1. Le Serie.

Il problema di sommare un numero non finito di quantità numeriche è stato per lungo tempo considerato privo di senso, ma è giustificabile facilmente, anche dal punto di vista intuitivo, non appena si consideri il seguente esempio.

Sia $I = [0, 1]$ e consideriamo una successione di intervalli così definita:

$$\begin{aligned} I_1 &= [0, 1/2] \\ I_2 &= [1/2, 1/4] \\ I_3 &= [1/4, 1/8] \\ I_4 &= [1/8, 3/4] \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

E' ovvio che

$$\cup I_k = [0, 1]$$

ed inoltre la lunghezza del segmento I_k è data da

$$\ell(I_k) = 1/2^k$$

Pertanto

$$1 = \ell([0, 1]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

Possiamo cercare di puntualizzare il concetto di somma infinita mediante la seguente definizione

Definizione 1.1 *Sia a_k una successione di numeri reali e definiamo*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Se $\lim S_n$ esiste finito, diciamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S = \lim\ S_n$$

In tal caso si dice che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è una serie convergente che ha per somma S.

Se $\lim S_n = +\infty$ $(-\infty)$ diciamo che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è una serie positivamente (negativamente) divergente.

Se $\lim S_n$ non esiste diciamo che la serie non è determinata.

Consideriamo ora qualche esempio importante di serie Sia $x \in \mathbb{R}$ possiamo considerare $a_n = x^n$ e avremo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$$

Se osserviamo che

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n+1}$$

si ottiene

$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1}$$

e, per $x \neq 1$,

$$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Di qui si vede che

- se $|x| < 1 \lim S_n = \frac{1}{1-x}$
- se $x \geq 1 \lim S_n = +\infty$
- se $x \leq -1 \lim S_n$ non esiste.

Pertanto

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{se} \quad |x| < 1}$$

mentre per i restanti valori di x la serie è divergente o indeterminata.

$$\sum x^k$$

si chiama serie geometrica di ragione x.

Possiamo ottenere facilmente altri esempi di serie convergenti. usando la formula di Taylor.

Consideriamo lo sviluppo di McLaurin della funzione e^x

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - ... - \frac{x^n}{n!} = R_{n+1}(x)$$

dove il resto R_{n+1} si può esprimere nella forma di Lagrange mediante la

$$|R_{n+1}(x)| = e^c \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \|c\| \leq \|x\|$$

Pertanto, se definiamo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

si ha
$$|e^x - S_n| \leq |R_{n+1}(x)| \leq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
e tenendo conto che
$$\lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \text{ per ogni } \ x \in \mathbb{R}$$
si ha
$$\boxed{e^x = \lim S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}$$
In maniera del tutto analoga si prova che
$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \forall x \in \mathbb{R}}$$
$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \forall x \in \mathbb{R}}$$
$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \forall x \in [-1/2, 1]}$$
Dal momento che, per n grande
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{k_0} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$
e dal momento che
$$\sum_{k=1}^{k_0} a_k \in \mathbb{R}$$
possiamo dire che una serie converge diverge o è indeterminata indipendentemente dal termine a partire da quale si inizia a sommare; ovviamente la somma della serie cambia, cambiando il punto di partenza.

Pertanto il carattere di una serie, cioè il fatto che sia convergente, divergente o indeterminata, non è influenzato dalla scelta del primo indice di somma.
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$
si chiama 'resto ennesimo' della serie data ed è una serie che ha lo stesso carattere della serie stessa poichè
$$S_N - S_n = \sum_{k=n}^{N} a_k$$
si ricava, per $N \to +\infty$
$$R_n = S - S_n$$

e quindi $\lim R_n = 0$ se e solo se la serie è convergente.

Dalla definizione di serie e dal criterio di convergenza di Cauchy possiamo subito dedurre che

Teorema 1.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\sum a_k$ sia convergente è che*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \textit{tale che} \;\; \forall n > n_\varepsilon \, , \; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \textit{si ha} \;\; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Si ha infatti che $\sum a_k$ è convergente se e solo se la successione delle sue ridotte ennesime è convergente ad $S \in \mathbb{R}$.

Pertanto ad essa si può applicare il criterio di Cauchy e si può affermare che:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $n, m > n_\varepsilon$

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

o, equivalentemente, se $n > n_\varepsilon$ e $p \in \mathbb{N}$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

□

Come conseguenza immediata otteniamo per $p = 1$, che, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > n_\varepsilon$ (per $p = 1$)

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$$

e quindi

Condizione necessaria affinché

$$\sum a_k$$

sia convergente è che

$$\lim a_k = 0$$

Sottolineiamo che la condizione è solo necessaria e pertanto non assicura, da sola, la convergenza della serie; viceversa, se non è soddisfatta, permette di concludere che la serie non è convergente.

Se ad esempio consideriamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

si ha $\lim \frac{1}{k} = 0$ e tuttavia la serie è divergente.

Infatti le sue ridotte S_n formano una successione crescente che quindi ammette limite; tale limite non può essere finito in quanto non è soddisfatto il criterio di Cauchy perché

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

1.1 *Criteri di convergenza per le serie a termini positivi*

Se $a_k \geq 0$, o più in generale se ha segno costante, la successione delle ridotte ennesime è monotona; pertanto il $\lim S_n$ esiste, essendo possibili i valori $+\infty$ e $-\infty$.

> Sia
> $$\sum a_k$$
> una serie a termini positivi, allora essa è o convergente o positivamente divergente.

Definizione 1.2 *Diciamo che $\sum a_k$ è assolutamente convergente se risulta convergente $\sum |a_k|$.*

Diciamo che $\sum a_k$ è assolutamente divergente se $\sum |a_k| = +\infty$.

Teorema 1.2 *Se $\sum a_k$ è assolutamente convergente, allora è convergente.*

Infatti
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$
e si può concludere per il criterio di convergenza di Cauchy.

1.1.1 *Criterio del confronto di Gauss.*

Siano $m > 0$, $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie tali che $0 \leq a_k \leq mb_k$; allora:

- se $\sum b_k$ converge anche $\sum a_k$ converge
- se $\sum a_k$ diverge anche $\sum b_k$ diverge.

