1. Funzioni Di Due Variabili

I modelli matematici spesso devono tenere conto di molti parametri e per questa ragione non è sufficiente considerare funzioni di una sola variabile reale; spesso anzi il numero di parametri in gioco è molto alto e quindi bisogna ricorrere all'uso di funzioni di molte variabili reali.

Dal punto di vista concettuale non c'è grande differenza tra lo studio di una funzione di $2, 3$ o 100 variabili reali, ma la differenza tra lo studio di una funzione di 1 variabile reale ed una funzione di 2 variabili reali è grande e va considerata attentamente.

Sviluppiamo pertanto lo studio di una funzione di 2 variabili reali per introdurre gli strumenti necessari al trattamento delle funzioni di più variabili reali a valori reali.

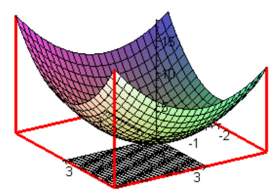
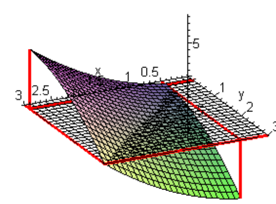


Figure 1.1:



Fi

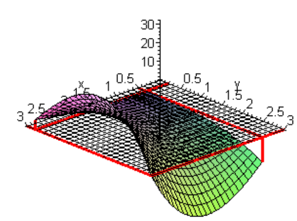


Figure 1.3: .

Definizione 1.1 *Diciamo che è data una funzione di due variabili reali se sono assegnati un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ ed una corrispondenza f che ad ogni elemento $P = (x, y) \in D$ associa uno ed un solo elemento $z \in \mathbb{R}$.*

Diciamo che D è il dominio della funzione e denotiamo con

$$z = f(x, y) = f(P)$$

il corrispondente di $P = (x, y)$ secondo la legge assegnata f; scriviamo anche

$$P = (x, y) \mapsto z = f(x, y) = f(P)$$

Chiamiamo rango di f l'insieme

$$R(f) = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$$

Chiamiamo grafico di f l'insieme

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$$

Osservazione. Il grafico di una funzione di 2 variabili è pertanto un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che descrive qualcosa che è immediato identificare come una superficie nello spazio. □

Restrizione e composizione di funzioni sono definite come nel caso reale e parimenti simile è la definizione di iniettività, surgettività, bigettività.

Per avere un'idea del comportamento della funzione sarebbe comodo poter disporre del suo grafico, che nel caso di funzioni di 2 variabili si rappresenta in uno spazio a 3 dimensioni $\mathbb{R}^3$; dobbiamo però tenere presente che:

1. Non è possibile rappresentare il grafico di funzioni che dipendano da 3 o più variabili

2. La rappresentazione in $\mathbb{R}^3$ di una funzione di due variabili passa attraverso tecniche di prospettiva.

3. La proprietà che risulta di maggiore interesse per tracciare il grafico qualitativo di una funzione di 1 variabile è la crescenza o la decrescenza, che per le funzioni di 2 o più variabili non può più essere considerata dal momento che il dominio $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$) non ammette un ordine completo.

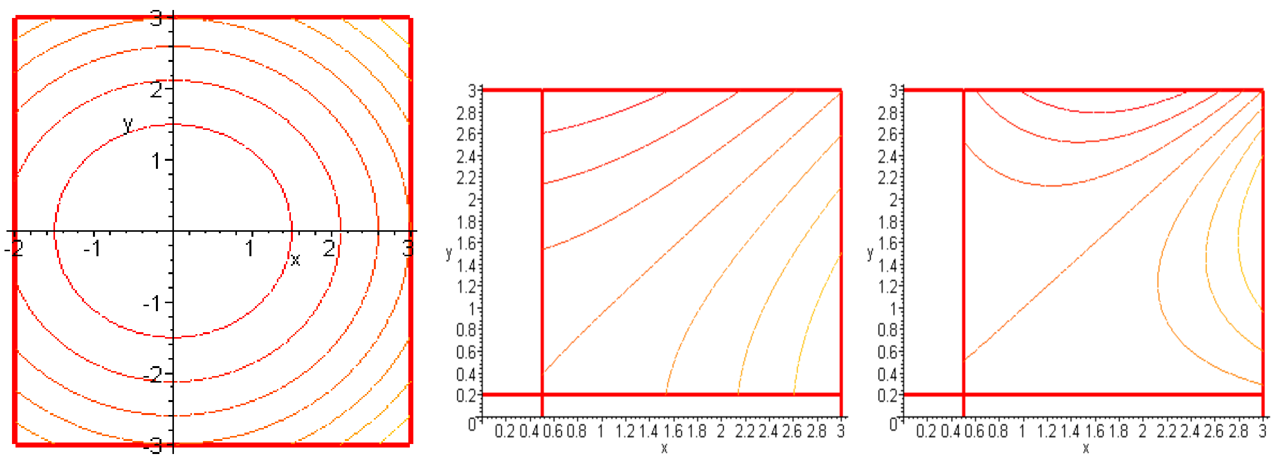


Figure 1.4: .

Non sarà pertanto semplice disegnare il grafico qualitativo di una funzione di 2 variabili e per farci un'idea del suo andamento dovremo ricorrere a rappresentazioni nel piano.

Un modo efficace di rappresentare una superficie è disegnare nel piano (x, y) le curve di livello della funzione.

