1. Integrazione Delle Funzioni Di Piu' Variabili.

La teoria dell'integrazione per le funzioni reali di più variabili deve tenere conto che si può integrare su sottoinsiemi di dimensione non necessariamente uguale al numero delle variabili.

Ad esempio se f dipende da 3 variabili reali avremo bisogno di definire cosa si intende per integrale di f su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, che possiamo intuitivamente definire come un solido (dimensione=3), una superficie (dimensione=2) o una linea (dimensione=1).

Ricordiamo esplicitamente che il concetto di dimensione non è semplice nè univocamente individuato: possiamo parlare di dimensione vettoriale, di dimensione topologica, di dimensione frattale; qui abbiamo fatto semplicemente ricorso ad un concetto intuitivo che si potrebbe precisare, ed in parte si preciserà, parlando di dimensione topologica.

Per semplificare le notazioni e per facilitare la comprensione descriveremo il caso delle funzioni di 3 variabili, essendo facile estendere i concetti al caso delle funzioni con più variabili, a prezzo di una certa complicazione delle notazioni.

1.1 Integrali Multipli

Cominciamo con il dare la definizione di integrale di una funzione limitata su una classe particolare di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ gli intervalli; successivamente estenderemo la definizione ad una più generale classe di insiemi.

1.1.1 Definizione di Integrale

Definizione 1.1 *Siano I_1, I_2, I_3 intervalli chiusi e limitati, $I_i = [a_i, b_i]$, della retta reale.*

Diciamo che

$$R = I_1 \times I_2 \times I_3$$

è un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}^3$.

Nel seguito intenderemo riferirci sempre ad un intervallo chiuso e limitato, anche se queste due proprietà non saranno esplicitamente menzionate.

L'interno di R risulta essere

$$\text{int } R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$$

Definizione 1.2 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$; chiamiamo partizione di R il prodotto cartesiano $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ dove P_i è una partizione dell'intervallo I_i*

Denoteremo con $\mathcal{P}(R)$ l'insieme di tutte le partizioni dell'intervallo R.

Se $P \in \mathcal{P}(R)$, i punti di P dividono R in un numero N di intervalli chiusi la cui unione è R. Tali intervalli saranno indicati con

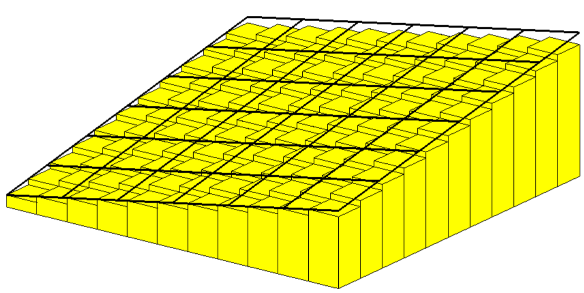
$$\{R_k \ : \ k = 1, 2, ..., N\}$$

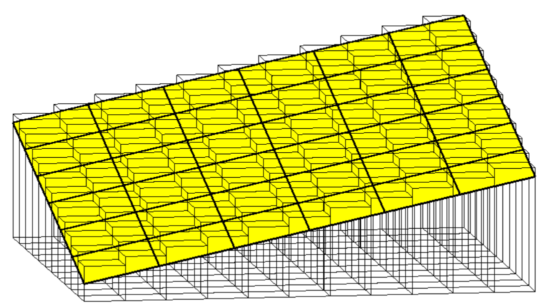
Definizione 1.3 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$ e siano $P, Q \in \mathcal{P}(R)$; diciamo che P è una partizione più fine di Q e scriviamo $P < Q$ se $P \supset Q$.*

In altre parole P è più fine di Q se e solo se ognuno degli intervalli in cui P suddivide R è contenuto in uno degli intervalli in cui Q suddivide R.

Definizione 1.4 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$, definiamo misura di R il numero*

$$\text{mis } R = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$





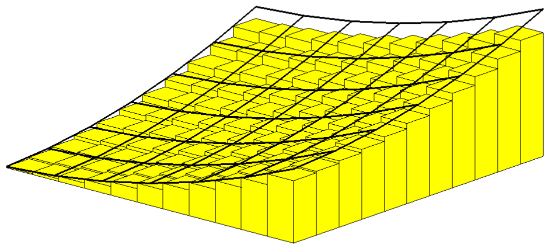
Definizione 1.5 *Sia R un intervallo e sia $P \in \mathcal{P}(R)$; siano R_k, $k = 1, 2, .., N$, gli intervalli in cui la partizione P suddivide R.*

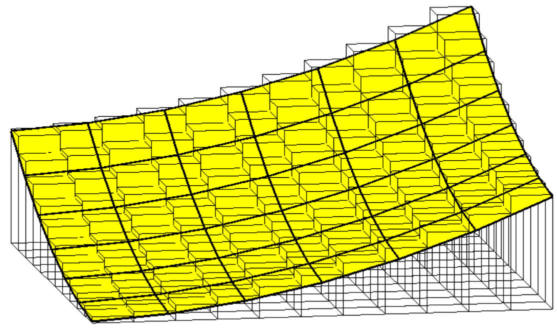
Sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e supponiamo che

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in R$$

Definiamo

$$m_k = \inf\{f(x) \ : \ x \in R_k\}$$





$$M_k = \sup\{f(x) \ : \ x \in R_k\}$$

definiamo inoltre

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{N} m_k \ \operatorname{mis} R_k$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{N} M_k \ \operatorname{mis} R_k$$

$$R(f,P,\Xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \ \operatorname{mis} R_k \qquad , \qquad \xi_k \in R_k$$

essendo Ξ una funzione di scelta che assegna ad ogni intervallo R_k un punto ξ_k.

$L(f,P)$ ed $U(f,P)$ si dicono rispettivamente somme inferiori e somme superiori di f rispetto alla partizione P. $R(f,P,\Xi)$ si dice somma di Riemann di f rispetto alla partizione P e dipende, come è espressamente indicato, anche dalla scelta dei punti ξ_k in R_k.

