

1. Archi E Superfici Nello Spazio.

In questa parte definiamo i concetti di arco, di superficie, di lunghezza di un arco e di area di una superficie nello spazio euclideo a tre dimensioni \mathbb{R}^3 .

La generalizzazione dei concetti esposti al caso di \mathbb{R}^n , $n > 3$, è immediata, come del resto è ovvio che per ottenere una trattazione delle curve in \mathbb{R}^2 è sufficiente porre $z = 0$.

1.1 Linee ed integrali di linea

Definizione 1.1 Chiamiamo curva in \mathbb{R}^3 una funzione

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Chiamiamo traccia di γ , o più raramente supporto di γ , l'insieme

$$\Gamma = R(\gamma) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in [a, b], (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))\}$$

Indichiamo con $\dot{\gamma} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ la derivata di γ .

Una curva γ si dice:

- semplice, se è iniettiva,
- chiusa, se $\gamma(a) = \gamma(b)$,
- regolare, se $\gamma \in C^1([a, b])$ e $\|\dot{\gamma}\| \neq 0$.

Osserviamo che la condizione $\dot{\gamma} \neq 0$ significa che le tre derivate $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ non sono mai contemporaneamente nulle ed è spesso espressa nella forma

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > 0$$

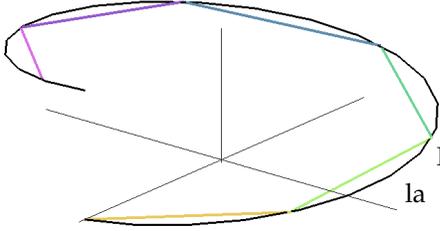
Definizione 1.2 Sia γ una curva regolare in \mathbb{R}^3 definiamo vettore tangente alla curva γ nel punto $(x(t), y(t), z(t))$ il vettore

$$T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \left(\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}, \frac{\dot{y}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}, \frac{\dot{z}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right)$$

dove

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}.$$

1.1.1 Lunghezza di una Linea



ora a definire la lunghezza di una curva γ .

γ una curva regolare in \mathbb{R}^3 .

Prendiamo poligonale inscritta in Γ , associata alla partizione $P = \{t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$, la spezzata poligonale $\Lambda(\Gamma, P)$ avente per vertici $\gamma(t_i)$.

Possiamo calcolare la lunghezza della poligonale $\Lambda(\Gamma, P)$ mediante

$$\begin{aligned} \ell(\Lambda(\Gamma, P)) &= \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

Usando il teorema di Lagrange, se $P \in \mathcal{P}(a, b)$, si ha

$$\ell(\Lambda(\Gamma, P)) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(t_i^1) + \dot{y}^2(t_i^2) + \dot{z}^2(t_i^3)}(t_i - t_{i-1})$$

essendo $t_i^1, t_i^2, t_i^3 \in (t_{i-1}, t_i)$, mentre d'altro canto, le somme di Riemann di $\|\dot{\gamma}\|$ sono date da

$$R(\|\dot{\gamma}\|, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)}(t_i - t_{i-1})$$

$$\begin{aligned} \ell(\Lambda(\Gamma, P)) &= R(\|\dot{\gamma}\|, P, \Xi) - R(\|\dot{\gamma}\|, P, \Xi) + \ell(\Lambda(\Gamma, P)) = \\ &= R(\|\dot{\gamma}\|, P, \Xi) + \sum_{i=1}^n |F(t_i^1, t_i^2, t_i^3) - F(\tau_i, \tau_i, \tau_i)|(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

non appena si sia definita $F : [a, b]^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la

$$F(r, s, t) = \sqrt{\dot{x}^2(r) + \dot{y}^2(s) + \dot{z}^2(t)}$$

Dal momento che F è continua sul cubo $[a, b]^3$, si può dimostrare ricorrendo al concetto, non banale, di uniforme continuità che pur di scegliere la partizione P sufficientemente fine si può supporre che

$$|F(t_i^1, t_i^2, t_i^3) - F(\tau_i, \tau_i, \tau_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

poichè al raffinarsi della partizione P si ha

$$R(\|\dot{\gamma}\|, P, \Xi) \rightarrow \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

e

$$\ell(\Lambda(\Gamma, P)) - R(\|\dot{\gamma}\|, P, \Xi) \rightarrow 0$$

possiamo concludere che se $|\dot{\gamma}|$ è integrabile, allora

$$\ell(\Lambda(\Gamma, P)) \rightarrow \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Definizione 1.3 Diciamo che due curve γ_1, γ_2 regolari in \mathbb{R}^3 sono equivalenti se, essendo

$$\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$

$$\gamma_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)),$$

esiste una funzione $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ tale che

- $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$,
- $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d, \dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in (a, b)$.

Ci riferiremo alla funzione φ come ad un cambiamento regolare di parametrizzazione relativo alle curve γ_1, γ_2 .

Ovviamente, dal momento che φ è invertibile, anche φ^{-1} è un cambiamento regolare di parametrizzazione. Più precisamente mentre φ trasforma γ_2 in γ_1 , φ^{-1} opera la trasformazione di γ_1 in γ_2 .

1.1.2 Lunghezza d'Arco

Teorema 1.1 Sia γ una curva regolare in \mathbb{R}^3 e sia γ^* una curva regolare in \mathbb{R}^3 ad essa equivalente; si ha

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma^*)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia φ un cambiamento regolare di parametrizzazione relativo alle curve γ e γ^* , $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ e sia

$$\gamma(t) = \gamma^*(\varphi(t)).$$

Dal momento che $\dot{\varphi} > 0$,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|(d/dt)\gamma^*(\varphi(t))\| dt = \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}^*(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}^*(\varphi(t))\| \dot{\varphi}(t) dt \end{aligned}$$

e applicando il teorema di integrazione per sostituzione

$$\ell(\gamma) = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} \|\dot{\gamma}^*(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_c^d \|\dot{\gamma}^*(t)\| dt = \ell(\gamma^*)$$

□

Se γ è una curva regolare in \mathbb{R}^3 , la funzione

$$s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

si chiama lunghezza d'arco della curva γ .

Per le ipotesi fatte, s è una funzione di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ strettamente crescente e $s(t)$ misura la lunghezza del percorso compiuto da un punto che si muova, a partire da $\gamma(a)$, lungo la traccia della curva γ fino al punto $\gamma(t)$.

Inoltre s è una funzione invertibile e detta $t = s^{-1}$ la sua inversa essa pure risulta strettamente crescente e di classe $\mathcal{C}^1([0, \ell(\gamma)])$.

Pertanto è possibile considerare t come un cambiamento regolare di parametrizzazione e, detta γ^* la curva che si ottiene da γ mediante tale cambiamento si ha

$$\gamma^*(s) = \gamma(t(s)).$$

Poichè

$$\frac{dt}{ds}(s_0) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s_0))}$$

si ottiene

$$\dot{\gamma}^*(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|} = T_\gamma(t(s)).$$

Definizione 1.4 Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^3$ e supponiamo che γ sia una curva regolare in \mathbb{R}^3 con traccia contenuta in A (o più brevemente sia γ una curva regolare in A).

Definiamo integrale di linea di f su γ

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) ds(t) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

qualora l'ultimo integrale esista.

E' immediato verificare che se f è una funzione continua su A e γ è una curva regolare in A allora f è integrabile su γ .

1.2 Interpretazione Geometrica del prodotto scalare in \mathbb{R}^3

Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ il prodotto scalare tra P_1 e P_2 è dato da:

$$\langle P_1, P_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Consideriamo la retta che passa per l'origine e per il punto P_2 che è identificata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = tx_2 \\ y = ty_2 \\ z = tz_2 \end{cases}$$

e proponiamoci di calcolare la distanza del punto P_1 da tale retta.

A questo scopo calcoliamo l'intersezione di tale retta con il piano, ad essa perpendicolare, passante per P_1

L'equazione di tale piano è $(x - x_1)x_2 + (y - y_1)y_2 + (z - z_1)z_2 = \langle P - P_1, P_2 \rangle = 0$.

Sostituendo le equazioni parametriche della retta nel piano otteniamo che il punto di intersezione si trova per t che soddisfa la seguente equazione:

$$(tx_2 - x_1)x_2 + (ty_2 - y_1)y_2 + (tz_2 - z_1)z_2 = 0$$

da cui $t = \frac{\langle P_2, P_1 \rangle}{\|P_2\|^2}$ ed il punto H di intersezione è dato da

$$H = \left(x_2 \frac{\langle P_2, P_1 \rangle}{\|P_2\|^2}, y_2 \frac{\langle P_2, P_1 \rangle}{\|P_2\|^2}, z_2 \frac{\langle P_2, P_1 \rangle}{\|P_2\|^2} \right) = P_2 \frac{\langle P_2, P_1 \rangle}{\|P_2\|^2}$$

Poichè $\cos(\theta) = \frac{\|H\|}{\|P_1\|}$ possiamo concludere che

$$\cos(\theta) = \frac{\|P_2\| \langle P_2, P_1 \rangle}{\|P_2\|^2 \|P_1\|} = \frac{\langle P_2, P_1 \rangle}{\|P_2\| \|P_1\|}$$

1.3 Prodotto vettoriale

Siano

$$A = (a_1, a_2, a_3) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \quad , \quad B = (b_1, b_2, b_3) = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

dove e_1, e_2, e_3 sono i vettori ortonormali canonici della base euclidea di \mathbb{R}^3 .

Il piano generato dai vettori A e B può essere descritto parametricamente mediante le combinazioni lineari dei due vettori:

$$\begin{cases} x = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

Ricavando λ e μ dalle prime due equazioni e sostituendo nella terza si ottiene l'equazione cartesiana del piano che è:

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} x + \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} y + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} z = 0$$

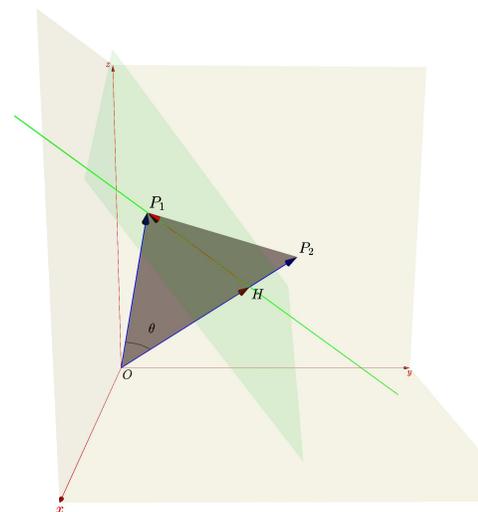


Figure 1.1:

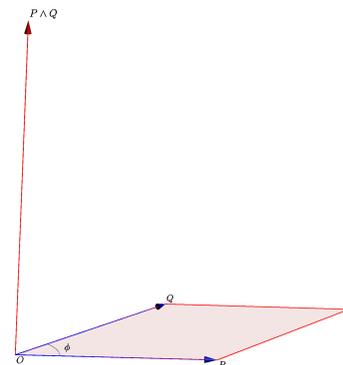


Figure 1.2:

Ora, se consideriamo la matrice che ha per righe A e B

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

risulta evidente che il vettore le cui componenti sono i determinanti con segno dei suoi minori principali è ortogonale al piano generato da A e B .

Definiamo il *Prodotto Vettoriale* $A \times B$

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} e_1 + \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} e_3 = \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

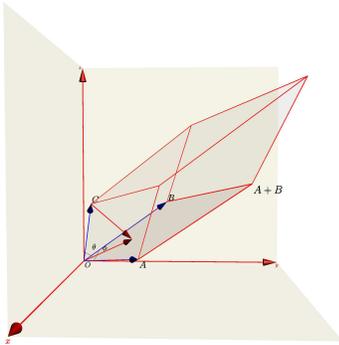


Figure 1.3:

$$\begin{aligned} \|A \times B\|^2 &= \\ &= (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) + (a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2) + (a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2) - 2(a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2 b_2 a_3 b_3 + a_3 b_1 a_1 b_3) = \\ &= a_1^2 (b_3^2 + b_2^2) + a_2^2 (b_3^2 + b_1^2) + a_3^2 (b_2^2 + b_1^2) - 2(a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2 b_2 a_3 b_3 + a_3 b_1 a_1 b_3) = \\ &= a_1^2 (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2) + a_2^2 (b_3^2 + b_1^2 + b_2^2) + a_3^2 (b_2^2 + b_1^2 + b_3^2) - (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + 2a_2 b_2 a_3 b_3 + 2a_3 b_1 a_1 b_3) = \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2 - \langle A, B \rangle^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - \|A\|^2 \|B\|^2 \cos^2 \theta = \|A\|^2 \|B\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori A e B

Pertanto

$$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin \theta$$

è l'area del parallelogramma di lati A e B .

Ora, posto $N = A \times B$ e consideriamo un terzo vettore $C \in \mathbb{R}^3$, avremo che

$$\frac{\langle C, N \rangle}{\|N\|} = \|C\| \cos \phi$$

dove ϕ è l'angolo compreso tra i vettori C ed N , rappresenta la lunghezza della proiezione di C su N .

Poichè $\|A \times B\| = \|N\| = \|A\|\|B\| \sin \theta$ è l'area del parallelogrammo di lati A e B , possiamo concludere che

$$\|A \times B\|\|C\| \cos \phi = \|N\|\|C\| \cos \phi$$

fornisce il volume del parallelepipedo individuato dal volume di A , B e C

Ma

$$\|A \times B\|\|C\| \cos \phi = \|N\| \frac{\langle C, N \rangle}{\|N\|} = \langle C, N \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Si può infine verificare, tenendo presente unicamente le definizioni, che

- $A \times B = -B \times A$
- $A \times B = 0$ se e solo se $A \parallel B$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

1.3.1 Curvatura - Terna Intrinseca

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva semplice e regolare e siano $s(t)$ e $t(s)$, rispettivamente la sua funzione lunghezza d'arco e l'inversa della funzione lunghezza d'arco. Indichiamo con il punto $\dot{}$ e con l'apice $'$ la derivazione rispetto a t e ad s .

Sia

$$R(s) = \gamma(t(s))$$

la parametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza d'arco. Avremo che

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \quad , \quad t'(s) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|}$$

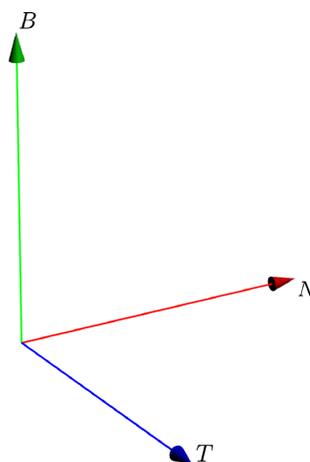
Siano

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{s}(t)T(s(t))$$

$$T(s) = R'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|} \quad , \quad N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \quad , \quad B(s) = T(s) \times N(s)$$

Avremo che $N = B \times T$ e $T = N \times B$.

La terna T, N, B costituisce un sistema di riferimento



Inoltre

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \|\dot{\gamma}(t(s))\| &= \frac{d}{ds} \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t(s)), \dot{\gamma}(t(s)) \rangle} = \\
 &= \frac{2\langle \ddot{\gamma}(t(s)), \dot{\gamma}(t(s)) \rangle}{2\sqrt{\langle \dot{\gamma}(t(s)), \dot{\gamma}(t(s)) \rangle}} = \\
 &= \frac{\langle \ddot{\gamma}(t(s)), \dot{\gamma}(t(s)) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|} \\
 T'(s) = R''(s) &= \frac{d}{ds} \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|} = \\
 &= \frac{\ddot{\gamma}(t(s))\|\dot{\gamma}(t(s))\| - \dot{\gamma}(t(s)) \frac{\langle \ddot{\gamma}(t(s)), \dot{\gamma}(t(s)) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|^2}}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|^2} \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|} = \\
 &= \frac{\ddot{\gamma}(t(s))\langle \dot{\gamma}(t(s)), \dot{\gamma}(t(s)) \rangle - \dot{\gamma}(t(s))\langle \ddot{\gamma}(t(s)), \dot{\gamma}(t(s)) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|^4} = \\
 &= \frac{\dot{\gamma}(t(s)) \times (\ddot{\gamma}(t(s)) \times \dot{\gamma}(t(s)))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|^4} = \\
 &= \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|} \times \frac{\ddot{\gamma}(t(s)) \times \dot{\gamma}(t(s))}{\|\ddot{\gamma}(t(s)) \times \dot{\gamma}(t(s))\|} \frac{\|\ddot{\gamma}(t(s)) \times \dot{\gamma}(t(s))\|}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|^3} = \\
 &= T(s) \times (-B(s))\kappa = \kappa N(s)
 \end{aligned}$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa} = \frac{R''(s)}{\kappa}$$

Si definisce curvatura di γ la quantità

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma}(t(s)) \times \ddot{\gamma}(t(s))\|}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|^3}$$

e si ha

$$T'(s) = R''(s) = \kappa N$$

Ora, poichè $\|N(s)\| = 1$ di ha

$$0 = \frac{d}{ds} \|N(s)\|^2 = 2\langle N'(s), N(s) \rangle$$

per cui $N'(s) \perp N(s)$ e si può esprimere come combinazione lineare di T e B

$$N'(s) = \alpha T(s) + \beta B(s)$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
 B'(s) &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) = \\
 &= \kappa N(s) \times N(s) + T(s) \times (\alpha T(s) + \beta B(s)) = \\
 &= \beta T(s) \times B(s) = -\beta N(s)
 \end{aligned}$$

$$B'(s) = T(s) \times N'(s) = R'(s) \times \frac{R'''(s)}{\kappa}$$

Pertanto

$$\beta = -\langle B'(s), N \rangle = -\langle R'(s) \times \frac{R'''(s)}{\kappa}, \frac{R''(s)}{\kappa} \rangle = \frac{\langle R'(s), R''(s), R'''(s) \rangle}{\|R''(s)\|^2}$$

Si definisce torsione della curva e si indica con τ la quantità

$$\tau = \frac{\langle R'(s), R''(s), R'''(s) \rangle}{\|R''(s)\|^2}$$

da cui

$$B'(s) = -\tau N(s)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} N'(s) &= (B(s) \times T(s))' = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s) = \\ &= -\tau N(s) \times T(s) + \kappa B(s) \times N(s) = \\ &= -\kappa T(s) + \tau B(s) \end{aligned}$$

Possiamo calcolare

$$\dot{\gamma} = \dot{s}T + \dot{s} \frac{d}{dt}T = \dot{s}T + (\dot{s})^2 T' = \dot{s}T + \kappa (\dot{s})^2 N$$

il che mostra come l'accelerazione $\ddot{\gamma}$ si scomponga in due termini uno lungo il versore tangente ed il secondo lungo il versore normale.

