomio in grado di approssimare adeguatamente una funzione continua ed è inoltre essenziale conoscere una valutazione qualitativa e quantitativa dell'errore che si commette sostituendo il polinomio alla funzione data.

Cominciamo con l'esaminare la definizione e le proprietà dei polinomi interpolatori di Lagrange.

Definizione 1.1 *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0, x_1, .., x_n \in [a,b]$, $x_0 < x_1 < .. < x_n$; si dice polinomio interpolatore di f relativo ai punti $\{x_i : i = 0,1,..,n\}$ il polinomio P_n di grado al più n tale che*

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad , \ i = 0,1,..,n \ .$$

E' immediato provare l'esistenza e l'unicità di tale polinomio.

Teorema 1.1 *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0 < x_1 < .. < x_n$ $n+1$ punti di $[a,b]$; allora esiste uno ed un solo polinomio P_n interpolatore per f, relativo ai punti assegnati, e si ha*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Dimostrazione. L'unicità di P_n segue immediatamente dal fatto che esiste un solo polinomio di grado al più n che si annulla negli $n+1$ punti assegnati (quello nullo).

Per quanto riguarda l'esistenza è sufficiente constatare che il polinomio descritto nell'enunciato soddisfa i requisiti richiesti. □

Per valutare la differenza tra P_n ed f si può far uso del seguente risultato.

Facciamo notare che d'ora in poi non menzioneremo più esplicitamente negli enunciati i punti x_i,$i = 0, 1, .., n$ relativamente ai quali l'interpolazione viene effettuata.

Teorema 1.2 *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile $n+1$ volte in (a,b) e sia P_n il suo polinomio interpolatore.*

Allora, per ogni $x \in [a,b]$ esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Dimostrazione. La tesi è ovvia se $x = x_i$. Sia pertanto $x \neq x_i$, definiamo

$$R_n(x) = (f(x) - P_n(x)) \left(\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right)^{-1}.$$

Si ha allora

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

e, se consideriamo la funzione $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - R_n(x) \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

g si annulla negli $n+2$ punti $x_0, x_1, .., x_n, x$.

Pertanto è possibile applicare $n+1$ volte il teorema di Rolle ed asserire che esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - R_n(x)(n+1)! = 0$$

e la tesi. □

E' anche di notevole utilità ricordare che la corrispondenza tra funzione ed i rispettivi polinomi interpolatori è lineare, in altre parole

Lemma 1.1 *Siano* $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *e siano* P_n^1, P_n^2 *i polinomi interpolatori di* f_1 *ed* f_2*, rispettivamente; siano* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Allora* $\alpha P_n^1 + \beta P_n^2$ *è il polinomio interpolatore di* $\alpha f_1 + \beta f_2$ *.*

Dimostrazione. Si può concludere osservando che il polinomio interpolatore è unico e che quello proposto soddisfa le condizioni richieste. □

Lemma 1.2 *Siano* $x_0 < x_1 < .. < x_{2n}$*,* $2n+1$ *punti di* $[a,b]$ *tali che*

$$x_{n+k} - x_n = x_n - x_{n-k} \quad , \; k = 0, 1, .., n;$$

consideriamo la funzione

$$\phi(x) = (x - x_n)^{2n+1}$$

ed il suo polinomio interpolatore P_{2n} *relativo ai punti citati.*

Allora

- *1)* $P'_{2n}(x_n) \neq 0$
- *2)* $P_{2n}(x + x_n)$ *è una funzione dispari.*

Dimostrazione. Sia

$$g(x) = x^n$$

e sia Q_{n-1} il suo polinomio interpolatore relativo ai punti

$$(x_{n+i} - x_n)^2 \quad , \quad i = 1, 2, .., n \; .$$

Si ha

$$Q_{n-1}(0) \neq 0$$

in quanto, se così non fosse $Q_{n-1} - g$ sarebbe un polinomio di grado n che si annulla in $n+1$ punti.

Verifichiamo che

$$P_{2n}(x) = (x - x_n) Q_{n-1}((x - x_n)^2);$$

infatti P_{2n} ha grado al più $2n - 1$ $(< 2n)$ e

$$P_{2n}(x_n) = 0 = \phi(x_n)$$

$$\begin{aligned} P_{2n}(x_{n+i}) &= (x_{n+i} - x_n) Q_{n-1}((x_{n+i} - x_n)^2) = \\ &= (x_{n+i} - x_n)^{2n+1} = \phi(x_{n+i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2n}(x_{n-i}) &= (x_{n-i} - x_n) Q_{n-1}((x_{n-i} - x_n)^2) = \\ &= (x_n - x_{n+i}) Q_{n-1}((x_{n+i} - x_n)^2) = \\ &= -\phi(x_{n+i}) = \phi(x_{n-i}). \end{aligned}$$

Inoltre

$$P'_{2n}(x_n) = Q_{n-1}(0) \neq 0$$

e, per come è stato definito, $P_{2n}(x + x_n)$ è una funzione dispari. □

Utilizzando questo risultato si può dimostrare che, qualora i punti

$$x_0, x_1, ..., x_n$$

siano scelti opportunamente, è possibile migliorare la valutazione dell'errore commesso sostituendo alla funzione il suo polinomio interpolatore; l'applicazione di questo risultato risulta essere molto vantaggiosa nel caso in cui si studino formule di integrazione approssimata relative ad un numero dispari di punti.

Lemma 1.3 *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile $2n + 2$ volte in (a, b); siano $x_0 < x_1 < .. < x_{2n}$, $2n + 1$ punti di $[a, b]$ tali che*

$$x_{n+k} - x_n = x_n - x_{n-k} \quad , \; k = 1, 2, .., n$$

e sia P_{2n} il polinomio interpolatore di f.

Consideriamo inoltre la funzione

$$\phi(x) = (x - x_n)^{2n+1}$$

e sia Q_{2n} il suo polinomio interpolatore.

Posto

$$\beta = \frac{f'(x_n) - P'_{2n}(x_n)}{Q'_{2n}(x_n)},$$

per ogni $x \in [a, b]$ esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f(x) + \beta\phi(x) - P_{2n}(x) - \beta Q_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}(x - x_n)\prod_{i=0}^{2n}(x - x_i).$$

Dimostrazione. Definiamo

$$F(x) = f(x) + \beta\phi(x);$$

avremo che il polinomio interpolatore di F, S_{2n}, è dato da

$$S_{2n}(x) = P_{2n}(x) + \beta Q_{2n}(x).$$

Definiamo ancora, se $x \neq x_i$,

$$R_{2n}(x) = (F(x) - S_{2n}(x))\left((x - x_n)\prod_{i=0}^{2n}(x - x_i)\right)^{-1},$$

si ha

$$F(x) - S_{2n}(x) = R_{2n}(x)(x - x_n)\prod_{i=0}^{2n}(x - x_i) \qquad in\ [a, b]$$

e pertanto la funzione

$$G(t) = F(t) - S_{2n}(t) - R_{2n}(x)(t - x_n)\prod_{i=0}^{2n}(t - x_i)$$

si annulla nei $2n + 2$ punti distinti

$$x_0, x_1, ..., x_{2n}, x.$$

Dal momento che G è derivabile, per il teorema di Rolle, G' si annulla in $2n + 1$ punti distinti di (a,b), tutti diversi da x e da $x_i, i = 0, 1, .., 2n$; inoltre, poiché

$$G'(t) = f'(t) + \beta\phi'(t) - P'_{2n}(t) - \beta Q'_{2n}(t) - \\ - R_{2n}(x)\frac{d}{dt}\left((t - x_n)\prod_{i=0}^{2n}(t - x_i)\right)$$

si ha, tenendo conto che x_n è uno zero doppio dell'ultimo polinomio da derivare,

$$G'(x_n) = f'(x_n) - P'_{2n}(x_n) - \beta Q'_{2n}(x_n) = 0.$$

Pertanto G' si annulla ancora in $2n + 2$ punti distinti, ed essendo essa derivabile, applicando $2n + 1$ volte il teorema di Rolle, si ottiene che esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$G^{(2n+2)}(c) = f^{(2n+2)}(c) - R_{2n}(x)(2n + 2)! = 0$$

e la tesi. □

Una applicazione molto importante della teoria dei polinomi interpolatori è data dalle formule di integrazione approssimata.