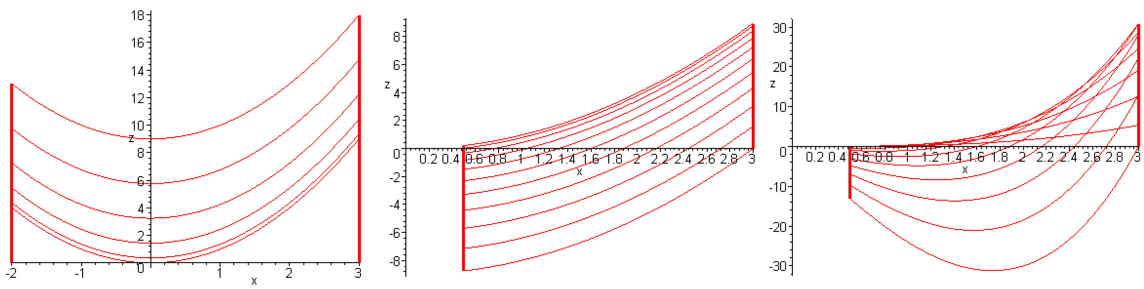
Definizione 1.2 *Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ chiamiamo curve od insiemi di livello di f di altezza c gli insiemi*

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

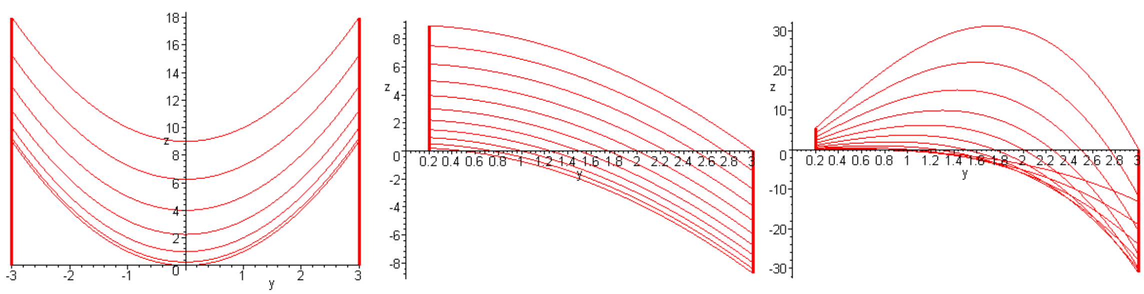
Le curve di livello di f consentono, in pratica, di rappresentare una mappa della superficie in esame. Esse definiscono i punti in cui la superficie assume quota costante uguale a c e, se le quote c sono scelte ad intervalli regolari, permettono di individuare le zone in cui la superficie è più ripida (le curve di livello sono più ravvicinate).

Le superfici prese in considerazione nella figura **??** hanno le curve di livello mostrate nella figura **??**

Per farci un'idea del grafico possiamo anche considerare l'andamento delle funzioni di x che si ottengono considerando fissati i valori di y; chiamiamo questi grafici sezioni lungo l'asse x, si veda figura **??**, e delle funzioni di y che si ottengono considerando fissati i valori di x; chiamiamo questi grafici sezioni lungo l'asse y, si veda figura **??**.



Come per le funzioni di una variabile è importante studiare la continuità e la derivabilità di una funzione di 2 o più variabili. Ovviamente per poter considerare la continuità è necessario conoscere la definizione di limite e ancora prima la definizione di intorno e la struttura dello spazio $\mathbb{R}^2$ in cui stiamo lavorando.



1.1 La struttura di $\mathbb{R}^2$.

Indichiamo con $\mathbb{R}^2$ lo spazio vettoriale costituito dalla coppie ordinate di numeri reali; in altre parole

$$P \in \mathbb{R}^2 \;\Leftrightarrow\; P = (x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

In $\mathbb{R}^2$ si definiscono le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare mediante le

$$P_1 + P_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e, se $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha P = (\alpha x, \alpha y)$$

L'insieme dei vettori

$$e_1 = (1, 0) \qquad , \qquad e_2 = (0, 1)$$

costituisce una base di $\mathbb{R}^2$; si avrà pertanto che, se $P \in \mathbb{R}^2$,

$$P = xe_1 + ye_2 = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$$

Definizione 1.3 *Si definisce norma in $\mathbb{R}^2$ una funzione che si indica con*

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

che verifica le seguenti proprietà:

- $\|P\| \geq 0 \qquad \forall P \in \mathbb{R}^2$
- $\|P\| = 0 \ \Leftrightarrow \ P = 0$
- $\|\alpha P\| = |\alpha| \|P\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall P \in \mathbb{R}^2$
- $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\| \qquad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$

Si definisce prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ una funzione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

- $\langle P, P \rangle \geq 0 \qquad \forall P \in \mathbb{R}^2$
- $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle \qquad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$
- $\langle P, P \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = 0$
- $\langle \alpha P + \beta Q, R \rangle = \alpha \langle P, R \rangle + \beta \langle Q, R \rangle \quad \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Un esempio notevole di norma in $\mathbb{R}^2$ è

$$\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La norma di P indica la distanza di P dall'origine $O = (0, 0)$; se $P = (x, y), P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\|P - P_0\|$$

indica la distanza tra i punti P e P_0.

Un esempio notevole di prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ è definito da

$$\langle P_1, P_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Se $\rho > 0$ chiamiamo intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$, l'insieme

$$S(P_0, \rho) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \|P - P_0\| < \rho\}$$

$S(P_0, \rho)$ è la sfera di centro P_0 e raggio ρ.

Definiamo inoltre intorno di ∞ il complementare di ogni sfera centrata nell'origine.

$$S(\infty, \rho) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \|P\| > \rho\}$$

Diciamo che due vettori $P, Q \in \mathbb{R}^2$ sono ortogonali se $\langle P, Q\rangle = 0$.

Diciamo che sono paralleli se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $P = \lambda Q$.