Avremo

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma} = \dot{s}\dot{s}T \times T + \kappa (\dot{s})^3 T \times N = \kappa (\dot{s})^3 B$$

e, come già visto,

$$\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}\| = \kappa \|(\dot{s})^3\| \quad , \quad \kappa = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}\|}{\|(\dot{s})^3\|} = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

Inoltre

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (\dot{s}T) \times (\dot{s}T + \kappa (\dot{s})^2 N) = \kappa (\dot{s})^3 T \times N = \kappa (\dot{s})^3 B$$

$$\ddot{\gamma} = \ddot{T} + \dot{s}T' \dot{s} + \frac{d}{dt}(\kappa (\dot{s})^2) N + \kappa (\dot{s})^3 N'$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\gamma}, B \rangle &= \ddot{s} \langle T, B \rangle + \dot{s} \dot{s} \langle \kappa N, B \rangle + \frac{d}{dt}(\kappa (\dot{s})^2) \langle N, B \rangle + \kappa (\dot{s})^3 \langle N', B \rangle = \\ &= \kappa (\dot{s})^3 \langle -\kappa T + \tau B, B \rangle = \kappa (\dot{s})^3 \tau \end{aligned}$$

Ne viene

$$\langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = \kappa (\dot{s})^3 \tau \langle B, \ddot{\gamma} \rangle = (\kappa (\dot{s})^3)^2 \tau = \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2 \tau$$

ed infine

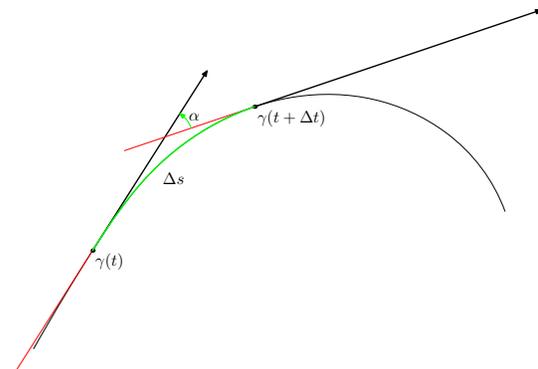
$$\tau = \frac{\langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} = \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}$$

Possiamo anche osservare che

La definizione di curvatura può giustificarsi nella seguente maniera: Indichiamo con α l'angolo formato dai vettori $T(s)$ e $T(s + \Delta s)$.

E' naturale definire come curvatura media di γ nell'intervallo $[s, s + \Delta s]$ il rapporto

$$\frac{\alpha}{|\Delta s|}$$



Posto $\Delta T(s) = T(s + \Delta s) - T(s)$, si ha

$$\frac{\sin \alpha}{\Delta s} = \frac{\|T(s) \times T(s + \Delta s)\|}{\Delta s} = \frac{\|T(s) \times (T(s) + \Delta(T(s)) - T(s))\|}{\Delta s} = \frac{\|T(s) \times \Delta(T(s))\|}{\Delta s}$$

Ma

$$\frac{\alpha}{|\Delta s|} = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{|\Delta s|}$$

e, poiché $\alpha \rightarrow 0$ quando $\Delta s \rightarrow 0$, si ha

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|T(s) \times \Delta(T(s))\|}{\Delta s} = \|T(s) \times T'(s)\| = \|\kappa N\| = \kappa$$

Analogamente se indichiamo con β l'angolo formato dai vettori $B(s)$ e $B(s + \Delta s)$.

E' naturale definire come curvatura media di γ nell'intervallo $[s, s + \Delta s]$ il rapporto

$$\frac{\alpha}{|\Delta s|}$$

Posto $\Delta T(s) = T(s + \Delta s) - T(s)$, si ha

$$\frac{\sin \beta}{\Delta s} = \frac{\|B(s) \times B(s + \Delta s)\|}{\Delta s} = \frac{\|B(s) \times ((s) + \Delta B(s)) - B(s)\|}{\Delta s} = \frac{\|B(s) \times \Delta(B(s))\|}{\Delta s}$$

e

$$\frac{\beta}{|\Delta s|} = \frac{\beta}{\sin \beta} \frac{\sin \beta}{|\Delta s|}$$

e, poiché $\beta \rightarrow 0$ quando $\Delta s \rightarrow 0$, si ha

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|B(s) \times \Delta(B(s))\|}{\Delta s} = \|B(s) \times B'(s)\| = \|\tau N\| = \tau$$

e questo chiarisce il significato di torsione.

Possiamo altresì definire raggio di curvatura di γ nel punto $(x(t), y(t), z(t))$ il valore

$$R_\gamma(t) = \frac{1}{K_\gamma(t)}.$$

e chiamare piano osculatore a γ nel punto $(x(t), y(t), z(t))$ il piano definito dall'equazione

$$\langle (x - x(t), y - y(t), z - z(t)), \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

La definizione di piano osculatore si può interpretare geometricamente come segue.

Consideriamo il piano che è individuato dai vettori $\dot{\gamma}(t)$ e $\dot{\gamma}(t + \Delta t)$; una normale a tale piano sarà data da

$$\dot{\gamma}(t) \times \frac{\dot{\gamma}(t + \Delta t) - \dot{\gamma}(t)}{\Delta t} = \dot{\gamma}(t) \times \frac{\Delta \dot{\gamma}(t)}{\Delta t}$$

e, se $\Delta t \rightarrow 0$ essa tende a

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)$$

Pertanto $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)$ è normale al piano che si ottiene come limite del piano considerato.

In altri termini il piano osculatore alla curva γ nel punto $(x(t), y(t), z(t))$ contiene i vettori $\dot{\gamma}(t)$ e $\ddot{\gamma}(t)$.

Nel caso in cui la curva sia parametrizzata secondo la lunghezza d'arco, dal momento che $\|\dot{\gamma}\| = 1$ si ha

$$\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = \frac{d}{ds} \|\dot{\gamma}(s)\|^2 / 2 = 0$$

I vettori

$$T(s) = R'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|}, \quad N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \times N(s)$$

costituiscono il *triedro principale*, o naturale, della curva γ nel punto $(x(s), y(s), z(s))$; il triedro principale è anche noto come *terna intrinseca* della curva.

Ricordiamo infine alcune classiche definizioni senza però entrare nei dettagli.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva tale che $z(t) \equiv 0$, diremo che γ è una curva piana.

Il vettore $(-\dot{y}, \dot{x})$ si dice vettore normale alla curva γ .

Sia $R_\gamma(t)$ il raggio di curvatura di γ ; diciamo centro di curvatura di γ il punto $c_\gamma(t)$ centro del cerchio che ha per raggio $R_\gamma(t)$ ed è tangente a γ .

$c_\gamma(t)$ descrive, al variare di t , una curva $\gamma^\#$ che si definisce evoluta della curva γ ; γ , a sua volta, si dice involuta della curva $\gamma^\#$.

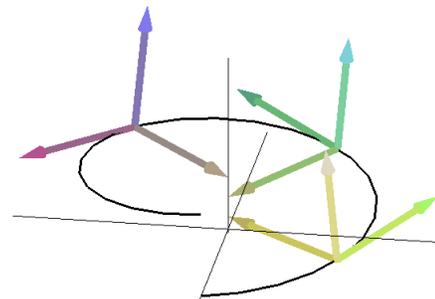
Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, le equazioni della evoluta di γ sono date da

$$x^\#(t) = x(t) - \dot{y}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{y}(t)\dot{x}(t)}$$

$$y^\#(t) = y(t) + \dot{x}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{y}(t)\dot{x}(t)}$$

1.4 Superfici ed Integrali di Superficie

In analogia con quanto fatto per la lunghezza di una linea definiamo

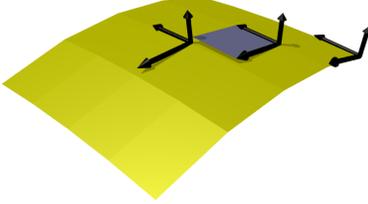


Definizione 1.5 Sia $R = [a, b] \times [c, d]$, chiamiamo superficie parametrica in \mathbb{R}^3 una funzione

$$S : R \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Chiamiamo traccia o supporto di S l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists (u, v) \in R, (x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\}$$



Osserviamo che $\Sigma = R(S)$ è il rango della funzione S . Una superficie parametrica S in \mathbb{R}^3 si dice

- semplice, se è iniettiva,
- regolare, se $S \in \mathcal{C}^1(R)$ e

$$\nabla S = \begin{pmatrix} S_u \\ S_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_u S \\ \nabla_v S \end{pmatrix}$$

ha caratteristica massima (= 2).

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ e consideriamo il piano tangente ad S in P_0 che è definito da:

$$\begin{cases} x - x_0 = x_u(u_0, v_0)(u - u_0) + x_v(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y - y_0 = y_u(u_0, v_0)(u - u_0) + y_v(u_0, v_0)(v - v_0) \\ z - z_0 = z_u(u_0, v_0)(u - u_0) + z_v(u_0, v_0)(v - v_0) \end{cases}$$

Ricavando $(u - u_0)$ e $(v - v_0)$ dalle prime due equazioni e sostituendo nella terza si ottiene l'equazione cartesiana del piano che è:

$$\det \begin{pmatrix} y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} (x - x_0) + \det \begin{pmatrix} z_u(u_0, v_0) & x_u(u_0, v_0) \\ z_v(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} (y - y_0) + \det \begin{pmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} (z - z_0) = 0$$

Ora, se consideriamo la matrice che ha per righe ∇x e ∇y

$$\begin{pmatrix} \nabla x \\ \nabla y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

risulta evidente che il piano tangente definito dall'equazione cartesiana è costituito dai vettori $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ che sono ortogonali al vettore le cui componenti sono i determinanti con segno della matrice

$$\left(\det \begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right)$$

Pertanto chiamiamo vettore normale ad S in $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ il vettore

$$\begin{aligned}
 n(u, v) &= S_u(u, v) \times S_v(u, v) = \\
 &= \left(\det \begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_u & z_u \\ x_u & z_v \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)
 \end{aligned}$$

E' d'uso indicare con A, B, C le componenti del vettore n . Pertanto

$$n(u, v) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = (A, B, C)$$

e

$$\|n\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Ora, prima di procedere alla definizione dell'area di una superficie parametrica S illustriamo un esempio che mostra come tale concetto possa presentare aspetti critici.

Consideriamo la superficie cilindrica di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u, v) = \cos v \\ y(u, v) = \sin v \\ z(u, v) = u \end{cases}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

La traccia di S è evidentemente la superficie laterale di un cilindro circolare retto di altezza 1 e di base il cerchio centrato nell'origine e di raggio 1.

Si consideri la superficie poliedrica approssimante S costituita dai triangoli costruiti nella seguente maniera:

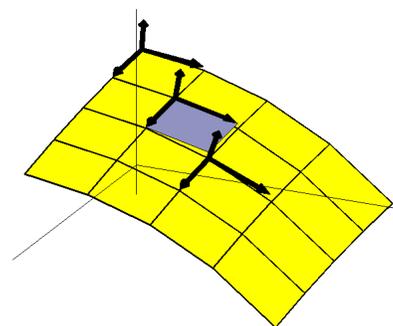
si divida l'altezza del cilindro in m parti uguali e su ciascuna delle sezioni ottenute si considerino dei poligoni regolari di n lati disposti in modo che i vertici dei poligoni relativi a due sezioni adiacenti abbiano l'uno i vertici sulla verticale dei punti medi dei lati dell'altro.

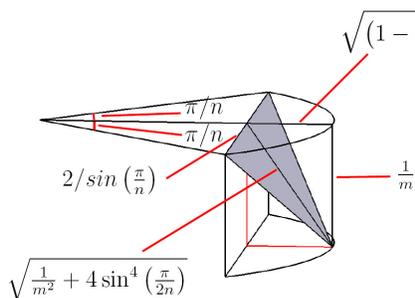
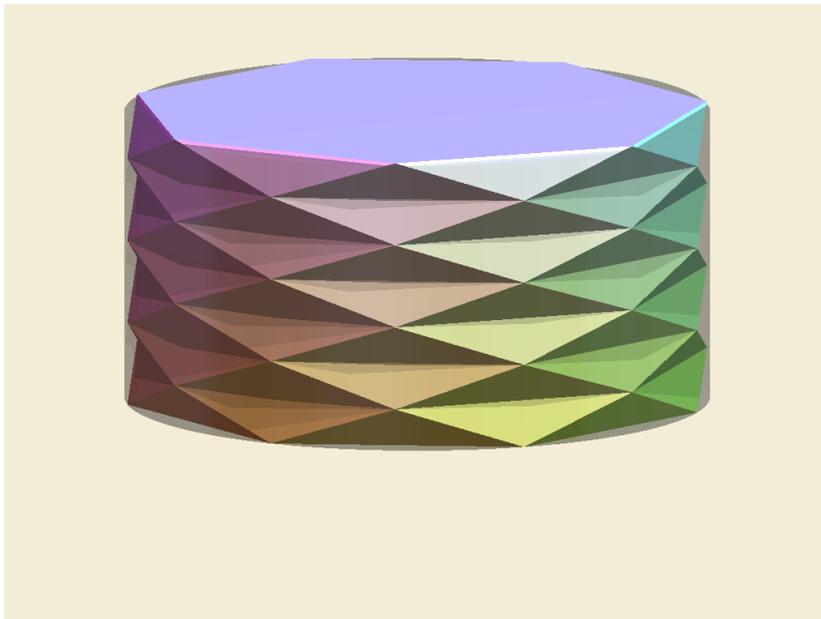
La superficie poliedrica approssimante ottenuta è costituita da $2mn$ triangoli aventi ciascuno base

$$2 \sin(\pi/n)$$

e altezza

$$\sqrt{1/m^2 + (1 - \cos(\pi/n))^2} = \sqrt{1/m^2 + 4 \sin^4(\pi/(2n))}$$





La superficie poliedrica totale sarà pertanto data da

$$A_{mn} = 2mn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{1}{m^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$$

e se $m = kn^2$ si ha

$$\begin{aligned} A_n &= 2kn^3 \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{1}{k^2 n^4} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \\ &= 2n \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{1 + 4k^2 n^4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} \end{aligned}$$

e

$$\lim A_n = 2\pi \sqrt{1 + \frac{k^2 \pi^4}{4}}.$$

Vediamo pertanto che $\lim A_n > 2\pi$ che è la superficie del cilindro secondo le regole di calcolo elementari.

Per evitare gli inconvenienti derivanti dalle approssimazioni poliedrali, per definire l'area di una porzione di superficie possiamo utilizzare le approssimazioni lineari della funzione S che definisce la superficie stessa.

Sia $\Omega = P \times Q$ una partizione dell'intervallo R , $P \in \mathcal{P}(a, b)$, $Q \in \mathcal{P}(c, d)$, e siano $\{R_k, k = 0..n\}$ i rettangoli in cui P divide R .

Sia $S : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie semplice, regolare; chiamiamo approssimazione lineare della superficie S relativa alla partizione Ω ed alla scelta Ξ , $\Pi(S, \Omega, \Xi)$ la superficie

$$\Pi(S, \Omega, \Xi)(u, v) = S(\xi_i, \eta_j) + \langle \nabla S(\xi_i, \eta_j), (u - \xi_i, v - \eta_i) \rangle, (u, v) \in R_{ij}$$

Definiamo approssimazione lineare dell'area della superficie S , relativa alla partizione Ω ed alla scelta Ξ ,

$$La(S, \Omega, \Xi) = \sum_{ij} \text{mis}(\Pi(S, \Omega, \Xi)(R_{ij})).$$

Diciamo infine che la superficie S ha area $A(S)$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tale che $\forall \Omega < \Omega_\varepsilon, \forall \Xi$ si ha

$$|La(S, \Omega, \Xi) - A(S)| < \varepsilon$$

ne segue che se S è una superficie parametrica semplice e regolare in \mathbb{R}^3 ; allora

$$A(S) = \int_R \|n(u, v)\| dudv$$

infatti si ha

$$\text{mis}(\Pi(S, \Omega, \Xi)(R_{ij})) = \|S_u(\xi_i, \eta_j) \times S_v(\xi_i, \eta_j)\| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

da cui

$$\begin{aligned} \Lambda(S, \Omega, \Xi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|n(\xi_i, \eta_j)\| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) = \\ &= R(\|n\|, \Omega, \Xi) \quad (1.1) \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di integrabilità secondo Cauchy-Riemann si ha che

$$R(\|n\|, \Omega, \Xi) \rightarrow \iint_R \|n\| dudv$$

e quindi

$$A(S) = \int_R \|n(u, v)\| dudv$$

ed indichiamo

$$A(S) = \int_S d\sigma$$

Si può provare, usando il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli, che se

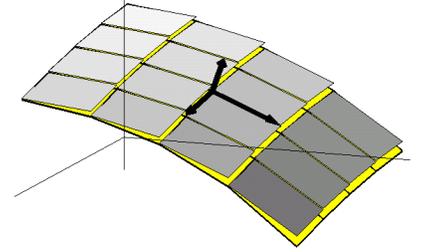
$$S : R \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{ed} \quad S_1 : R_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sono due rappresentazioni equivalenti della stessa superficie, cioè se

$$S(u, v) = S_1(\varphi(u, v))$$

con

$$\varphi : R \longrightarrow R_1$$



, invertibile, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, allora

$$\int_{\mathbb{R}} \|n(u, v)\| dudv = \int_{\mathbb{R}_1} \|n_1(u, v)\| dudv.$$

Ciò consente di affermare che la definizione di area di una superficie non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Definizione 1.6 Sia S una superficie parametrica semplice e regolare in \mathbb{R}^3 e sia $\Sigma \subset A \subset \mathbb{R}^3$; sia inoltre $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; definiamo

$$\int_S f d\sigma = \int_{\mathbb{R}} f(S(u, v)) \|n(u, v)\| dudv.$$

1.5 Curvatura di una superficie

1.5.1 Prima Forma Quadratica di una Superficie

Sia

$$S = S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x, y, z)$$

una superficie sia

$$\nabla S = \nabla S(u, v) = \begin{pmatrix} S_u(u, v) \\ S_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) \\ (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)) \end{pmatrix}$$

e sia ν Il vettore normale alla superficie

$$\nu = \frac{n(u, v)}{\|n(u, v)\|} = \frac{S_u(u, v) \times S_v(u, v)}{\|S_u(u, v) \times S_v(u, v)\|}$$

Solitamente si pone $S_u(u, v) \times S_v(u, v) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ per cui $\|n\| = \sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2}$ ed il piano tangente sarà definito dall'equazione

$$\langle n, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0 \quad \text{cioè} \quad \mathbf{A}(x - x_0) + \mathbf{B}(y - y_0) + \mathbf{C}(z - z_0) = 0$$