Infatti dette S_n^a ed S_n^b le ridotte di $\sum a_k$ e $\sum b_k$, rispettivamente, si ha:

$$0 \leq S_n^a \leq mS_n^b \ .$$

Inoltre S_n^a ed S_n^b sono successioni crescenti e pertanto ammettono limite.

Possiamo anche enunciare il criterio nella seguente forma

Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie tali che a_k, b_k >0 e supponiamo che esista un indice k_0 tale che, per $k > k_0$

$$0 < m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$$

allora si ha che $\sum a_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere.

Se invece

$$0 < m \leq \frac{a_k}{b_k}$$

si ha che se $\sum a_k$ converge allora anche $\sum b_k$ è convergente, mentre se $\sum b_k$ diverge allora anche $\sum a_k$ è divergente.

Teorema 1.3 *Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie a termini positivi e supponiamo che*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k};$$

allora si ha

$$\frac{a_k}{a_1} \leq \frac{b_k}{b_1}$$

e il teorema 19.11 è applicabile.

Dimostrazione. Basta moltiplicare membro a membro le disuguaglianze

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}\ ,\ \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{a_k}{a_{k-1}} \leq \frac{b_k}{b_{k-1}}.$$

□

1.2 Criterio di Cauchy

Teorema 1.4 *- Cauchy - Sia $\sum a_k$ una serie a termini positivi e supponiamo che a_k sia una successione decrescente; allora $\sum a_k$ ha lo stesso carattere di $\sum 2^k a_{2^k}$.*

Dimostrazione. Siano

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad e \quad D_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}\ .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $2^m > n$ e si ha

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^m - 1} \leq$$
$$\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^{m-1}} + .. + a_{2^m - 1}) \leq$$
$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{m-1} a_{2^{m-1}} = D_{m-1}\ .$$

Ora, se $\sum 2^k a_{2^k}$ è convergente, si ha $\sup D_m = \lim D_m\ =\ D \in \mathbb{R}_+$ e

$$S_n \leq D_{m-1} \leq D \quad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

S_n è pertanto limitata e $\sup S_n = \lim S_n = S \leq D$.

Viceversa, se n è scelto in modo che $2^m < n$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \geq$$

$$\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2^{m-1}+1} + .. + a_{2^m}) \geq$$

$$\geq a_1/2 + a_2 + 2a_4 + ... + 2^{m-1}a_{2^m} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^m a_{2^m}) = \frac{D_m}{2} \quad .$$

Pertanto, come prima, da $\sum a_k$ convergente, si può ricavare che $\sum 2^k a_{2^k}$ è convergente. □

Osserviamo che il teorema 19.18 può essere facilmente usato per studiare il carattere della serie armonica generalizzata ed anche delle serie ricordate dopo il corollario 19.16.

Teorema 1.5 *Sia a_k una successione, allora $\sum(a_{k+1} - a_k)$ è convergente, divergente, indeterminata a seconda che a_k sia convergente, divergente, indeterminata.*

Dimostrazione. Si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) \;=\; a_{n+1} - a_1 \;.$$

□

1.3 Criterio di Kummer

Teorema 1.6 - *Kummer - Sia $\sum a_k$ una serie a termini positivi e sia b_k una successione a termini positivi.*

Se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che, definitivamente,

$$b_k - \frac{a_{k+1}}{a_k} b_{k+1} \;\geq m > 0 \;\; ;$$

allora $\sum a_k$ è convergente.

Dimostrazione. Si ha infatti

$$b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1} \;\geq\; m a_k \;>\; 0$$

e pertanto la successione $b_k a_k$ è decrescente e positiva, quindi convergente.

Allora $\sum(a_k b_k$-$a_{k+1} b_{k+1})$ è convergente (teorema 19.19) e per il criterio del confronto anche $\sum a_k$ risulta convergente. □

Osserviamo che il teorema 19.20 può essere enunciato anche nel seguente modo:

se esiste $b_k > 0$ ed esiste $m > 0$ tali che

$$(19.1); \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_k}{b_{k+1}} - \frac{m}{b_{k+1}}$$

allora $\sum a_k$ è convergente.

Il teorema 19.20 trova utili applicazioni se in luogo di b_k si sceglie una opportuna successione di confronto.

In particolare è interessante scegliere

$b_k = k$, $b_k = klnk$, $b_k = klnk(lnlnk)$.

Osserviamo anche che, dalla (19.1) è evidente come l'enunciato del teorema 19.20 sia ovvia conseguenza del teorema 19.17 non appena si supponga di più $\sum 1/b_k$ convergente. In tal caso infatti si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{1/b_{k+1}}{1/b_k}.$$

Riportiamo gli enunciati che si ottengono dalla (19.1) scegliendo $b_k = k$ e $b_k = klnk$. Se $b_k = k$ si può concludere (criterio di Raabe) che

se esiste $m > 0$ tale che

$$(19.2); \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \le 1 - \frac{1}{k+1} - \frac{m}{k+1}$$

allora $\sum a_k$ è convergente. Se $b_k = k \ln k$ si ha (criterio di Gauss) se esiste $m > 0$ tale che

$$(19.3); \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \le 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{ln(k/(k+1))^k - m}{(k+1)ln(k+1)}$$

allora $\sum a_k$ è convergente.