Altri esempi di norme in $\mathbb{R}^2$ sono i seguenti

$$\|P\|_k = (|x|^k + |y|^k)^{1/k} \qquad k \geq 1$$

$$\|P\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

Norme euclidea e prodotto scalare sono legati dalla seguente

Disuguaglianza di Schwarz

Per $P, Q \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\boxed{|\langle P, Q\rangle| \leq \|P\|\|Q\|}$$

La disuguaglianza di Schwarz può essere dedotta osservando che, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|P + tQ\|^2 = \langle P + tQ, P + tQ\rangle = t^2\|Q\|^2 + 2t\langle P, Q\rangle + \|P\|^2$$

Ciò implica infatti che

$$\langle P, Q\rangle^2 - \|P\|^2\|Q\|^2 \ \leq 0$$

Dalla dalla disuguaglianza di Schwarz possiamo anche ricavare la disuguaglianza triangolare; infatti

$$\|P + Q\|^2 = \|P\|^2 + \|Q\|^2 + 2\langle P, Q\rangle \leq \|P\|^2 + \|Q\|^2 + 2\|P\|\|Q\|.$$

Osserviamo infine che

$$|\langle P, Q\rangle| = \|P\|\|Q\|$$

se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $P + tQ = 0$, ovvero P e Q sono paralleli.

Da quanto detto si può dedurre che

$$\|P\| = \sup\{\langle P, Q\rangle : \|Q\| \leq 1\} = \max\{|\langle P, Q\rangle| : \|Q\| \leq 1\}$$

1.2 *Limiti e continuità per le funzioni di* 2 *variabili.*

Definizione 1.4 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ e sia P_0 un punto tale che ogni intorno di P_0 abbia intersezione non vuota con A (chiamiamoP_0 punto di accumulazione per A); diciamo che*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell$$

se $\forall\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tale che per* $P \in S(P_0, \delta(\varepsilon)) \cap A$, $P \neq P_0$ *si ha*

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$$

È possibile verificare che

1. ogni funzione che ammette limite finito è localmente limitata;
2. il limite di una funzione, se esiste, è unico;
3. vale il teorema della permanenza del segno;
4. il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti, se questi esistono finiti;
5. il limite del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto dei limiti, se questi esistono finiti;
6. il limite del reciproco di una funzione è uguale al reciproco del limite della funzione stessa, se non è nullo
7. valgono i risultati sul confronto dei limiti, in analogia a quanto già visto per le funzioni di una variabile
8. il limite di una funzione può essere caratterizzato per successioni
9. il limite di una funzione composta si calcola seguendo quanto fatto per le funzioni di una variabile

Definizione 1.5 *Diciamo che* f *è una funzione continua in* P_0 *se* $\forall\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tale che se* $x \in A$, $\|P - P_0\| < \delta(\varepsilon)$ *si ha*

$$\|f(P) - f(P_0)\| < \varepsilon$$

Nel caso in cui $P_0 \in A$*, sia un punto di accumulazione per* A *la condizione sopra espressa è equivalente alla*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

Ovviamente f *si dice continua in* A *se è continua in ogni punto di* A

Come nel caso delle funzioni reali di una variabile reale si prova che:

1. la somma di funzioni continue è continua;
2. il prodotto di una funzione a valori vettoriali per una funzione a valori scalari, entrambe continue, è continuo;
3. il reciproco di una funzione continua è continuo dove ha senso definirlo;

4. il prodotto scalare di due funzioni a valori vettoriali continue, è continuo;
5. vale la caratterizzazione della continuità per successioni
6. la composta di funzioni continue è una funzione continua.

La conoscenza della continuità delle funzioni elementari e le regole precedentemente enunciate permettono di stabilire in modo semplice la continuità in un gran numero di casi: ad esempio, poichè $(x, y) \mapsto x^2$ e $(x, y) \mapsto y^2$ sono continue possiamo anche affermare che

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

è continua, se poi ricordiamo che l'esponenziale è continua avremo anche che

$$(x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$$

è continua.

Come per le funzioni continue di una variabile si possono provare importanti teoremi, tra i quali ricordiamo i seguenti risultati.

Teorema 1.1 - **di Weierstraß** - *Se f è una funzione continua su un insieme A che sia chiuso (contiene i limiti di ogni successione convergente di suoi punti) e limitato (è contenuto in una sfera) allora f ammette massimo e minimo assoluto su A*

Teorema 1.2 - **degli zeri** - *Se f è una funzione continua su un insieme A connesso (cioè, in parole semplici, fatto di un solo pezzo) e se esistono due punti $P_+, P_- \in A$ tali che*

$$f(P_+) > 0 \ , \ f(P_-) < 0$$

allora esiste un punto $P_0 \in A$ tale che

$$f(P_0) = 0$$

Un semplice ragionamento assicura, utilizzando il teorema degli zeri, che se una curva di livello di f

$$L_c = \{(x, y) \in U \ : \ f(x, y) = c\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in I, y = \varphi(x)\}$$

divide il piano in due parti connesse allora $f(x, y) > 0$ in una delle due parti e $f(x, y) < 0$ nell'altra.

Se infatti in una parte connessa ci fossero due punti P_+, P_- tali che

$$f(P_+) > 0 \ , \ f(P_-) < 0$$

esisterebbe in quella parte P_0 tale che

$$f(P_0) = 0$$

ma in quella parte si può solo avere $f(P) > 0$ oppure $f(P) < 0$.

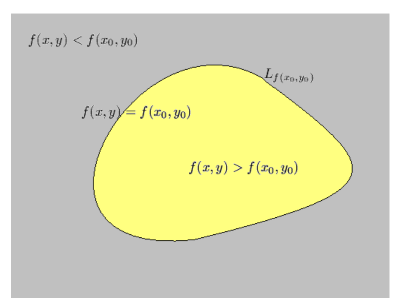


Figure 1.5: Curve di livello e segno di f

1.3 Derivabilità e differenziabilità per funzioni di 2 variabili.

Come per le funzioni di 1 variabile è necessario considerare il problema della approssimazione mediante funzioni lineari, cioè il problema della differenziazione.

È molto naturale porre la seguente definizione

Definizione 1.6 *Diciamo che f è derivabile parzialmente se le funzioni*

$$\phi(x) = f(x,y) \qquad \psi(y) = f(x,y)$$

sono derivabili.