Se

$$\begin{cases} u = u(\xi) \\ v = v(\xi) \end{cases}$$

allora $\Gamma(\xi) = S(u(\xi), v(\xi))$ definisce una curva sulla superficie S per la quale si ha

$$\dot{\Gamma}(\xi) = (S_u \dot{u} + S_v \dot{v}) = (x_u \dot{u} + x_v \dot{v}, y_u \dot{u} + y_v \dot{v}, z_u \dot{u} + z_v \dot{v})$$

per cui la lunghezza d'arco si può calcolare come

$$\begin{aligned} \|\dot{\Gamma}(\xi)\|^2 &= (x_u \dot{u} + x_v \dot{v})^2 + (y_u \dot{u} + y_v \dot{v})^2 + (z_u \dot{u} + z_v \dot{v})^2 = \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) \dot{u}^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \dot{u} \dot{v} + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \dot{v}^2 = \\ &= \langle S_u \dot{u} + S_v \dot{v}, S_u \dot{u} + S_v \dot{v} \rangle = \|S_u\|^2 \dot{u}^2 + 2\langle S_u, S_v \rangle \dot{u} \dot{v} + \|S_v\|^2 \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Se definiamo

$$\mathbf{E} = \|S_u\|^2 \quad , \quad \mathbf{F} = \langle S_u, S_v \rangle \quad , \quad \mathbf{G} = \|S_v\|^2$$

avremo allora

$$\|\dot{\Gamma}(\xi)\|^2 = \mathbf{E}u^2 + 2\mathbf{F}u\dot{v} + \mathbf{G}S\dot{v}^2$$

Quindi $\|\dot{\Gamma}(\xi)\|^2$ può essere identificata mediante la forma quadratica

$$(h, k) \mapsto \mathbf{E}h^2 + \mathbf{F}hk + \mathbf{G}k^2$$

che si chiama **Prima Forma Quadratica Fondamentale** della superficie S

Possiamo osservare che

$$\begin{aligned} \mathbf{E}u^2 + 2\mathbf{F}u\dot{v} + \mathbf{G}S\dot{v}^2 &= \mathbf{E} \left[\left(h^2 + 2\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{E}}hk + \frac{\mathbf{F}^2}{\mathbf{E}^2}k^2 \right) - \frac{\mathbf{F}^2}{\mathbf{E}^2}k^2 + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{E}}k^2 \right] = \\ &= \mathbf{E} \left[\left(h + \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{E}}k \right)^2 + \frac{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}{\mathbf{E}^2} \right] = \\ &= \mathbf{E} \left(h + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{E}}k \right)^2 + \frac{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

ed anche che

$$\begin{aligned} \|n\| &= \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2 = \|S_u \times S_v\|^2 = \\ &= \|S_u\|^2 \|S_v\|^2 \sin^2 \theta = \|S_u\|^2 \|S_v\|^2 - \|S_u\|^2 \|S_v\|^2 \cos^2 \theta = \\ &= \|S_u\|^2 \|S_v\|^2 - \langle S_u, S_v \rangle^2 = \mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2 \end{aligned}$$

Sia ora $\Gamma(s) = S(u(s), v(s))$ una curva sulla superficie S parametrizzata mediante la sua lunghezza d'arco s

Indicando con l'apice la derivazione rispetto alla lunghezza d'arco s e con il punto la derivazione rispetto al parametro ξ , i vettori

$$T(s) = \Gamma'(s) = \frac{\dot{\Gamma}(\xi(s))}{\|\dot{\Gamma}(\xi(s))\|} \quad , \quad N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \quad , \quad B(s) = T(s) \times N(s)$$

costituiscono la *terna intrinseca* della curva.

Avremo

$$T = \frac{S_u \dot{u} + S_v \dot{v}}{\|S_u \dot{u} + S_v \dot{v}\|}$$

e quindi, poichè $n = S_u \times S_v$ si ha $T \perp n$.

Definiamo $N_g = T \times \nu$ versore normale geodesico ed otteniamo un sistema di riferimento ortonormale (t, ν, N_g) rispetto al quale poichè

$$\kappa N = \Gamma'' = \frac{d}{ds} (S_u \dot{u} + S_v \dot{v}) = S_{uu} \dot{u}^2 + 2S_{uv} \dot{u} \dot{v} + S_{vv} \dot{v}^2 + S_u \ddot{u} + S_v \ddot{v}$$

ed inoltre Γ'' è ortogonale a $\Gamma' = T$ si può esprimere $\Gamma'' = \kappa N$ come combinazione lineare di ν e n_g .

Avremo cioè che

$$\kappa N = \kappa_\nu \nu + \kappa_g n_g$$

- κ_ν si chiama curvatura normale di Γ
- κ_g si chiama curvatura geodesica di Γ

Possiamo calcolare che

$$\begin{aligned} \kappa_\nu &= \langle \Gamma'', \nu \rangle = \\ &= \langle S_{uu}, \nu \rangle \dot{u}^2 + 2\langle S_{uv}, \nu \rangle \dot{u}\dot{v} + \langle S_{vv}, \nu \rangle \dot{v}^2 + \langle S_u, \nu \rangle \ddot{u} + \langle S_v, \nu \rangle \ddot{v} = \\ &= \mathbf{L}\dot{u}^2 + 2\mathbf{M}\dot{u}\dot{v} + \mathbf{N}\dot{v}^2 \end{aligned}$$

1.5.2 Seconda Forma Quadratica di una Superficie

La forma quadratica

$$(h, k) \mapsto \mathbf{L}h^2 + 2\mathbf{M}hk + \mathbf{N}k^2$$

si chiama **Seconda Forma Quadratica Fondamentale**

I coefficienti

$$\mathbf{L} = \langle S_{uu}, \mathbf{N} \rangle$$

$$\mathbf{M} = \langle S_{uv}, \mathbf{N} \rangle$$

$$\mathbf{N} = \langle S_{vv}, \mathbf{N} \rangle$$

sono elementi caratteristici della superficie S .

Quindi linee su S aventi lo stesso (\dot{u}, \dot{v}) hanno la stessa curvatura normale.

La curvatura geodesica si può calcolare come segue: Si ha

$$\kappa n = \ddot{\Gamma} = \kappa_{\mathbf{N}} \mathbf{N} + \kappa_g n_g$$

Per definizione n_g è ortogonale ad \mathbf{N} quindi n_g è contenuto nel piano tangente e si ha, per opportuni α, β

$$\kappa_g n_g = \alpha S_u + \beta S_v$$

α, β possono essere determinati utilizzando le seguenti uguaglianze.

$$\kappa_g \langle n_g, S_u \rangle = \alpha \|S_u\|^2 + \beta \langle S_v, S_u \rangle = \alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{F}$$

$$\kappa_g \langle n_g, S_v \rangle = \alpha \langle S_u, S_v \rangle + \beta \|S_v\|^2 = \alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}$$

Inoltre, poichè $\mathbf{N} \perp S_u$ e $\mathbf{N} \perp S_v$, otteniamo

$$\begin{aligned}\kappa_g \langle \mathbf{n}_g, S_u \rangle &= \kappa \langle \mathbf{n}, S_u \rangle = \langle \ddot{\Gamma}, S_u \rangle = \\ &= \|S_u\|^2 \ddot{u} + \langle S_v, S_u \rangle \ddot{v} + \langle S_{uu}, S_u \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle S_{uv}, S_u \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle S_{vv}, S_u \rangle \dot{v}^2 = \mathbf{E} \ddot{u} + \mathbf{F} \ddot{v} + Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_g \langle \mathbf{n}_g, S_v \rangle &= \kappa \langle \mathbf{n}, S_v \rangle = \langle \ddot{\Gamma}, S_v \rangle = \\ &= \langle S_u, S_v \rangle \ddot{u} + \|S_v\|^2 \ddot{v} + \langle S_{uu}, S_v \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle S_{uv}, S_v \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle S_{vv}, S_v \rangle \dot{v}^2 = \mathbf{F} \ddot{u} + \mathbf{G} \ddot{v} + Z\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \sqrt{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0$$

la matrice è invertibile e si ha

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

e si ricava

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Possiamo infine studiare come varia la curvatura normale κ_N , determinandone in particolare massimo e minimo valore.

Ricordiamo che, per una curva $\Gamma(s) = S(u(s), v(s))$ su una superficie S , parametrizzata mediante la lunghezza d'arco, la curvatura normale è data da

$$\kappa_N = \mathbf{L} \dot{u}^2 + 2\mathbf{M} \dot{u} \dot{v} + \mathbf{N} \dot{v}^2$$

dove $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ sono i coefficienti che definiscono la Seconda Forma Fondamentale di S .

Il vettore tangente t alla curva $\Gamma(s)$ si determina mediante la

$$t = S_u \dot{u} + S_v \dot{v}$$

I vettori $\{S_u, S_v\}$ costituiscono una base per il piano tangente ad S ; tuttavia essi non sono sempre ortonormali.

Possiamo ricavare da essi un sistema ortonormale mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Hilbert-Schmidt; possiamo cioè definire

$$t_1 = \frac{S_u}{\|S_u\|} = \frac{S_u}{\sqrt{\mathbf{E}}} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{\mathbf{E}}} \right\rangle}{\|S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{\mathbf{E}}} \right\rangle\|}$$

Qualche calcolo ci permette di semplificare un po' l'espressione di t_2

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{\mathbf{E}}} \right\rangle}{\left\| S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{\mathbf{E}}} \right\rangle \right\|} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{E}S_v - \mathbf{F}S_u}{\sqrt{\|S_v\|^2 - 2\frac{\langle S_v, S_u \rangle^2}{\mathbf{E}} + \langle S_v, S_u \rangle^2 \frac{\|S_u\|^2}{\mathbf{E}^2}}} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{E}S_v - \mathbf{F}S_u}{\sqrt{\mathbf{G} - \frac{\mathbf{F}^2}{\mathbf{E}}}} = \frac{\mathbf{E}S_v - \mathbf{F}S_u}{\sqrt{\mathbf{E}^2\mathbf{G} - \mathbf{E}\mathbf{F}^2}} = \frac{\mathbf{E}S_v - \mathbf{F}S_u}{\sqrt{\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)}} \end{aligned}$$

Quindi una base ortonormale per piano tangente ad S è data da

$$t_1 = \frac{S_u}{\sqrt{\mathbf{E}}} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{\mathbf{E}S_v - \mathbf{F}S_u}{\sqrt{\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)}}$$

e possiamo esprimere il vettore tangente unitario t nella forma

$$t = \cos \theta t_1 + \sin \theta t_2 = \cos \theta \frac{S_u}{\sqrt{\mathbf{E}}} + \sin \theta \frac{\mathbf{E}S_v - \mathbf{F}S_u}{\sqrt{\mathbf{E}\mathbf{W}}}$$

per qualche valore di θ , essendo $\mathbf{W} = \sqrt{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}$
Si ottiene infine che

$$t = S_u \frac{\mathbf{W} \cos \theta - \mathbf{F} \sin \theta}{\sqrt{\mathbf{E}\mathbf{W}}} + S_v \frac{\sqrt{\mathbf{E}} \sin \theta}{\mathbf{W}} = S_u \dot{u} + S_v \dot{v}$$

Di qui possiamo ricavare \dot{u} , \dot{v} e sostituire nell'espressione di κ_N ; si ha

$$\begin{aligned}
\kappa_N &= \mathbf{L} \left(\frac{\mathbf{W} \cos \theta - \mathbf{F} \sin \theta}{\sqrt{\mathbf{E}\mathbf{W}}} \right)^2 + 2\mathbf{M} \frac{(\mathbf{W} \cos \theta - \mathbf{F} \sin \theta) \sqrt{\mathbf{E}} \sin \theta}{\sqrt{\mathbf{E}\mathbf{W}^2}} + \\
&\quad + \mathbf{F} \frac{\mathbf{E} \sin^2 \theta}{\mathbf{W}^2} = \\
&= \frac{1}{\mathbf{E}\mathbf{W}^2} (\mathbf{L}\mathbf{W}^2 \cos^2 \theta + \mathbf{L}\mathbf{F}^2 \sin^2 \theta - 2\mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{W} \sin \theta \cos \theta + \\
&\quad 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{W} \sin \theta \cos \theta - 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{F} \sin^2 \theta + \mathbf{N}\mathbf{E}^2 \sin^2 \theta) = \\
&= \frac{1}{\mathbf{E}\mathbf{W}^2} ((\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{W} - \mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{W}) \sin 2\theta + \mathbf{L}\mathbf{W}^2 \cos^2 \theta + \\
&\quad + (\mathbf{L}\mathbf{F}^2 - 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{F} + \mathbf{N}\mathbf{E}^2) \sin^2 \theta) = \\
&= \frac{1}{\mathbf{E}\mathbf{W}^2} ((\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{W} - \mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{W}) \sin 2\theta + \mathbf{L}\mathbf{W}^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \\
&\quad + (\mathbf{L}\mathbf{F}^2 - 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{F} + \mathbf{N}\mathbf{E}^2) \frac{1 - \cos 2\theta}{2}) = \\
&= \frac{1}{\mathbf{E}\mathbf{W}^2} ((\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{W} - \mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{W}) \sin 2\theta + \frac{\mathbf{L}\mathbf{W}^2 - \mathbf{L}\mathbf{F}^2 + 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{F} - \mathbf{N}\mathbf{E}^2}{2} \cos 2\theta + \\
&\quad + \frac{\mathbf{L}\mathbf{W}^2 + \mathbf{L}\mathbf{F}^2 - 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{F} + \mathbf{N}\mathbf{E}^2}{2}) = \\
&= \delta + \mu \sin 2\theta + \eta \cos 2\theta
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\mathbf{L}(\mathbf{W}^2 + \mathbf{F}^2) - 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{F} + \mathbf{N}\mathbf{E}^2}{2\mathbf{E}\mathbf{W}^2} \\
\mu &= \frac{(\mathbf{M}\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{L})\mathbf{W}}{\mathbf{E}\mathbf{W}^2} \\
\eta &= \frac{\mathbf{L}(\mathbf{W}^2 - \mathbf{F}^2) + 2\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{F} - \mathbf{N}\mathbf{E}^2}{2\mathbf{E}\mathbf{W}^2}
\end{aligned}$$

Avremo quindi che

$$\kappa_N = \delta + \mu \sin 2\theta + \eta \cos 2\theta$$

e se θ_0 è scelto in modo che

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta_0 &= \frac{\eta}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} \\
\cos 2\theta_0 &= \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}}
\end{aligned}$$

possiamo scrivere che

$$\kappa_N = \delta + \sqrt{\mu^2 + \eta^2} (\cos 2\theta_0 \cos 2\theta + \sin 2\theta_0 \sin 2\theta) = \delta + \sqrt{\mu^2 + \eta^2} \sin 2(\theta + \theta_0)$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \max \kappa_N = \delta + \sqrt{\mu^2 + \eta^2} \\ \kappa_2 &= \max \kappa_N = \delta - \sqrt{\mu^2 + \eta^2}\end{aligned}$$

κ_1 e κ_2 sono le curvatures principali (Massima e Minima);

$\mathbf{H} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ è la curvatura media

$\mathbf{K} = \kappa_1 \kappa_2$ è la curvatura Gaussiana.

Si calcola che

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{LN} - \mathbf{M}^2}{\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{GL} - 2\mathbf{FM} + \mathbf{EN}}{2(\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2)}$$

1.6 Forme Differenziali in \mathbb{R}^3

Il linguaggio delle forme differenziali è abbastanza complesso ed astratto nonostante ciò le applicazioni della relativa teoria sono numerose e la teoria stessa consente di formulare l'estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale alle funzioni di più variabili.

Ci limitiamo ad illustrare le definizioni ed i risultati fondamentali, senza formalizzare le prime e senza dimostrare i secondi, nel caso di \mathbb{R}^3 .

In \mathbb{R}^3 possiamo considerare

- forme differenziali di ordine 0 o 0-forme

$$\omega_0 = f(x, y, z)$$

- forme differenziali di ordine 1 o 1-forme

$$\omega_1 = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$$

- forme differenziali di ordine 2 o 2-forme

$$\omega_2 = f(x, y, z)dy \wedge dz + g(x, y, z)dz \wedge dx + h(x, y, z)dx \wedge dy$$

- forme differenziali di ordine 3 o 3-forme

$$\omega_3 = f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$$

essendo f, g, h funzioni definite in \mathbb{R}^3 a valori in \mathbb{R} .

Non precisiamo la natura dei simboli dx dy e dz e dell'operazione di prodotto esterno \wedge .

Diciamo soltanto che i simboli dx dy e dz ci daranno indicazioni su come trattare ciascuna delle forme mentre il prodotto esterno si comporta come descritto nella seguente tabella

\wedge	dx	dy
dx	0	$dx \wedge dy$
dy	$-dx \wedge dy$	0

Simmetricamente

Possiamo considerare in \mathbb{R}^3

- varietà C_0 di dimensione 0 o 0–varietà
cioè unione finita di punti a ciascuno dei quali è associato un segno (+ o -)
- varietà C_1 di dimensione 1 o 1–varietà
cioè unione finita di linee a ciascuna delle quali è associato un segno (+ o -)
- varietà C_2 di dimensione 2 o 2–varietà
cioè unione finita di superfici a ciascuna delle quali è associato un segno (+ o -)
- varietà C_3 di dimensione 3 o 3–varietà
cioè unione finita di volumi a ciascuno dei quali è associato un segno (+ o -)

Possiamo poi considerare due operazioni:

- Un'operazione che indichiamo con d che trasforma una k –forma in una $(k + 1)$ –forma
- Un'operazione che indichiamo con ∂ che trasforma una k –varietà in una $(k - 1)$ –varietà

L'operazione d si definisce mediante le seguenti regole che riportiamo omettendo di scrivere esplicitamente la dipendenza da (x, y, z) delle funzioni f, g, h e delle loro derivate.

$$d\omega_0 = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dx + \\
&+ (g_x dx + g_y dy + g_z dz) \wedge dy + \\
&+ (h_x dx + h_y dy + h_z dz) \wedge dz = \\
&= f_x dx \wedge dx + f_y dy \wedge dx + f_z dz \wedge dx + \\
&+ g_x dx \wedge dy + g_y dy \wedge dy + g_z dz \wedge dy + \\
&+ h_x dx \wedge dz + h_y dy \wedge dz + h_z dz \wedge dz = \\
&= (f_y - g_x) dy \wedge dx + (f_z - h_x) dz \wedge dx + \\
&+ (h_y - g_z) dy \wedge dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_2 &= (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dy \wedge dz + \\
&+ (g_x dx + g_y dy + g_z dz) \wedge dz \wedge dx + \\
&+ (h_x dx + h_y dy + h_z dz) \wedge dx \wedge dy = \\
&= (f_x + g_y + h_z) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Si ha inoltre che

$$\begin{aligned}
d\omega_3 &= f_x dx \wedge dx \wedge dy \wedge dz + f_y dy \wedge dx \wedge dy \wedge dz + \\
&+ f_z dz \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0
\end{aligned}$$

e possiamo osservare che iterando l'applicazione di d otterremo di qui in avanti sempre 0.