Tali formule possono essere distinte in due classi: quelle che fanno uso dei valori della funzione integranda in punti dell'intervallo di integrazione che sono fra loro equispaziati e quelle che usano punti che sono determinati secondo regole opportune, per migliorare l'ordine di approssimazione.

E' subito chiaro che per certe applicazioni sono utilizzabili solo le formule appartenenti alla prima classe in quanto, se ad esempio i valori della funzione integranda sono forniti dalla tabulazione di dati sperimentali, è plausibile, e certo più frequente, disporre di tali valori per punti dell'intervallo d'integrazione tra loro equispaziati.

E' inoltre opportuno osservare che, al crescere del numero dei punti di interpolazione considerati, i valori usati per le formule relative all'ordine n possono essere riutilizzati per quelle relative all'ordine 2n, soltanto nel caso si usino formule del primo tipo.

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare e proponiamoci di trovare una formula che approssimi

$$\int_a^b f(x)dx$$

e di valutare l'errore che si commette quando in luogo dell'integrale assegnato si consideri il valore fornito dalla formula.

Allo scopo si può procedere nel seguente modo;

- si considerano in $[a,b]$ $n+1$ punti $x_0, x_1, ...x_n$ tra di loro equispaziati e si pone $x_i - x_{i-1} = h$;
- si considera il polinomio P_n interpolatore di f relativamente ai punti scelti;
- si integra P_n su $[a,b]$ fino a trovare una formula in cui compaiano esplicitamente solo i valori della funzione f nei punti scelti;
- si valuta, usando i risultati ottenuti in precedenza la differenza tra l'integrale effettivo ed il valore fornito dalla formula trovata.

Possiamo operare una ulteriore suddivisione tra le formule di integrazione che abbiamo citato distinguendo tra quelle che comprendono nei punti di interpolazione anche gli estremi dell'intervallo di integrazione, *formule di integrazione di tipo chiuso* , e quelle che considerano punti di interpolazione tutti interni all'intervallo di integrazione, *formule di integrazione di tipo aperto.*

Teorema 1.3 *- formule di quadratura chiuse - Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile $n+1$ volte in (a,b) e siano*

$$h = \frac{b-a}{n} \quad , \quad x_i = a + ih \qquad i = 0, 1, ..., n.$$

Sia P_n il polinomio interpolatore di f relativo ai punti x_i; definiamo

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad , \quad I_n = \int_a^b P_n(x)dx$$

$$\alpha_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

$$R_n = \int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| dx.$$

Allora

$$\alpha_i = h \int_0^n \prod_{\substack{=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j} dt$$

e

$$R_n = h^{n+2} \int_0^n \prod_{i=0}^{n} |t - i| dt.$$

Inoltre

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

e, se supponiamo che $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \ \forall x \in (a,b)$,

$$|I - I_n| \leq \frac{M}{(n+1)!} R_n.$$

Teorema 1.4 *- formule di quadratura aperte - Sia* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, derivabile* $n+1$ *volte in* (a,b) *e siano*

$$h = \frac{b-a}{n+2} \ \ , \ \ x_i = a + ih \qquad i = 1, ..., n+1.$$

Consideriamo, come nel teorema precedente, P_n, I, I_n, α_i, R_n*; avremo allora*

$$\alpha_i = \int_0^{n+2} \prod_{\substack{=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t-j}{i-j} dt$$

e

$$R_n = h^{n+2} \int_0^{n+2} \prod_{i=1}^{n+1} |t - i| dt.$$

Inoltre, se supponiamo $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \ \forall x \in (a,b)$, *avremo*

$$|I - I_n| \leq \frac{M}{(n+1)!} R_n.$$

Nel caso in cui il numero dei punti considerati sia dispari, si può migliorare la valutazione dell'errore commesso sostituendo I_n ad I. In tal caso infatti si ha

Teorema 1.5 *Se nel teorema 18.7 (e analogamente nel teorema 18.8) si suppone* $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, *allora, definito*

$$R_n' = h^{n+3} \int_0^n |t - n/2| \prod_{i=0}^{n} |t - i| dt$$

si ha

$$|I - I_n| \leq \frac{M}{(n+2)!} R_n' \ \ , \ ove \ |f^{(n+2)}(x)| \leq M.$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\phi(x) = (x - x_m)^{2m+1}$$

e sia Q_n il suo polinomio interpolatore rispetto ai punti x_i; si ha, per il lemma 18.6, $Q_n'(x_m) \neq 0$ e, posto

$$\beta = \frac{f'(x_n) - P_n'(x_m)}{Q_n'(x_m)},$$

si ha

$$I - I_n = \int_a^b (f(x) + \beta\phi(x) - P_n(x) - \beta Q_n(x))dx$$

poiché $\phi(x + x_m)$ e $Q_n(x + x_m)$ sono funzioni dispari, ed hanno pertanto integrale nullo su $[a, b]$. □

Per particolari riguardanti l'applicazione dei risultati qui dimostrati, rinviamo all'appendice 9, in cui sono esplicitati i casi più importanti e le relative maggiorazioni degli errori, ed è fornita una tabella dei coefficienti di integrazione.

Quanto abbiamo provato nel capitolo 17 ci consente di affermare che la soluzione di un problema di Cauchy associato ad un sistema lineare esiste ed è unica, ma solo nel caso dei coefficienti costanti si possono ottenere ulteriori risultati che permettono di esplicitare la soluzione stessa non appena si conoscano gli autovalori e gli autovettori della matrice A del sistema.

Peraltro, anche in questo più semplice caso, non si hanno indicazioni praticamente utilizzabili in quanto occorre preliminarmente risolvere un'equazione algebrica di grado n ed alcuni sistemi lineari algebrici di n equazioni in n incognite. Queste operazioni, se sono facili per $n = 1, 2$, diventano possibili, ma lunghe e noiose per $n = 3, 4$ e spesso impossibili per $n \geq 5$.

Queste considerazioni suggeriscono la necessità di trovare metodi semplici che consentano di ottenere una approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy ed una valutazione dell'errore commesso in tale operazione.

Allo scopo dimostreremo i risultati seguenti.