Chiamiamo $\phi'(x) = f_x(x,y)$ derivata parziale rispetto ad x e $\psi'(y) = f_y(x,y)$ derivata parziale rispetto ad y; definiamo inoltre gradiente di f e scriviamo $\nabla f(x,y)$ il vettore (punto di $\mathbb{R}^2$) definito da

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

Di fatto in tal modo si opera derivando rispetto ad x (o ad y) con y (o x) fissati.

Va osservato che, pur essendo molto naturale, l'uso delle derivate parziali non consente, da solo, di ricavare informazioni utili sulla funzione in esame.

Si pensi ad esempio che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; xy = 0 \\ 0 & \text{se } \; xy \neq 0 \end{cases}$$

il cui grafico, si veda la figura **??** è costituito dal piano $z = 0$ privato degli assi x ed y e dalle due rette parallele agli assi x ed y poste a quota $z = 1$, non è continua in $(0,0)$ pur avendo derivate parziali nulle in $(0,0)$.

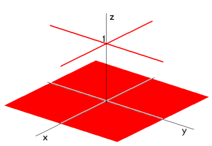


Figure 1.6: Il grafico di una funzione derivabile parzialmente, non continua.

Occorre quindi definire cosa si intende per differenziabile e per questo serve parlare di applicazioni lineari.

Definizione 1.7 *Si chiama applicazione lineare in $\mathbb{R}^2$ una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q) \;\; \forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \,, \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

L'insieme delle applicazioni lineari su $\mathbb{R}^2$ si chiama anche spazio duale di $\mathbb{R}^2$.

Ogni applicazione lineare in $\mathbb{R}^2$ si può identificare con un punto P^* di $\mathbb{R}^2$ mediante la seguente uguaglianza

$$f(P) = \langle P, P^* \rangle$$

In altre parole le applicazioni lineari su $\mathbb{R}^2$ sono tutte e sole le funzioni che si possono scrivere nella forma

$$f(P) = \langle P, P^* \rangle \quad \text{con} \qquad P^* \in \mathbb{R}^2$$

È anche utile ricordare che per funzioni lineari possiamo provare che

Se f è una applicazione lineare su $\mathbb{R}^2$ allora

$$|f(P)| = |\langle P, P^* \rangle| \leq \|P\| \|P^*\|$$

Diciamo che $f \in \mathcal{C}^1(A)$ se f ammette derivate parziali continue in A.

Definizione 1.8 *Diciamo infine che f è differenziabile in P_0 se esiste $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tale che*

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - \big(f(P_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)\big)}{\|P - P_0\|} = 0$$

Pertanto una funzione è differenziabile se

$$\boxed{f(P) = f(P_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)) + \|P - P_0\| \omega(P - P_0)}$$

dove ω è una funzione infinitesima per $P \to P_0$

$$\omega(P - P_0) = \frac{f(P) - (f(P_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0))}{\|P - P_0\|}$$

Questa proprietà si esprime dicendo che $f(P)$ si può approssimare con una funzione lineare affine

$$\boxed{t(P) = f(P_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0))}$$

a meno di un infinitesimo

$$\|P - P_0\| \omega(P - P_0)$$

di ordine superiore al primo rispetto alla distanza $\|P - P_0\|$.

La funzione $t(p)$ si definisce piano tangente al grafico di f nel punto P_0

Se f è differenziabile in P_0 allora f è anche derivabile parzialmente e si può verificare che risulta

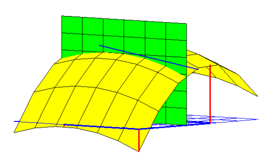


Figure 1.7: Derivata Direzionale

$$\alpha = f_x(P_0) \qquad \beta = f_y(P_0)$$

pertanto

Il piano tangente al grafico di una funzione f in P_0 è dato da

$$\boxed{t(P) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0))}$$

Definizione 1.9 *Se $Q \in \mathbb{R}^2$, diciamo che f è derivabile in P_0 rispetto al vettore Q o che f ammette derivata in P_0 lungo la direzione Q se*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(P_0 + tQ) - f(P_0)}{t}$$

esiste finito. In tal caso denotiamo il valore di tale limite con $f'(P_0, Q)$ e lo chiamiamo derivata direzionaledi f in P_0 lungo la direzione Q.

Si può vedere che f è derivabile rispetto alla prima variabile se e solo se $f'(P_0, e_1)$ ed $f'(P_0, -e_1)$ esistono finiti e

$$f'(P_0, e_1) = -f'(P_0, -e_1)$$

Analogamente f è derivabile rispetto alla seconda variabile se e solo se $f'(P_0, e_2)$ ed $f'(P_0, -e_2)$ esistono finiti e

$$f'(P_0, e_2) = -f'(P_0, -e_2)$$

Si dimostra che

Teorema 1.3 *Se f è differenziabile in P_0; allora f è derivabile in P_0 lungo ogni direzione Q e si ha*

$$f'(P_0, Q) = \langle \nabla f(P_0), Q \rangle$$

È utile estendere alle funzioni di più variabili la regola di derivazione delle funzioni composte; ci limitiamo qui a considerare solo due casi particolari.

Siano

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad , \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) = (x(t), y(t)) \mapsto f(g(t)) = f(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

Se f e g sono differenziabili (non solo derivabili!) allora

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\dot{y}(t)$$

Se viceversa consideriamo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad , \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto g(x, y) \mapsto f(g(x, y)) \in \mathbb{R}$$

e se f e g sono anche qui differenziabili avremo che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(g(x, y))g_x(x, y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(g(x, y))g_y(x, y)$$

Abbiamo già visto che
se f è differenziabile in $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e se Q è una direzione in $\mathbb{R}^2$, allora

$$f'(P_0, Q) = \langle \nabla f(P_0), Q \rangle = \|\nabla f(P_0)\| \|Q\| \cos \alpha$$

dove α è l'angolo formato dai vettori $\nabla f(P_0)$ e Q nel piano da essi individuato.