Per quanto riguarda l'operazione ∂ usiamo le seguenti definizioni

Se $V = V(t, s, r)$ è una 3-varietà, cioè se

$$V : [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Chiamiamo frontiera di V e scriviamo ∂V la 2-varietà che si ottiene considerando l'unione delle superfici definite dalle seguenti parametrizzazioni a ciascuna delle quali attribuiamo un segno che chiamiamo orientamento della superficie secondo la seguente regola:

Attribuiamo l'indice 0 al primo estremo e l'indice 1 al secondo estremo di ciascuno dei segmenti $[a, b]$, $[c, d]$, $[\alpha, \beta]$ e assegnamo ad ogni parametrizzazione il segno

$$(-1)^{\text{posto della variabile} + \text{indice dell'estremo}}$$

$V(a, s, r)$	con il segno-	$[(-1)^{1+0}]$
$V(b, s, r)$	con il segno+	$[(-1)^{1+1}]$
$V(t, c, r)$	con il segno+	$[(-1)^{2+0}]$
$V(t, d, r)$	con il segno-	$[(-1)^{2+1}]$
$V(t, s, \alpha)$	con il segno-	$[(-1)^{3+0}]$
$V(t, s, \beta)$	con il segno+	$[(-1)^{3+1}]$

Se $S = S(u, v)$ è una 2-varietà, cioè se

$$S : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Chiamiamo frontiera di S e scriviamo ∂S la 1-varietà che si ottiene considerando l'unione delle linee definite dalle seguenti trasformazioni a ciascuna delle quali attribuiamo il segno indicato

$S(a, v)$	con il segno-	$[(-1)^{1+0}]$
$S(b, v)$	con il segno+	$[(-1)^{1+1}]$
$S(u, c)$	con il segno+	$[(-1)^{2+0}]$
$S(u, d)$	con il segno-	$[(-1)^{2+1}]$

Se $\gamma = \gamma(t)$ è una 1-varietà, cioè se

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Chiamiamo frontiera di γ e scriviamo $\partial\gamma$ la 0-varietà che si ottiene considerando l'unione dei punti definiti dalle seguenti trasformazioni a ciascuna delle quali attribuiamo il segno indicato

$\gamma(a)$	con il segno-	$[(-1)^{1+0}]$
$\gamma(b)$	con il segno+	$[(-1)^{1+1}]$

Per comprendere il significato dei segni occorre prima chiarire come una k -forma può essere integrata su una k -varietà occorre cioè definire il simbolo

$$\int_{C_k} \omega_k$$

- Se $\omega_0 = f(x, y, z)$ e $C_0 = \pm P$ (cioè è la zero varietà costituita dal punto $P = (x, y, z)$ con il segno \pm)

$$\int_{C_0} \omega_0 = \pm f(P)$$

- Se $\omega_1 = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$ e $C_1 = \pm\gamma$ (cioè è la 1-varietà costituita dalla curva $\gamma = \gamma(t)$ con il segno \pm)

$$\int_{C_1} \omega_1 = \pm \int_a^b f(\gamma(t))\dot{x}(t) + g(\gamma(t))\dot{y}(t) + h(\gamma(t))\dot{z}(t)dt$$

Se $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la funzione definita da

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

ricordando che il versore tangente a γ è dato da

$$T = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right)$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dx + g dy + h dz &= \int_a^b (f\dot{x} + g\dot{y} + h\dot{z})dt = \\ &= \int_a^b \langle F, T \rangle \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_{\gamma} \langle F, T \rangle ds \end{aligned}$$

- Se $\omega_2 = f(x, y, z)dy \wedge dz + g(x, y, z)dz \wedge dx + h(x, y, z)dx \wedge dy$ e $C_1 = \pm S$ (cioè è la 2-varietà costituita dalla superficie $S = S(u, v)$ con il segno \pm)

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \omega_2 &= \\ &= \pm \int_a^b \int_c^d f(S(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + g(S(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + h(S(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv \end{aligned}$$

Se $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la funzione definita da

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

E, se si tiene conto che la normale a S è data da

$$N = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, -\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_S f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy &= \int_S f dy \wedge dz - g dx \wedge dz + h dx \wedge dy = \\ &= \int_a^b \int_c^d \frac{1}{\|N\|} \left(f \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - g \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + h \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \|N\| dudv = \\ &= \int_a^b \int_c^d \left\langle F, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \|N\| dudv = \iint_S \left\langle F, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle d\sigma \end{aligned}$$

- Se $\omega_3 = f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$ e $C_3 = \pm V = V(t, s, r)$ (cioè è la 3-varietà costituita dal volume V con il segno \pm)

$$\int_{C_0} \omega_0 = \pm \int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta f(V(t, s, r)) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, s, r)} dt ds dr$$

Usando il teorema di cambiamento di variabili in un integrale triplo, possiamo allora affermare che, a meno del segno in quanto nel teorema citato compare il modulo dello Jacobiano, si ha

$$\int_{C_0} \omega_0 = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

A questo punto possiamo anche chiarire il significato del segno che abbiamo attribuito a i vari pezzi di frontiera di una varietà.

1.6.1 Un'idea per rendersi conto dei segni

Se S_1 è la varietà definita da

$$\gamma(t) \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

avremo che la frontiera $\partial\gamma$ è costituita dai due punti

$$P_0 = \gamma(0) \text{ con il segno } -$$

$$P_1 = \gamma(1) \text{ con il segno } +$$

Se $\omega_0 = f(x, y, z)$ è una 0-forma

$$\int_{\partial S_1} \omega_0 = - \int_{P_0} \omega_0 + \int_{P_1} \omega_0 = f(P_1) - f(P_0) \quad (1.2)$$

Se consideriamo una 1-forma

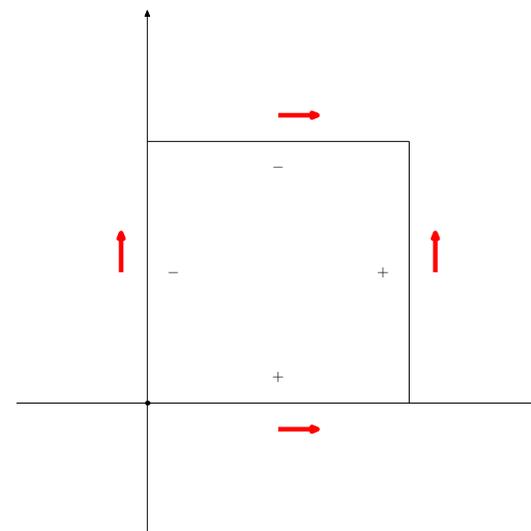
$$\omega_1 = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$$

e la 2-varietà C_2 costituita dal quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ nel piano $z = 0$.

Possiamo parametrizzare $C_2 = C_2(u, v)$ nella seguente maniera

$$C_2 \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

∂C_2 , la frontiera di C_2 , è una curva costituita dalle linee $\gamma_1(u) = C_2(u, 0)$, $\gamma_2(v) = C_2(0, v)$, $\gamma_3(u) = C_2(u, 1)$, $\gamma_4(v) = C_2(1, v)$,



$$\gamma_1 \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, u \in [0, 1] \quad \gamma_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}, v \in [0, 1]$$

$$\gamma_3 \begin{cases} x = u \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, u \in [0, 1] \quad \gamma_4 \begin{cases} x = 0 \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}, v \in [0, 1]$$

Con le regole prima descritte attribuiamo il segno + a γ_1 e γ_2 ed il segno - a γ_3 e γ_4 .

Pertanto

$$\int_{\partial C_2} \omega_1 = + \int_{\gamma_1} \omega_2 + \int_{\gamma_2} \omega_2 - \int_{\gamma_3} \omega_2 - \int_{\gamma_4} \omega_2$$

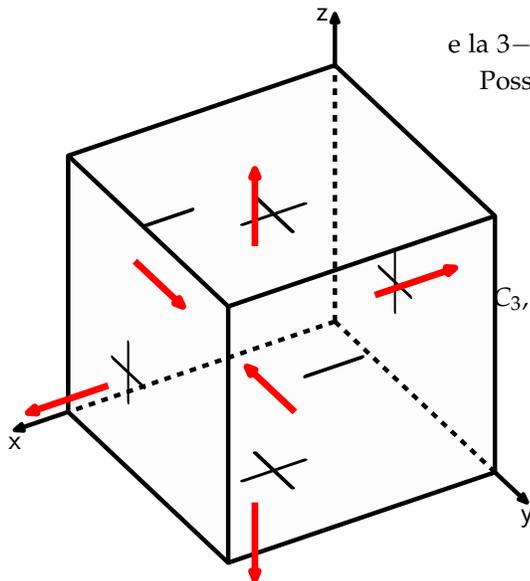
Se conveniamo che attribuire il segno + ad un lato significa che quel lato è percorso nella direzione positiva dell'asse cui è parallelo mentre il segno - indica che è percorso in direzione opposta, è immediato verificare che con tali scelte di segno si vede che il perimetro del quadrato C_2 , che costituisce la frontiera ∂C_2 , è percorso in senso antiorario, se visto dall'alto (cioè da un punto di vista che giace nel semipiano $z > 0$).

Infine consideriamo una 2 - forma

$$\omega_2 = f(x, y, z)dx \wedge dy + g(x, y, z)dy \wedge dz + h(x, y, z)dz \wedge dx$$

e la 3- varietà C_3 costituita dal cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ nello spazio, Possiamo parametrizzare $C_3 = C_3(u, v, w)$ nella seguente maniera

$$C_3 \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = w \end{cases}, \quad (u, v, w) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$



C_3 , la frontiera di C_3 , è una superficie costituita dai quadrati

$$S_1(v, w) = C_3(0, v, w) \quad , \quad S_2(v, w) = C_3(1, v, w)$$

$$S_3(u, w) = C_3(u, 0, w) \quad , \quad S_4(u, w) = C_3(u, 1, w)$$

$$S_5(u, v) = C_3(u, v, 0) \quad , \quad S_6(u, v) = C_3(u, v, 1)$$

Con le regole prima descritte attribuiamo il segno + a S_2, S_3 ed S_6 ed il segno - a S_1, S_4 ed S_5 , inoltre, calcolando i vettori normali N_i alla superficie di S_i , si ha

$$N_1 = N_2 = (0, 0, 1) \quad , \quad N_3 = N_4 = (0, -1, 0) \quad , \quad N_5 = N_6 = (1, 0, 0)$$

Pertanto

$$\int_{\partial C_3} \omega_2 = + \int_{S_2} \omega_2 + \int_{S_3} \omega_2 + \int_{S_6} \omega_2 - \int_{S_1} \omega_2 - \int_{S_4} \omega_2 - \int_{S_5} \omega_2$$

Se conveniamo che attribuire il segno + ad N_j significa che il vettore normale alla superficie S_j è orientato nella direzione positiva dell'asse cui è parallelo mentre il segno - indica che il vettore normale alla superficie è orientato nella direzione opposta, è immediato verificare che ogni integrazione è fatta usando un vettore normale che esce dal volume C_3 .

1.6.2 Proprietà delle forme differenziali.

Si può provare che

Teorema 1.2 Sia ω_n una n -forma in A , allora

$$d(d\omega_k) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il risultato nel caso in cui ω_1 è una 1-forma in \mathbb{R}^3

$$\omega_1 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

si ha

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + \\ &+ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

e tenendo conto che $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$,

$$\begin{aligned} d(d\omega_1) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \\ &+ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

e ogni termine elide il successivo. □

Definizione 1.7 Sia ω_n una n – forma differenziale in A , diciamo che ω_n è **esatta** se esiste una $(n - 1)$ – forma su A , η_{n-1} tale che

$$d\eta_{n-1} = \omega_n$$

η_{n-1} si chiama primitiva di ω_n .

Diciamo che ω_n è **chiusa** se

$$d\omega_n = 0.$$

E' immediata conseguenza del precedente teorema il seguente risultato.

Teorema 1.3 Sia ω_n una n – forma su A . Se ω_n è esatta, allora ω_n è chiusa.

DIMOSTRAZIONE. Se ω_n è esatta, $\omega_n = d\eta_{n-1}$ e

$$d\omega_n = d(d\eta_{n-1}) = 0.$$

□

Inoltre

Ogni 3 – forma in \mathbb{R}^3 è chiusa

A questo punto è importante riconoscere tra le n – forme su \mathbb{R}^3 quelle esatte e determinarne le primitive. Questo problema infatti ha notevoli riscontri sia dal punto di vista matematico che dal punto di vista fisico.

Definizione 1.8 Sia $A \subset \mathbb{R}^k$, diciamo che A è stellato se esiste $x_0 \in A$ tale che

$$(1 - t)x_0 + tx \in A, \quad \forall x \in A, \quad \forall t \in [0, 1].$$

E' immediato riconoscere che se A è convesso, allora A è stellato, mentre non è vero il viceversa. E' altrettanto ovvio convincersi che, a meno di traslazioni, il punto x_0 può essere sempre assunto coincidente con l'origine di \mathbb{R}^k .

Teorema 1.4 Sia ω_n una n –forma differenziale su un insieme A aperto e stellato; allora se ω_n è chiusa si ha che ω_n è esatta.

Poichè ci limitiamo a considerare soltanto forme differenziali in \mathbb{R}^3 , possiamo discutere l'enunciato precedente in ognuno dei tre casi che si presentano e dal momento che i risultati che riguardano le forme differenziali sono strettamente collegati alla teoria dei campi vettoriali, ricordiamo che

è assegnato un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 se è data una funzione

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ad un campo vettoriale F si può associare tanto una 1–forma

$$\omega_1 = f dx + g dy + h dz$$

che una 2–forma

$$\omega_2 = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

e gli integrali di linea di ω_1 e di superficie di ω_2 rappresentano, rispettivamente il lavoro lungo una linea ed il flusso attraverso una superficie del campo vettoriale F .

Una 0 – forma ed una 3–forma sono semplicemente identificate da una funzione

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$

mediante le

$$\omega_0 = f, \quad \omega_3 = f dx \wedge dy \wedge dz$$

Si definisce **divergenza** di un campo vettoriale F la funzione scalare

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

mentre si definisce **rotore** di un campo vettoriale F la funzione vettoriale

$$\operatorname{rot} F = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$$

Se introduciamo il vettore formale

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

possiamo scrivere che

$$\operatorname{div} F = \langle D, F \rangle$$

$$\operatorname{rot} F = D \wedge F$$

Ricordiamo anche

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$$

$\Delta \varphi$ si chiama laplaciano della funzione φ ed è di fondamentale importanza in svariati campi della matematica e della fisica.

1.6.3 Primitive di 1-forme

Consideriamo una 1-forma

$$\omega_1 = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$$

ed il campo vettoriale

$$F = (f, g, h)$$

ad essa associato. Si ha

$$d\omega_1 = (f_y - g_x)dy \wedge dx + (f_z - h_x)dz \wedge dx + (h_y - g_z)dy \wedge dz$$

e pertanto, affinché ω_1 sia esatta deve essere $d\omega_1 = 0$ e quindi

$$f_y - g_x = 0$$

$$f_z - h_x = 0$$

$$h_y - g_z = 0$$

cioè che

$$\text{rot } F = 0$$

La 0-forma $\omega_0 = \varphi(x, y, z)$ è una primitiva di ω_1 se $d\omega_0 = \omega_1$ cioè se

$$\varphi_x = f$$

$$\varphi_y = g$$

$$\varphi_z = h$$

ed in termini di campo vettoriale se

$$F = \nabla \varphi$$

Possiamo definire

$$A(x, y, z) = \int_{x_0}^x f(t, y, z)dt$$

e scegliere

$$\varphi(x, y, z) = A(x, y, z) + a(y, z)$$

Deve anche essere

$$g(x, y, z) = \varphi_y(t, y, z) = A_y(t, y, z) + a_y(y, z)$$

Poichè a dipende soltanto da (y, z) , affinché la precedente uguaglianza sia possibile occorre che la funzione

$$a_y(y, z) = g(x, y, z) - A_y(x, y, z)$$

non dipenda da x ; per verificare se questo è vero possiamo derivare rispetto ad x ed otteniamo

$$g_x - A_{yx} = g_x - A_{xy} = g_x - f_y = 0$$

in quanto valgono le condizioni necessarie.

Pertanto l'uguaglianza

$$a_y(y, z) = g(x, y, z) - A_y(x, y, z)$$

è possibile e possiamo concludere che

$$a(y, z) = \int_{y_0}^y (g(x, \eta, z) - A_y(x, \eta, z)) d\eta + b(z) = B(y, z) + b(z)$$

Ma allora

$$\varphi(x, y, z) = A(x, y, z) + B(y, z) + b(z)$$

e deve infine essere

$$\varphi_z(x, y, z) = A_z(x, y, z) + B_z(y, z) + b_z(z) = h(x, y, z)$$

Affinchè sia possibile trovare b in modo che la precedente uguaglianza sia soddisfatta è necessario che

$$b_z(z) = h(x, y, z) - A_z(x, y, z) - B_z(y, z)$$

dipenda solo da z e quindi che

$$\begin{aligned} \left(h(x, y, z) - A_z(x, y, z) - B_z(y, z) \right)_x &= 0 \\ \left(h(x, y, z) - A_z(x, y, z) - B_z(y, z) \right)_y &= 0 \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} (h - A_z - B_z)_x &= h_x - A_{zx} - B_{zx} = h_x - A_{xz} - B_{xz} = h_x - A_{xz} = h_x - f_z = 0 \\ (h - A_z - B_z)_y &= h_y - A_{zy} - B_{zy} = h_y - A_{yz} - B_{yz} = h_y - A_{zy} - g_z + A_{yz} = h_y - g_z = 0 \end{aligned}$$

È allora sufficiente porre

$$b(z) = \int_{z_0}^z (h - A_z - B_z)(x, y, \zeta) d\zeta$$

1.6.4 Primitive di 2-forme

Consideriamo una 2-forma

$$\omega_2 = f(x, y, z) dy \wedge dz + g(x, y, z) dz \wedge dx + h(x, y, z) dx \wedge dy$$

ed il campo vettoriale

$$F = (f, g, h)$$

ad essa associato. Si ha

$$d\omega_2 = (f_x + g_y + h_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

e pertanto, affinché ω_2 sia esatta $d\omega_2 = 0$ e quindi

$$f_x + g_y + h_z = 0$$

cioè che

$$\operatorname{div} F = 0$$

La 1-forma $\omega_1 = \alpha(x, y, z)dx + \beta(x, y, z)dy + \gamma(x, y, z)dz$ cui associamo il campo vettoriale $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma)$, è una primitiva di ω_2 se $d\omega_1 = \omega_2$, cioè se

$$\gamma_y - \beta_z = h$$

$$\alpha_z - \gamma_x = g$$

$$\beta_x - \alpha_y = f$$

ed in termini di campo vettoriale se

$$F = \operatorname{rot} \Phi$$

Possiamo scegliere di cercare una primitiva per la quale risulti

$$\gamma(x, y, z) = 0$$

per cui, le prime due condizioni sono soddisfatte se

$$-\beta_z = h$$

$$\alpha_z = g$$

e allo scopo è sufficiente definire

$$\alpha(x, y, z) = \int_{z_0}^z g(x, y, \zeta) d\zeta + a(x, y) = A(x, y, z) + a(x, y)$$

$$\beta(x, y, z) = \int_{z_0}^z -h(x, y, \zeta) d\zeta + b(x, y) = -B(x, y, z) + b(x, y)$$

Per quel che riguarda la terza condizione osserviamo che poichè supponiamo soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza della primitiva di ω_2 , si ha

$$\begin{aligned} (\beta_x - \alpha_y - f)_z &= \beta_{xz} - \alpha_{yz} - f_z = \\ &= \beta_{zx} - \alpha_{zy} - f_z = -h_x - g_y - f_z = 0 \end{aligned}$$

ammesso che la condizione necessaria sia soddisfatta, e quindi

$$\beta_x - \alpha_y - f$$

è costante rispetto a z e si ha

$$(\beta_x - \alpha_y - f)(x, y, z) = 0 \quad \iff \quad (\beta_x - \alpha_y - f)(x, y, z_0) = 0$$

Ma allora, poichè

$$A_x(x, y, z) = \int_{z_0}^z g_x(x, y, \zeta) d\zeta$$

$$B_y(x, y, z) = \int_{z_0}^z h_y(x, y, \zeta) d\zeta$$

avremo

$$(\beta_x - \alpha_y - f)(x, y, z_0) =$$

$$= (b_x - a_y - A_y - B_x - f)(x, y, z_0) = (b_x - a_y - f)(x, y, z_0) = 0$$

e l'ultima uguaglianza è verificata se scegliamo, ad esempio,

$$a(x, y) = 0 \quad , \quad b(x, y) = \int_{x_0}^x f(\zeta, y, z) d\zeta$$

1.6.5 Primitive di 3-forme

Consideriamo una 3-forma

$$\omega_3 = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$$

si ha sempre

$$d\omega_3 = 0$$

e pertanto ω_3 è sempre esatta

La 2-forma

$$\omega_2 = \alpha(x, y, z) dx \wedge dy + \beta(x, y, z) dy \wedge dz + \gamma(x, y, z) dz \wedge dx$$

cui associamo il campo vettoriale $\Phi = (\gamma, \beta, \alpha)$, è una primitiva di ω_3 se $d\omega_2 = \omega_3$, cioè se

$$\gamma_x + \beta_y + \alpha_z = f$$

ed in termini di campo vettoriale se

$$\operatorname{div} \Phi = f$$

Si verifica subito che possiamo trovare una primitiva definendo

$$\gamma(x, y, z) = \beta(x, y, z) = 0 \quad \alpha(x, y, z) = \int_{z_0}^z f(x, y, \zeta) d\zeta$$

1.7 Il Teorema di Stokes

Il teorema di Stokes costituisce la naturale estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale, così come il concetto di potenziale di una forma differenziale costituisce la naturale estensione del concetto di primitiva di una funzione di una variabile reale, ed è di grandissima importanza nella teoria e nelle applicazioni.