Teorema 1.6 - *Eulero - Siano A: $I \longrightarrow \mathcal{M}^n$ e $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue e siano $x_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$; consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Sia $I_a = [x_0, x_0 + a]$ un intervallo scelto in modo tale che $I_a \subset I$ e sia $\delta_k \in \mathbb{R}_+$; definiamo in I_a una successione di funzioni nella seguente maniera: sia $x_i = x_0 + i\delta_k$ e poniamo

$$\begin{cases} Y_k(x_0) = Y_0 \\ Y_k(x) = Y_k(x_i) + [A(x_i)Y_k(x_i) + B(x_i)](x - x_i) \\ \qquad\qquad\qquad \text{per} \quad x_i < x \leq x_{i+1} \leq x_0 + a \end{cases}$$

Allora esiste un'unica funzione $Y : I_a \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che sia derivabile, si abbia

$$Y_k(x) \to Y(x) \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a$$

e soddisfi inoltre il problema di Cauchy assegnato.

Dimostrazione. Cominciamo con il definire

$$L_0 = \max\{\|A(x)\| \ : x_0 \le x \le x_0 + a\} \quad , \qquad L = nL_0$$

$$N = \max\{\|B(x)\| \ : x_0 \le x \le x_0 + a\}$$

e proviamo che $Y_k(x_i)$ è limitato.

Si ha infatti

$$Y_k(x_{i+1}) - Y_k(x_i) = [A(x_i)Y_k(x_i) + B(x_i)](x_{i+1} - x_i)$$

e

$$\begin{aligned}\|Y_k(x_{i+1})\| \le \|Y_k(x_i)\| + \|A(x_i)Y_k(x_i) + B(x_i)\||x_{i+1} - x_i| \le \\ \le \|Y_k(x_i)\| + L\|Y_k(x_i)\|\delta_k + N\delta_k = \\ = \|Y_k(x_i)\|(1 + L\delta_k) + N\delta_k\end{aligned}$$

e se ne deduce

$$\begin{aligned}\|Y_k(x_i)\| \le (1 + L\delta_k)^i \|Y_k(x_0)\| + N\delta_k \sum_{j=o}^{i-1} (1 + L\delta_k)^j = \\ = (1 + L\delta_k)^i \|Y_0\| + N\delta_k \frac{1 - (1 + L\delta_k)^i}{1 - (1 + L\delta_k)} = \\ = (1 + L\delta_k)^{\frac{1}{L\delta_k} iL\delta_k} \|Y_0\| + \\ + \frac{N\delta_k}{L\delta_k}[(1 + L\delta_k)^{\frac{1}{L\delta_k} iL\delta_k} - 1] \le \\ \le e^{Li\delta_k}\|Y_0\| + \frac{N}{L}(e^{Li\delta_k} - 1) \le \\ \le e^{La}\left(\frac{N}{L} + \|Y_0\|\right) - \frac{N}{L} = b\end{aligned}$$

non appena si tenga conto che $i\delta_k \le a$ per come sono stati scelti x_i e δ_k .

Più in generale si ha che, essendo Y_k una spezzata poligonale di vertici $(x_i, Y_k(x_i))$, se $x_i \le x \le x_{i+1}$

$$\|Y_k(x)\| = \|\lambda Y_k(x_i) + (1 - \lambda)Y_k(x_{i+1})\| \le \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Ora per $x_i \le x \le x_{i+1}$ avremo

$$\begin{aligned}Y_k'(x) = A(x_i)Y_k(x_i) + B(x_i) = \\ = A(x)Y_k(x) + B(x) + \\ + [A(x_i)Y_k(x_i) - A(x)Y_k(x) + B(x_i) - B(x)] = \\ = A(x)Y_k(x) + B(x) + \eta_k(x)\end{aligned}$$

non appena si sia chiamato η_k l'addendo in parentesi quadra.

Si ha

$$\begin{aligned}\|\eta_k(x)\| \le \|[A(x_i)-A(x)]Y_k(x_i)\| + \|A(x)[Y_k(x_i)-Y_k(x)]\| + \\ + \|B(x_i)-B(x)\| \le \\ \le n\|A(x_i)-A(x)\|b + n\|A(x)\|\|Y_k(x_i)-Y_k(x)\| + \\ + \|B(x_i)-B(x)\| \le \\ \le n\|A(x_i)-A(x)\|b + L(Lb+N)|x_i-x| + \|B(x_i)- \\ - B(x)\|\end{aligned}$$

e dal momento che le funzioni $\|A(\cdot)\|$ e $\|B(\cdot)\|$ sono uniformemente continue su I_a si può asserire che esiste una successione $\varepsilon_k \to 0$ tale che

$$\|\eta_k(x)\| \le \varepsilon_k \quad , \quad \forall x \in I_a.$$

Otteniamo con ciò che

$$Y_k(x) - Y_0 = \int_{x_0}^{x} [A(t)Y_k(t) + B(t)]dt + \int_{x_0}^{x} \eta_k(t)dt$$

e quindi

$$\begin{aligned}\|Y_k(x) - Y_h(x)\| \le \int_{x_0}^{x} \|A(t)[Y_k(t) - Y_h(t)]\|dt + \\ + \int_{x_0}^{x} \|\eta_k(t) - \eta_h(t)\|dt \le \\ \le \int_{x_0}^{x} L\|Y_k(t) - Y_h(t)\|dt + (\varepsilon_k + \varepsilon_h)(x - x_0)\end{aligned}$$

Pertanto usando il lemma 16.5 (di Gronwall) otteniamo

$$\|Y_k(x) - Y_h(x)\| \le (\varepsilon_k + \varepsilon_h)(x - x_0)e^{L(x-x_0)}$$

e deduciamo che la successione $Y_k(x)$ è di Cauchy.

Esisterà pertanto una funzione $Y : I_a \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $Y_k(x) \to Y(x)$, per $x \in I_a$, e passando al limite per $h \to +\infty$ vediamo che

$$\|Y_k(x) - Y(x)\| \le \varepsilon_k a e^{La} = E_k.$$

Si può a questo punto fare riferimento al teorema 17.7, per dimostrare che Y è continua, risolve il problema di Cauchy assegnato ed è unica. $\square$

Passiamo ora a valutare l'errore che si commette sostituendo la soluzione Y con una delle sue approssimazioni Y_k .

Teorema 1.7 *Supponiamo che siano verificate le ipotesi del teorema 18.10, supponiamo inoltre che A e B siano derivabili in I_a e si abbia:*

$$M_1 = \sup\{\|A'(x)\| \ : x \in I_a\}, M_2 = \sup\{\|B'(x)\| \ ; x \in I_a\} \in \mathbb{R}.$$

Allora, per $x \in I_a$, si ha:

$$\|Y_k(x) - Y(x)\| \leq [nM_1 b + L(Lb + N) + M_2]\delta_k(x - x_0)e^{La} \tag{18.3}$$

ove b è dato dalla (18.1).

Dimostrazione. Nelle nuove ipotesi la (18.2) può essere riscritta nella seguente maniera:

$$\|\eta_k\| \leq nM_1 b\delta_k + L(Lb + N)\delta_k + M_2\delta_k$$

e pertanto,procedendo come nel teorema precedente, per il lemma di Gronwall si ottiene la (18.3). □

Osservazione. Nel teorema precedente abbiamo fatto uso della seguente disuguaglianza:

$$\|A(x) - A(y)\| \leq M_1\|x - y\|$$

e della disuguaglianza analoga per B.