Esattamente come nel caso di una funzione reale di una variabile reale si può provare che

Teorema 1.1 *Siano R un intervallo di $\mathbb{R}^3$, $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata, allora, se $P, Q \in \mathcal{P}(R)$ e se $P < Q$*

$$m \operatorname{mis} R \leq L(f,Q) \leq L(f,P) \leq R(f,P,\Xi) \leq U(f,P) \leq U(f,Q) \leq M \operatorname{mis} R$$

e per ogni $P, Q \in \mathcal{P}(R)$

$$m \operatorname{mis} R \leq L(f,Q) \leq U(f,P) \leq M \operatorname{mis} R$$

Definizione 1.6 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$ e sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, definiamo*

$$\overline{\int_R} f(x)dx = \inf\{U(f,P) \ : \ P \in \mathcal{P}(R)\}$$

$$\underline{\int}_R f(x)dx = \sup\{L(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(R)\}$$

essi si dicono rispettivamente, integrale superiore ed integrale inferiore della funzione f sull' intervallo R.

E' immediato provare che

$$\boxed{m \operatorname{mis} R \ \leq \ \underline{\int}_R f(x)dx \leq \overline{\int}_R f(x)dx \leq M \operatorname{mis} R}$$

Si è definito l'integrale superiore e l'integrale inferiore usando partizioni del rettangolo di base R in rettangoli chiusi. Vediamo che si giunge allo stesso valore se si considerano questi ultimi rettangoli aperti.

Definizione 1.7 *Sia $R \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo, sia $P \in \mathcal{P}(R)$, sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano R_k , $k = 1, .., N$, i rettangoli in cui P divide R.*

Definiamo

$$m'_k = \inf\{f(x)\ :\ x \in \operatorname{int} R_k\}$$

$$M'_k = \sup\{f(x)\ :\ x \in \operatorname{int} R_k\}$$

$$L'(f,P) = \sum_{k=1}^{N} m'_k mis R_k \ \ , \ \ U'(f,P) = \sum_{k=1}^{N} M'_k \operatorname{mis} R_k$$

$$\underline{\int}'_R f(x)dx \ = \ \sup\{L'(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(R)\}$$

$$\overline{\int}'_R f(x)dx \ = \ \inf\{U'(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(R)\ \}.$$

Osserviamo che $m'_k \geq m_k$, $M'_k \leq M_k$ e che pertanto si ha

$$L(f,P) \leq L'(f,P) \leq U'(f,P) \leq U(f,P)$$

da cui

$$\underline{\int}_R f(x)dx \leq \underline{\int}'_R f(x)dx \leq \overline{\int}'_R f(x)dx \leq \overline{\int}_R f(x)dx$$

Si può però provare che

Lemma 1.1 *Sia $R \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo e sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione limitata; si ha*

$$\underline{\int}'_R f(x)dx = \underline{\int}_R f(x)dx \ \ , \ \ \overline{\int}'_R f(x)dx = \overline{\int}_R f(x)dx$$

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare la prima delle due uguaglianze.
Sia

$$P \in \mathcal{P}(R)\ ,\ P = \times_{i=1}^{n} P_i\ ,\ P_i = \{x_j^i\ :\ j = 0, 1, ..., N_i\}$$

e consideriamo la partizione $P_\varepsilon = P \cup \{x_j^i \pm \varepsilon\}$.

Siano R_k, $k = 1, .., N$ i rettangoli in cui P divide R e siano S_k, $k = 1, .., N'$, $N' > N$, i rettangoli in cui P_ε divide R; conveniamo inoltre di indicare con S_k, $k = 1, .., N$, i rettangoli ottenuti restringendo i lati dei rettangoli R_k, che indicheremo con ^k_i, della quantità 2ε.

Ovviamente, se $k = 1, .., N$, si ha $S_k \subset \operatorname{int} R_k$,

$$m_k^\varepsilon = \inf\{f(x)\ :\ x \in S_k\} \geq \inf\{f(x)\ :\ x \in \operatorname{int} R_k\} = m_k'$$

$$\text{mis } S_k = \text{mis } R_k - \omega_1^k(\varepsilon)$$

non appena si definisca

$$\omega_1^k(\varepsilon) = \prod_i^k - \prod (^k_i - 2\varepsilon)$$

Si ha ovviamente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega_1^k(\varepsilon) = 0$$

Ora

$$\begin{aligned} L(f, P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N'} m_k^\varepsilon \,\text{mis}\, S_k = \\ = \sum_{k=1}^{N} m_k^\varepsilon \, mis S_k + \sum_{k=N+1}^{N'} m_k^\varepsilon \,\text{mis}\, S_k \geq \\ \geq \sum_{k=1}^{N} m_k'(\text{mis}\, R_k - \omega_1^k(\varepsilon)) + m\ \omega_2(\varepsilon) \end{aligned}$$

se definiamo ancora

$$\omega_2(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} (\prod_i^k - \prod(^k_i - 2\varepsilon)) = \sum_{k=1}^{N} \omega_1^k(\varepsilon)$$

per cui si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ \omega_2(\varepsilon) = 0$$

Ma allora

$$L(f, P_\varepsilon) \geq L'(f, P) - \omega(\varepsilon), \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$$

e ne viene

$$\int_{-R} f(x)dx \geq \int_{-R}^{'} f(x)dx$$

l'uguaglianza segue tenendo conto delle precedenti considerazioni. □

1.1.2 Condizioni di Integrabilità - Proprietà degli Integrali

Definizione 1.8 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$ e sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata; diciamo che:*

- *f è integrabile se*

$$\underline{\int_R} f(x)dx = \overline{\int_R} f(x)dx$$

  ed il valore comune ai due integrali superiore ed inferiore si chiama semplicemente integrale di f su R e si denota

$$\int_R f(x)dx$$

- *f soddisfa la condizione di integrabilità se $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tale che $0 \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$;*

- *f è integrabile secondo Cauchy-Riemann se $\exists I \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tale che se $P \in \mathcal{P}(R),\ P < P_\varepsilon$ si ha $|R(f, P, \Xi) - I| < \varepsilon\ \forall \Xi$; il valore I si chiama anche questa volta integrale di f su R.*

> Osserviamo che se la condizione di integrabilità è soddisfatta se e solo se
>
> comunque si scelga $P \in \mathcal{P}(R)$, $P < P_\varepsilon$ si ha
>
> $$0 \leq U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Come per una sola variabile, si enuncia e si prova che