Con le definizioni precedenti il teorema di Stokes può essere enunciato come segue

Teorema 1.5 - Stokes - Sia ω_{n-1} una $(n-1)$ -forma differenziale su \mathbb{R}^k e sia C una n -varietà in \mathbb{R}^k ; allora

$$\int_{\partial C} \omega_{n-1} = \int_C d\omega_{n-1}.$$

Il teorema di Stokes è suscettibile di significative conseguenze sia in \mathbb{R}^2 che in \mathbb{R}^3 soprattutto se si tiene conto del fatto che, ad esempio in \mathbb{R}^3 , le 1-forme e le 2-forme possono essere identificate con un campo vettoriale, mentre in \mathbb{R}^2 solo le 1-forme sono associabili ad un campo vettoriale.

1.7.1 Il teorema della divergenza in \mathbb{R}^3

Consideriamo una 2-forma in \mathbb{R}^3

$$\omega_2(x, y, z) = f(x, y, z)dy \wedge dz + g(x, y, z)dz \wedge dx + h(x, y, z)dx \wedge dy$$

ed il campo vettoriale che la identifica

$$F = (f, g, h)$$

Si ha

$$d\omega_2 = (f_x + g_y + h_z)dx \wedge dy \wedge dz$$

Se $V = V(t, s, r)$ è una 3-varietà la cui frontiera è

$$\partial V = +V(1, s, r) \cup -V(0, s, r) \cup -V(t, 1, r) \cup +V(t, 0, r) \cup +V(t, s, 1) \cup -V(t, s, 0)$$

si ha

$$\int_{\partial V} fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy = \int_V (f_x + g_y + h_z)dx \wedge dy \wedge dz \quad (1.3)$$

E, se si tiene conto che la normale N a ∂V è data da

$$N = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, -\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

essendo

$$v = \|N\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial V} f dy \wedge dz - g dx \wedge dz + h dx \wedge dy &= \\
 &= \iint_D \frac{1}{v} \left(f \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - g \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + h \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) v du dv = \\
 &= \iint_D \langle F, N \rangle v du dv = \iint_{\partial C} \langle F, N \rangle d\sigma
 \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\iint_{\partial V} \langle F, N_e \rangle d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} F dx dy dz \quad (1.4)$$

ove $N_e = N \operatorname{sgn} J V$ è il versore normale a ∂V orientato verso l'esterno di V .

La 1.3 è nota come teorema di Gauss e la 1.4 è la formulazione del teorema della divergenza.

Possiamo dimostrare il teorema della divergenza come segue.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio che

$$\iiint_V f_x dx \wedge dy \wedge dz = \iint_{\partial V} f dy \wedge dz$$

Si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial V} f dy \wedge dz &= \int_0^1 \int_0^1 f \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,r)} \Big|_{t=0}^{t=1} ds dr - \\
 &- \int_0^1 \int_0^1 f \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)} \Big|_{s=0}^{s=1} dt dr + \int_0^1 \int_0^1 f \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)} \Big|_{r=0}^{r=1} dt ds = \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(f \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,r)} \right) dt ds dr - \\
 &- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(f \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)} \right) ds dt dr + \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dr} \left(f \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)} \right) dr dt ds
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \iint_{\partial V} f dy \wedge dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t) \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} + f \frac{d}{dt} \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} dt ds dr - \\
&- \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s) \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + f \frac{d}{ds} \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} dt ds dr + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f_x x_r + f_y y_r + f_z z_r) \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} + f \frac{d}{dr} \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} dt ds dr = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t) \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - \\
&- (f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s) \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + (f_x x_r + f_y y_r + f_z z_r) \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} dt ds dr + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - \frac{d}{ds} \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + \frac{d}{dr} \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) dt ds dr
\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - \frac{d}{ds} \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + \frac{d}{dr} \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) = \\
&= \left(\frac{d}{dt} \det \begin{pmatrix} y_s & z_s \\ y_r & z_r \end{pmatrix} - \frac{d}{ds} \det \begin{pmatrix} y_t & z_t \\ y_r & z_r \end{pmatrix} + \frac{d}{dr} \det \begin{pmatrix} y_t & z_t \\ y_s & z_s \end{pmatrix} \right) = \\
&= \det \begin{pmatrix} y_{st} & z_s \\ y_{rt} & z_r \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_s & z_{st} \\ y_r & z_{rt} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} y_{ts} & z_t \\ y_{rs} & z_r \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} y_t & z_{ts} \\ y_r & z_{rs} \end{pmatrix} + \\
&+ \det \begin{pmatrix} y_{tr} & z_t \\ y_{sr} & z_s \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_t & z_{tr} \\ y_s & z_{sr} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
& \iint_{\partial V} f dy \wedge dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t) \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - \\
&- (f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s) \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + (f_x x_r + f_y y_r + f_z z_r) \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} dt ds dr = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_x \left(x_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - x_s \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + x_r \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) dt ds dr + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_y \left(y_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - y_s \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + y_r \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) dt ds dr + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_z \left(z_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - z_s \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + z_r \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) dt ds dr
\end{aligned}$$

Poichè

$$\begin{aligned}
& \left(y_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - y_s \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + y_r \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) = \\
& \left(y_t \det \begin{pmatrix} y_s & z_s \\ y_r & z_r \end{pmatrix} - y_s \det \begin{pmatrix} y_t & z_t \\ y_r & z_r \end{pmatrix} + y_r \det \begin{pmatrix} y_t & z_t \\ y_s & z_s \end{pmatrix} \right) = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \left(z_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - z_s \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + z_r \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) = \\ & \left(z_t \det \begin{pmatrix} y_s & z_s \\ y_r & z_r \end{pmatrix} - z_s \det \begin{pmatrix} y_t & z_t \\ y_r & z_r \end{pmatrix} + z_r \det \begin{pmatrix} y_t & z_t \\ y_s & z_s \end{pmatrix} \right) = 0 \end{aligned}$$

Possiamo concludere

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial V} f dy \wedge dz = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_x \left(x_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, r)} - x_s \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} + x_r \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, s)} \right) dt ds dr = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_x \det \begin{pmatrix} x_t & y_t & z_t \\ x_s & y_s & z_s \\ x_r & y_r & z_r \end{pmatrix} dt ds dr = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_x \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, s, r)} = \iiint_V f_x dx \wedge dy \wedge dz dt ds dr \end{aligned}$$

□

1.7.2 Il Teorema del Rotore

Se consideriamo una 1-forma in \mathbb{R}^3

$$\omega_1 = f dx + g dy + h dz$$

e se

$$F = (f, g, h)$$

è il campo vettoriale ad essa associato, si ha

$$d\omega_1 = (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (h_x - f_z) dx \wedge dz$$

Sia $S = S(u, v)$ una 2-varietà, cioè sia

$$S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

e sia ∂S la sua frontiera

$$\partial S = -S(1, v) \cup S(0, v) \cup S(u, 1) \cup -S(u, 0)$$

si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} f dx + g dy + h dz = \\ & = \int_S (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (h_x - f_z) dx \wedge dz \quad (1.5) \end{aligned}$$

Ricordando che il versore tangente a ∂S è dato da

$$T = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right)$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} f dx + g dy + h dz &= \int_a^b (f \dot{x} + g \dot{y} + h \dot{z}) dt = \\ &= \int_a^b \langle F, T \rangle \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_{\partial S} \langle F, T \rangle ds \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} & \int_S (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (h_x - f_z) dx \wedge dz = \\ &= \iint_D \frac{1}{v} \left((g_x - f_y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + (h_y - g_z) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (h_x - f_z) \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right) v du dv = \\ &= \iint_D \langle \text{rot } F, N \rangle v du dv = \iint_S \langle \text{rot } F, N \rangle d\sigma \end{aligned}$$

Si ottiene perciò che

$$\int_{\partial C} \langle F, T \rangle ds = \iint_C \langle \text{rot } F, N \rangle d\sigma \quad (1.6)$$

La 1.6 è nota come teorema del rotore.

Osserviamo che nella formula compare N e non N_e .

Le formule 1.6 e 1.4 assumono un'interessante aspetto nel caso in cui $F = \nabla \varphi$.

Si ha infatti in tal caso che, se C_2 è una 2-varietà e C_3 è una 3-varietà

$$\int_{\partial C_2} \langle \nabla \varphi, T \rangle ds = 0 \quad (1.7)$$

$$\iint_{\partial C_3} \langle \nabla \varphi, N_e \rangle ds = \iiint_{C_3} \Delta \varphi dx dy dz$$

Possiamo dimostrare il teorema del rotore come segue.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il teorema nel caso in cui

$$F = (0, 0, h(x, y, z))$$

per cui

$$\text{rot } F = (h_y(x, y, z), -h_x(x, y, z), 0)$$

In tal caso si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \langle F, T \rangle ds &= \int_{\partial S} h dz = \int_0^1 h(x(u, 0), y(u, 0), z(u, 0)) z_u(u, 0) - \\ &\quad - h(x(u, 1), y(u, 1), z(u, 1)) z_u(u, 1) du + \\ &+ \int_0^1 h(x(1, v), y(1, v), z(1, v)) z_v(1, v) - \\ &\quad - h(x(0, v), y(0, v), z(0, v)) z_v(0, v) dv = \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dv} h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) z_u(u, v) dv du + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{du} h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) z_v(u, v) du dv = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 -(h_x x_v + h_y y_v + h_z z_v) z_u - h z_{uv} + (h_x x_u + h_y y_u + h_z z_u) z_v + h z_{vu} du dv = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 h_x (x_u z_v - x_v z_u) + h_y (y_u z_v - y_v z_u) du dv = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 h_x \frac{\partial y, z}{\partial (u, v)} + h_y \frac{\partial (x, z)}{\partial (u, v)} du dv = \iint_{\partial S} \langle \text{rot } F, N \rangle d\sigma \end{aligned}$$

□

1.7.3 La formula di Green nel piano

Consideriamo la 1-forma in \mathbb{R}^2

$$\omega_1(x, y) = f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

ed il campo vettoriale su \mathbb{R}^2

$$F = (f, g)$$

Avremo

$$d\omega_1 = (-f_y + g_x) dx \wedge dy$$

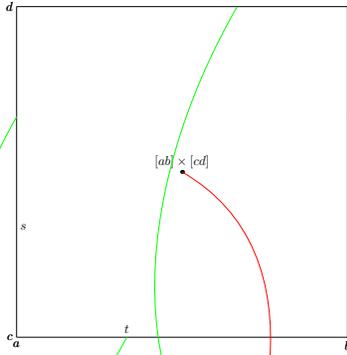
Sia $C = C(t, s) = (x(t, s), y(t, s))$ una 2-varietà, cioè sia

$$C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

e sia ∂C la sua frontiera

$$\partial C = -C(1, v) \cup +C(0, v) \cup +C(u, 1) \cup -C(u, 0)$$

si ha



$$\int_{\partial C} f dx + g dy = \int_C (-f_y + g_x) dx \wedge dy. \quad (1.8)$$

La 1.8 è nota come teorema di Green e si può dimostrare come segue.

DIMOSTRAZIONE.

Sia

$$\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad [a, b] \times [c, d] \ni (t, s) \mapsto \varphi(t, s) \in \mathbb{R}^2$$

una parametrizzazione della varietà C e siano

$$\gamma_1(t) = \varphi(t, c) \quad , \quad \gamma_2(s) = \varphi(b, s) \quad , \quad \gamma_3(t) = -\varphi(t, d) \quad , \quad \gamma_4(s) = -\varphi(a, s)$$

una parametrizzazione di ∂C

$$\begin{aligned} \int_C g_x(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_c^d g_x(x(t, s), y(t, s)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} dt ds = \\ &= \int_a^b \int_c^d g_x(x, y) [x_t y_s - x_s y_t] dt ds = \\ &= \int_a^b \int_c^d [g_x(x, y) x_t y_s - g_x(x, y) x_s y_t + \\ &\quad + g_y(x, y) y_t y_s - g_y(x, y) y_s y_t] dt ds = \\ &= \int_a^b \int_c^d [g_x(x, y) x_t + g_y(x, y) y_t] y_s - \\ &\quad - \int_a^b \int_c^d [g_x(x, y) x_s + g_y(x, y) y_s] y_t dt ds = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\frac{d}{dt} g(\varphi(t, s)) \right) y_s(t, s) dt \right) ds - \\ &\quad - \int_a^b \left(\int_c^d \left(\frac{d}{ds} g(\varphi(t, s)) \right) y_t(t, s) ds \right) dt = \\ &= \int_c^d \left([g(\varphi(t, s)) y_s(t, s)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b g(\varphi(t, s)) y_{st}(t, s) dt \right) ds - \\ &\quad - \int_a^b \left([g(\varphi(t, s)) y_t(t, s)]_{s=c}^{s=d} - \int_c^d g(\varphi(t, s)) y_{ts}(t, s) ds \right) dt = \\ &= \int_c^d [g(\varphi(b, s)) y_s(b, s) - g(\varphi(a, s)) y_s(a, s)] ds - \\ &\quad - \int_a^b [g(\varphi(t, d)) y_t(t, d) - g(\varphi(t, c)) y_t(t, c)] dt = \\ &= \int_{\partial C} g(x, y) dy \end{aligned}$$

□

Possiamo osservare che, se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ per $t \in [a, b]$ è una parametrizzazione di ∂C e N è il suo versore normale, $N = \dot{y}, -\dot{x}$ si

ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} f dx - g dy &= \int_a^b (f \dot{x} + g \dot{y}) dt = \\ &= \int_a^b \langle F, N \rangle \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{\partial \gamma} \langle F, N \rangle ds \end{aligned}$$

Essendo N il versore unitario a ∂C .

1.7.4 Campi conservativi

Concludiamo questo paragrafo precisando i risultati ottenuti per le 1-forme in \mathbb{R}^3 nell'ambito dello studio dei campi vettoriali.

Definizione 1.9 Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto e siano

$$f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f, g, h \in C^2(A)$$

Sia

$$\omega = f dx + g dy + h dz$$

e

$$F = (f, g, h)$$

ω è la 1-forma differenziale corrispondente al campo vettoriale F e reciprocamente F è il campo vettoriale che corrisponde alla 1-forma ω .

Diamo ora alcune definizioni che sono la controparte relativa al campo F delle definizioni date in precedenza, per le 1-forme ω .

Definizione 1.10 Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, un campo vettoriale $F = (f, g, h)$. Diciamo che F è un campo chiuso se

$$\text{rot } F = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y) = (0, 0, 0)$$

Diciamo che F è conservativo, oppure che F ammette potenziale, se esiste

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\nabla \varphi = F$$

In tal caso φ si chiama potenziale di F .

Osserviamo che, evidentemente, un campo vettoriale è chiuso o conservativo se e solo se la corrispondente 1-forma ω è chiusa o esatta, rispettivamente.

E' pertanto conseguenza dei precedenti risultati che

Teorema 1.6 Sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto; se F è conservativo allora F è chiuso.

Possiamo osservare che il teorema è immediata conseguenza del teorema di Schwarz.

Si può anche dimostrare che

Teorema 1.7 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, stellato. Se F è chiuso, allora F è conservativo.

Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

mostra che la condizione A stellato non è inessenziale. Essa può tuttavia essere un po' attenuata.

A questo scopo definiamo

Definizione 1.11 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, e sia γ una 1-varietà in \mathbb{R}^k , $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$; definiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_{\gamma} \omega = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{x}(t) + g(\gamma(t))\dot{y}(t) + h(\gamma(t))\dot{z}(t)dt = \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \rangle \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = \int_{\gamma} \langle F, T_{\gamma} \rangle ds \end{aligned}$$

dove $T_{\gamma}(t)$ indica il vettore tangente unitario alla curva γ .

Possiamo dimostrare che

Teorema 1.8 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto e connesso, un campo vettoriale; sono condizioni equivalenti

1. F è conservativo;
2. $\int_{\gamma} F = 0$ su ogni curva chiusa γ contenuta in A ;
3. $\int_{\gamma} F$ dipende solo dagli estremi di γ .

(Per semplicità la funzione F e la funzione γ sono supposte di classe C^2 , ma è sufficiente $F \in C^0$ e γ regolare a tratti.)

DIMOSTRAZIONE.