1.3.1 Criterio del confronto asintotico

Poichè il carattere di una serie (non la sua somma) non dipende dall'indice da cui si parte a sommare, possiamo affermare che:

se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ sono due serie a termini positivi e se supponiamo che

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R}_+$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Se invece

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$$

si ha:

- *se $\sum a_k$ è divergente, allora $\sum b_k$ è divergente;*
- *se $\sum b_k$ è convergente, allora $\sum a_k$ è convergente.*

1.3.2 Criterio del rapporto D'Alembert.

Sia $\sum a_k$ *una serie tale che* a_k *>o e supponiamo che*

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- *Se* $\ell < 1$ *allora* $\sum a_k$ *è convergente*
- *se* $\ell > 1$ *allora* $\sum a_k$ *è divergente.*

  Infatti se $\ell < 1$ *si ha, definitivamente*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < (\ell + \varepsilon) < 1$$

e pertanto se ne deduce che

$$a_{k+p} < (\ell + \varepsilon)^p \ a_k$$

la serie di termine $(\ell + \varepsilon)^p \ a_k$ *è una serie geometrica di ragione* < 1 *e quindi è convergente.*

Se $\ell > 1$*, definitivamente, si ha*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > (\ell - \varepsilon) > 1$$

e quindi

$$a_{k+p} > (\ell - \varepsilon)^p a_k$$

ed a_k *non tende a* 0*.*

1.3.3 criterio della radice di Cauchy

Sia $\sum a_k$ *una serie tale che* $a_k \geq 0$ *e supponiamo che*

$$\lim \sqrt[k]{a_k} = \ell \in \mathbb{R}$$

- *Se* $\ell < 1$ *allora* $\sum a_k$ *è convergente*
- *se* $\ell > 1$ *allora* $\sum a_k$ *è divergente.*

  Infatti se $\ell < 1$ *si ha, definitivamente*

$$\sqrt[k]{a_k} \ < (\ell + \varepsilon) < 1 \ \ e \ a_k < (\ell + \varepsilon)^k$$

mentre se $\ell > 1$ *si ha, definitivamente*

$$\sqrt[k]{a_k} \ > (\ell - \varepsilon) > 1 \ \ e \ a_k > 1$$

1.3.4 Il criterio dell'integrale di Mc Laurin-Cauchy

I concetti di serie e di integrale. sono profondamente affini ed il fatto si riflette nel seguente criterio

Sia

$$f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

decrescente e sia $a_k = f(k)$*, allora*

$$\int_n^{n+p+1} f(x)dx \le \sum_{k=n}^{n+p} a_k \le \int_{n-1}^{n+p} f(x)dx$$

e ne deduciamo che f *è integrabile in senso improprio su* $[1, +\infty)$ *se e solo se* $\sum a_k$ *è convergente.*

Inoltre, posto

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$$

si ha

$$0 \le S - S_n = R_n \le I_n$$

e

$$\left| S - \left(S_n + \frac{I_n + I_{n+1}}{2} \right) \right| \le \frac{1}{2} \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Dal momento che f *è decrescente si ha*

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

e sommando per $k = n, .., n+p$ *si ottengono le prime due disuguaglianze.*

Inoltre la funzione

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

è definita e continua per $x \in \mathbb{R}_+$ *ed è crescente in* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *in quanto, se* $0 \le x < y$ *si ha*

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \ge 0$$

Ne deduciamo che $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ *esiste e per le disuguaglianze precedenti l'integrale improprio e la serie hanno lo stesso carattere.*

Inoltre l'errore che si commette considerando una ridotta S_n *al posto della somma della serie, essendo* $a_k \ge 0$*, è per difetto e si ha* $S - S_n \ge 0$*.*

Più precisamente

$$0 \le I_{n+1} \le S - S_n = R_n \le I_n$$

L'approssimazione della somma S *della serie può essere ancora migliorata se si sceglie*

$$S_n + (I_n + I_{n+1})/2$$

in luogo di S_n*.*

In tal caso si ha infatti

$$|S - S_n - (I_n + I_{n+1})/2| = |R_n - (I_n + I_{n+1})/2| \leq$$
$$\leq (I_n - I_{n+1})/2 = \frac{1}{2} \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Il precedente teorema consente di stabilire il carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

Si ha infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \textit{per } 0 < \alpha \leq 1 \\ S \in \mathbb{R}_+ & \textit{per } 1 < \alpha \end{cases}$$

1.3.5 Criterio dell'ordine di infinitesimo

La serie armonica generalizzata è di grande aiuto nell'applicazione del criterio del confronto asintotico. Infatti, usando la definizione di ordine di infinitesimo possiamo affermare che

> *Sia $\sum a_k$ una serie a termini positivi e supponiamo che a_k sia infinitesima di ordine α (non necessariamente reale); allora*
>
> - *se $\alpha \geq \beta > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, la serie è convergente ;*
> - *se $\alpha \leq 1$ la serie è positivamente divergente .*

Osserviamo che, se $\alpha > 1$ e non è reale, non si può affermare che $\sum a_k$ è convergente, come si vede dal seguente esempio:

sia

$$a_k = \frac{1}{k \ln k}$$

$\lim a_k = 0$ *con ordine* $\alpha > 1$, *ma* $\alpha < \beta \ \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta > 1$.

Non si può pertanto applicare il criterio dell'ordine di infinitesimo ma, per il criterio dell'integrale,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} a_k = +\infty$$

Sempre per il criterio dell'integrale

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \textit{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ S \in \mathbb{R}_+ & \textit{se } 1 < \alpha \end{cases}$$

e

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \textit{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ S \in \mathbb{R}_+ & \textit{se } 1 < \alpha \end{cases}$$

1.3.6 Serie "telescopiche"

Se a_k è una successione, allora $\sum(a_{k+1} - a_k)$ è convergente, divergente, indeterminata a seconda che a_k sia convergente, divergente, indeterminata.

Infatti si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

1.4 Serie a termini di segno alterno

Sia a_k una successione di numeri non negativi e sia

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$$

In questa situazione parliamo di serie a segni alterni; per le serie a segni alterni vale il seguente risultato.

1.4.1 Criterio di Leibnitz

Supponiamo che $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e che inoltre $\lim a_k = 0$. Allora

- *la serie è convergente ad S;*
- *$S_1 \leq S \leq S_0$ e pertanto $S \geq 0$;*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$*

$$S_{2n} - a_{2n+1} = S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$$

- *le ridotte di indice pari approssimano S per eccesso mentre quelle di indice dispari approssimano S per difetto;*
- *$|S - S_n| \leq a_{n+1}$.*

Cominciamo con il mostrare che la successione delle ridotte di indice pari è decrescente, mentre la successione delle ridotte di indice dispari è crescente.