Teorema 1.2 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$ e sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata; sono fatti equivalenti:*

- *f è integrabile*
- *f soddisfa la condizione di integrabilità*
- *f è integrabile secondo Cauchy-Riemann.*

Teorema 1.3 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$ e siano $f, g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni limitate ed integrabili su R; allora*

- *$\forall \alpha, \beta > 0$, $\alpha f + \beta g$ è integrabile su R e*

$$\int_R [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \;=\; \alpha \int_R f(x)dx + \beta \int_R g(x)dx$$

- *fg è integrabile su R;*

- *se S e T sono intervalli in* $\mathbb{R}^3$ *tali che* $R = S \cup T$ *e* $\text{mis}(S \cap T) = 0$*,*

$$\int_R f(x)dx \; = \; \int_S f(x)dx + \int_T f(x)dx$$

- *se* $f \geq 0$

$$\int_R f(x)dx \; \geq 0$$

- *se* $f \geq g$

$$\int_R f(x)dx \; \geq \; \int_R g(x)dx$$

- *se f è continua,* $f \geq 0$*,*

$$\int_R f(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$$

- $|f|$ *è integrabile su R e*

$$\left| \int_R f(x)dx \right| \leq \int_R |f(x)|dx$$

se S e T sono intervalli, $S \subset T \subset R$ *e se* $f \geq 0$*,*

$$\int_S f(x)dx \leq \int_T f(x)dx$$

Teorema 1.4 *Se* $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $R \subset \mathbb{R}^3$ *intervallo, è continua, allora f è integrabile.*

1.1.3 *Formule di Riduzione*

L'integrale che abbiamo definito non può tuttavia essere calcolato, come per il caso delle funzioni di una variabile reale, facendo uso del concetto di primitiva in $\mathbb{R}^3$; il concetto di primitiva ed il teorema fondamentale del calcolo integrale trovano la loro naturale estensione nell'ambito delle forme differenziali e del teorema di Stokes, di cui parleremo più avanti.

Il calcolo di integrali multipli si può però ricondurre al calcolo di più integrali semplici mediante quelle che si chiamano formule di riduzione.

Se $A \subset \mathbb{R}^3$, la funzione

$$\chi_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

si chiama funzione caratteristica di A.

Teorema 1.5 *Sia R un intervallo in $\mathbb{R}^3$ e sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile.*
Allora si ha

$$\int_R f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3)dx_3dx_2dx_1$$

ogniqualvolta esiste il secondo membro.

Dimostrazione. Se $P \in \mathcal{P}(R)$, $R_k = \times[a_{ki}, b_{ki}]$, allora si ha

$$m_k\chi_{R_k}(x) \;\le\; f(x) \;\le\; M_k\chi_{R_k}(x) \quad \forall x \in R_k$$

integrando n volte su $[a_{ki}, b_{ki}]$ e sommando su k si ottiene

$$\sum m_k \operatorname{mis} R_k \;\le\; \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, .., x_n)dx_n..dx_1 \;\le\; \sum M_k \operatorname{mis} R_k$$

Poiché f è integrabile, soddisfa il criterio di integrabilità, e si ha la tesi. □

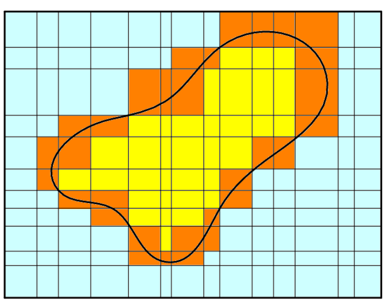


Figure 1.1:

E′ necessario estendere la nozione di integrabilità su insiemi che siano più generali di un intervallo in $\mathbb{R}^3$.

A questo scopo occorre precisare la classe dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sui quali è possibile integrare una funzione.

1.1.4 *Misura di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$*

Definizione 1.9 *Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un insieme limitato e sia R un intervallo che contiene A. Definiamo*

$$\operatorname{mis}^-(A) \;=\; \underline{\int_R} \chi_A(x)dx \;\;,\;\; \operatorname{mis}^+(A) \;=\overline{\int_R} \chi_A(x)dx$$

$\operatorname{mis}^-(A)$ *e* $\operatorname{mis}^+(A)$ *si dicono, rispettivamente misura interna e misura esterna di A.*

Diciamo che A è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^3$ se $\operatorname{mis}^-(A) = \operatorname{mis}^+(A)$*; in tal caso definiamo* $\operatorname{mis}(A)$*, misura di A, il loro comune valore.*

E′ immediato verificare che la precedente definizione non dipende dalla scelta dell′ intervallo R tra tutti quelli che contengono A.

Si può inoltre verificare che

$$\text{mis}^-(A) = \sup_{P\in\mathcal{P}(R)} L(\chi_A, P) \qquad \text{mis}^+(A) = \inf_{P\in\mathcal{P}(R)} U(\chi_A, P)$$

In altre parole

- $\text{mis}^-(A)$ è l'estremo superiore delle somme delle misure degli intervalli chiusi che sono contenute in A
- $\text{mis}^+(A)$ è l'estremo inferiore delle somme delle misure degli intervalli chiusi che contengono punti di A

Infine si può vedere con qualche attenzione che l'estremo superiore e l'estremo inferiore non cambiano se si considerano intervalli aperti in luogo degli intervalli chiusi.

È intuitivamente evidente, si veda la figura **??**, anche se non immediato da dimostrare che

Teorema 1.6 *Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme limitato, allora*

$$\text{mis}^+(\partial A) = \text{mis}^+(A) - \text{mis}^-(A).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia R un rettangolo, $A \subset R$ e sia $P \in \mathcal{P}(R)$. Si ha

$$U'(\chi_{\partial A}, P) = U'(\chi_A, P) - L'(\chi_A, P)$$

Infatti se R_k è un rettangolo che contiene al suo interno un punto $x \in \partial A$, allora R_k contiene anche punti di A e di A^c, perché contiene $S(x,\delta)$ con δ opportuno. Se viceversa esistono $x, y \in intR_k$, $x \in A$, $y \in A^c$, allora $\mu x + (1-\mu)y \in \partial A$ se $\mu = \sup\{\lambda \in [0,1] \ : \ \lambda x + (1-\lambda)y \in A\}$.