Accenniamo qui come può essere dedotta dalle regole di calcolo elementare.

$$\begin{aligned}\|A(x) - A(y)\| &= \sup\{|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| : i, j = 1, ..., n\} = \\ &= \sup\{|a'_{ij}(\xi)(x - y)| : i, j = 1, ..., n,\ x < \xi < y\} \leq \\ &\leq M_1|x - y|\end{aligned}$$

Il metodo appena descritto nel teorema 18.10 rientra in quelli che solitamente vengono chiamati metodi di integrazione numerica ad un passo per equazioni differenziali. Nell'uso di tali metodi si commettono, ovviamente, errori di approssimazione che possono essere classificati in due categorie:

- errori di troncamento intrinsechi delle formule usate, che possono essere controllati determinando maggiorazioni teoriche dell'errore (si veda ad esempio il teorema 18.11);
- errori di arrotondamento dovute all'imprecisione con cui si eseguono i calcoli, che possono essere controllati conoscendo la precisione con cui operano i mezzi di calcolo usati.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

ed indichiamo con Y la soluzione corretta del problema stesso. Indichiamo inoltre con Z una soluzione numerica del problema assegnato, relativa ai punti $x_i = x_0 + i\delta$, e con Z_i la soluzione corretta del seguente problema

$$\begin{cases} Z_i'(x) = A(x)Z_i(x) + B(x) \\ Z_i(x_i) = Z(x_i) \end{cases}$$

si ha

$$Z_0(x) = Y(x).$$

Ad ogni iterazione, da x_i ad x_{i+1}, supponiamo che

$$\|Z(x_{i+1}) - Z_i(x_{i+1})\| \leq \varepsilon = \tau + \rho$$

essendo τ l'errore di troncamento e ρ l'errore di arrotondamento.

Possiamo pertanto valutare l'errore commesso nel punto x_i nella seguente maniera

$$E_i = \|Z(x_i) - Y(x_i)\| = \|Z_i(x_i) - Z_0(x_i)\| \leq \\ \leq \sum_{j=0}^{i-1} \|Z_{j+1}(x_i) - Z_j(x_i)\|$$

Ora

$$Z_{j+1}(x_i) = Z_{j+1}(x_{j+1}) + \int_{x_{j+1}}^{x_i} [A(x)Z_{j+1}(x) + B(x)]dx$$

e

$$Z_j(x_i) = Z_j(x_{j+1}) + \int_{x_{j+1}}^{x_i} [A(x)Z_j(x) + B(x)]dx,$$

da cui si ottiene

$$\|Z_{j+1}(x_i) - Z_j(x_i)\| \leq \|Z_{j+1}(x_{j+1}) - Z_j(x_{j+1})\| + \\ + L\int_{x_{j+1}}^{x_i} \|Z_{j+1}(x) - Z_j(x)\|dx$$

essendo L come nel teorema 18.10 .

Pertanto, poiché

$$\|Z_{j+1}(x_{j+1}) - Z_j(x_{j+1})\| = \|Z(x_{j+1}) - Z_j(x_{j+1})\| \leq \varepsilon$$

si ha, usando il lemma di Gronwall,

$$\|Z_{j+1}(x_i) - Z_j(x_i)\| \leq \varepsilon e^{L(x_i - x_{j+1})} = \varepsilon e^{L(i-j-1)\delta}.$$

Ne deduciamo infine che

$$E_i \leq \varepsilon e^{L\delta(i-1)} \sum_{j=0}^{i-1} e^{-L\delta j} = \varepsilon e^{L\delta(i-1)} \frac{1 - e^{-L\delta i}}{1 - e^{-L\delta}} = \\ = \varepsilon \frac{e^{L\delta i} - 1}{e^{L\delta} - 1} \leq \varepsilon \frac{e^{L(x_i - x_0)} - 1}{L\delta}$$

Osserviamo che, in generale, l'errore di troncamento può essere scritto nella forma

$$\tau = c\delta^p$$

(ad esempio il risultato del teorema 18.11 assicura che si può scegliere $p = 2$). Si ha pertanto

$$E_i \leq \frac{e^{L(x_i - x_0)} - 1}{L}[c\delta^{p-1} + \rho/\delta]$$

e si vede come, diminuendo l'ampiezza del passo δ, l'errore di troncamento decresce mentre l'errore di arrotondamento aumenta; ciò sconsiglia l'uso di passi eccessivamente piccoli.

1.2 COEFFICIENTI DI INTEGRAZIONE NUMERICA.

In questa appendice intendiamo precisare alcuni risultati provati nel paragrafo 18, riguardo alle formule di integrazione numerica, relativamente al caso in cui il polinomio interpolatore sia di grado $0, 1, 2, 4$.

Teorema 1.8 *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile due volte in (a, b); se P_1 è il polinomio interpolatore di f relativo ai punti a e b, allora*

$$I_1 = \int_a^b P_1(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$$

e

$$|I - I_1| \leq \frac{M}{12}(b - a)^3$$

essendo $|f''(x)| \leq M$ e

$$I = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Inoltre, se f è convessa e $0 \leq m \leq f''(x) \leq M$

$$I_1 - \frac{M}{12}(b - a)^3 \leq I \leq I_1 - \frac{m}{12}(b - a)^3 \leq I_1.$$

Dimostrazione. Per il teorema 18.3 si ha

$$I = I_1 + \int_a^b \frac{f''(c)}{2}(x - a)(x - b)dx.$$

□

Teorema 1.9 *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile due volte in (a, b); se P_0 è il polinomio interpolatore di f relativo al punto $(a + b)/2$, allora*

$$I_0 = \int_a^b P_0(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

e

$$|I - I_0| \leq \frac{M}{24}(b - a)^3$$

essendo $|f''(x)| \leq M$ *e*

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

Inoltre, se f *è convessa e* $0 \leq m \leq f''(x) \leq M$

$$I_0 \leq I_0 + \frac{m}{24}(b-a)^3 \leq I \leq I_0 + \frac{M}{24}(b-a)^3 \quad .$$

Dimostrazione. Per il lemma 18.6 si ha

$$I = I_0 + \int_a^b \frac{f''(c)}{2}(x-(b-a)/2)^2.$$

□

Teorema 1.10 *Sia* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, derivabile tre volte in* (a,b)*; sia* P_2 *il polinomio interpolatore di* f *relativo ai punti*

$$a \; , \; \frac{a+b}{2} \; , \; b \quad .$$

Allora, se

$$I_2 = \int_a^b P_2(x)dx \; = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

si ha

$$|I - I_2| \leq \frac{M}{192}(b-a)^4$$

essendo

$$|f^{(3)}(x)| \leq M$$

e

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

Se di più supponiamo che f *sia derivabile quattro volte in* (a,b) *e che si abbia*

$$|f^{(4)}(x)| \leq H$$

possiamo affermare che

$$|I - I_2| \leq \frac{H}{2880}(b-a)^5 \quad .$$

Dimostrazione. E' sufficiente integrare le uguaglianze ottenute nei teoremi 18.7 e 18.9 rispettivamente. □

Teorema 1.11 *Sia* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, derivabile sei volte in* (a,b)*, e sia* P_4 *il polinomio interpolatore di* f *relativo ai punti*

$$a \; , \; a + \frac{b-a}{4} \; , \; \frac{a+b}{2} \; , \; a + 3\frac{b-a}{4} \; , \; b$$

allora, se

$$I_4 = \int_a^b P_4(x)dx =$$
$$= \frac{b-a}{90}[7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) +$$
$$+ 32f\left(a + 3\frac{b-a}{4}\right) + 7f(b)]$$

si ha

$$|I - I_4| \leq \frac{H}{1474560}(b-a)^7$$

essendo

$$|f^{(6)}(x)| \leq H$$

e

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

I teoremi A9.3 ed A9.4 sono tanto più efficaci quanto più piccola è l'ampiezza b-a dell'intervallo di integrazione.