Si ha

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n} \qquad (1.1)\\ S_{2n+3} &= S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq S_{2n+1} \end{aligned}$$

inoltre

$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \geq 0$$

Pertanto $\lim S_{2n} = S'$ e $\lim S_{2n+1} = S''$ esistono finiti e si ha

$$S' - S'' = \lim S_{2n} - S_{2n+1} = \lim a_{2n} = 0$$

da cui deriva subito che $S' = S'' = S = \lim S_n$.

Per la 1.1 si ha inoltre

$$0 \le a_0 - a_1 = S_1 \le S_{2n+1} \le S \le S_{2n} \le S_0 = a_0$$

A proposito della maggiorazione del resto di una serie a segni alterni, è evidente che è tanto più buona quanto è più grande l'ordine di infinitesimo della successione a_n. Si può migliorare la maggiorazione del resto n-esimo non appena si tenga presente il seguente che

Sia a_k una successione tale che $a_k \ge a_{k+i} \ge 0 \quad \forall \in \mathbb{N}$ e supponiamo che $\lim a_k = 0$.
Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{a_k - a_{k+1}}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k b_k.$$

Evidentemente $b_{k+1} \ge b_k \ge 0$ ed inoltre

$$\lim_{l-a+\infty} b_k = \lim \frac{a_k}{k} = 0$$

Infatti $b_{k+1} - b_k = \frac{1}{2}(a_{k+z} - a_{k+1} + a_{k+1} - a_k) \ge 0$ e l'uguaglianza dei due limiti può essere dimostrata usnado i teoremi sulle medie di Cesaro di un successione
In questo modo si ottiene una nuova serie a segni alterni, avente la stessa somma della serie data e avente un termine generale infinitesimo di ordine superiore a quello del termine generale della serie data.
Infatti

$$b_k = \frac{a_k}{k} + \omega_k$$

con $\omega_k \to 0$ e

$$\frac{b_k}{a_k} \to 0$$

1.4.2 *Uguaglianza di Brunacci-Abel*

Se a_k e b_k e se definiamo

$$B_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$$

si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p} B_{n,p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_{n,k-n}(a_k - a_{k+1})$$

Infatti si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \ldots + a_{n+p}b_{n+p} =$$
$$= a_{n+1}B_{n,1} + a_{n+2}(B_{n,2} - B_{n,1}) + \ldots + a_{n+p}(B_{n,p} - B_{n,p-1}) =$$
$$= B_{n,1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + B_{n,2}(a_{n+2} - a_{n+3}) + \ldots +$$
$$+ B_{n,p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}B_{n,p} =$$
$$= a_{n+p}B_{n,p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_{n,k-n}(a_k - a_{k+1})$$

Criterio di Dirichlet

Supponiamo che le ridotte B_n di $\sum b_k$ siano limitate da M e che a_k sia decrescente e convergente a zero.

Allora $\sum a_k b_k$ è convergente ed inoltre

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k b_k \right| \leq 2Ma_{n+1}.$$

Criterio di Abel

Supponiamo che $\sum b_k$ sia convergente e a_k sia convergente e monotona. Allora $\sum a_k b_k$ è convergente.

1.5 Operazioni sulle serie

Per quel che concerne la somma Si può dimostrare che

Teorema 1.7 *Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie convergenti e sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\sum (a_k + b_k)$ e $\sum \alpha a_k$ sono convergenti e si ha*

$$\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$$

$$\sum \alpha a_k = \alpha \sum a_k \quad .$$

Dimostrazione. *Siano*

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad S''_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k).$$

Si ha

$$S_n = S'_n + S''_n$$

Per la seconda parte si procede in maniera analoga. □

Per quanto riguarda il prodotto di due serie occorre innanzi tutto cercare di definire il termine k-esimo della serie prodotto. Ciò può essere fatto in vari modi; per i nostri scopi sarà utile considerare il prodotto secondo Cauchy, che si rivelerà utile quando tratteremo le serie di potenze.

Si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 1.8 *- Mertens - Siano*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ , \ \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \ , \ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

essendo

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \ .$$

Allora, se $\sum a_k$ è assolutamente convergente e $\sum b_k$ è convergente, anche $\sum c_k$ è convergente ed inoltre, se

$$\sum a_k = A \ , \ \sum b_k = B \ , \ \sum c_k = C$$

si ha

$$AB = C$$

Dimostrazione. *Definiamo*

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad , \quad S''_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad , \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k;$$

sia inoltre $R''_n = B - S''_n$.

Si ha

$$\begin{aligned} S_n = c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_n = \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + ... + (a_0b_n + .. + a_nb_0) = \\ = a_0(B - R''_n) + a_1(B - R''_{n-1}) + ... + a_n(B - R''_0) = \\ = BS'_n - (a_0R''_n + a_1R''_{n-1} + ... + a_nR''_0) \end{aligned}$$

Dal momento che $\lim BS'_n = AB$ sarà sufficiente provare che, posto

$$T_n = a_0R''_n + a_1R''_{n-1} + ... + a_nR''_0,$$

$$\lim \ T_n = 0.$$

Sia $\alpha = \sum |a_k|$, poiché $\lim R''_n = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, se $n > n_\varepsilon$ si ha

$$\begin{aligned} |T_n| \leq |a_nR''_0 + ... + a_{n-n_\varepsilon}R''_{n_\varepsilon}| + |a_{n-n_\varepsilon-1}R''_{n_\varepsilon+1} + ... + a_0R''_n| \leq \\ \leq |a_nR''_0 + ... + a_{n-n_\varepsilon}R''_{n_\varepsilon}| + \varepsilon\alpha \end{aligned}$$

pertanto, se $R = max\{R''_i \ : \ i = 0, .., n_\varepsilon \}$, e se n è sufficientemente grande

$$|T_n| \leq \varepsilon R + \varepsilon\alpha$$

da cui si conclude. □

Se nessuna delle serie di cui si fa il prodotto è assolutamente convergente, ma entrambe sono solo convergenti, il teorema 19.26 può essere falso, come si vede considerando

$$a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \quad , \; \alpha > 0 \; .$$

Si ha infatti

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{(i+1)^\alpha} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i+1)^\alpha} == (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{[(i+1)(k-i+1)]^\alpha}$$

e si vede subito che

$$|c_k| \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{k} 1 = (k+1)^{1-2\alpha}$$

da cui, per $0 < \alpha \leq 1/2$, $\lim c_k$ *non può essere* 0 *.*

Per quanto riguarda la possibilità di raggruppare i termini di una serie, possiamo provare un semplice risultato. Precisiamo prima di tutto cosa intendiamo per raggruppamento dei termini di una serie.