Pertanto si ha

$$\text{mis}^+(\partial A) \geq \text{mis}^+(A) - \text{mis}^-(A)$$

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ scelta in modo che

$$U'(\chi_A, P_\varepsilon) \leq \text{mis}^+(A) + \varepsilon$$

$$L'(\chi_A, P_\varepsilon) \geq \text{mis}^-(A) - \varepsilon$$

Allora

$$\begin{aligned}\text{mis}^+(A) - \text{mis}^-(A) + 2\varepsilon \geq U'(\chi_A, P_\varepsilon) - L'(\chi_A, P_\varepsilon) =&\\ = U'(\chi_{\partial A}, P_\varepsilon) \geq \text{mis}^+(\partial A)&\end{aligned}$$

e

$$\text{mis}^+(A) - \text{mis}^-(A) \geq \text{mis}^+(\partial A). \qquad \blacksquare$$

Osservato che si ha

$$0 \leq \text{mis}^-(\partial A) \leq \text{mis}^+(\partial A) = \text{mis}^+(A) - \text{mis}^-(A)$$

□

si può facilmente vedere che

Teorema 1.7 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, limitato, allora A è misurabile se e solo se ∂A è misurabile ed ha misura nulla.*

Osserviamo anche che

$$\text{mis}\, A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)\ :\ U'(\chi_A, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Inoltre, tenuto conto che, se $\text{mis}\, A = \text{mis}\, B = 0$ allora $\text{mis}\, A \cup B = 0$, dal precedente teorema e dal fatto che

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B \qquad \partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B \qquad \partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$$

si ottiene che, se A e B sono misurabili, allora $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ sono misurabili.

Infine, tenendo conto che

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$$

si ottiene

$$\text{mis}\, A \cup B = \text{mis}\, A + \text{mis}\, B - \text{mis}\, A \cap B$$

Abbiamo con ciò che, se $A, B \subset \mathbb{R}^3$ sono misurabili e disgiunti, e se $x \in \mathbb{R}^3$, si ha

- $\text{mis}\, A \geq 0$
- $\text{mis}\, A \cup B = \text{mis}\, A + \text{mis}\, B$
- $\text{mis}(x + A) = \text{mis}\, A$
- $\text{mis}(\times_{i=1}^n [0, 1]) = 1$

Si potrebbe anche vedere che tali proprietà sono, da sole, in grado di caratterizzare la misura sui sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

Teorema 1.8 *Sia $R \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo e sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata; supponiamo inoltre f continua in $R \setminus D$, $misD = 0$, allora f è integrabile in R.*

Dimostrazione. Sia $|f(x)| \leq M \; \forall x \in R$ e sia $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tale che

$$U'(\chi_D, P_\varepsilon) < \varepsilon/(4M)$$

Se $S = \bigcup R_k^D$ essendo l'unione estesa a tutti i rettangoli aperti che contengono punti di D si ha che $R \setminus S$ è chiuso, f è continua su $R \setminus S$ e, per il teorema di Heine-Cantor, è possibile, a meno di raffinare la partizione, far sì che

$$M'_k - m'_k < \varepsilon/(2 \operatorname{mis} R)$$

Ma allora

$$\begin{aligned} U'(f, P_\varepsilon) - L'(f, P_\varepsilon) < \sum (M'_k - m'_k) \operatorname{mis} R_k + 2M \operatorname{mis} S \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mis} R} \operatorname{mis} R + \frac{\varepsilon}{4M} 2M = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 1.9 *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua, $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, allora*

$$\operatorname{mis}(gphf) = 0.$$

Dimostrazione. Dal momento che f è continua su A, che è chiuso e limitato, f è limitata essa stessa e si ha che $gphf \subset R$ ove R è un opportuno rettangolo di $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dal momento che f è uniformemente continua su A, si ha che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $|x_i - y_i| < \delta(\varepsilon)$ si ha

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon \;\; , \; \forall i = 1, .., n \; , \; \forall j = 1, .., m$$

Siano

$$P_\varepsilon = \times_{i=1}^n P_i \;\; , \;\; Q_\varepsilon = \times_{j=1}^m Q_j$$

dove $P_i = \{x_{ik}\}$ è una partizione scelta in modo che $\Delta(P_i) < \delta(\varepsilon)$ e $Q_j = \{m_{ij}^k, M_{ij}^k\}$, ove

$$m_{ij}^k = min\{f_j(x) : x \in [x_{ik}, x_{i,k+1}]\}$$

$$M_{ij}^k = max\{f_j(x) : x \in [x_{ik}, x_{i,k+1}]\}$$

Allora

$$\operatorname{mis}^+(gphf) \leq \varepsilon \operatorname{mis} R$$

e

$$\operatorname{mis}^+(gphf) = 0.$$

□

Corollario 1.1 - *Siano g,f: $A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato; allora, se f e g sono continue*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

è misurabile.

Teorema 1.10 *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso, limitato e misurabile; f continua in $A \setminus D$, $\operatorname{mis} D = 0$. Allora f è integrabile su A.*

Dimostrazione. Sia R un rettangolo tale che $A \subset R$; allora $\chi_A(\dot{)}f(\dot{)}$ è continua su $R \setminus (D \cup \partial A)$ e $\operatorname{mis} D = \operatorname{mis} \partial A = 0$. □

Teorema 1.11 *Sia A un dominio normale in $\mathbb{R}^{n+1}$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $A \setminus D$ con $\operatorname{mis} D = 0$. Allora f è integrabile su A e si ha*

$$\int_A f(x)dx = \int_R \chi_A(x)f(x)dx =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \chi_A(x_1, x_2, ..., x_n, y)f(x_1, x_2, ..., x_n, y)dydx_n...dx_1 =$$
$$= \int_D \int_{g(x)}^{h(x)} f(x_1, x_2, ..., x_n, y)dydx_n \ ... \ dx_1$$

1.1.5 Integrazione su Domini Normali

Definiamo ora l'integrale di una funzione limitata su un insieme misurabile.