E' pertanto opportuno suddividere $[a, b]$ in n parti uguali

$$[a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}, a + \frac{k(b-a)}{n}]$$

ciascuno di ampiezza

$$\frac{b-a}{n}$$

applicare le formule di cui sopra in ogni singolo intervallo e sommare infine i risultati ottenuti.

Dal teorema A9.1 si ha

$$I_1^n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$

e

$$|I - I_1^n| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

Dal teorema A9.2 si ha

$$I_0^n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(2k-1)(b-a)}{2n}\right)$$

e

$$|I - I_0^n| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{M}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{M}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

Dal teorema A9.3 si ha

$$
\begin{aligned}
I_2^n = \frac{b-a}{6n} \sum_{k=1}^{n} & \left(f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) + \right. \\
& \left. +4f\left(a + \frac{(2k-1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) = \\
&= \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + \frac{2(b-a)}{2n}\right) + \right. \\
& \left. \qquad +4f\left(a + \frac{3(b-a)}{2n}\right) + \qquad +\ldots + f(b)\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
|I - I_2^n| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{192} \frac{(b-a)^4}{n^4} = \frac{M}{192} \frac{(b-a)^4}{n^3}
$$

oppure

$$
|I - I_2^n| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{H}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^5} = \frac{H}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4}.
$$

Dal teorema A9.4 si ha

$$
\begin{aligned}
I_4^n = \frac{b-a}{90n} \sum_{k=1}^{n} & \left(7f\left(a + \frac{(4k-4)(b-a)}{4n}\right) + \right. \\
& + 32f\left(a + \frac{(4k-3)(b-a)}{4n}\right) + 12f\left(a + \frac{(4k-2)(b-a)}{4n}\right) \\
& \left. \qquad +32f\left(a + \frac{(4k-1)(b-a)}{4n}\right) + 7f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
|I - I_4^n| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{1474560} \frac{(b-a)^7}{n^7} = \frac{M}{1474560} \frac{(b-a)^7}{n^6}
$$

Diamo qui di seguito i coefficienti ed una valutazione del resto relativi alle formule di integrazione numerica chiuse ed aperte. Per la lettura delle tabelle relative all'integrazione chiusa, ci riferiremo alla formula

$$
\frac{b-a}{\beta} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a + ih) \quad , \quad h = \frac{b-a}{n}
$$

e valuteremo il resto nella forma

$$
|R_n| \leq (b-a)^{n+2} \gamma_n M \quad , \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M
$$

oppure, se n è pari, nella forma

$$
|R_n| \leq (b-a)^{n+3} \delta_n H \quad , \quad |f^{(n+2)}(x)| \leq H \quad .
$$

Osserviamo che vengono riportati solo i coefficienti α_i, $0 \leq i \leq E(n/2)$, essendo i rimanenti ottenuti mediante la

$$
\alpha_i = \alpha_{n-i} \quad .
$$

Per la lettura delle tabelle relative all'integrazione aperta, ci riferiremo alla formula

$$\frac{b-a}{\mu}\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(a+ih) \quad , \quad h=\frac{b-a}{n+2}$$

e valuteremo il resto nella forma

$$|R_n| \leq (b-a)^{n+2}\theta_n M \quad , \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

oppure, se n è pari, nella forma

$$|R_n| \leq (b-a)^{n+3}\eta_n H \quad , \quad |f^{(n+2)}(x)| \leq H \quad .$$

Osserviamo che vengono riportati solo i coefficienti λ_i , $0 \leq i \leq 1+E(n/2)$, essendo i rimanenti ottenuti mediante la

$$\lambda_i = \lambda_{n+2-i} \quad .$$

1.3 Formule di integrazione chiuse.

$\boxed{n=1}$

$\beta = 2$

$\alpha_0 = 1$

$$\gamma_1 = \frac{1}{12} \leq 10^{-1}$$

$\boxed{n=2}$

$\beta = 6$

$\alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = 4$

$$\gamma_2 = \frac{1}{192} \leq 10^{-2}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2880} \leq 10^{-3}$$

$\boxed{n = 3}$

$$\begin{aligned} \beta &= 8 \\ \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= 3 \end{aligned}$$

$$\gamma_3 = \frac{49}{174960} \leq 10^{-3}$$

$\boxed{n = 4}$

$$\begin{aligned} \beta &= 90 \\ \alpha_0 &= 7 \\ \alpha_1 &= 32 \\ \alpha_2 &= 12 \end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \frac{19}{1474560} \leq 10^{-4}$$
$$\delta_4 = \frac{1}{1474560} \leq 10^{-6}$$

$\boxed{n = 5}$

$$\begin{aligned} \beta &= 288 \\ \alpha_0 &= 19 \\ \alpha_1 &= 75 \\ \alpha_2 &= 50 \end{aligned}$$

$$\gamma_5 = \frac{2459}{4725000000} \leq 10^{-6}$$

$\boxed{n = 6}$

$$\begin{aligned}\beta =&840\\ \alpha_0 =&41\\ \alpha_1 =&216\\ \alpha_2 =&27\\ \alpha_3 =&272\end{aligned}$$

$$\gamma_6 = \frac{71}{3762339840} \leq 10^{-7}$$
$$\delta_6 = \frac{983}{1142810726400} \leq 10^{-9}$$

$\boxed{n = 7}$

$$\begin{aligned}\beta =&17280\\ \alpha_0 =&751\\ \alpha_1 =&3577\\ \alpha_2 =&1323\\ \alpha_3 =&2989\end{aligned}$$

$$\gamma_7 = \frac{91463}{146435169081600} \leq 10^{-9}$$

$\boxed{n = 8}$

$$\begin{aligned}\beta =&28350\\ \alpha_0 =&989\\ \alpha_1 =&5888\\ \alpha_2 =&-928\\ \alpha_3 =&10496\\ \alpha_4 =&-4540\end{aligned}$$

$$\gamma_8 = \frac{18593}{974098582732800} \leq 10^{-10}$$

$$\delta_8 = \frac{47}{60881161420800} \leq 10^{-12}$$

$\boxed{n = 9}$

$$\begin{aligned}
\beta &= 89600 \\
\alpha_0 &= 2857 \\
\alpha_1 &= 15741 \\
\alpha_2 &= 1080 \\
\alpha_3 &= 19344 \\
\alpha_4 &= 5778
\end{aligned}$$

$$\gamma_9 = \frac{1631797}{3006315552481274880} \leq 10^{-12}$$

$\boxed{n = 10}$

$$\begin{aligned}
\beta &= 598752 \\
\alpha_0 &= 16067 \\
\alpha_1 &= 106300 \\
\alpha_2 &= -48525 \\
\alpha_3 &= 272400 \\
\alpha_4 &= -260550 \\
\alpha_5 &= 427368
\end{aligned}$$

$$\gamma_{10} = \frac{55337}{3832012800000000000} \leq 10^{-13}$$

$$\delta_{10} = \frac{106276187}{2043241200000000000000} \leq 10^{-15}$$

$\boxed{n = 11}$

$$
\begin{aligned}
\beta =&87091200\\
\alpha_0 =&2171465\\
\alpha_1 =&13486539\\
\alpha_2 =&-3237113\\
\alpha_3 =&25226685\\
\alpha_4 =&-9595542\\
\alpha_5 =&15493566
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{11} = \frac{32579530343}{902889315689217909216000} \leq 10^{-15}$$