1) \Rightarrow 2)

Se $F = \nabla \varphi$ con $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_a^b \varphi_x(\gamma(t))\dot{x}(t) + \varphi_y(\gamma(t))\dot{y}(t) + \varphi_z(\gamma(t))\dot{z}(t)dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0 \quad (1.9) \end{aligned}$$

2) \Rightarrow 3). Siano γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi; allora $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ è chiusa e

$$\int_{\gamma} F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F = 0$$

3) \Rightarrow 1). Poiché vale 3), se γ è una qualunque curva avente per estremi $P = (x, y, z) \in A$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ fissato, possiamo definire

$$\varphi(x) = \int_{\gamma} F$$

Si ha allora, ad esempio

$$\frac{\varphi(x+t, y, z) - \varphi(x, y, z)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\gamma^*} F$$

essendo $\gamma^*(s) = (x+s, y, z)$, $0 \leq s \leq t$.

Pertanto

$$\frac{\varphi(x+t, y, z) - \varphi(x, y, z)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t f(x+s, y, z) ds = f(x+\sigma_t, y, z)$$

$0 \leq \sigma_t \leq t$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+t, y, z) - \varphi(x, y, z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} f(x+\sigma_t) = f(x)$$

□

Definizione 1.12 Sia $A \subset \mathbb{R}^3$, diciamo che A è semplicemente connesso se ogni curva chiusa contenuta in A può essere deformata con continuità sino a ridursi ad un punto senza uscire da A .

Per la precisione, se $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow A$ sono due curve chiuse, diciamo che γ_0 e γ_1 sono omotope se esiste $\psi \in \mathcal{C}^2$,

$$\psi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$$

tale che, se $s \in [0, 1]$ e $t \in [a, b]$

$$\psi(0, t) = \gamma_0(t), \quad \psi(1, t) = \gamma_1(t), \quad \psi(s, a) = \psi(s, b)$$

Diciamo che A è semplicemente connesso se ogni 1-varietà chiusa a valori in A è omotopa ad un punto di A .

Teorema 1.9 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale chiuso, $A \subset \mathbb{R}^3$, e siano γ_0 e γ_1 due curve chiuse a valori in A , omotope, allora

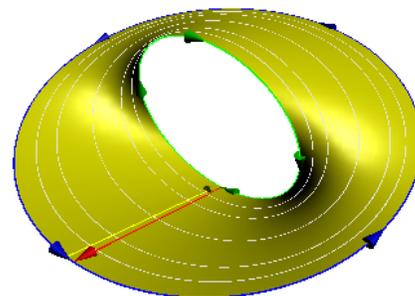
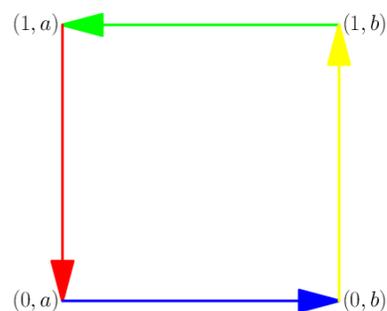
$$\int_{\gamma_0} F = \int_{\gamma_1} F.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché γ_0 e γ_1 sono omotope, esiste S tale che

$$S : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$$

tale che, se $u \in [0, 1]$ e $v \in [a, b]$

$$S(0, v) = \gamma_0(v), \quad S(1, v) = \gamma_1(v), \quad S(u, 0) = S(u, 1)$$



Definiamo

$$\gamma_2(u) = S(u, 0) = S(u, 1), \quad u \in [0, 1]$$

Per il teorema di Stokes avremo

$$\partial S = \gamma_2 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_0$$

per cui

$$\int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F - \int_{\gamma_0} F = \int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega = 0$$

e si può concludere che

$$\int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F = 0$$

□

Corollario 1.1 *Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale, $A \subset \mathbb{R}^k$ semplicemente connesso, allora F è conservativo se e solo se F è chiuso.*

1.8 FORME DIFFERENZIALI IN \mathbb{R}^n .

Lo studio delle forme differenziali in \mathbb{R}^n nasce dalla necessità di sistemare in ambito opportuno i concetti di integrale di linea e di integrale di superficie di un campo vettoriale che esprimono a loro volta i concetti fisici di lavoro lungo una linea e di flusso attraverso una superficie.

Contemporaneamente, e nello stesso ambito, devono essere sistemati i concetti di potenziale ed alcuni importanti risultati quali il teorema di Stokes, che genera nella sua versione più estesa teoremi come quelli di Green, di Gauss, della divergenza.

Osserviamo che \mathbb{R}^2 ed \mathbb{R}^3 sono gli spazi in cui vengono fatte le più numerose applicazioni dei concetti citati.

Cominciamo con il definire il concetto di funzione multilineare su \mathbb{R}^k .

Definizione 1.13 *Sia $f : (\mathbb{R}^k)^n \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è una funzione n – lineare su \mathbb{R}^k se*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

è lineare su $\mathbb{R}^k \forall x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}^k, \forall i = 1, \dots, n$.

Una funzione n – lineare in \mathbb{R}^k si dice anche n – tensore in \mathbb{R}^k ; indichiamo con \mathcal{T}_k^n l'insieme degli n – tensori in \mathbb{R}^k .

Osserviamo che \mathcal{T}_k^1 è l'insieme delle applicazioni lineari su \mathbb{R}^k ; in altre parole \mathcal{T}_k^1 coincide con lo spazio duale di \mathbb{R}^k (si veda la definizione 24.6).

Definizione 1.14 Siano $f \in \mathcal{T}_k^n$ e $g \in \mathcal{T}_k^m$, definiamo il prodotto tensoriale di f per g , e scriviamo $f \otimes g$, nella seguente maniera:

$$f \otimes g : (\mathbb{R}^k)^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \otimes g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n)g(y_1, \dots, y_m)$$

essendo il prodotto a secondo membro l'usuale prodotto tra numeri reali.

Un notevole esempio di applicazione lineare che verrà spesso usata nel seguito è dato dall'applicazione

$$\pi_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita mediante la

$$\pi_i(x) = x_i \quad , \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Osserviamo che si ha $d\pi_i = \pi_i$ e che pertanto

$$d\pi_i(x) = x_i \quad ;$$

onde conservare notazioni classiche e intuitivamente agevoli, converremo di indicare l'applicazione $d\pi_i = \pi_i$ con il simbolo dx_i .

Da quanto detto è anche immediato rilevare che

$$dx_i(h) = h_i$$

$$(dx_i \otimes dx_j)(h, k) = h_i k_j$$

Con queste notazioni si può facilmente verificare che

Teorema 1.10 Sia $f \in \mathcal{T}_k^n$, allora esistono k^n numeri reali $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$ tali che

$$f = \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \dots \sum_{i_n=1}^k f_{i_1 i_2 \dots i_n} dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{i_n}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^k x_{i_1}^1 e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^k x_{i_2}^2 e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^k x_{i_n}^n e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \dots \sum_{i_n=1}^k f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \dots x_{i_n}^n \end{aligned}$$

□

Definizione 1.15 Sia $f \in \mathcal{T}_k^n$, diciamo che f è alternante se

$$f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)$$

$\forall x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}^k$

Indichiamo con Λ_k^n l'insieme delle applicazioni n – lineari alternanti.

Osserviamo subito che $\mathcal{T}_k^n \supset \Lambda_k^n$ e che $\mathcal{T}_k^1 = \Lambda_k^1$ è lo spazio duale di \mathbb{R}^k .

Teorema 1.11 Se $f \in \Lambda_k^n$, $n > k$, allora $f = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$f = \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \dots \sum_{i_n=1}^k f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_n}$$

e $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ in quanto, essendo $n > k$, almeno due degli argomenti di f sono uguali tra loro; siano essi e_{i_j} ed e_{i_h} , si ha

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_h}, \dots, e_{i_n}) = -f(e_{i_1}, \dots, e_{i_h}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_n})$$

e

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_j}, \dots, e_{i_h}, \dots, e_{i_n}) = 0.$$

□

Pertanto sarà lecito considerare solamente $\Lambda_k^1, \Lambda_k^2, \dots, \Lambda_k^k$.

Esaminiamo brevemente gli elementi di $\Lambda_3^1, \Lambda_3^2, \Lambda_3^3$.

Λ_3^1 coincide con \mathcal{T}_3^1 e con lo spazio duale di \mathbb{R}^3 ; se $f \in \Lambda_3^1$ si ha

$$f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3, \quad (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$$

Sottolineiamo che

$$\begin{aligned} f(h) &= f_1 dx_1(h) + f_2 dx_2(h) + f_3 dx_3(h) = \\ &= f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3 \end{aligned}$$

Se $f \in \Lambda_3^2$ si ha $f \in \mathcal{T}_3^2$ e pertanto

$$\begin{aligned} f &= f_{11} dx_1 \otimes dx_1 + f_{12} dx_1 \otimes dx_2 + f_{13} dx_1 \otimes dx_3 + \\ &\quad + f_{21} dx_2 \otimes dx_1 + f_{22} dx_2 \otimes dx_2 + f_{23} dx_2 \otimes dx_3 + \\ &\quad + f_{31} dx_3 \otimes dx_1 + f_{32} dx_3 \otimes dx_2 + f_{33} dx_3 \otimes dx_3 \end{aligned}$$

Dal momento che

$$f_{ij} = f(e_i, e_j) \quad \text{e} \quad f(e_i, e_j) = -f(e_j, e_i)$$

si ha

$$f_{ii} = 0 \quad e \quad f_{ij} = -f_{ji}$$

per cui

$$\begin{aligned} f = & f_{12} (dx_1 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1) + \\ & + f_{13} (dx_1 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_1) + \\ & + f_{23} (dx_2 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_2) \end{aligned}$$

e se definiamo

$$dx_i \wedge dx_j = (dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i)$$

possiamo scrivere

$$f = f_1 dx_1 \wedge dx_2 + f_2 dx_2 \wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_3$$

che pertanto è la forma di una qualunque applicazione 2-lineare alter-nante in \mathbb{R}^3 , al variare di $(f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$. Si può facilmente verificare

che

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

e che

$$dx_i \wedge dx_i = 0$$

Inoltre si ha

$$(dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k = dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k)$$

Se $f \in \Lambda_3^3$ si ha

$$\begin{aligned} f = & f_{123} dx_1 \otimes dx_2 \otimes dx_3 + f_{132} dx_1 \otimes dx_3 \otimes dx_2 + \\ & + f_{213} dx_2 \otimes dx_1 \otimes dx_3 + f_{231} dx_2 \otimes dx_3 \otimes dx_1 + \\ & + f_{312} dx_3 \otimes dx_1 \otimes dx_2 + f_{321} dx_3 \otimes dx_2 \otimes dx_1 \end{aligned}$$

Ma

$$f_{123} = f_{231} = f_{312} = -f_{132} = -f_{213} = -f_{321} = f_1$$

ed

$$\begin{aligned} f = & f_1 (dx_1 \otimes dx_2 \otimes dx_3 + dx_2 \otimes dx_3 \otimes dx_1 + dx_3 \otimes dx_1 \otimes dx_2 - \\ & - dx_1 \otimes dx_3 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_2 \otimes dx_1) = \\ & = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Si può infatti verificare che

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = & \\ = & dx_1 \otimes dx_2 \otimes dx_3 + dx_2 \otimes dx_3 \otimes dx_1 + dx_3 \otimes dx_1 \otimes dx_2 - \\ & - dx_1 \otimes dx_3 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_2 \otimes dx_1 \end{aligned}$$

Osserviamo che si può ricavare un aiuto mnemonico per la composizione del prodotto $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ ricordando che la quantità a secondo membro è formata dagli stessi prodotti che si ottengono svolgendo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & dx_2 & dx_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix}$$

Sottolineiamo, a scanso di equivoci, che il prodotto tensoriale non è commutativo.

Si può in generale definire

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma (dx_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes dx_{\sigma(k)})$$

dove S_k è l'insieme delle permutazioni dei numeri $1, \dots, k$ e $\text{sgn } \sigma$ è $+1$ o -1 a seconda che σ si ottenga con un numero pari o dispari di scambi da $\{1, 2, \dots, k\}$.

Definizione 1.16 Sia $A \subset \mathbb{R}^k$, A aperto, chiamiamo n -forma differenziale in A una funzione

$$\omega_n : A \longrightarrow \Lambda_k^n, \quad n \leq k.$$

Osserviamo esplicitamente che assegnare una n -forma differenziale in A , significa ivi definire un certo numero di funzioni reali (ad esempio, 3 per le 1-forme e le 2-forme in \mathbb{R}^3).

In altre parole una 1-forma in \mathbb{R}^3 sarà del tipo

$$\omega_1(x) = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + f_3(x)dx_3$$

mentre una 2-forma si scriverà

$$\omega_2(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 + f_2(x)dx_2 \wedge dx_3 + f_3(x)dx_1 \wedge dx_3$$

e una 3-forma sarà

$$\omega_3(x) = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Aggiungiamo che per 0-forma intenderemo semplicemente una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$; indicheremo con ω_0 una 0-forma su A e si avrà pertanto

$$\omega_0(x) = f(x)$$

Passiamo a questo punto a definire una operazione di differenziazione che trasforma una n -forma in una $(n+1)$ -forma su A .

A questo scopo è necessario operare differenziazioni sui coefficienti della forma. **Osservazione-** Per evitare inutili ed inessenziali appesan-

timenti degli enunciati che seguono nel resto del paragrafo supporremo sempre che le funzioni che trattiamo siano di classe $\mathcal{C}^2(A)$.

Sia ω_n una n -forma in \mathbb{R}^k , $n \leq k$ avremo allora

$$\omega_n(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

La formula di cui sopra è stata ampiamente illustrata nel caso $n = 1, 2, 3$ e $k = 3$; è ovviamente estendibile se $k = 2$ e $n = 1, 2$, e se $k > 3$ si può estendere con più fatica, ma facendo uso delle sole nozioni fin qui introdotte.

Ciò premesso poniamo la seguente:

Definizione 1.17 Sia ω_n una n -forma differenziale in $A \subset \mathbb{R}^k$ e sia

$$\omega_n(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

Definiamo

$$d\omega_n(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial x_j} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

$d\omega_n$ risulta essere una $(n+1)$ -forma differenziale in A .

E' immediato verificare che se ω_0 è una 0-forma in A , $\omega_0 = f(x)$, si ha

$$d\omega_0(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

ed è evidente l'analogia con il differenziale di f .

E' altrettanto ovvio che, se ω_k è una k -forma in \mathbb{R}^k si ha $d\omega_k = 0$.

Si può inoltre provare che

Teorema 1.12 Sia ω_n una n -forma in A , allora

$$d(d\omega_n) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$d\omega_n(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} \sum_{h=1}^k \left(\frac{\partial}{\partial x_h} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) dx_h \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

$$d(d\omega_n)(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_h} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) \cdot dx_j \wedge dx_h \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

e, tenuto conto del teorema di Schwarz, i termini

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) dx_\beta \wedge dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

si annullano a due a due. \square

A titolo di esempio e di delucidazione dei calcoli effettuati vediamo che, se ω_1 è una 1-forma in \mathbb{R}^3

$$\omega_1 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

si ha

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(d\omega_1) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \\ &\quad + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 + \\ &\quad + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

e ogni termine elide il successivo.

Definizione 1.18 Sia ω_n una n – forma differenziale in $A \subset \mathbb{R}^k$, diciamo che ω_n è esatta se esiste una $(n - 1)$ – forma su A , η_{n-1} tale che

$$d\eta_{n-1} = \omega_n$$

η_{n-1} si chiama primitiva di ω_n .

Diciamo che ω_n è chiusa se

$$d\omega_n = 0.$$

E' immediata conseguenza del precedente teorema il seguente risultato.

Teorema 1.13 Sia ω_n una n – forma su A . Se ω_n è esatta, allora ω_n è chiusa.

DIMOSTRAZIONE. Se ω_n è esatta, $\omega_n = d\eta_{n-1}$ e

$$d\omega_n = d(d\eta_{n-1}) = 0.$$

□

Osserviamo altresì che ogni k -forma in \mathbb{R}^k è chiusa.

A questo punto è importante riconoscere tra le n -forme su \mathbb{R}^k quelle esatte e determinarne le primitive. Questo problema infatti ha notevoli riscontri sia dal punto di vista matematico che dal punto di vista fisico.

A tale scopo definiamo una operazione I che è in grado, quando l'insieme A su cui si opera soddisfa opportune proprietà, di trasformare una n -forma in una $(n-1)$ -forma primitiva della forma data.

Definizione 1.19 Sia $A \subset \mathbb{R}^k$, diciamo che A è stellato se esiste $x_0 \in A$ tale che

$$(1-t)x_0 + tx \in A, \quad \forall x \in A, \quad \forall t \in [0, 1].$$

È immediato riconoscere che se A è convesso, allora A è stellato, mentre non è vero il viceversa. È altrettanto ovvio convincersi che, a meno di traslazioni, il punto x_0 può essere sempre assunto coincidente con l'origine di \mathbb{R}^k .

Definizione 1.20 Sia ω_n una n -forma su $A \subset \mathbb{R}^k$, e supponiamo A stellato e aperto. Sia

$$\omega_n(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

Definiamo $I(\omega_n)$ come la $(n-1)$ -forma ottenuta mediante la

$$I(\omega_n)(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{n-1} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(tx) dt \right) x_{i_j} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge (dx_{i_j}) \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

ove si sia indicato con (dx_{i_j}) che il prodotto per dx_{i_j} deve essere omesso.

Osserviamo che nella definizione 29.12 non è essenziale supporre che gli indici siano ordinati: infatti se indichiamo con σ la permutazione che trasforma $\{1, 2, \dots, n\}$ in $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ si ha

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} dx_{i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge (dx_{i_k}) \wedge \dots \wedge dx_{i_n} &= \\ &= dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \operatorname{sgn} \sigma dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\sigma(n)}} = \\ &= \operatorname{sgn} \sigma (-1)^{\sigma^{-1}(k)-1} dx_{i_k} \wedge dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge (dx_{i_k}) \wedge \dots \wedge dx_{i_{\sigma(n)}} \end{aligned}$$

Possiamo a questo punto provare il seguente fondamentale risultato.