Definizione 1.10 *Sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset R \subset \mathbb{R}^3$, A limitato e misurabile, R intervallo in $\mathbb{R}^3$; si definisce*

$$\int_A f(x)dx = \int_R \chi_A(x)f(x)dx.$$

E' banale verificare che la definizione non dipende dalla scelta dell'intervallo R che contiene A.

Possiamo dare il seguente criterio di integrabilità.

Teorema 1.12 *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^3$ chiuso, limitato e misurabile; f continua in $A \setminus D$, $\operatorname{mis} D = 0$. Allora f è integrabile su A.*

Definizione 1.11 *Diciamo che $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è un dominio normale in $\mathbb{R}^{n+1}$ se esistono un insieme $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, e due funzioni continue $g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ x \in D \ , \ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

oppure se

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ a \leq y \leq b \ , \ x \in D_y\}$$

dove D_y è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$.

e si può verificare che

Ogni dominio normale in $\mathbb{R}^{n+1}$ è un insieme misurabile.

Pertanto è lecito integrare funzioni continue, a meno di insiemi di misura nulla, su domini normali e si ha il seguente

Teorema 1.13 *Sia A un dominio normale in $\mathbb{R}^3$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $A \setminus D$ con* $\operatorname{mis} D = 0$.

Allora f è integrabile su A e si ha

$$\begin{aligned}\int_A f(x)dx &= \int_R \chi_A(x)f(x)dx = \\ &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} \chi_A(x_1,x_2,x_3,y)f(x_1,x_2,x_3,y)dydx_3dx_2dx_1 = \\ &= \int_D \int_{g(x_1,x_2,x_3)}^{h(x_1,x_2,x_3)} f(x_1,x_2,...,x_n,y)dydx_3dx_2dx_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

oppure

$$\begin{aligned}\int_A f(x)dx &= \int_R \chi_A(x)f(x)dx = \\ &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} \chi_A(x_1,x_2,x_3,y)f(x_1,x_2,x_3,y)dydx_3dx_2dx_1 = \\ &= \int_a^b \int_{D_y} f(x_1,x_2,...,x_n,y)dx_3dx_2dx_1dy \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.1.6 Trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^3$

È spesso utile, per tenere conto delle caratteristiche di un insieme, considerare un cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^3$.

Per cambiamento di variabili intendiamo una applicazione

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita da

$$\mathbb{R}^3 \ni (t,s,r) \mapsto V(t,s,r) = (x(t,s,r), y(t,s,r), z(t,s,r)) \in \mathbb{R}^3$$

che risulti di classe $\mathcal{C}^1$ sia invertibile e sia tale che

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,s,r)} = \det \begin{pmatrix} x_t & y_t & z_t \\ x_s & y_s & z_s \\ x_r & y_r & z_r \end{pmatrix} \neq 0$$

Sono esempi di trasformazioni di coordinate

- Il cambiamento di variabili lineari

$$\begin{cases} x = a_1 u + b_1 v + c_1 w \\ y = a_2 u + b_2 v + c_2 w \\ z = a_3 u + b_3 v + c_3 w \end{cases} \quad , \quad u, v, w \in \mathbb{R} \ , \ z \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

- Le **coordinate cilindriche** definite da

$$\begin{cases} x & = \rho \cos \theta \\ y & = \rho \sin \theta \\ z & = z \end{cases} \quad , \quad \rho \in [0, +\infty) \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \ , \ z \in \mathbb{R}$$

- Le **coordinate sferiche** definite da

$$\begin{cases} x & = \rho \cos \theta \cos \phi \\ y & = \rho \sin \theta \cos \phi \\ z & = \rho \sin \phi \end{cases} \quad , \quad \rho \in [0, +\infty) \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \ , \ \phi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Si verifica in tali casi che

- Per il cambiamento lineare

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

- Per le coordinate cilindriche

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \rho$$

- Per le coordinate sferiche

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \rho \cos \phi$$

Teorema 1.14 - **Cambiamento di variabili per integrali multipli** - *Sia*

$$\phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dove $B \subset \mathbb{R}^3$ *aperto e* $\phi \in \mathcal{C}^1(B)$.

Supponiamo che A sia un insieme misurabile con cl $A \subset B$*, tale che ϕ è una funzione invertibile e $\nabla\phi$ è una matrice invertibile su* int A*;*
allora se f è limitata su $\phi(A)$ e continua su $int\phi(A)$, si ha

$$\int_{\phi(A)} f(x)dx = \int_A f(\phi(x))|det(\nabla\phi(x))|dx.$$

Teorema 1.15 *cambiamento di variabile per integrali multipli - Sia $\phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\phi \in \mathcal{C}^1(B)$ e supponiamo che A sia un insieme misurabile, $cl A \subset B$, tale che ϕ è invertibile e $\nabla\phi$ è una matrice invertibile su $int A$; allora se f è limitata su $\phi(A)$ e continua su $int\phi(A)$, si ha*

$$\int_{\phi(A)} f(x)dx = \int_A f(\phi(x))|det(\nabla\phi(x))|dx.$$

Diamo una dimostrazione del teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli nel caso di due variabili ed osserviamo che si potrebbe estendere al caso generale con poche modifiche.

Lemma 1.2 *Sia $\phi : B \to \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $\phi \in C^1(B)$, e sia A limitato e misurabile, con* cl $A \subset B$*, e* $\det\nabla\phi \neq 0$ *su* int A*. Allora*

- *$\phi(A)$ è misurabile e*

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists P_\epsilon \quad : \quad \text{mis}\,(\cup_{i\in I} Q_i) \quad , \quad \text{mis}\,\phi\,(\cup_{i\in I} Q_i) < \epsilon$$

ove con Q_i, $i \in I$, si sono indicati i quadrati che ricoprono la frontiera di A;

inoltre indicato con $J\phi(x) = |\det \nabla\phi(x)|$,

- *$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon > 0$ tale che se $Q \subset A$ è un quadrato di lato $l < \delta_\epsilon/\sqrt{2}$,*

$$|\,\text{mis}\,\phi(Q) - J\phi(u)\ \text{mis}\,Q| \ < \ \epsilon\,\text{mis}\,Q \qquad \forall u \in Q.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che le ipotesi poste su ϕ assicurano che essa è localmente invertibile e pertanto trasforma punti interni di A in punti interni di $\phi(A)$. Si ha

$$\partial\phi(A) \subset \phi(\partial A) \quad ;$$

infatti

$$\partial\phi(A) \subset \text{cl}\,\phi(A) \subset \text{cl}\,\phi(\text{cl}\,A) = \phi((\text{int}\,A) \cup \partial A) \ .$$

Ora, se $y \in \partial\phi(A)$ si ha $y \in \phi((\text{int}\,A) \cup \partial A)$, ovvero $y = \phi(x)$ con $x \in (\text{int}\,A) \cup \partial A$; ma non può essere $x \in \text{int}\,A$ perché si avrebbe $y \in \text{int}\,\phi(A)$, da cui $x \in \partial A$.