$\boxed{n = 12}$

$$
\begin{aligned}
\beta =&63063000\\
\alpha_0 =&1364651\\
\alpha_1 =&9903168\\
\alpha_2 =&-7587864\\
\alpha_3 =&35725120\\
\alpha_4 =&-51491295\\
\alpha_5 =&87516288\\
\alpha_6 =&-87797136
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{12} = \frac{58689413}{690924801108010755686430} \leq 10^{-16}$$

$$\delta_{12} = \frac{117907}{431828000692506722304000} \leq 10^{-18}$$

$\boxed{n = 13}$

$$
\begin{aligned}
\beta &= 402361344000 \\
\alpha_0 &= 8181904909 \\
\alpha_1 &= 56280729661 \\
\alpha_2 &= -31268252574 \\
\alpha_3 &= 156074417954 \\
\alpha_4 &= -151659573325 \\
\alpha_5 &= 206683437987 \\
\alpha_6 &= -43111992612
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{13} = \frac{788106931}{4172539031545978956131942400} \leq 10^{-18}$$

$\boxed{n = 14}$

$$
\begin{aligned}
\beta &= 5003856000 \\
\alpha_0 &= 90241897 \\
\alpha_1 &= 710986864 \\
\alpha_2 &= -770720657 \\
\alpha_3 &= 3501442784 \\
\alpha_4 &= -6625093363 \\
\alpha_5 &= 12630121616 \\
\alpha_6 &= -16802270373 \\
\alpha_7 &= 19534438464
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{14} = \frac{792462703}{199280729181576203247550464000} \leq 10^{-20}$$

$$\delta_{14} = \frac{218545454111}{1906415981954155286239515770880000} \leq 10^{-21}$$

$\boxed{n = 15}$

$$\begin{aligned}
\beta &= 2066448384\\
\alpha_0 &= 35310023\\
\alpha_1 &= 265553865\\
\alpha_2 &= -232936065\\
\alpha_3 &= 1047777585\\
\alpha_4 &= -1562840685\\
\alpha_5 &= 2461884669\\
\alpha_6 &= -2000332805\\
\alpha_7 &= 1018807605
\end{aligned}$$

$$\gamma_{15} = \frac{250582204083791}{3154005370882522406250000000000000} \le 10^{-22}$$

$\boxed{n = 16}$

$$\begin{aligned}
\beta &= 976924698750\\
\alpha_0 &= 15043611773\\
\alpha_1 &= 127626606592\\
\alpha_2 &= -179731134720\\
\alpha_3 &= 832211855360\\
\alpha_4 &= -1929498607520\\
\alpha_5 &= 4177588893696\\
\alpha_6 &= -6806534407936\\
\alpha_7 &= 9368875018240\\
\alpha_8 &= -10234238972220
\end{aligned}$$

$$\gamma_{16} = \frac{2194164799877}{14535747595546073201142056720793600000} \le 10^{-23}$$

$$\delta_{16} = \frac{181280279}{461339645366452518590934417408000 0} \le 10^{-25}$$

$\boxed{n = 17}$

$$
\begin{aligned}
\beta =&3766102179840000\\
\alpha_0 =&55294720874657\\
\alpha_1 =&450185515446285\\
\alpha_2 =&-542023437008852\\
\alpha_3 =&2428636525764260\\
\alpha_4 =&-4768916800123440\\
\alpha_5 =&8855416648684984\\
\alpha_6 =&-10905371859796660\\
\alpha_7 =&10069615750132836\\
\alpha_8 =&-3759785974054070
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{17} = \frac{25677692814137083}{9395719989569069730709540840683636326400000} \leq 10^{-25}$$

1.4 *Formule di integrazione aperte.*

$\boxed{n = 0}$

$$
\begin{aligned}
\mu =&1\\
\lambda_1 =&1
\end{aligned}
$$

$$\theta_0 = \frac{1}{4} \leq 10^{0}$$
$$\eta_0 = \frac{1}{24} \leq 10^{-1}$$

$\boxed{n = 1}$

$$
\begin{aligned}
\mu =&2\\
\lambda_1 =&1
\end{aligned}
$$

$$\theta_1 = \frac{11}{324} \leq 10^{-1}$$

$\boxed{n = 2}$

$$\begin{aligned} \mu =& 3 \\ \lambda_1 =& 2 \\ \lambda_2 =& -1 \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \frac{5}{1536} \leq 10^{-2}$$
$$\eta_2 = \frac{1}{3072} \leq 10^{-3}$$

$\boxed{n = 3}$

$$\begin{aligned} \mu =& 24 \\ \lambda_1 =& 11 \\ \lambda_2 =& 1 \end{aligned}$$

$$\theta_3 = \frac{551}{2250000} \leq 10^{-3}$$

$\boxed{n = 4}$

$$\begin{aligned} \mu =& 20 \\ \lambda_1 =& 11 \\ \lambda_2 =& -14 \\ \lambda_3 =& 26 \end{aligned}$$

$$\theta_4 = \frac{19}{1244160} \leq 10^{-4}$$
$$\eta_4 = \frac{1181}{1058158080} \leq 10^{-5}$$

$\boxed{n = 5}$

$$\begin{aligned} \mu &= 1440 \\ \lambda_1 &= 611 \\ \lambda_2 &= -453 \\ \lambda_3 &= 562 \end{aligned}$$

$$\theta_5 = \frac{40633}{49807880640} \leq 10^{-6}$$

$\boxed{n = 6}$

$$\begin{aligned} \mu &= 945 \\ \lambda_1 &= 460 \\ \lambda_2 &= -954 \\ \lambda_3 &= 2196 \\ \lambda_4 &= -2459 \end{aligned}$$

$$\theta_6 = \frac{9679}{253671505920} \leq 10^{-7}$$

$$\eta_6 = \frac{139}{63417876480} \leq 10^{-8}$$

$\boxed{n = 7}$

$$\begin{aligned} \mu &= 4480 \\ \lambda_1 &= 1787 \\ \lambda_2 &= -2803 \\ \lambda_3 &= 4967 \\ \lambda_4 &= -1711 \end{aligned}$$

$$\theta_7 = \frac{2231497}{1405871470483200} \leq 10^{-8}$$

$\boxed{n = 8}$

$$\begin{aligned}
\mu &= 9072\\
\lambda_1 &= 4045\\
\lambda_2 &= -11690\\
\lambda_3 &= 33340\\
\lambda_4 &= -55070\\
\lambda_5 &= 67822
\end{aligned}$$

$$\theta_8 = \frac{17257}{290304000000000} \leq 10^{-10}$$

$$\eta_8 = \frac{419179}{149688000000000000} \leq 10^{-11}$$

$\boxed{n = 9}$

$$\begin{aligned}
\mu &= 7257600\\
\lambda_1 &= 2752477\\
\lambda_2 &= -6603199\\
\lambda_3 &= 15673880\\
\lambda_4 &= -17085616\\
\lambda_5 &= 8891258
\end{aligned}$$