Ne possiamo dedurre che
la derivata direzionale è

- massima quando $\cos \alpha = 1$ e cioè quando $\alpha = 0$ e $Q = \nabla f(P_0)$,
- nulla quando $\cos \alpha = 0$ e cioè quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $Q \perp \nabla f(P_0)$,
- minima quando $\cos \alpha = -1$ e cioè quando $\alpha = \pi$ e $Q = -\nabla f(P_0)$.

Consideriamo ora una curva di livello di f

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = c\}$$

e supponiamo che sia rappresentabile, almeno localmente, mediante il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ In termini un po' più precisi supponiamo che

$$L_c = \{(x, y) \in U \ : \ f(x, y) = c\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in I, y = \varphi(x)\}$$

o più semplicemente

$$f(x, y) = c \iff f(x, \varphi(x)) = c \iff y = \varphi(x)$$

Da $f(x, \varphi(x)) = c$, derivando e tenendo presenti le regole di derivazione delle funzioni composte, otteniamo che:

$$f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

da cui

$$\langle \nabla f(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle = 0$$

e possiamo ricavare che

$$\nabla f(x, \varphi(x)) \perp (1, \varphi'(x))$$

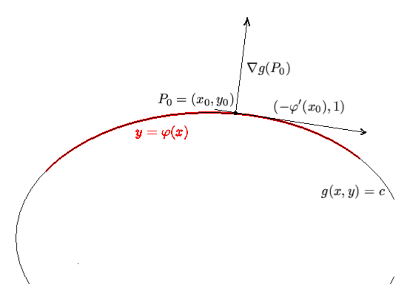


Figure 1.8: Curve di Livello e Gradiente.

D'altro canto la retta tangente τ al grafico di φ nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è data da

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

e si può scrivere nella forma

$$\langle (x - x_0, y - y_0), (\varphi'(x_0), -1) \rangle = 0$$

dalla quale risulta evidente che

$$(\varphi'(x_0), -1) \perp P \qquad \forall P \in \tau$$

Se ora teniamo conto che, evidentemente,

$$\langle(\varphi'(x_0), -1), (1, \varphi'(x_0))\rangle = 0$$

e quindi

$$(\varphi'(x_0), -1) \perp (1, \varphi'(x_0))$$

possiamo ricavare che

$$\nabla f(x, \varphi(x)) \perp P \qquad \forall P \in \tau \tag{1.1}$$

Poichè τ è la retta tangente in P_0 al grafico della funzione φ che rappresenta vicino al punto P_0 (localmente in P_0) la curva di livello L_c, esprimeremo la 1.1 dicendo che

il gradiente di f, cioè il vettore $\nabla f(x, y)$, è ortogonale alle curve di livello di f ($L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = c\}$)

1.4 *Derivate del secondo ordine: forma quadratica Hessiana.*

Possiamo anche considerare le derivate seconde rispetto ad x due volte, ad y due volte, ad x e ad y , ad y e ad x; chiamiamo queste derivate

$$f_{xx}(P_0) \qquad f_{y,y}(P_0) \qquad f_{x,y}(P_0) \qquad f_{y,x}(P_0)$$

Si può dimostrare che, nel caso in cui $f_{x,y}(P_0)$, o $f_{y,x}(P_0)$ sia continua allora (**teorema di Scharwz**)

$$\boxed{f_{x,y}(P_0) = f_{y,x}(P_0)}$$

Ciò si esprime dicendo che le derivate seconde miste sono uguali.

Chiamiamo matrice Hessiana la matrice i cui elementi sono le derivate seconde di f. Cioè

$$Hf(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui le derivate miste siano uguali, la matrice Hessiana è simmetrica.

Ad ogni matrice simmetrica, e quindi anche alla matrice Hessiana, possiamo associare un polinomio di secondo grado in 2 variabili (e.g. h, k) omogeneo che chiamiamo forma quadratica associata.

La forma quadratica Hessiana è, posto $R = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

$$Q(R) = Q(h,k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =$$
$$R^T Hf(P_0) R = f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2$$

Diciamo che la forma quadratica Q è semidefinita positiva se

$$Q(h,k) = f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 \geq 0$$

per ogni $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Diciamo che Q è definita positiva se

$$Q(h,k) = f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 > 0$$

per ogni $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$.

Ovviamente per identificare una forma quadratica semidefinita o definita negativa è sufficiente cambiare il segno delle disuguaglianze.

Semplici considerazioni sul segno di un trinomio di secondo grado permettono di ottenere condizioni per studiare il carattere di una forma quadratica.

La forma quadratica Q è definita positiva se

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} > 0$$

e $f_{xx}(P_0) > 0$, oppure $f_{yy}(P_0) > 0$

Osservazione. Se

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - (f_{xy}(P_0))^2 > 0$$

allora

$$f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) \geq (f_{xy}(P_0))^2 > 0$$

e quindi $f_{xx}(P_0)$ ed $f_{yy}(P_0)$ hanno lo stesso segno □

La forma quadratica Q è semidefinita positiva se

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} \geq 0$$

e $f_{xx}(P_0) \geq 0$, o equivalentemente $f_{yy}(P_0) \geq 0$

Si può inoltre dimostrare che

Se λ_1, λ_2 sono gli autovalori della matrice

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} \geq 0$$

allora, per la simmetria della matrice, essi sono reali ed inoltre

- se λ_1, λ_2 sono entrambi positivi (negativi) la forma quadratica Q è definita positiva (negativa)
- se λ_1, λ_2 sono entrambi positivi (negativi) o nulli la forma quadratica Q è semidefinita positiva (negativa)
- se λ_1, λ_2 hanno segni discordi la forma quadratica Q è non definita

Osservazione. Se

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} < 0$$

la forma quadratica può assumere sia valori positivi che negativi e quindi non è definita. □

1.5 Massimi e minimi per le funzioni di 2 variabili.

Definizione 1.10 *Diciamo che P_0 è un punto di minimo (massimo) relativo per f se esiste una sfera $S(P_0, \rho)$, $\rho > 0$, tale che*

$$f(P) \geq f(P_0) \qquad (f(P) \leq f(P_0))$$

per ogni $P \in S(P_0, \rho)$

Utilizzando tecniche che sfruttano i risultati noti per le funzioni di una variabile possiamo provare le seguenti condizioni necessarie per l'esistenza di un punto di minimo o massimo relativo.