Sia ora $\delta = \text{dist}(\text{cl}\,A, B^c) > 0$, allora, se $A \subset R$ rettangolo e P è una partizione di R tale che $l\sqrt{2} < \delta$ (l lato dei quadrati della partizione), si ha, per ogni quadrato Q della partizione

$$Q \cap A \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad Q \subset B.$$

Poiché A è misurabile è possibile supporre che

$$\operatorname{mis}\left(\cup_{i\in I} Q_i\right) < \epsilon$$

(si ricordi che con Q_i, $i \in I$, si sono indicati i quadrati che ricoprono la frontiera di A) e, se $M = \max\{\|\nabla\phi(x)\| : x \in \cup Q \text{ tali che } Q \cap A \neq \varnothing\}$, si ha

$$x, y \in Q \quad \Rightarrow \quad |x-y| < l\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |\phi(x) - \phi(y)| < Ml\sqrt{2} \ .$$

Ne segue

$$\operatorname{mis}^+ \phi(Q) \leq 2\pi l^2 M^2 = 2\pi M^2 \operatorname{mis} Q$$

e

$$\operatorname{mis}^+ \phi\left(\cup_{i\in I} Q_i\right) \leq \sum_{i\in I} \operatorname{mis}^+ \phi(Q_i) \leq \sum_{i\in I} 2\pi M^2 \operatorname{mis} Q_i < 2\pi M^2 \epsilon \ .$$

In particolare, $\operatorname{mis}^+ \partial\phi(A) \leq \operatorname{mis}^+ \phi(\partial A) \leq 2\pi M^2 \epsilon$, da cui risulta $\operatorname{mis}^+ \partial\phi(A) = 0$ e $\phi(A)$ è misurabile.

Passiamo ora a provare la seconda affermazione. Si ha

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 \quad : \quad |u - v| < \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ |\nabla\phi(u) - \nabla\phi(v)| < \epsilon \quad \text{e} \quad |J\phi(u) - J\phi(v)| < \epsilon.$$

Sia ora Q tale che $l\sqrt{2} < \delta$ (si ometterà nel seguito l'indice ϵ), sia u_0 il centro di Q e sia $\phi_0(u) = \phi(u_0) + \langle \nabla\phi(u_0), (u - u_0) \rangle$.

Per ogni $u \in Q$ si ha

$$|\phi(u) - \phi_0(u)| = |[\phi(u) - \langle \nabla\phi(u_0), u \rangle] - [\phi(u_0) - \langle \nabla\phi(u_0), u_0 \rangle]| \leq \\ \leq \sup \|\nabla\phi(c) - \nabla\phi(u_0)\| \ \|u - u_0\| \leq \epsilon l\sqrt{2}$$

Ne segue che

$$\phi(Q) \subset \phi_0(Q) + S(0, \epsilon l\sqrt{2}) = \phi_0(Q) \cup E_0 \tag{1}$$

Inoltre, da

$$\partial\phi(Q) \subset \phi(\partial Q) \subset \phi_0(\partial Q) + S(0, \epsilon l\sqrt{2}) \tag{2}$$

segue

$$\phi_0(Q) \setminus E_1 \ \subset \ \phi(Q) \tag{3}$$

infatti, se $\phi_0(Q) \setminus E_1 = \varnothing$ è ovvio; in caso contrario si ha $\phi_0(u_0) = \phi(u_0) \subset \phi_0(Q) \setminus E_1$, e se per assurdo esistesse $x \in \phi_0(Q) \setminus E_1$, $x \notin \phi(Q)$, il segmento di estremi $\phi(u_0)$ e x, tutto contenuto in $\phi_0(Q) \setminus E_1$ dovrebbe contenere punti di $\partial\phi(Q)$, il che contraddice la (2).

Allora, da (1) e (3)

$$\begin{aligned}\operatorname{mis}\phi_0(Q) - \operatorname{mis}E_0 \ \le \ \operatorname{mis}\phi_0(Q) - \operatorname{mis}E_1 \ \le \ \operatorname{mis}\phi(Q) \\ \le \ \operatorname{mis}\phi_0(Q) + \operatorname{mis}E_0\end{aligned}$$

e

$$|\operatorname{mis}\phi(Q) - \operatorname{mis}\phi_0(Q)| \ \le \ \operatorname{mis}E_0 \quad .$$

Ma poiché i lati del parallelogramma $\phi_0(Q)$ hanno lunghezza minore di Ml, si ha

$$\operatorname{mis}E_0 \le Ml\epsilon l\sqrt{2} + 2\pi\epsilon^2 l^2 \le \text{cost.}\ \epsilon l^2 = \text{cost.}\ \epsilon \ \operatorname{mis}Q.$$

Sia ora $u \in Q$, essendo $\operatorname{mis}\phi_0(Q) = J\phi(u_0)\ \operatorname{mis}Q$, si ha

$$\begin{aligned}|\operatorname{mis}\phi(Q) - J\phi(u)\operatorname{mis}Q| \le |\operatorname{mis}\phi(Q) - \operatorname{mis}\phi_0(Q)| + \\ + |J\phi(u_0)\operatorname{mis}Q - J\phi(u)\operatorname{mis}Q| \le \\ \le \text{cost.}\epsilon \ \operatorname{mis}Q + \epsilon \ \operatorname{mis}Q.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.16 *Sia* $\phi : B \to \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^2$ *aperto,* $\phi \in C^1(B)$, *e sia* A *limitato e misurabile, con* $\operatorname{cl} A \subset B$, *e* $\det\nabla\phi \neq 0$ *su* $\operatorname{int} A$, *e sia* ϕ *invertibile su* $\operatorname{int} A$ *ed* $f : \phi(A) \to \mathbb{R}$ *è continua e limitata, allora*

$$\int_{\phi(A)} f(x)\, dx \ = \ \int_A f(\phi(u))\ |\det \nabla\phi(u)|\ du.$$

Dimostrazione. Per il lemma 1

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists P_\epsilon \quad : \quad \operatorname{mis}\left(\cup_{i\in I}Q_i\right) \quad , \quad \operatorname{mis}\phi\left(\cup_{i\in I}Q_i\right) < \epsilon.$$