Definizione 1.3 *Consideriamo* $\sum a_n$ *e consideriamo una successione* k_n *a valori in* $\mathbb{N}$ *, strettamente crescente e con* $k_1 = 1$*.*

Definiamo (19.6)

$$b_n = \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} a_i \quad .$$

La serie $\sum b_n$ *si dice ottenuta dalla serie* $\sum a_n$ *raggruppando i termini secondo* k_n*.*

E′ evidente che, dette

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad S''_m = \sum_{n=1}^{m} b_n$$

si ha

$$S''_m = \sum_{n=1}^{m} \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} a_i = \sum_{i=1}^{k_{m+1}-1} a_i = S'_{k_{m+1}-1}$$

e dal momento che S''_m *è una estratta di* S'_n*, si può affermare che:*

Teorema 1.9 *Sia* $\sum a_k$ *una serie convergente, allora ogni serie ottenuta da essa, raggruppando i termini, è convergente alla stessa somma.*

Osserviamo subito che la convergenza di $\sum b_k$ *per una particolare scelta della successione che genera il raggruppamento, non è sufficiente per assicurare che* $\sum a_k$ *converga; se infatti*

$$a_k = (-1)^k \quad e \quad k_n = 2n - 1$$

si ha

$$b_n = \sum_{k=2n-1}^{2n} (-1)^k = 0 \ .$$

Trattiamo per ultimo il problema del riordinamento dei termini di una serie e precisiamo innanzi tutto cosa intendiamo per riordinamento.

Definizione 1.4 *Consideriamo $\sum a_k$ e supponiamo che i: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sia una applicazione iniettiva e surgettiva.*

Diciamo che la serie

$$\sum a_{i(j)}$$

è ottenuta riordinando i termini di $\sum a_k$. Per brevità chiamiamo l'applicazione i riordinamento dei termini della serie.

Teorema 1.10 *Consideriamo $\sum a_k$ ed un riordinamento i dei termini della serie. Se $\sum a_k$ è assolutamente convergente, allora anche $\sum a_{i(j)}$ è assolutamente convergente e si ha*

$$\sum a_k \ = \ \sum a_{i(j)} \ .$$

Dimostrazione. *Definiamo*

$$A_n = \{i^{-1}(j) \ : \ j = 1,..,n \ \}$$

e sia

$$h(n) = max \ A_n \ .$$

Cominciamo con l'osservare che

$$h(n) \geq n \tag{19.7}$$

in quanto A_n contiene esattamente n termini distinti ed inoltre

$$\{i(1), i(2), .., i(h(n))\} \supset \{1, 2, .., n\} \tag{19.8}$$

poiché se $n_0 \leq n$, si ha $i^{-1}(n_0) \in A_n$ e quindi, se si definisce $h_0 = i^{-1}(n_0)$, si ha $h_0 \leq h(n)$ e $i(h_0) = n_0$.

Vediamo ora che $\sum |a_{i(j)}|$ è convergente.

Se $h > h(n)$, $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=h+1}^{h+p} |a_{i(j)}| = \sum_{k \in B} |a_k|$$

dove

$$B = \{i(h+1), ..., i(h+p)\} \ .$$

Pertanto

$$B \subset \{i(1), ..., i(h(n))\}^c \subset [n+1, +\infty)$$

per la (19.8).

Ne viene che

$$\sum_{j=h+1}^{h+p} |a_{i(j)}| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| = R_n \quad ;$$

per il criterio di Cauchy e poiché $R_n \to 0$ *si può concludere che la serie riordinata converge assolutamente.*

Proviamo ora che

$$S' = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{i(j)} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S \ .$$

Sia

$$S'_h = \sum_{j=1}^{h} a_{i(j)}$$

allora

$$\lim_h S'_h = S' = \lim_n S'h(n)$$

non appena si tenga conto della (19.7).

Si ha

$$\left|S'_{h(n)} - S_n\right| = \left| \sum_{j=1}^{h(n)} a_{i(j)} - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k\in D} a_k \right|$$

essendo

$$D = \{i(1), ..., i(h(n))\} \setminus \{1, ..., n\}$$

Pertanto $D \subset [n+1, +\infty)$ *e perciò*

$$|S'_{h(n)} - S_n| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ *si ottiene* $S' = S$ *.* □

Nel caso in cui $\sum a_k$ *sia convergente, ma non assolutamente convergente è possibile trovare un riordinamento dei termini e due successioni* n' *e* n'' *in modo che* $S_{n'}$ *e* $S_{n''}$ *siano convergenti allo stesso limite o a limiti diversi, o siano divergenti. Più precisamente*

Teorema 1.11 *- Riemann-Dini - Supponiamo che* $\sum a_k$ *sia convergente, ma non assolutamente convergente. Siano inoltre* $\alpha < \beta$ *, essendo possibile che* $\alpha = -\infty$ *e* $\beta = +\infty$*.*

Allora esiste un riordinamento i dei termini della serie in modo che la successione

$$S_h = \sum_{j=1}^{h} a_{i(j)}$$

abbia due estratte, l'una convergente ad α *, l'altra convergente a* β*.*

Dimostrazione. *Siano* α_n *e* β_n *due successioni tali che* $\lim \alpha_n = \alpha$, $\lim \beta_n = \beta$, $\alpha_n \leq \beta_n$, $\beta_1 > 0$.