$$\theta_9 = \frac{7902329}{3904707049181199360} \leq 10^{-11}$$

$\boxed{n = 10}$

$$\begin{aligned}
\mu &= 23100\\
\lambda_1 &= 9626\\
\lambda_2 &= -35771\\
\lambda_3 &= 123058\\
\lambda_4 &= -266298\\
\lambda_5 &= 427956\\
\lambda_6 &= -494042
\end{aligned}$$

$$\theta_{10} = \frac{36991}{585847240120074240} \leq 10^{-13}$$

$$\eta_{10} = \frac{1657}{659078145135083520} \leq 10^{-14}$$

$\boxed{n = 11}$

$$\begin{aligned}
\mu &= 958003200\\
\lambda_1 &= 348289723\\
\lambda_2 &= -1126407423\\
\lambda_3 &= 3371637557\\
\lambda_4 &= -5718293865\\
\lambda_5 &= 6277879038\\
\lambda_6 &= -2674103430
\end{aligned}$$

$$\theta_{11} = \frac{1439788039057}{792124027191914150942208000} \leq 10^{-14}$$

$\boxed{n = 12}$

$$
\begin{aligned}
\mu &= 833976000 \\
\lambda_1 &= 329062237 \\
\lambda_2 &= -1497122214 \\
\lambda_3 &= 6058248882 \\
\lambda_4 &= -16159538710 \\
\lambda_5 &= 32215733235 \\
\lambda_6 &= -47966447844 \\
\lambda_7 &= 54874104828
\end{aligned}
$$

$$
\theta_{12} = \frac{4114475173}{8472820118264294355763200 0} \leq 10^{-16}
$$

$$
\eta_{12} = \frac{911150843}{5449082438558724307550208 00} \leq 10^{-17}
$$

$\boxed{n = 13}$

$$
\begin{aligned}
\mu &= 516612096 \\
\lambda_1 &= 181146041 \\
\lambda_2 &= -737951959 \\
\lambda_3 &= 2671853466 \\
\lambda_4 &= -6013831334 \\
\lambda_5 &= 9451804423 \\
\lambda_6 &= -9336416457 \\
\lambda_7 &= 4041701868
\end{aligned}
$$

$$
\theta_{13} = \frac{2375965520519}{196327754178806250000000000000} \leq 10^{-17}
$$

$\boxed{n = 14}$

$$
\begin{aligned}
\mu &= 1915538625\\
\lambda_1 &= 722204696\\
\lambda_2 &= -3892087348\\
\lambda_3 &= 18150263624\\
\lambda_4 &= -57468376538\\
\lambda_5 &= 137035461016\\
\lambda_6 &= -249560348012\\
\lambda_7 &= 355819203336\\
\lambda_8 &= -399697102923
\end{aligned}
$$

$$\theta_{14} = \frac{292141856009}{1033814331353394999643550515200} \leq 10^{-19}$$

$$\eta_{14} = \frac{17295277}{2019168615924599608678809600} \leq 10^{-21}$$

$$\boxed{n = 15}$$

$$
\begin{aligned}
\mu &= 62768369664000\\
\lambda_1 &= 21326772142769\\
\lambda_2 &= -104877906799553\\
\lambda_3 &= 445971895176889\\
\lambda_4 &= -1240671085036521\\
\lambda_5 &= 2495772757288517\\
\lambda_6 &= -3536302597392469\\
\lambda_7 &= 3330684963199261\\
\lambda_8 &= -1380520613746893
\end{aligned}
$$

$$\theta_{15} = \frac{16436560611150289}{26481506505103135541974319650529280000} \leq 10^{-21}$$

$$\boxed{n = 16}$$

$$\mu = 19059040000$$
$$\lambda_1 = 6912171129$$
$$\lambda_2 = -43087461474$$
$$\lambda_3 = 227788759000$$
$$\lambda_4 = -834322842510$$
$$\lambda_5 = 2317367615100$$
$$\lambda_6 = -4988390746282$$
$$\lambda_7 = 8524579147752$$
$$\lambda_8 = -11696802277350$$
$$\lambda_9 = 12990970309270$$

$$\theta_{16} = \frac{274490126369}{213306244370033698563273680486400000} \leq 10^{-22}$$
$$\eta_{16} = \frac{12305121193453969}{353363389389748253441154113160295219200000} \leq 10^{-24}$$

$\boxed{n = 17}$

$$\mu = 64023737057280000$$
$$\lambda_1 = 21156441141866149$$
$$\lambda_2 = -121972899306097215$$
$$\lambda_3 = 596043470364791516$$
$$\lambda_4 = -1967193294708433100$$
$$\lambda_5 = 4792224378449610000$$
$$\lambda_6 = -8635040534820624232$$
$$\lambda_7 = 11419549616838153340$$
$$\lambda_8 = -10248543211438519308$$
$$\lambda_9 = 4175787902007892850$$

$$\theta_{17} = \frac{25534744478669295197}{101079324218714384442170318511086524661760000} \leq 10^{-24}$$

2. *Equazioni Alle Differenze Finite*

In questa appendice ci occupiamo di studiare un problema abbastanza semplice, ma di grande utilità pratica: risolvere una equazione alle differenze finite.

Definizione 2.1 *Siano $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$, $c_n \neq 0$; diciamo di risolvere una equazione alle differenze finite lineare omogenea se troviamo una successione a valori reali a_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tale che*

$$\sum_{i=0}^{n} c_i a_{k+i} = 0 \ \ , \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se definiamo

$$L(a_k) = \sum_{i=0}^{n} c_i a_{k+i}$$

possiamo riscrivere la nostra equazione nella forma

$$L(a_k) = 0$$

Teorema 2.1 *L'operatore L è lineare, cioè se a_k,b_k sono due successioni reali e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha*

$$L(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha L(a_k) + \beta L(b_k).$$

Posto

$$\mathcal{S} = \{a_k \ : \ L(a_k) = 0\}$$

$\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2 *Siano $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ e siano*

$$\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste una ed una soluzione del problema alle differenze finite

$$\begin{cases} L(a_k) = 0 \\ a_0 = \alpha_0 \ , \ a_1 = \alpha_1 \ , \ ... \ , \ a_{n-1} = \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

Possiamo chiamare il problema considerato nel teorema A6.3 problema alle differenze finite relativo ai dati iniziali $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$.

Il teorema A6.3 e procedimenti del tutto analoghi a quelli usati per i sistemi di equazioni differenziali lineari (si veda il capitolo 17) permettono di dimostrare che

Teorema 2.3 *$\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n.*

Il teorema A6.4, a sua volta, consente di affermare che, se sono note n soluzioni di

$$L(a_k) = 0,$$

cioè n elementi di $\mathcal{S}$ linearmente indipendenti, è possibile trovare ogni altra soluzione come combinazione lineare delle soluzioni note (si confronti con il capitolo 17).

Definizione 2.2 *Siano $a_k^1, ..., a_k^n \in \mathcal{S}$; definiamo la matrice*

$$C_k = \begin{pmatrix} a_k^1 & \dots & a_k^n \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{k+n-1}^1 & \dots & a_{k+n-1}^n \end{pmatrix}$$

C_k è analogo al wronskiano per le equazioni differenziali lineari e si chiama matrice di Casorati.