Supponiamo inoltre vera la tesi del lemma 2; posto poi

$$F(u) = f(\phi(u))|\det\nabla\phi(u)|$$

poiché F è integrabile su A, si può supporre

$$\left| R(F, P_\epsilon, \Xi) - \int_A F(u)du \right| \ < \ \epsilon \quad .$$

Si ha quindi, avendo indicato con Q_i, $i \in I'$, i quadrati contenuti in A

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\phi(A)} f(x)dx - \int_A F(u)du\right| = \\
&\qquad = \left|\int_{\phi(\cup_{I'}Q_i)} f(x)dx + \int_{\phi(\cup_I Q_i)} f(x)dx - \right. \\
&\qquad \left. -R(F,P_\epsilon,\Xi) + R(F,P_\epsilon,\Xi) - \int_A F(u)du\right| \le \\
&\le \left|\int_{\phi(\cup_{I'}Q_i)} f(x)dx - R(F,P_\epsilon,\Xi)\right| + \int_{\phi(\cup_I Q_i)} |f(x)|dx + \\
&\qquad + \left|R(F,P_\epsilon,\Xi) - \int_A F(u)du\right| \le \\
&\le \left|\sum_{i\in I'} \int_{\phi(Q_i)} f(x)dx - R(F,P_\epsilon,\Xi)\right| + \epsilon \sup|f(x)| + \epsilon \le \\
&\le \left|\sum_{i\in I'} f(x_i)\,\mathrm{mis}\,\phi(Q_i) - \sum_{i\in I'} F(u_i)\,\mathrm{mis}\ Q_i\right| + \\
&\qquad + \left|\sum_{i\in I} F(u_i)\,\mathrm{mis}\,Q_i\right| + \epsilon\ \mathrm{cost.} \le \\
&\qquad (\text{dove}\ \ x_i = \phi(u_i) \quad) \\
&\le \sum_{i\in I'} |f(x_i)|\ |\mathrm{mis}\,\phi(Q_i) - J\phi(u_i)\,\mathrm{mis}\,Q_i| + \\
&\qquad + \sup|F(u)|\ \ \mathrm{mis}(\cup_I Q_i) + \epsilon\ \mathrm{cost.} \ \le \\
&\le \sup|f(x)| \ \sum_{i\in I'} \epsilon\ \ \mathrm{mis}\,Q_i + \epsilon\ \mathrm{cost.} + \epsilon\ \mathrm{cost.} \ \le \\
&\qquad \le \mathrm{cost.}\ \epsilon\ \ \mathrm{mis}\,A \ + \ \epsilon\ \mathrm{cost.} \ \le \ \epsilon\ \mathrm{cost.}
\end{aligned}
$$

□

1.1.7 Integrali Impropri in $\mathbb{R}^3$

Illustriamo ora per sommi capi il problema di definire l'integrale di una funzione non limitata su un insieme limitato o non limitato.

Definizione 1.12 *Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $A \subset \mathbb{R}^3$, f limitata ed integrabile in ogni compatto misurabile $K \subset A$. Definiamo*

$$\int_A f(x)dx \ = \ \sup\left\{\int_K f(x)dx \ : \ K \subset A \ , K \text{ compatto e misurabile}\right\}$$

La definizione si può facilmente estendere a funzioni di segno qualunque, non appena si ricordi che $f = f_+ + f_-$.

Per il calcolo di $\int_A f(x)dx$ è opportuno dare la seguente definizione.

Definizione 1.13 *Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ diciamo che K_i è una successione di domini invadenti A se*

- *K_i sono insiemi compatti, misurabili, $K_i \subset A$*
- *$K_{i+1} \supset K_i$*
- *$\forall K \subset A$, K compatto, misurabile, $\exists i$ tale che $K_i \supset K$.*

Teorema 1.17 *Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ misurabile e sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una funzione integrabile in ogni insieme $K \subset A$, compatto e misurabile.*

Allora se K_i è una successione di domini invadenti A, si ha

$$\int_A f(x)dx = \lim_i \int_{K_i} f(x)dx$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_{K_i} f(x)dx \leq \int_A f(x)dx$$

e $\int_{K_i} f(x)dx$ è una successione crescente per cui

$$\lim_i \int_{K_i} f(x)dx = \sup\left\{\int_{K_i} f(x)dx\right\} \leq \int_A f(x)dx$$

D'altra parte, dal momento che, $\forall K \subset A$ esiste $K_i \supset K$, si ha

$$\sup\left\{\int_{K_i} f(x)dx\right\} \geq \sup\left\{\int_K f(x)dx \ : \ K \subset A\right\} = \int_A f(x)dx$$

□

Teorema 1.18 *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ misurabile, chiuso e limitato; sia $x_0 \in A$, sia f continua in $A \setminus \{x_0\}$ e*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Allora se

$$f(x) \leq \frac{H}{\|x - x_0\|^\alpha} \ , \ H \geq 0 \ , \ \alpha < 2$$

f è integrabile in senso improprio su A.

Se invece

$$f(x) \geq \frac{H}{\|x - x_0\|^\alpha} \ , \ H > 0 \ , \ \alpha \geq 2$$

e se A contiene un cono di vertice x_0 e ampiezza positiva, allora

$$\int_A f(x)dx = +\infty.$$

Dimostrazione. Sia $A_k = \mathrm{cl}(A \setminus S(x_0, 1/k))$, A_k è una successione di domini invadenti A; sia $h \in \mathbf{N}$, si ha, se $k > h$

$$\int_{A_k} f(x)dx = \int_{A_h} f(x)dx - \int_{A_h \setminus A_k} f(x)dx$$

inoltre

$$\int_{A_h \setminus A_k} f(x)dx \ \leq \ \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/k}^{1/h} \frac{H}{\rho^\alpha} \rho d\rho$$

non appena si sia convenuto di indicare con ρ e θ le coordinate polari nel piano, centrate in x_0.