Lemma 1.1 - Poincarè - Sia $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto e stellato e sia ω_n una n -forma su A . Allora

$$\omega_n = I(d\omega_n) + d(I\omega_n)$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù della linearità delle operazioni di integrazione I e differenziazione d di una forma, possiamo limitarci a provare il teorema per la forma

$$\omega_n(x) = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Si ha

$$d\omega_n(x) = \sum_{h=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_h}(x) dx_h \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

e

$$I(\omega_n)(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{n-1} f(tx) dt \right) x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge (dx_j) \cdots \wedge dx_n$$

Inoltre

$$\begin{aligned} d(I(\omega_n))(x) &= \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{h=1}^k \left(x_j \int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx) dt + \frac{\partial x_j}{\partial x_h} \int_0^1 t^{n-1} f(tx) dt \right) \cdot \\ &\quad \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge (dx_j) \cdots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^k (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx) dt \right) x_j \cdot \\ &\quad \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge (dx_j) \cdots \wedge dx_n + \\ &\quad + n \int_0^1 t^{n-1} f(tx) dt dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

D'altro canto, se $J = \{h, 1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} I(d\omega_n)(x) &= \sum_{h=1}^k \sum_{j \in J} (-1)^{j-1} \int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx) dt x_j \cdot \\ &\quad \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge (dx_j) \cdots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{h=1}^k \int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx) dt x_h dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + \\ &\quad + \sum_{h=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^j \int_0^1 t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx) dt x_j \cdot \\ &\quad \cdot dx_h \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge (dx_j) \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 I(d\omega_n)(x) + d(I\omega_n)(x) &= \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{h=1}^k t^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(tx) x_h + nt^{n-1} f(tx) \right) dt dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^n f(tx)) dt dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \\
 &= f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \omega_n
 \end{aligned}$$

□

Ci occupiamo a questo punto di un importante risultato che estende il teorema fondamentale del calcolo integrale ed è di grandissima importanza nelle applicazioni.

A questo scopo è necessario definire l'integrale di una n -forma differenziale esteso ad un sottoinsieme " n -dimensionale" di \mathbb{R}^k , $n \leq k$ scelto in una opportuna classe. E' pertanto prioritario definire tale classe.

Definizione 1.21 Chiamiamo k -cubo in \mathbb{R}^k l'insieme $[0, 1]^k$; osserviamo che, in particolare, lo 0-cubo di \mathbb{R}^0 è costituito dal solo elemento $\{0\}$.

Chiamiamo n -varietà in \mathbb{R}^k una funzione, di classe C^2

$$C : [0, 1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, 0 \leq n \leq k$$

$$C(u) = (x_1(u), \dots, x_k(u))$$

$$x_j : [0, 1]^n \longrightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, k,$$

$$x_j(u) = x_j(u_1, \dots, u_n).$$

Rileviamo esplicitamente che il termine n -varietà è qui usato in una accezione molto particolare, senza pretesa di generalità; ricordiamo anche che una 0-varietà si riduce ad un singolo punto, una 1-varietà è una curva, una 2-varietà è una superficie, una 3-varietà è un volume ed in generale una n -varietà è un sottoinsieme " n -dimensionale" in \mathbb{R}^k , eventualmente degenerare.

Chiamiamo n -varietà standard in \mathbb{R}^n la funzione

$$I^n : [0, 1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita da

$$I^n(x) = x$$

Dato un n -cubo in \mathbb{R}^n è naturale definire la sua frontiera come l'insieme delle sue facce opportunamente orientate.

Se, ad esempio, consideriamo il 2-cubo in \mathbb{R}^2 , $[0, 1] \times [0, 1]$, è naturale definire la sua frontiera come l'unione dei quattro segmenti

$[0, 1] \times \{0\}$, $\{1\} \times [0, 1]$, $[0, 1] \times \{1\}$, $\{0\} \times [0, 1]$.

E' altrettanto ovvio, dato il convenzionale orientamento degli angoli, che il primo ed il secondo segmento siano orientati come gli assi x ed y , rispettivamente, mentre il terzo ed il quarto siano orientati in senso contrario agli assi x ed y , rispettivamente.

Ora, se rappresentiamo il 2-cubo di \mathbb{R}^2 come 2-varietà standard

$$I^2 : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

possiamo descrivere la sua frontiera, che indicheremo con ∂I^2 mediante le seguenti 1-varietà:

$$I_{(1,\alpha)}^2(t) = (\alpha, t), \quad I_{(2,\alpha)}^2(t) = (t, \alpha) \quad , \quad \alpha = 0, 1$$

e possiamo esprimerne l'orientamento attribuendo ad $I_{(i,\alpha)}^2$ il coefficiente $(-1)^{i+\alpha}$.

Pertanto possiamo descrivere la frontiera del 2-cubo come

$$\partial I^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^2$$

Ciò suggerisce la seguente definizione di frontiera per una n -varietà:

Definizione 1.22 Sia $C : [0, 1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una n -varietà in \mathbb{R}^k ; definiamo

$$C_{(i,\alpha)} : [0, 1]^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

mediante la

$$C_{(i,\alpha)}(t_1, \dots, t_{n-1}) = C(t_1, \dots, t_{i-1}, \alpha, t_i, \dots, t_{n-1})$$

e definiamo ancora

$$\partial C = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} C_{(i,\alpha)}$$

Allo scopo di alleggerire le notazioni del seguente teorema poniamo anche le seguenti definizioni.

Definizione 1.23 Sia C una n -varietà in \mathbb{R}^k , definiamo

$$JC \left(\begin{array}{c} i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_h \end{array} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} & \dots & \dots & \frac{\partial x_{i_h}}{\partial u_{j_1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_h}} & \dots & \dots & \frac{\partial x_{i_h}}{\partial u_{j_h}} \end{pmatrix}$$

essendo i_1, \dots, i_h e j_1, \dots, j_h una h -upla di indici scelti in $\{1, 2, \dots, k\}$.

Osserviamo che

$$JC \left(\frac{i_1, \dots, i_h}{j_1, \dots, j_h} \right)$$

è noto come jacobiano della trasformazione definita da \mathbb{R}^h a valori in \mathbb{R}^h dalle funzioni x_{i_1}, \dots, x_{i_h} delle variabili u_{j_1}, \dots, u_{j_h} ; esso è spesso indicato con il simbolo

$$\frac{\partial x_{i_1} \dots x_{i_h}}{\partial u_{j_1} \dots u_{j_h}}$$

Possiamo provare a questo proposito il seguente risultato:

Lemma 1.2 *Sia C una n -varietà in \mathbb{R}^k , $n \geq 2$, allora si ha*

$$(1) \quad JC \left(\frac{j, i_1, \dots, i_{n-1}}{1, \dots, n} \right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} JC \left(\frac{i_1, \dots, i_{n-1}}{1, \dots, (i) \dots, n} \right)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} JC \left(\frac{i_1, \dots, i_{n-1}}{1, \dots, (i) \dots, n} \right) = 0$$

essendo i_1, \dots, i_{n-1} una $(n-1)$ -upla di indici scelti in $\{1, 2, \dots, k\}$ ed essendosi indicato con $1, \dots, (i) \dots, n$ la $(n-1)$ -upla costituita dai valori $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

DIMOSTRAZIONE.(1) è immediata conseguenza dello sviluppo di

$$JC \left(\frac{j, i_1, \dots, i_{n-1}}{1, \dots, n} \right)$$

rispetto alla prima colonna.

Passiamo pertanto a provare (2) per induzione.

Se $n = 2$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} = 0$$

per il teorema di Schwarz.

Supponiamo pertanto (2) vera per n e proviamola per $n+1$; si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} JC \left(\frac{i_1, \dots, i_n}{1, \dots, (i) \dots, n+1} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} (-1)^{j+1+(j>i)} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_j} JC \left(\frac{i_2, \dots, i_n}{1, \dots, (i) \dots, (j) \dots, n+1} \right) \end{aligned}$$

essendo

$$(j > i) = \begin{cases} 0 & , \quad j \leq i \\ 1 & , \quad j > i \end{cases}$$

non appena si sviluppi

$$JC \left(\frac{i_1, \dots, i_n}{1, \dots, (i) \dots, n+1} \right)$$

rispetto alla prima colonna e si tenga conto che la i -esima riga non c'è; (ciò causa l'ingresso dell'addendo ($j > i$) ad esponente di -1).

Pertanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} JC \left(\frac{i_1, \dots, i_n}{1, \dots, (i) \dots, n+1} \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} (-1)^{i+j+(j>i)} \frac{\partial^2 x_{i_1}}{\partial u_i \partial u_j} JC \left(\frac{i_2, \dots, i_n}{1, \dots, (i) \dots, (j) \dots, n+1} \right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} (-1)^{i+j+(j>i)} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_i} JC \left(\frac{i_2, \dots, i_n}{1, \dots, (i) \dots, (j) \dots, n+1} \right) \end{aligned}$$

La seconda somma è nulla per l'ipotesi induttiva, mentre la prima è nulla perché ivi compaiono in corrispondenza di $i = \alpha$ e $j = \beta$, e viceversa, i termini

$$\frac{\partial^2 x_{i_1}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} JC \left(\frac{i_2, \dots, i_n}{1, \dots, (\alpha) \dots, (\beta) \dots, n+1} \right)$$

e

$$\frac{\partial^2 x_{i_1}}{\partial u_\beta \partial u_\alpha} JC \left(\frac{i_2, \dots, i_n}{1, \dots, (\beta) \dots, (\alpha) \dots, n+1} \right)$$

con segni opposti. □

Definizione 1.24 Sia ω_n una n -forma differenziale su \mathbb{R}^k e sia C una n -varietà in \mathbb{R}^k ; se

$$\omega_n = f(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

definiamo

$$\int_C \omega_n = \int_{[0,1]^n} f(C(u)) JC \left(\frac{i_1, \dots, i_n}{1, \dots, n} \right) du_1 \dots du_n.$$

Usando questa definizione ed il precedente lemma si può facilmente provare il seguente importante risultato.

Teorema 1.14 - Stokes - Sia ω_{n-1} una $(n-1)$ -forma differenziale su \mathbb{R}^k e sia C una n -varietà in \mathbb{R}^k ; allora

$$\int_{\partial C} \omega_{n-1} = \int_C d\omega_{n-1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il teorema per ω_{n-1} della forma

$$\omega_{n-1} = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n-1};$$

la formulazione generale segue dalla linearità dell'integrale e dalla inessenzialità dell'ordine delle variabili.

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\partial C} \omega_{n-1} &= \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{n-1}} f(C_{(i,\alpha)}(u)) J_{C_{(i,\alpha)}} \left(\frac{1, \dots, n-1}{1, \cdot (i) \cdot, n} \right) \cdot \\
&\quad \cdot du_1 \dots (du_i) \dots du_n = \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{\alpha+1} \int_{[0,1]^{n-1}} f(C_{(i,\alpha)}(u)) J_{C_{(i,\alpha)}} \left(\frac{1, \dots, n-1}{1, \cdot (i) \cdot, n} \right) \cdot \\
&\quad \cdot du_1 \dots (du_i) \dots du_n = \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{n-1}} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(f(C(u)) J_C \left(\frac{1, \dots, n-1}{1, \cdot (i) \cdot, n} \right) \right) \cdot \\
&\quad \cdot du_1 du_2 \dots du_n = \\
&= \int_{[0,1]^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left(J_C \left(\frac{1, \dots, n-1}{1, \cdot (i) \cdot, n} \right) \frac{\partial}{\partial u_i} f(C(u)) + \right. \\
&\quad \left. + f(C(u)) \frac{\partial}{\partial u_i} J_C \left(\frac{1, \dots, n-1}{1, \cdot (i) \cdot, n} \right) \right) du_1 du_2 \dots du_n =
\end{aligned}$$

per il lemma 29.17.2

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^k J_C \left(\frac{1, \dots, n-1}{1, \cdot (i) \cdot, n} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} f(C(u)) \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \cdot \\
&\quad \cdot du_1 du_2 \dots du_n = \\
&= \int_{[0,1]^n} \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial x_j} f(C(u)) \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} J_C \left(\frac{1, \dots, n-1}{1, \cdot (i) \cdot, n} \right) \cdot \\
&\quad \cdot du_1 du_2 \dots du_n =
\end{aligned}$$

per il lemma 29.17.1

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]^n} \sum_{j=1}^k J_C \left(\frac{j, 1, \dots, n-1}{1, \dots, n} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} f(C(u)) du_1 du_2 \dots du_n = \\
&= \int_C d\omega_{n-1}
\end{aligned}$$

□

1.9 campi vettoriali in \mathbb{R}^k

Definizione 1.25 Sia $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto e siano

$$f_i : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_i \in C^2(A) \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

Sia

$$\omega = \sum_{i=1}^k f_i dx_i$$

e

$$F = (f_1, \dots, f_k) = \sum_{i=1}^k f_i e_i;$$

diremo che ω è la 1-forma differenziale corrispondente al campo vettoriale F e reciprocamente F è il campo vettoriale che corrisponde alla 1-forma ω .

Quanto detto per i campi vettoriali in \mathbb{R}^3 si può riscrivere in \mathbb{R}^k

Definizione 1.26 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto, un campo vettoriale $F = (f_1, \dots, f_k)$. Diciamo che F è un campo chiuso se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j$$

Diciamo che F è conservativo, oppure che F ammette potenziale, se esiste

$$\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\nabla \phi = F$$

In tal caso ϕ si chiama potenziale di F .

Osserviamo che, evidentemente, un campo vettoriale è chiuso o conservativo se e solo se la corrispondente 1-forma ω è chiusa o esatta, rispettivamente.

E' pertanto conseguenza dei precedenti risultati che

Teorema 1.15 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto; se F è conservativo allora F è chiuso.

Rileviamo che il teorema 29.22 è immediata conseguenza del teorema di Schwarz; meno banale (conseguenza del lemma 29.13) è che

Teorema 1.16 - Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto, stellato. Se F è chiuso, allora F è conservativo.

Il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante la

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

mostra che la condizione A stellato non è inessenziale. Essa può tuttavia essere un po' attenuata.

A questo scopo definiamo

Definizione 1.27 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto, e sia C una 1-varietà in \mathbb{R}^k , $C(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$, $t \in [0, 1]$; definiamo

$$\begin{aligned} \int_C F &= \int_C \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^k f_i(x(t)) x_i(t) dt = \\ &= \int_0^1 \langle F(x(t)), T(t) \rangle \left(\sum_{i=1}^k x_i^2(t) \right) dt = \int_C \langle F, T \rangle ds \end{aligned}$$

Allo scopo di provare il seguente risultato è opportuno ricordare che una 1-varietà è una curva in \mathbb{R}^k e che pertanto ad essa si possono riferire le definizioni date per le curve in \mathbb{R}^k .

Teorema 1.17 - Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto e connesso, un campo vettoriale; sono condizioni equivalenti

1. F è conservativo;
2. $\int_\gamma F = 0$ su ogni curva chiusa γ contenuta in A ;
3. $\int_\gamma F$ dipende solo dagli estremi di γ .

(Si osservi che a causa del contesto in cui si opera le componenti della funzione F e la funzione γ sono supposte di classe C^2 , ma è sufficiente $F \in C^0$ e γ regolare a tratti.)

DIMOSTRAZIONE. 1) \Rightarrow 2). Se $F = \nabla \phi$ con $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} \int_\gamma F &= \int_a^b \sum_{j=1}^k \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\gamma(t)) x_j(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\gamma(t)) dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = 0 \end{aligned}$$

2) \Rightarrow 3). Siano γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi; allora $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ è chiusa e

$$\int_\gamma F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F = 0$$

3) \Rightarrow 1). Poiché vale 3) possiamo definire, per $x \in A$

$$\phi(x) = \int_\gamma F$$

dove γ è una qualunque curva avente per estremi x ed $x_0 \in A$, fissato.

Si ha allora

$$\frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\gamma^*} F$$

essendo $\gamma^*(s) = x + se_i$, $0 \leq s \leq t$. Pertanto

$$\frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t f_i(x + se_i) ds = f_i(x + \sigma_t e_i)$$

$$0 \leq \sigma_t \leq t \text{ e}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} f_i(x + \sigma_t e_i) = f_i(x)$$

□

Osserviamo che, nell'enunciato del precedente teorema le curve possono sempre essere supposte di classe \mathcal{C}^2 : infatti, dal momento che A è aperto e connesso è sempre possibile, per il teorema 24.27, trovare una funzione continua, lineare a tratti, il cui grafico è costituito da segmenti paralleli agli assi, che congiunge due punti arbitrariamente scelti in A . Tale spezzata può essere resa di classe \mathcal{C}^2 ; illustriamo come ciò può essere fatto nel caso in cui la funzione lineare a tratti sia data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, t), & t \in [-1, 0] \\ (t, 0), & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Osserviamo che Γ , traccia di γ è compatto, quindi per il lemma 30.7 esiste $\delta > 0$ tale che $\Gamma + S(0, \delta) \subset A$ pertanto, ridefiniamo γ in $(-\delta, \delta)$ nella seguente maniera

$$\left(\frac{t + \delta}{2} - \frac{\delta}{\pi} \cos \frac{\pi t}{2\delta}, \frac{t - \delta}{2} + \frac{\delta}{\pi} \cos \frac{\pi t}{2\delta} \right)$$

E' infine notevole il seguente risultato che estende il precedente teorema 29.23.

Definizione 1.28 Sia $A \subset \mathbb{R}^k$, se $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$ sono due 1-varietà chiuse, diciamo che γ_0 e γ_1 sono omotope se esiste $\psi \in \mathcal{C}^2$, $\psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ tale che, se $t, s \in [0, 1]$

$$\psi(0, t) = \gamma_0(t), \quad \psi(1, t) = \gamma_1(t), \quad \psi(s, 0) = \psi(s, 1)$$

Diciamo che A è semplicemente connesso se ogni 1-varietà chiusa a valori in A è omotopa ad un punto di A .

Teorema 1.18 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale chiuso, $A \subset \mathbb{R}^k$, e siano γ_0 e γ_1 due 1-varietà chiuse a valori in A , omotope, allora

$$\int_{\gamma_0} F = \int_{\gamma_1} F.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia C la funzione che rende omotope le due curve e definiamo

$$\gamma_2(t) = C(t,0) = C(t,1), \quad t \in [0,1]$$

Per il teorema di Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F - \int_{\gamma_0} F &= \int_{\partial C} \omega = \\ &= \int_C d\omega = 0 \end{aligned}$$

□

Corollario 1.2 Sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale, $A \subset \mathbb{R}^k$ semplicemente connesso, allora F è conservativo se e solo se F è chiuso.

1.10 Curvatura di una linea e di una superficie

1.10.1 Curvatura e torsione di una linea

Sia $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una linea nello spazio ($\gamma = \gamma(u)$)

Definiamo il vettore tangente alla linea γ nel punto $\gamma(u)$ mediante la

$$\mathbf{t}(u) = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}(u)$$

Chiaramente \mathbf{t} è un vettore unitario e da $\frac{1}{2}\|\mathbf{t}(u)\|^2 = \frac{1}{2}$ possiamo dedurre, derivando, che

$$\langle \dot{\mathbf{t}}(u), \mathbf{t}(u) \rangle = 0 \quad \implies \quad \dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$$

Quindi i vettori $\dot{\mathbf{t}}$ e \mathbf{t} sono ortogonali e possiamo dire che

Definiamo il vettore normale alla linea γ nel punto $\gamma(u)$ mediante la

$$\mathbf{n}(u) = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{t}}\|}(u)$$

ed infine

Definiamo il vettore binormale alla linea γ nel punto $\gamma(u)$ mediante la

$$\mathbf{b}(u) = (\mathbf{t} \times \mathbf{n})(u)$$

Chiaramente i vettori $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ sono ortogonali ed unitari; costituiscono pertanto un sistema di riferimento in \mathbb{R}^3 .