Definiamo

$$p_k = max\{a_k, 0\} \quad , \quad q_k = -min\{a_k, 0\}.$$

Ovviamente

$$p_k - q_k = a_k \quad , \quad p_k + q_k = |a_k| \quad , \ p_k, q_k \geq 0$$

Pertanto $\sum p_k$ *e* $\sum q_k$ *sono entrambe divergenti.*

Scegliamo ora due successioni k_n *ed* h_n *in modo che il riordinamento della serie data, indicato dalla (19.9)*

$$p_1 + .. + p_{k_1} - q_1 - .. - q_{h_1} + p_{k_1+1} + .. + p_{k_2} - q_{h_1+1} - .. - q_{h_2} + ...$$

soddisfi le seguenti condizioni:

k_1 *è il più piccolo indice tale che*

$$\Gamma_1 = \sum_{j=1}^{k_1} p_j \ > \ \beta_1,$$

h_1 *è il più piccolo indice tale che*

$$\Gamma_1 - \Delta_1 = \sum_{j=1}^{k_1} p_j \ - \ \sum_{j=1}^{h_1} q_j \ < \ \alpha_1;$$

k_2 *ed* h_2 *sono i più piccoli indici* ($> k_1$, $> h_1$ *rispettivamente) tali che*

$$\Gamma_2 - \Delta_1 = \sum_{j=1}^{k_2} p_j \ - \sum_{j=1}^{h_1} q_j \ > \ \beta_2$$

$$\Gamma_2 - \Delta_2 = \sum_{j=1}^{k_2} p_j \ - \sum_{j=1}^{h_2} q_j \ < \ \alpha_2.$$

Il procedimento può essere iterato dal momento che $\sum p_k$ *e* $\sum q_k$ *sono divergenti.*

Siano ora

$$S'_n = \Gamma_n - \Delta_{n-1} \quad , \quad S''{}_n = \Gamma_n - \Delta_n;$$

esse sono due estratte della successione delle ridotte della serie riordinata (19.9) e si ha

$$0 \leq S'_n - \beta_n \leq p_{k_n} \quad , \quad 0 \leq \alpha_n - S''{}_n \leq q_{h_n}$$

e si può concludere dal momento che $\lim p_{k_n} = \lim \ q_{h_n} = 0$. □

Concludiamo ora provando che la convergenza assoluta è equivalente alla convergenza di ogni suo riordinamento.

Definizione 1.5 *- Diciamo che $\sum a_k$ converge incondizionata- mente se ogni suo riordinamento converge alla stessa somma.*

Teorema 1.12 *- Cauchy-Dirichlet - $\sum a_k$ converge assolutamente se e solo se converge incondizionatamente.*

Dimostrazione. *Se $\sum a_k$ converge assolutamente, allora converge incondizionatamente per il teorema 19.30.*

Se viceversa $\sum a_k$ non converge assolutamente allora non converge incondizionatamente per il teorema 19.31. $\square$

2. Le Serie Di Funzioni.

2.1 Successioni di Funzioni.

Lo studio di una serie di funzioni dipende, come per il caso delle serie numeriche dallo studio della successione delle sue ridotte.

Occorre pertanto definire cosa si intende per successione di funzioni ed i concetti di limite ad essa collegati.

Definizione 2.1 *Chiamiamo successione di funzioni una applicazione definita*

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto S_n$$

con

$$S_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definizione 2.2 *Sia S_n una successione di funzioni su I; diciamo che*

- *S_n converge puntualmente ad S se, per ogni $x \in I$, $\forall \varepsilon > 0$,esiste $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che*

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad \forall n > n_{\varepsilon,x}$$

- *S_n converge uniformemente ad S in I se $\forall \varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\forall n > n_\varepsilon \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n > n_\varepsilon \ , \ \forall x \in I$$

Possiamo subito verificare che
S_n converge puntualmente ad S in I se

$$\lim_n S_n(x) = S(x) \quad \forall x \in I$$

mentre S_n converge uniformemente ad S in I se e solo se

$$\lim_n \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

Teorema 2.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni f_n converga uniformemente su I è che $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $m, n > n_\varepsilon$ si abbia*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Dimostrazione. *La necessità è ovvia; per quanto riguarda la sufficienza osserviamo che, se $n, m > n_\varepsilon$, si ha*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Dal momento che $f_m(x) \longrightarrow f(x)$, $\forall x \in I$, si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

e la tesi. □

Teorema 2.2 *Sia f_n una successione di funzioni integrabili su $I = [a, b]$; se f_n converge uniformemente ad f su I, allora f è integrabile su I e*

$$\int_a^x f_n(t)dt \ \text{ converge uniformemente ad } \int_a^x f(t)dt \quad \text{su } I\ .$$

Dimostrazione. *Poiché f_n converge uniformemente ad f su I, se $n > n_\varepsilon$,*

$$f_n(x) - \varepsilon \le f(x) \le f_n(x) + \varepsilon \quad \forall x \in I\ .$$

Pertanto si può affermare che, quando si considerano le somme inferiori e le somme superiori di f_n ed f relative ad una partizione P dell'intervallo $[a, b]$, fissato $n_0 \ge n_\varepsilon$, si ha

$$L(f_{n_0}, P) - \varepsilon(b - a) \le L(f, P) \le U(f, P) \le U(f_{n_0}, P) + \varepsilon(b - a).$$

Ora, dal momento che f_{n_0} è integrabile in $[a, b]$, è possibile trovare una partizione P_ε dell'intervallo $[a, b]$ tale che

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \le U(f_{n_0}, P_\varepsilon) - L(f_{n_0}, P_\varepsilon) + 2\varepsilon(b-a) \le \varepsilon(1 + 2(b - a)).$$

Ciò permette di concludere che f è integrabile su $[a, b]$. (Si veda il teorema 15.10). Si ha inoltre

$$\left| \int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \le \varepsilon(x - a) \le \varepsilon(b - a)$$

non appena si sia tenuto conto che f_n converge uniformemente ad f su $[a, b]$ e si sia scelto $n > n_\varepsilon$. □

Proviamo ora un'estensione del teorema precedente al caso in cui l'intervallo di integrazione non sia limitato.