Per quel che riguarda il secondo enunciato, detti θ_0 e θ_1 gli angoli che le semirette delimitanti il settore formano con l'asse x, si ha

$$\int_{A_h \setminus A_k} f(x)dx \;\geq\; \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{1/k}^{1/h} \frac{H}{\rho^\alpha}\rho d\rho$$

$\square$

In maniera analoga si può provare il seguente

Teorema 1.19 *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^3$ non limitato; sia f continua.*

Se

$$|f(x)| \leq \frac{H}{\|x\|^\alpha} \qquad , \; H \geq 0 \; , \; \alpha > 2$$

allora f è integrabile in senso improprio su A.

Se invece

$$f(x) \geq \frac{H}{\|x\|^\alpha} \;\; , \;\; H > 0 \; , \; \alpha \leq 2$$

e se A contiene un cono di ampiezza positiva, allora

$$\int_A f(x)dx = +\infty.$$

1.2 *Integrali dipendenti da un parametro.*

Passiamo infine a illustrare brevemente il comportamento di un integrale rispetto a parametri contenuti nella funzione da integrare.

Questo tipo di problematiche si incontra, ad esempio, quando si studiano le trasformazioni integrali (Fourier, Laplace) o nella definizione di funzioni notevoli (come,ad esempio, la funzione Γ).

Teorema 1.20 *Sia $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $I = [a, b]$. Supponiamo $f \in \mathcal{C}^0(A \times I)$, allora $F : A \times I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$F(x, y, z) = \int_y^z f(x, t)dt$$

è continua in $A \times I \times I$; inoltre F_y ed F_z esistono e sono continue in $A \times I \times I$.

Se $\nabla_x f \in \mathcal{C}^0(A \times I \times I)$, allora F è differenziabile rispetto ad x,

$$\nabla_x F(x, y, z) = \int_y^z \nabla_x f(x, t)dt$$

e quindi risulta $\nabla_x F$ è continuo in $A \times I \times I$ e $F \in \mathcal{C}^1(A \times I \times I)$.

Dimostrazione. Per quel che riguarda la prima parte dell'enunciato è sufficiente ricordare che f è uniformemente continua e limitata su

$A \times I$; si ha pertanto

$$
\begin{aligned}
|F(x',y',z') - F(x,y,z)| &= \left| \int_{y'}^{z'} f(x',t)dt - \int_{y}^{z} f(x,t)dt \right| = \\
&= \left| \int_{y}^{z} [f(x',t) - f(x,t)]dt + \int_{y'}^{y} f(x',t)dt + \int_{z}^{z'} f(x',t)dt \right| \leq \\
&\leq \varepsilon|b-a| + M(|y-y'| + |z-z'|)
\end{aligned}
$$

Il resto del primo punto è conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Per quanto riguarda il secondo enunciato si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\|h\|} &\left| F(x+h,y,z) - F(x,y,z) - \langle \int_{y}^{z} \nabla_x f(x,t)dt, h \rangle \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{y}^{z} \frac{|f(x+h,t) - f(x,t) - \langle \nabla_x f(x,t), h \rangle|}{\|h\|} dt \right| \\
&= \left| \int_{y}^{z} \frac{|\langle \nabla_x f(\xi,t) - \nabla_x f(x,t), h \rangle|}{\|h\|} dt \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{y}^{z} \|\nabla_x f(\xi,t) - \nabla_x f(x,t)\| dt \right|
\end{aligned}
$$

con $\|\xi - x\| < \|h\|$. Come per il punto precedente si può concludere, ricordando che $\nabla_x f$ è continuo, e quindi è uniformemente continuo in $A \times I$. □

Il teorema 26.33 può essere esteso anche nel caso in cui l'integrale sia inteso in senso improprio. Tratteremo qui soltanto il caso in cui l'intervallo di integrazione è illimitato, in quanto esso è facilmente estendibile all'altro caso.

Teorema 1.21 *Sia $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $I = [a, +\infty)$, una funzione continua. Consideriamo*

$$F(x) = \int_{a}^{+\infty} f(x,t)dt$$

Se esiste $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x,t)| \leq \phi(t) \quad \forall x \in A \; ; \quad \int_{a}^{+\infty} \phi(t)dt \; < +\infty$$

allora F è definita e continua in A.

Se inoltre $\nabla_x f$ esiste, è continuo in $A \times I$, e se esiste $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\|\nabla_x f(x,t)\| \leq \psi(t) \quad \forall x \in A \quad ; \quad \int_{a}^{+\infty} \psi(t)dt \; < +\infty$$

allora $F \in \mathcal{C}^1(A)$ e

$$\nabla F(x) = \int_{a}^{+\infty} \nabla_x f(x,t)dt \; .$$

Dimostrazione. Sia $\delta > a$ scelto in modo che

$$\int_{\delta}^{+\infty} \phi(t)dt < \varepsilon/4$$

(Ciò è possibile in quanto ϕ ammette integrale improprio convergente su $[a, +\infty)$).

Si ha

$$|F(x') - F(x)| \leq \left| \int_a^{\delta} (f(x', t) - f(x, t))dt \right| + \\ + 2 \int_{\delta}^{+\infty} \phi(t)dt$$

ed applicando il teorema precedente, se $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, si ottiene

$$|F(x') - F(x)| \leq \varepsilon/2 + 2\varepsilon/4$$

Per quel che riguarda la seconda parte si ha in analogia a quanto fatto sopra e a quanto fatto nel teorema precedente

$$\frac{1}{\|h\|} \left| F(x+h) - F(x) - \langle \int_a^{+\infty} \nabla_x f(x,t)dt, h \rangle \right| \leq \\ \leq \int_a^{\delta} \|\nabla_x f(\xi, t) - \nabla_x f(x,t)\| dt + 2 \int_{\delta}^{+\infty} \psi(t)dt$$

essendo $\|\xi - x\| \leq \|h\|$ e si può concludere con gli stessi argomenti.
$\square$