Teorema 1.4 *Se P_0 è un punto di minimo (massimo) relativo per f interno al suo dominio ed f è differenziabile in P_0. Allora*

- $\nabla f(x) = 0$;

se inoltre f ammette derivate seconde continue in P_0,

- *$Hf(x)$ è semidefinita positiva (negativa).*

Osservazione. Se $\nabla f(x) = 0$ e se Hf(x) non è definito, allora P_0 non è né punto di massimo relativo, né punto di minimo relativo per f; un punto siffatto viene solitamente indicato con il nome di 'punto sella'. □

Teorema 1.5 *Se $f \in \mathcal{C}^2(A)$; e se P_0 è interno al suo dominio e se*

- $\nabla f(P_0) = 0$
- *$Hf(P_0)$ è definita positiva (negativa)*

allora P_0 è punto di minimo (massimo) relativo per f.

Anche per le funzioni di due variabili si può definire e studiare la convessità:

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, e sia $A \subset \mathbb{R}^2$ convesso, cioè supponiamo che A contenga ogni segmento di retta i cui estremi siano contenuti in A;

diciamo che f è convessa se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

Inoltre f si dice strettamente convessa se vale la disuguaglianza stretta.

Osservazione. si può dimostrare che se f è convessa allora i suoi insiemi di livello L_c sono a loro volta convessi un insieme convesso □

Inoltre possiamo anche dimostrare che

Teorema 1.6 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ convessa, A aperto; allora*

- *f è continua in A*
- *$f'(P, Q)$ esiste $\forall P \in A$, $\forall Q \in \mathbb{R}^2$.*

Come per le funzioni di una variabile la convessità si può caratterizzare utilizzando le derivate come si vede dall'enunciato del teorema seguente.

Teorema 1.7 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ convesso, aperto; supponiamo inoltre $f \in \mathcal{C}^2(A)$, allora sono condizioni equivalenti:*

- *f è convessa*
- $$f(y) \geq f(P_0) + \langle \nabla f(P_0), P - P_0 \rangle \quad \forall P, P_0 \in A$$
- *$Hf(P)$ è semidefinita positiva.*

Inoltre

Ciascuna delle seguenti condizioni è sufficiente per la successiva:

- $Hf(P)$ è definita positiva $\forall P \in A$;
- $f(P) > f(P_0) + \langle \nabla f(P_0), P - P_0 \rangle$ $\forall P, P_0 \in A$, $P \neq P_0$;
- f è strettamente convessa.

Si può inoltre vedere che se f è strettamente convessa e se $f(P) \to +\infty$ per $P \to \infty$; allora esiste uno ed un solo punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(P_0) = \min\{f(P) \ : \ P \in \mathbb{R}^2\}$$

1.6 Massimi e minimi vincolati.

Le condizioni fin qui trovate per caratterizzare i punti di massimo e di minimo relativo sono utilizzabili soltanto nel caso in cui si cerchino massimi e minimi di f all'interno di un determinato insieme; nel caso in cui si vogliano cercare massimi e minimi su insiemi che contengano anche punti non interni, questi ultimi andranno considerati a parte esattamente come a parte debbono essere considerati gli estremi di un intervallo se si considerano funzioni di una variabile.

Questo scopo si può raggiungere considerando le restrizioni di f ai punti non interni; tali restrizioni sono funzioni che dipendono da una sola variabile e si può cercare di trattarle con i risultati noti per tal caso.

Ovviamente lo scopo è individuare eventuali massimi o minimi per mezzo di condizioni necessarie e, se si è certi della loro esistenza, tra essi scegliere massimi e minimi assoluti.

A questo scopo è utile considerare il problema di trovare massimi e minimi di una funzione $f(x, y)$ sull' insieme dei punti del piano che soddisfano l'equazione $g(x, y) = 0$

In questo modo, infatti, è possibile identificare in molti casi l'insieme dei punti di frontiera (e quindi non interni) di un insieme.

Più precisamente ci riferiremo a questo problema come al problema di

Cercare massimi e minimi relativi di f vincolati a $g = 0$

1.6.1 funzioni definite implicitamente.

Per studiare il problema è necessario conoscere qualche cosa in più sull'insieme

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$$

Più precisamente è necessario rendersi conto che G può essere rappresentato localmente mediante il grafico di una funzione φ.

Per chiarire il concetto consideriamo un semplice esempio.

Sia

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

ovviamente $g \in \mathcal{C}^1$ ed inoltre

$$\nabla(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$$

per ognuno dei punti tali che

$$g(x, y) = 0$$

È ben noto che l'equazione

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

identifica una circonferenza di raggio unitario centrata in $(0,0)$.