Esattamente come per le equazioni differenziali lineari si può anche provare che

Teorema 2.4 *Siano $a_k^1, ..., a_k^n \in \mathcal{S}$; sono condizioni equivalenti:*

1. *$a_k^1, ..., a_k^n$ sono linearmente indipendenti (cioè $\gamma_1 a_k^1 + ... + \gamma_n a_k^n = 0 \ \forall k \Rightarrow \gamma_1 = ... = \gamma_n = 0$)*
2. *$det(C_k) \neq 0 \ \ \forall k$*
3. *$det(C_0) \neq 0$.*

Definizione 2.3 *Siano $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ e sia L come nella definizione A6.1, sia inoltre b_k una successione reale.*

Diciamo di risolvere una equazione alle differenze finite lineare non omogenea se troviamo una successione reale a_k tale che

$$L(a_k) = b_k \ .$$

Denoteremo con $\mathcal{T}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea

$$\mathcal{T} = \{a_k \ : \ L(a_k) = b_k\}$$

Teorema 2.5 *Siano L ed a_k come nella definizione precedente e sia d_k una successione reale tale che $L(d_k) = b_k$.*
Allora

$$\mathcal{T} = d_k + \mathcal{S}$$

Il teorema A6.8, con il teorema A6.4, mostra che $\mathcal{T}$ è uno spazio lineare affine su $\mathbb{R}$ e pertanto mette in luce l'importanza, allo scopo di trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$L(a_k) = b_k$$

delle due seguenti questioni:

- trovare n soluzioni linearmente indipendenti di $L(a_k) = 0$
- trovare una soluzione di $L(a_k) = b_k$.

Per trovare una risposta al primo quesito cerchiamo soluzioni di

$$L(a_k) = 0$$

della forma

$$a_k = \lambda^k \quad con \quad \lambda \in C.$$

Affinchè $L(\lambda^k) = 0$ deve aversi

$$\lambda^k \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i = 0$$

e perciò λ deve essere soluzione della seguente equazione algebrica di grado n

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i = 0 \quad .$$

Siano pertanto $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ le soluzioni di $P(\lambda) = 0$ ciascuna con molteplicità $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$; osserviamo che

$$\sum_{i=0}^{r} \mu_i = n$$

ed inoltre se $\lambda = \alpha + i\beta$ è soluzione di $P(\lambda) = 0$ allora anche il suo complesso coniugato $\alpha - i\beta$ è soluzione in quanto i coefficienti di $P(\lambda)$ sono tutti reali.

Ciò permette di associare ad ogni radice

$$\lambda = \alpha \pm i\beta = \rho e^{i\theta}$$

con molteplicità μ le soluzioni

$$\rho^k \sin k\theta \ , \ \rho^k \cos k\theta \ , \ .... \ , \ k^{\mu-1}\rho^k \sin k\theta \ , \ k^{\mu-1}\rho^k \cos k\theta \ .$$

Si ottengono complessivamente n soluzioni, che si possono verificare linearmente indipendenti.

Per quanto riguarda la seconda questione, possiamo dare due risposte di tenore diverso.

Innanzi tutto si può dire che, se

$$b_k = \alpha^k (p_1(k) \sin k\beta + p_2(k) \cos k\beta)$$

ove p_1 e p_2 sono polinomi di grado al più m, si può cercare una soluzione d_k dell'equazione non omogenea, nella forma

$$d_k = k^\mu \alpha^k (q_1(k) \sin k\beta + q_2(k) \cos k\beta)$$

ove μ è la molteplicità di $\alpha e^{i\beta}$ come soluzione di $P(\lambda) = 0$ e q_1 e q_2 sono polinomi di grado m con coefficienti da determinarsi mediante sostituzione nell'equazione assegnata.

Se invece b_k non è del tipo particolare sopra descritto, si può procedere come segue: siano $a_k^1, ..., a_k^n \in \mathcal{S}$ linearmente indipendenti, possiamo cercare $d_k \in \mathcal{T}$ nella forma

$$d_k = \sum_{i=0}^{n} \lambda_k^i a_k^i$$

dove λ_k^i sono successioni da determinarsi.

Esplicitiamo questo procedimento solo nel caso $n = 2$, essendo analogo, ma più laborioso, il caso $n > 2$.

Consideriamo pertanto l'equazione alle differenze finite

$$c_2 a_{k+2} + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = 0$$

e supponiamo che α_k e β_k siano due sue soluzioni linearmente indipendenti.

Allora ogni soluzione è data da

$$a_k = \lambda \alpha_k + \mu \beta_k \quad .$$

Cerchiamo una soluzione di $L(a_k) = b_k$ nella forma

$$a_k = \lambda_k \alpha_k + \mu_k \beta_k$$

imponendo opportune condizioni su λ_k e μ_k.

Osserviamo innanzi tutto che, posto

$$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$$

$$\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k$$

si ha

$$\begin{aligned}
&c_2 a_{k+2} + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = \\
&\qquad = c_2 \Delta^2 a_k + (c_1 + 2c_2)\Delta a_k + (c_2 + c_1 + c_0) a_k = \\
&\qquad\qquad = \gamma_0 \Delta^2 a_k + \gamma_1 \Delta a_k + \gamma_2 a_k
\end{aligned}$$

non appena si siano fatte le opportune identificazioni.

Pertanto

$$\gamma_0 \Delta^2 \alpha_k + \gamma_1 \Delta \alpha_k + \gamma_2 \alpha_k = 0$$

e altrettanto dicasi di β_k .

Possiamo anche calcolare che

$$\Delta a_k = \lambda_k \Delta \alpha_k + \mu_k \Delta \beta_k + \Delta \lambda_k \alpha_{k+1} + \Delta \mu_k \beta_{k+1}$$

e, posto

$$\Delta \lambda_k \alpha_{k+1} + \Delta \mu_k \beta_{k+1} = 0$$

$$\Delta^2 a_k = \lambda_k \Delta^2 \alpha_k + \mu_k \Delta^2 \beta_k + \Delta \lambda_k \Delta \alpha_{k+1} + \Delta \mu_k \Delta \beta_{k+1} \ .$$

Onde, per sostituzione nell'equazione data, tenendo conto che α_k e β_k sono soluzioni dell'omogenea, si ha

$$\begin{cases} \gamma_0 (\Delta \alpha_{k+1} \Delta \lambda_k + \Delta \beta_{k+1} \Delta \mu_k) = b_k \\ \alpha_{k+1} \Delta \lambda_k + \beta_{k+1} \Delta \mu_k = 0 \end{cases}$$

ed è possibile da esse ricavare

$$\Delta \lambda_k \quad e \quad \Delta \mu_k$$

e λ_k e μ_k successivamente. A titolo di esempio consideriamo il problema

$$\begin{cases} a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

Si ha

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a_k = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Imponendo $a_0 = a_1 = 1$ si ottiene

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad , \quad \mu = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

e

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} .$$

Tale successione è nota con il nome di *successione dei numeri di Fibonacci.* Sia ancora

$$\begin{cases} a_{k+2} = 2a_{k+1} \cos 1 - a_k \\ a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = \sin 1 \end{cases}$$

Si ha

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda \cos 1 + 1 = 0$$

e

$$\lambda = \cos 1 + i \sin 1 = e^i$$

da cui, tenendo anche conto delle condizioni iniziali

$$a_k = \sin k.$$