Teorema 2.3 *Sia f_n una successione di funzioni integrabili in senso improprio in $[a, +\infty)$; supponiamo che f_n sia uniformemente convergente ad f su $[a, b]$ $\forall b \ge a$ ed esista una funzione g su $[a, +\infty)$ tale che*

$$|f_n(x)| \le g(x) \ \ , \forall x \in [a, +\infty] \ \ , \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx \ < +\infty\ .$$

Allora f risulta integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$ e si ha

$$\lim_n \int_a^{+\infty} f_n(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Dimostrazione. *Sia* $\varepsilon > 0$ *e sia* $b > a$ *tale che*

$$\int_b^{+\infty} g(x)dx \ < \varepsilon/4 \ .$$

Dal momento che f_n *converge uniformemente su* $[a,b]$ *ad* f *, se* $n > n_{\varepsilon/2}$*, si ha*

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_a^{+\infty} f_n(x)dx - \int_a^{+\infty} f(x)dx \Big| \leq \\
&\qquad \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx + \int_b^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|dx \ \leq \\
&\qquad\qquad \leq \varepsilon/2 + 2\int_b^{+\infty} g(x)dx \ \leq \ \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \ = \ \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4 *Sia* f_n *una successione di funzioni derivabili in (a,b) e supponiamo che*

f'_n *converga uniformemente in* (a,b) *ed*

$\exists x_0 \in (a,b)$ *tale che* $f_n(x_0)$ *sia convergente.*

Allora

f_n *converge uniformemente in* (a,b) *ad una funzione* f *che è derivabile e si ha*

$$f'(x) = \lim\ f'_n(x).$$

Dimostrazione. *Si ha*

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| \leq \\
&\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|(b-a)
\end{aligned}$$

e pertanto la successione f_n *soddisfa la condizione di Cauchy uniformemente ed* f_n *converge uniformemente ad una funzione che indichiamo con* f*.*

Sia $x \in (a,b)$ *e consideriamo la funzione* ϕ_n *definita in* $J = (a-x, b-x)$ *mediante la*

$$\phi_n(h) = \begin{cases} f'_n(x) & se\ h = 0 \\ \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} & se\ h \neq 0 \end{cases}$$

Se $h \in J$ *si ha*

$$\phi_n(h) - \phi_m(h) = \frac{(f_n - f_m)(x+h) - (f_n - f_m)(x)}{h} = (f'_n - f'_m)(\xi)$$

con $x - h \leq \xi \leq x + h$ *; pertanto si può affermare, usando il criterio di Cauchy, che* ϕ_n *è uniformemente convergente in* J*. Sia* ϕ *il suo limite; poiché ogni* ϕ_n *è continua,* ϕ *risulta continua in* J *e dal momento che*

$$\phi(h) = \lim_n \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \ = \ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad , \ h \neq 0$$

si ha

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \phi(h) = \phi(0) = \lim_{n} f'_n(x).$$

□

Diamo infine una condizione che è sufficiente per la convergenza uniforme.

Teorema 2.5 *- Dini - Sia f_n una successione di funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n(x)$ è decrescente rispetto ad n e $\lim f_n(x) \;\; = o$ per ogni fissato $x \in [a,b]$.*

Allora f_n converge uniformemente alla funzione identicamente nulla su $[a,b]$.

Dimostrazione. *Supponiamo, per assurdo, che f_n non converga uniformemente alla funzione nulla in $[a,b]$; allora $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists m > n$ con*

$$sup\{|f_m(x)| : x \in [a,b]\} > \varepsilon_0.$$

Pertanto $\forall n \in N$ $\exists m_n > n$ ed $\exists x_{m_n} \in [a,b]$ tali che

$$|f_{m_n}(x_{m_n})| > \varepsilon_0.$$

Dal momento che $x_{m_n} \in [a,b]$, possiamo supporre, a meno di passare ad una estratta, che $x_{m_n} \to x_0 \in [a,b]$.

Ora, $\forall p \in N$, si ha

$$f_{m_n}(x_{m_{n+p}}) \geq f_{m_{n+p}}(x_{m_{n+p}}) > \varepsilon_0$$

e, passando al limite per $p \to +\infty$, si ottiene

$$f_{m_n}(x_0) \geq \varepsilon_0$$

il che contrasta con il fatto che la successione f_n converge puntualmente a zero. □

Corollario 2.1 *Sia f_n una successione di funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n(x)$ è decrescente rispetto ad n e convergente verso f(x), $\forall x \in [a,b]$. Se inoltre f risulta continua in $[a,b]$, allora f_n converge uniformemente ad f in $[a,b]$.*

s Proviamo ancora alcuni utili teoremi di convergenza per successioni di funzioni e di regolarità della funzione limite.

Teorema 2.6 *Sia f_n una successione di funzioni continue in $[a,b]$ allora f_n converge uniformemente in $[a,b]$ se e solo se f_n converge uniformemente in (a,b).*

Dimostrazione. *Si ha, per la continuità di f_n*

$$\begin{aligned} sup\{|f_n + p(x) - f_n(x)| : x \in (a,b)\} = \\ = sup\{|f_n + p(x) - f_n(x)| : x \in [a,b]\} \end{aligned}$$

per ogni $n, p \in \mathbb{N}$ e pertanto si può concludere per il teorema di Cauchy.

□

Teorema 2.7 *Sia f_n una successione di funzioni su (a, b) un uniformemente convergente ad f. Supponiamo che*

$$\lim_{x \to b^-} f_n(x) = C_n$$

e

$$\lim_n C_n = C$$

Allora

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = c.$$

DIMOSTRAZIONE. *Se $n > n_\epsilon$ si ha*

$$f_n(x) - \epsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \epsilon \qquad \forall x \in (a, b)$$

al limite per $x \to b^-$

$$c_n - \epsilon \leq \lim_{x \to b^-} f(x) \leq \lim sup_{x \to b^+} f(x) \leq c + \epsilon$$

si può concludere per l'arbitrarietà di ϵ.

□

2.2 Serie di funzioni.

Ricordiamo alcune definizioni a proposito delle serie

Ad ogni successione f_k di funzioni su I; possiamo associare, come per le serie numeriche la successione delle sue ridotte definite da

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

e possiamo scrivere

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

qualora il $\lim S_n(x)$ esista finito in senso puntuale o uniforme.

Diciamo, nel primo caso che $\sum f_k$ converge puntualmente in I mentre, nel secondo caso diciamo che $\sum f_k$ converge uniformemente in I.

Diciamo inoltre che $\sum f_k$ converge assolutamente in I se $\sum |f_k|$ converge puntualmente in I.