Per illustrare la possibilità di rappresentare la circonferenza localmente in un punto P_0 mediante una funzione φ possiamo considerare i seguenti casi

- se $P_0 = (0,1)$ possiamo rappresentare la circonferenza mediante la funzione
$$y = \sqrt{1-x^2}$$
- se $P_0 = (0,-1)$ possiamo rappresentare la circonferenza mediante la funzione
$$y = -\sqrt{1-x^2}$$
- se $P_0 = (1,0)$ possiamo rappresentare la circonferenza mediante la funzione
$$x = \sqrt{1-y^2}$$
- se $P_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ possiamo rappresentare la circonferenza sia mediante la funzione
$$y = \sqrt{1-x^2}$$
sia mediante la funzione
$$x = \sqrt{1-y^2}$$
- se $P_0 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ possiamo rappresentare la circonferenza sia mediante la funzione
$$y = \sqrt{1-x^2}$$
sia mediante la funzione
$$x = -\sqrt{1-y^2}$$

In generale non è, tuttavia, possibile trovare esplicitamente la funzione φ, come abbiamo fatto nell'esempio appena visto, tuttavia è per taluni scopi sufficiente sapere che questa funzione esiste.

A questo proposito si può dimostrare che

Teorema 1.8 *- delle funzioni implicite di U. Dini - Se g è sufficientemente regolare ($g \in \mathcal{C}^1$, $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$) l'insieme*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, : \ g(x,y) = 0\}$$

può essere rappresentato localmente, (cioè in un intorno di ogni suo punto), come grafico di una funzione

$$y = \varphi(x)$$

1.6.2 il principio dei moltiplicatori di Lagrange.

Si può trovare una condizione necessaria affinchè un punto P_0 sia di minimo o di massimo per f vincolato a $g = 0$; possiamo enunciare tale condizione come segue

Teorema 1.9 - *dei moltiplicatori di Lagrange- Se* $f, g \in \mathcal{C}^1$, $\nabla f(P_0) \neq (0,0)$ *e* $P_0 = (x_0, y_0)$ *è un punto di minimo o di massimo per* f *vincolato a* $g(x,y) = 0$, *allora*

$$\nabla f(P_0) \parallel \nabla g(P_0)$$

o equivalentemente esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$$

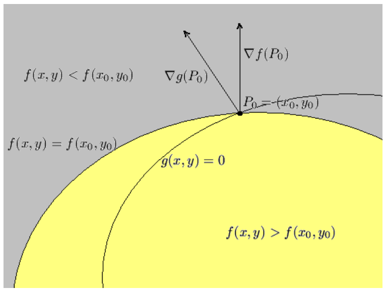


Figure 1.9: Principio dei moltiplicatori di Lagrange

Se infatti $\nabla f(P_0)$ e $\nabla g(P_0)$ non fossero paralleli, tenendo conto del fatto che $\nabla f(P_0)$ è ortogonale alla curva definita da $f(x,y) = f(x_0, y_0)$ mentre $\nabla g(P_0)$ è ortogonale alla curva definita da $g(x,y) = 0$ avremmo una situazione simile a quella illustrata nella figura 1.9.

Dalla figura si vede che ci sarebbero punti soddisfacenti l'equazione $g(x,y) = 0$ tali che $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ ed anche punti tali che $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

Ciò escluderebbe che P_0 sia un punto di minimo o di massimo di f vincolato a $g = 0$

Possiamo dimostrare con maggior precisione il risultato come segue.

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0) \in A \subset \mathbb{R}^2$, A aperto, $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$, e supponiamo che $g(x_0, y_0) = 0$. Supponiamo inoltre che $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, il che significa, a meno di cambiare il nome delle variabili, che si può supporre $g_y(x_0, y_0) \neq 0$; allora si può dimostrare che esiste una funzione φ definita in un intorno di x_0 che assume valori in un intorno di y_0 e per la quale si ha

$$g(x, \varphi(x)) = 0$$

Pertanto la funzione $f(x, \phi(x))$ ammette in x_0 un punto di minimo relativo se e solo se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto di minimo per f vincolato a $g = 0$.

Di conseguenza, se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un minimo relativo per f vincolato a $g = 0$ si ha

$$\frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) = 0$$

ed anche

$$g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) = 0$$

e la coppia $(1, \varphi'(x_0))$ è soluzione non banale del sistema algebrico lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è data da

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0) \\ \nabla g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Ne segue che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli, tali che

$$\alpha\nabla f(x_0, y_0) + \beta\nabla g(x_0, y_0) = 0$$

e, dal momento che $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, ne viene che deve essere $\alpha \neq 0$.

Possiamo pertanto affermare, a meno di dividere per α, che esiste λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda\nabla g(x_0, y_0) = 0$$

Viceversa, posto

$$h(x) = f(x, \varphi(x))$$

se $h'(x_0) = 0$ e $h''(x_0) > 0$, (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo per f vincolato a $g = 0$.

Concludiamo osservando un semplice fatto, spesso utile quando si trattano problemi di programmazione lineare.

Teorema 1.10 *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ convesso, chiuso e limitato, f convessa e continua; allora il massimo di f in A è assunto anche in punti che sono sulla frontiera di A*

Dimostrazione. Sia

$$f(P) = \max\{f(Q) \ : \ Q \in A\}$$

allora, se P è interno ad A, detti $Q, R \in A$ gli estremi del segmento ottenuto intersecando A con una qualunque retta passante per P, si ha

$$P = \lambda Q + (1 - \lambda)R$$

e

$$f(P) \leq \lambda f(Q) + (1 - \lambda)f(R) \leq \max\{f(Q), f(R)\}$$

$\square$

Osservazione. Nel caso in cui A sia poliedrale, cioè se

$$A = \{P \in \mathbb{R}^2 \ : \ g_i(P) \leq 0, \ g_i \ lineare, \ i = 1, .., m \ \}$$

il massimo si può cercare solo tra i vertici della frontiera. $\square$

2. Penalizzazione e moltiplicatori di Lagrange.

In questo capitolo consideriamo un caso semplice per illustrare il metodo di penalizzazione per i problemi di minimo o massimo vincolati. mediante il quale otteniamo una formulazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange Il metodo consente di ridurre un problema di minimo vincolato ad un problema di minimo libero e verrà considerato nel caso generale più avanti.