Nel caso in cui la linea $\gamma = \gamma(s)$ sia parametrizzata mediante la lunghezza d'arco, è ben noto che

$$\|\dot{\gamma}(u)\| = 1$$

, per cui

Se s rappresenta la lunghezza d'arco,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \dot{\gamma}(s) \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\|\dot{\mathbf{t}}(s)\|} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\dot{\gamma}(s)\|} \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}(u) &= \frac{d}{du} \dot{\gamma}(u) = \frac{d}{du} (\|\dot{\gamma}(u)\| \mathbf{t}(u)) = \frac{d\|\dot{\gamma}(u)\|}{du} \mathbf{t}(u) + \|\dot{\gamma}(u)\| \dot{\mathbf{t}}(u) = \\ &= \frac{d\|\dot{\gamma}(u)\|}{du} \mathbf{t}(u) + \|\dot{\gamma}(u)\| \|\dot{\mathbf{t}}(u)\| \mathbf{n}(u) = a_T \mathbf{t}(u) + a_N \mathbf{n}(u)\end{aligned}$$

per cui a_T ed a_N sono rispettivamente le componenti tangenziale e normale del vettore $\ddot{\gamma}$.

Possiamo inoltre scrivere che

$$\|\dot{\mathbf{t}}(u)\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{du} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| \left\| \frac{ds}{du} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| \|\dot{\gamma}(u)\|$$

Definiamo

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\|$$

curvatura della linea γ ; avremo

$$\|\dot{\mathbf{t}}(u)\| = \kappa \|\dot{\gamma}(u)\|$$

Quindi

$$\begin{aligned}a_T \mathbf{t}(u) + a_N \mathbf{n}(u) &= \ddot{\gamma}(u) = \frac{d\|\dot{\gamma}(u)\|}{du} \mathbf{t}(u) + \|\dot{\gamma}(u)\| \|\dot{\mathbf{t}}(u)\| \mathbf{n}(u) = \\ &= \frac{d}{du} \|\dot{\gamma}(u)\| \mathbf{t}(u) + \|\dot{\gamma}(u)\| \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| \|\dot{\gamma}(u)\| \mathbf{n}(u) = \\ &= \frac{d}{du} \|\dot{\gamma}(u)\| \mathbf{t}(u) + \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| \|\dot{\gamma}(u)\|^2 \mathbf{n}(u)\end{aligned}$$

ed avremo

$$a_T \mathbf{t}(u) + a_N \mathbf{n}(u) = \dot{\gamma}(u) = \frac{d\|\dot{\gamma}(u)\|}{du} \mathbf{t}(u) + \kappa \|\dot{\gamma}(u)\|^2 \mathbf{n}(u)$$

Dal momento che $\mathbf{t} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$

$$\mathbf{t}(u) \times \dot{\gamma}(u) = \frac{d\|\dot{\gamma}(u)\|}{du} \mathbf{t}(u) \times \mathbf{t}(u) + \kappa \|\dot{\gamma}(u)\|^2 \mathbf{n}(u) \times \mathbf{t}(u)$$

e

$$\frac{\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u)\|} = \kappa \|\dot{\gamma}(u)\|^2 \|\mathbf{b}(u)\| = \kappa \|\dot{\gamma}(u)\|^2$$

e ne deduciamo

$$\kappa = \frac{\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u)\|^3}$$

Nel caso in cui $\gamma = \gamma(s)$ sia parametrizzata mediante la lunghezza d'arco s si ha

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\gamma}(s) \quad , \quad \|\mathbf{t}(s)\| = \|\dot{\gamma}(s)\| = 1 \quad , \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\|\dot{\mathbf{t}}(s)\|} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}$$

Pertanto

$$\ddot{\gamma}(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| \mathbf{n}(s)$$

e quindi

Nel caso in cui γ sia parametrizzata mediante la lunghezza d'arco

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}(s)\|$$

Poichè

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{t}}\|}$$

avremo

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{t}} \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{t}}\|} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}$$

avremo che $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{t}$ e, dal momento che $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$, si ha $\dot{\mathbf{b}} \parallel \mathbf{n}$ e $\dot{\mathbf{b}} = \tau \mathbf{n}$.

Inoltre

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{t}} = \tau \mathbf{n} \times \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}$$

1.11 Curvatura di una superficie

1.11.1 Prima Forma Quadratica di una Superficie

Sia

$$S = S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x, y, z)$$

una superficie sia

$$\nabla S = \nabla S(u, v) = \begin{pmatrix} S_u(u, v) \\ S_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) = (x_u, y_u, z_u) \\ (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)) = (x_v, y_v, z_v) \end{pmatrix}$$

e possiamo calcolare il vettore normale alla superficie mediante la

$$S_u(u, v) \times S_v(u, v) = (A, B, C) \quad , \quad \mathbf{N}(u, v) = \frac{S_u(u, v) \times S_v(u, v)}{\|S_u(u, v) \times S_v(u, v)\|}$$

Il piano tangente sarà definito dall'equazione

$$\langle \mathbf{N}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0 \quad \text{cioè} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Se

$$\begin{cases} u = u(\xi) \\ v = v(\xi) \end{cases}$$

allora $\Gamma(\xi)S(u(\xi), v(\xi))$ definisce una curva sulla superficie S la cui lunghezza d'arco si può calcolare come

$$\begin{aligned} \|\dot{\Gamma}(\xi)\|^2 &= \left(\frac{d}{d\xi} x(u(\xi), v(\xi)) \right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi} y(u(\xi), v(\xi)) \right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi} z(u(\xi), v(\xi)) \right)^2 = \\ &= (x_u \dot{u} + x_v \dot{v})^2 + (y_u \dot{u} + y_v \dot{v})^2 + (z_u \dot{u} + z_v \dot{v})^2 = \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) \dot{u}^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \dot{u} \dot{v} + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \dot{v}^2 = \\ &= \langle S_u \dot{u} + S_v \dot{v}, S_u \dot{u} + S_v \dot{v} \rangle = \|S_u\|^2 \dot{u}^2 + 2\langle S_u, S_v \rangle \dot{u} \dot{v} + \|S_v\|^2 \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Definiamo

$$E = \|S_u\|^2 \quad , \quad F = \langle S_u, S_v \rangle \quad , \quad G = \|S_v\|^2$$

avremo allora

$$\|\dot{\Gamma}(\xi)\|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

Quindi $\|\dot{\Gamma}(\xi)\|^2$ può essere identificata mediante la forma quadratica

$$(h, k) \mapsto Eh^2 + Fhk + Gk^2$$

che si chiama **Prima Forma Quadratica Fondamentale** della superficie S

Possiamo osservare che

$$\begin{aligned}
Eu^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + Gs\dot{v}^2 &= E \left[\left(h^2 + 2\frac{F}{E}hk + \frac{F^2}{E^2}k^2 \right) - \frac{F^2}{E^2}k^2 + \frac{G}{E}k^2 \right] = \\
&= E \left[\left(h + \frac{F}{E}k \right)^2 + \frac{EG - F^2}{E^2} \right] = \\
&= E \left(h + \frac{F}{E}k \right)^2 + \frac{EG - F^2}{E}
\end{aligned}$$

Osserviamo anche che se

$$S_u \times S_v = (A, B, C) \quad , \quad \|N\| = A^2 + B^2 + C^2$$

Si ha

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

Infatti ciò equivale a

$$\|S_u \times S_v\|^2 = \|S_u\|^2 \|S_v\|^2 - \langle S_u, S_v \rangle^2$$

cioè a

$$\|S_u\|^2 \|S_v\|^2 \sin^2 \theta = \|S_u\|^2 \|S_v\|^2 - \|S_u\|^2 \|S_v\|^2 \cos^2 \theta$$

ed infine a

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

Sia ora $\Gamma(s)S(u(s), v(s))$ definisce una curva sulla superficie S parametrizzata mediante la sua lunghezza d'arco s

Avremo

$$\|\dot{\Gamma}(s)\|^2 = Eu^2(s) + 2F\dot{u}(s)\dot{v}(s) + Gs\dot{v}^2(s) = 1$$

- $t = \dot{\Gamma}$ è il vettore tangente a Γ ; si ha $t = S_u\dot{u} + S_v\dot{v}$ e $\|t\| = 1$.
- $n = \frac{\dot{t}}{\|\dot{t}\|}$ è il vettore normale a Γ ; si ha che $\ddot{\Gamma} = \kappa n$ essendo κ la curvatura di Γ
- $b = t \times n$ è il vettore binormale a Γ
- $N = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|}$ è il versore normale a S
- $n_g = t \times N$ è il versore normale geodesico.

Si calcola che

$$\begin{aligned}
\kappa n = \ddot{\Gamma} &= \frac{d}{ds} (S_u\dot{u} + S_v\dot{v}) = \\
&= S_{uu}\dot{u}^2 + 2S_{uv}\dot{u}\dot{v} + S_{vv}\dot{v}^2 + S_u\ddot{u} + S_v\ddot{v}
\end{aligned}$$

Inoltre, dal momento che Γ è parametrizzata mediante la lunghezza d'arco, si ha

$$\frac{1}{2} \|\dot{\Gamma}\| = \frac{1}{2}$$

quindi $\langle \ddot{\Gamma}, \dot{\Gamma} \rangle = \langle \ddot{\Gamma}, \mathbf{t} \rangle = 0$ e $\ddot{\Gamma}$ è ortogonale a \mathbf{t} e, nel sistema di riferimento $(\mathbf{t}, \mathbf{N}, \mathbf{n}_g)$, possiamo esprimere $\ddot{\Gamma}$ come combinazione lineare di \mathbf{N} e \mathbf{n}_g .

Avremo cioè che

$$\kappa \mathbf{n} = \ddot{\Gamma} = \kappa_{\mathbf{N}} \mathbf{N} + \kappa_{\mathbf{g}} \mathbf{n}_g$$

- $\kappa_{\mathbf{N}}$ si chiama curvatura normale di Γ
- $\kappa_{\mathbf{g}}$ si chiama curvatura geodesica di Γ

Dal momento che

$$(\mathbf{t}, \mathbf{N}, \mathbf{n}_g)$$

è un sistema ortonormale possiamo calcolare, ricordando che $\mathbf{N} \perp S_u$ e $\mathbf{N} \perp S_v$,

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{N}} &= \langle \ddot{\Gamma}, \mathbf{N} \rangle = \\ &= \langle S_{uu}, \mathbf{N} \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle S_{uv}, \mathbf{N} \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle S_{vv}, \mathbf{N} \rangle \dot{v}^2 + \langle S_u, \mathbf{N} \rangle \ddot{u} + \langle S_v, \mathbf{N} \rangle \ddot{v} = \\ &= L \dot{u}^2 + 2M \dot{u} \dot{v} + N \dot{v}^2 \end{aligned}$$

1.11.2 Seconda Forma Quadratica di una Superficie

La forma quadratica

$$(h, k) \mapsto Lh^2 + 2Mhk + Nk^2$$

si chiama **Seconda Forma Quadratica Fondamentale**

I coefficienti

$$L = \langle S_{uu}, \mathbf{N} \rangle$$

$$M = \langle S_{uv}, \mathbf{N} \rangle$$

$$N = \langle S_{vv}, \mathbf{N} \rangle$$

sono elementi caratteristici della superficie S .

Quindi linee su S aventi lo stesso (\dot{u}, \dot{v}) hanno la stessa curvatura normale.

La curvatura geodesica si può calcolare come segue: Si ha

$$\kappa \mathbf{n} = \ddot{\Gamma} = \kappa_{\mathbf{N}} \mathbf{N} + \kappa_{\mathbf{g}} \mathbf{n}_g$$

Per definizione \mathbf{n}_g è ortogonale ad \mathbf{N} quindi \mathbf{n}_g è contenuto nel piano tangente e si ha, per opportuni α, β

$$\kappa_{\mathbf{g}} \mathbf{n}_g = \alpha S_u + \beta S_v$$

α, β possono essere determinati utilizzando le seguenti uguaglianze.

$$\kappa_g \langle \mathbf{n}_g, S_u \rangle = \alpha \|S_u\|^2 + \beta \langle S_v, S_u \rangle = \alpha E + \beta F$$

$$\kappa_g \langle \mathbf{n}_g, S_v \rangle = \alpha \langle S_u, S_v \rangle + \beta \|S_v\|^2 = \alpha F + \beta G$$

Inoltre, poichè $N \perp S_u$ e $N \perp S_v$, otteniamo

$$\begin{aligned} \kappa_g \langle \mathbf{n}_g, S_u \rangle &= \kappa \langle \mathbf{n}, S_u \rangle = \langle \ddot{\Gamma}, S_u \rangle = \\ &= \|S_u\|^2 \ddot{u} + \langle S_v, S_u \rangle \ddot{v} + \langle S_{uu}, S_u \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle S_{uv}, S_u \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle S_{vv}, S_u \rangle \dot{v}^2 = E \ddot{u} + F \ddot{v} + Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_g \langle \mathbf{n}_g, S_v \rangle &= \kappa \langle \mathbf{n}, S_v \rangle = \langle \ddot{\Gamma}, S_v \rangle = \\ &= \langle S_u, S_v \rangle \ddot{u} + \|S_v\|^2 \ddot{v} + \langle S_{uu}, S_v \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle S_{uv}, S_v \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle S_{vv}, S_v \rangle \dot{v}^2 = F \ddot{u} + G \ddot{v} + Z \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0$$

la matrice è invertibile e si ha

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

e si ricava

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Possiamo infine studiare come varia la curvatura normale κ_N , determinandone in particolare massimo e minimo valore.

Ricordiamo che, per una curva $\Gamma(s) = S(u(s), v(s))$ su una superficie S , parametrizzata mediante la lunghezza d'arco, la curvatura normale è data da

$$\kappa_N = L \ddot{u}^2 + 2M \dot{u} \dot{v} + N \dot{v}^2$$

dove L, M, N sono i coefficienti che definiscono la Seconda Forma Fondamentale di S .

Il vettore tangente t alla curva $\Gamma(s)$ si determina mediante la

$$t = S_u \dot{u} + S_v \dot{v}$$

I vettori $\{S_u, S_v\}$ costituiscono una base per il piano tangente ad S ; tuttavia essi non sono sempre ortonormali.

Possiamo ricavare da essi un sistema ortonormale mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Hilbert-Schmidt; possiamo cioè definire

$$t_1 = \frac{S_u}{\|S_u\|} = \frac{S_u}{\sqrt{E}} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{E}} \right\rangle}{\|S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{E}} \right\rangle\|}$$

Qualche calcolo ci permette di semplificare un po' l'espressione di t_2

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{E}} \right\rangle}{\|S_v - \left\langle S_v, \frac{S_u}{\sqrt{E}} \right\rangle\|} = \\ &= \frac{1}{E} \frac{ES_v - FS_u}{\sqrt{\|S_v\|^2 - 2\frac{\langle S_v, S_u \rangle^2}{E} + \langle S_v, S_u \rangle^2 \frac{\|S_u\|^2}{E^2}}} = \\ &= \frac{1}{E} \frac{ES_v - FS_u}{\sqrt{G - \frac{F^2}{E}}} = \frac{ES_v - FS_u}{\sqrt{E^2G - EF^2}} = \frac{ES_v - FS_u}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \end{aligned}$$

Quindi una base ortonormale per piano tangente ad S è data da

$$t_1 = \frac{S_u}{\sqrt{E}} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{ES_v - FS_u}{\sqrt{E(EG - F^2)}}$$

e possiamo esprimere il vettore tangente unitario t nella forma

$$t = \cos \theta t_1 + \sin \theta t_2 = \cos \theta \frac{S_u}{\sqrt{E}} + \sin \theta \frac{ES_v - FS_u}{\sqrt{EW}}$$

per qualche valore di θ , essendo $W = \sqrt{EG - F^2}$

Si ottiene infine che

$$t = S_u \frac{W \cos \theta - F \sin \theta}{\sqrt{EW}} + S_v \frac{\sqrt{E} \sin \theta}{W} = S_u \dot{u} + S_v \dot{v}$$

Di qui possiamo ricavare \dot{u} , \dot{v} e sostituire nell'espressione di κ_N ; si ha

$$\begin{aligned}
\kappa_N &= L \left(\frac{W \cos \theta - F \sin \theta}{\sqrt{EW}} \right)^2 + 2M \frac{(W \cos \theta - F \sin \theta) \sqrt{E} \sin \theta}{\sqrt{EW^2}} + \\
&\quad + F \frac{E \sin^2 \theta}{W^2} = \\
&= \frac{1}{EW^2} (LW^2 \cos^2 \theta + LF^2 \sin^2 \theta - 2LFW \sin \theta \cos \theta = \\
&\quad 2MEW \sin \theta \cos \theta - 2MEF \sin^2 \theta + NE^2 \sin^2 \theta) = \\
&= \frac{1}{EW^2} ((MEW - LFW) \sin 2\theta + LW^2 \cos^2 \theta + \\
&\quad + (LF^2 - 2MEF + NE^2) \sin^2 \theta) = \\
&= \frac{1}{EW^2} ((MEW - LFW) \sin 2\theta + LW^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \\
&\quad + (LF^2 - 2MEF + NE^2) \frac{1 - \cos 2\theta}{2}) = \\
&= \frac{1}{EW^2} ((MEW - LFW) \sin 2\theta + \frac{LW^2 - LF^2 + 2MEF - NE^2}{2} \cos 2\theta + \\
&\quad + \frac{LW^2 + LF^2 - 2MEF + NE^2}{2}) = \\
&\quad = \delta + \mu \sin 2\theta + \eta \cos 2\theta
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{L(W^2 + F^2) - 2MEF + NE^2}{2EW^2} \\
\mu &= \frac{(ME - FL)W}{EW^2} \\
\eta &= \frac{L(W^2 - F^2) + 2MEF - NE^2}{2EW^2}
\end{aligned}$$

Avremo quindi che

$$\kappa_N = \delta + \mu \sin 2\theta + \eta \cos 2\theta$$

e se θ_0 è scelto in modo che

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta_0 &= \frac{\eta}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} \\
\cos 2\theta_0 &= \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}}
\end{aligned}$$

possiamo scrivere che

$$\kappa_N = \delta + \sqrt{\mu^2 + \eta^2} (\cos 2\theta_0 \cos 2\theta + \sin 2\theta_0 \sin 2\theta) = \delta + \sqrt{\mu^2 + \eta^2} \sin 2(\theta + \theta_0)$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \max \kappa_N = \delta + \sqrt{\mu^2 + \eta^2} \\ \kappa_2 &= \max \kappa_N = \delta - \sqrt{\mu^2 + \eta^2}\end{aligned}$$

κ_1 e κ_2 sono le curvatures principali (Massima e Minima);

$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ è la curvatura media

$K = \kappa_1 \kappa_2$ è la curvatura Gaussiana.

Si calcola che

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad , \quad H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}$$