Teorema 2.1 *Siano $f, g, h, k : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $f, g, h, k \in \mathcal{C}^1(A)$, Sia $x_0 \in A$ e sia $\delta > 0$*

$$S(x_0, \delta) = \{x \in \ \mathbb{R}^n \ : \ ||x - x_0|| \leq \delta\}$$

Definiamo

$$\Omega(x_0, \delta) = \{x \in A \ : \ g(x) = 0, \ h(x) \leq 0, \ k(x) \leq 0\} \cap S(x_0, \delta)$$

Supponiamo inoltre che

$$\begin{cases} h(x_0) = 0 \\ k(x_0) < 0 \end{cases}$$

e definiamo $\phi = (g, h)$.

Supponiamo che $x_0 \in intA$ sia un punto di minimo relativo per f sotto i vincoli g, h, k, supponiamo cioè che esista $\delta > 0$ tale che

$$x_0 \in \Omega(x_0, \delta) \ , \ f(x_0) \leq f(x) \ \ \forall x \in \Omega(x_0, d).$$

Allora esistono $\mu, \lambda, \xi, \eta \in \mathbb{R}$, non tutti nulli tali che

$$\begin{cases} \mu \nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) + \eta \nabla h(x_0) + \xi \nabla k(x_0) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \xi = 0 \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

Se di più $\nabla \phi(x_0)$ ha caratteristica massima, si ha $\mu \neq 0$ e si può supporre $\mu = 1$.

Dimostrazione. Definiamo

$$h^+(x) = max\{h(x), 0) \quad , \quad k^+(x) = max\{k(x), 0)$$

$$\Phi(x) = (h^+(x))^2 + (k^+(x))^2 + (g(x))^2$$

e

$$F_n(x) = f(x) + \|x - x_0\|^2 + n\Phi(x).$$

Sia $\delta > 0$ tale che

$$x_0 \in \Omega(x_0, \delta) \ \ , \ \ f(x_0) \leq f(x) \ \ \forall x \in \Omega(x_0, \delta).$$

F_n ammette minimo assoluto su $S(x_0, \delta)$; supporremo tale minimo assunto nel punto $x_n \in S(x_0, \delta)$.

E' intanto ovvio che, a meno di considerare una estratta, $x_n \to \hat{x}$; proviamo di più che $\hat{x} = x_0$.

Posto

$$m = min\{f(x) \ : \ x \in S(x_0, \delta)\}$$

si ha

$$m + n\Phi(x_n) \leq f(x_n) + n\Phi(x_n) \leq F_n(x_n) \leq F_n(x_0) = f(x_0)$$

e

$$0 \leq \Phi(x_n) \leq \frac{f(x_0) - m}{n}.$$

Pertanto

$$0 = \lim \ \Phi(x_n) = \Phi(\hat{x}) \quad e \ \ \hat{x} \in \Omega(x_0, \delta).$$

Perciò si ha

$$f(x_n) + \|x_n - x_0\|^2 \leq F_n(x_n) \leq F_n(x_0) = f(x_0)$$

e

$$f(\hat{x}) + \|\hat{x} - x_0\|^2 \leq f(x_0).$$

Ricordando che $\hat{x} \in \Omega(x_0, \delta)$ si ha

$$f(x_0) + \|\hat{x} - x_0\|^2 \leq f(\hat{x}) + \|\hat{x} - x_0\|^2 \leq f(x_0)$$

e

$$\|\hat{x} - x_0\|^2 \leq 0$$

da cui

$$\hat{x} = x_0.$$

Poichè, se n è sufficientemente grande, x_n è interno a $S(x_0, \delta)$ il gradiente di Φ si annulla in x_n e si ha che

$$\nabla f(x_n) + 2(x_n - x_0) + \\ + 2nh^+(x_n)\nabla h(x_n) + 2nk^+(x_n)\nabla k(x_n) + 2ng(x_n)\nabla g(x_n) = 0.$$

Pertanto, posto

$$L_n = (1, 2nh^+(x_n), 2nk^+(x_n), 2ng(x_n)))$$

e

$$M_n = L_n/\|L_n\|,$$

si ha

$$\|M_n\| = 1.$$

Indichiamo

$$M_n = (\mu_n, \eta_n, \xi_n, \lambda_n)$$

essendo $\mu_n, \eta_n, \xi_n, \lambda_n$ non tutti nulli.

Inoltre, dal momento che $x_n \to x_0$ e $k(x_0) < 0$, si ha

$$\xi_n = 2nk^+(x_n) = 0$$

per n sufficientemente grande.

Si può allora affermare che

$$\mu_n(\nabla f(x_n) + 2(x_n - x_0)) + \lambda_n \nabla g(x_n) + \eta_n \nabla h(x_n) + \xi_n \nabla k(x_n) = 0$$

con

$$\mu_n,\ \lambda_n,\ \eta_n \geq 0,\ \xi_n = 0.$$

Poiché $\|M_n\| = 1$ si può supporre, a meno di una estratta,

$$\mu_n \to \mu \ \ , \ \ \lambda_n \to \ \lambda \ \ , \ \ \eta_n \to \eta \ \ , \ \xi_n \to \xi \qquad \text{e} \qquad \|(\mu, \lambda, \eta, \xi)\| = 1$$

onde μ, λ, η, ξ non sono tutti nulli, $\xi = 0$ e $\eta \geq 0$

Passando al limite si ottiene

$$\mu \nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) + \eta \nabla h(x_0) + \xi \nabla k(x_0) = 0$$

Infine, poiché $\xi = 0$ si ha , se fosse $\mu = 0$ il sistema

$$\lambda \nabla g(x_0) + \eta \nabla h(x_0) = 0$$

ammetterebbe la soluzione non banale (μ, λ, η), ($\|(\mu, \lambda, \eta, 0)\| = 1$) e perciò la caratteristica di $\nabla \phi(x_0) = (\nabla g(x_0), \nabla h(x_0))$ non potrebbe essere massima. □