Diciamo infine che $\sum f_k$ converge totalmente in I se, posto

$$\lambda_k = \sup_{x \in I} \{|f_k(x)|\}$$

$\sum \lambda_k$ è convergente.

Vale la pena di ricordare che, per il criterio di Cauchy

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\sum f_k$ sia uniformemente convergente in I è che $\forall \varepsilon > 0$ esista $n_\varepsilon \in N$ tale che se $n > n_\varepsilon$, $\forall p \in N$ si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Ne segue per $p = 1$

Se $\sum f_k$ converge uniformemente in I allora la successione f_k converge uniformemente a zero in I.

inoltre

$\sum f_k$ converge uniformemente in I se e solo se la successione R_n definita da

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

converge uniformemente a zero in I.

Poichè

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k$$

il criterio di convergenza di Cauchy permette di affermare che

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Convergenza Totale} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \text{Convergenza Uniforme} & & & & \text{Convergenza Assoluta} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \text{Convergenza Puntuale} & & \end{array}$$

mentre le due serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (x^k - x^{k+1})$$

mostrano che le implicazioni mancanti possono essere false.

Infatti la prima serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ ma non è ivi né assolutamente né totalmente convergente, mentre la seconda converge assolutamente in $[0, 1]$, ma non è ivi né uniformemente né totalmente convergente.

Il fatto che la convergenza totale implichi la convergenza uniforme è spesso indicato con il nome di criterio di Weierstraß; possiamo anche vedere che

$\sum f_k$ è totalmente convergente in I se e solo se esiste una successione numerica λ_k tale che

$$|f_k(x)| \leq \lambda_k \quad e \quad \sum \lambda_k \ < +\infty$$

Ricordiamo ora tutta una serie di risultati sulle serie di funzioni che derivano dai risultati sulle serie numeriche e sulle successioni di funzioni.

Siano f_k e φ_k due successioni di funzioni su I tali che

$$|f_k(x)| \leq |\varphi_k(x)| \qquad \forall x \in I.$$

Se $\sum |\varphi_k|$ è uniformemente convergente su I allora anche $\sum |f_k|$ e $\sum f_k$ è uniformemente convergente su I allora anche $\sum |f_k|$ è $\sum f_k$ è uniformemente convergente su I.

Siano f_k e g_k due successioni di funzioni su I tali che le ridotte F_n di $\sum f_k$ siano uniformemente limitate in I e sia g_k decrescente e convergente uniformemente a 0 su I. Allora $\sum f_k g_k$ è uniformemente convergente su I.

Alla stessa conclusione si può arrivare supponendo che $\sum f_k$ sia uniformemente convergente su I e g_k decresca uniformemente a g su I.

Sia $f_k : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue e decrescenti a zero; allora

$$\sum (-1)^k f_k(x)$$

è uniformemente convergente su $[a,b]$.

Se f_k è una successione di funzioni continue su I e se $\sum f_k$ è ivi uniformemente convergente, allora

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

è una funzione continua in I.

Se f_k è una successione di funzioni integrabili in $[a,b]$ e se $\sum f_k$ è ivi uniformemente convergente ad S, allora si ha

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Se f_k è una successione di funzioni integrabili in senso improprio su $[a,+\infty)$ e se $\sum f_k$ è uniformemente convergente ad S su ogni intervallo $[a,b]$, con $b > a$; se inoltre esiste una funzione ϕ su $[a,+\infty)$ tale che

$$|S_n(x)| \le \phi(x) \quad \forall x \in [a,+\infty) \quad e \quad \int_a^{+\infty} \phi(x)dx < +\infty$$

allora

$$\int_a^{+\infty} S(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^{+\infty} f_k(x)dx.$$

Sia f_k una successione di funzioni di classe $\mathcal{C}^1((a,b))$ e supponiamo che $\sum f'_k$ converga uniformemente su (a,b) ad una funzione s e che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che $\sum f_k(x_0)$ converga ad α.

Allora $\sum f_k$ risulta uniformemente convergente su (a,b) alla funzione S definita da

$$S(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} s(t)dt$$

ed inoltre

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$$

Sia f_k una successione di funzioni derivabili in (a,b) tali che $\sum f_k$ sia puntualmente convergente in $x_0 \in (a,b)$; supponiamo inoltre che $\sum f'_k$ sia uniformemente convergente ad s in (a,b).

Allora $\sum f_k$ è uniformemente convergente in (a,b) ad una funzione S derivabile e risulta $S' = s$ ovvero

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$$

Sia f_k una successione di funzioni continue e non negative su $[a, b]$; Se $\sum f_k$ è puntualmente convergente ad S e se S risulta continua in $[a, b]$, allora $\sum f_k$ è uniformemente convergente ad S su $[a, b]$.

2.3 Le Serie di Taylor.

Se $f \in \mathcal{C}^\infty((a, b))$ e se $x_0 \in (a, b)$ possiamo allora considerare la formula di Taylor di ordine n per f centrata in x_0 per qualunque valore di n ed avremo che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

dove

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad , \qquad \xi \in (a, b)$$

è il resto nella forma di Lagrange.

Se poniamo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

S_n risulta essere una ridotta della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

e risulta

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

Qualora $R_n(x) \to 0$, quando $n \to +\infty$, per $x \in I \subset \mathbb{R}$, possiamo affermare che

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x) \to 0 \quad per \quad x \in I$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ risulta convergente e la sua somma è $f(x)$

Possiamo quindi scrivere che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad per \quad x \in I$$

e diciamo che f è sviluppabile in serie di Taylor nel punto x_0 per $x \in I$.

Risulta quindi interessante conoscere condizioni sufficienti affichè $R_n(x) \to 0$ per $x \in I$ e, in proposito, possiamo dimostrare che

- *se* $|f^{(k)}(x)| \leq HM^k$ *per ogni* $x \in (a,b)$ *e per ogni* $k \in \mathbf{N}$ *allora* $R_n(x) \to 0$ *per* $x \in (a,b)$;
- *se* $|f^{(k)}(x)| \leq HM^k k!$ *per ogni* $x \in (a,b)$ *e per ogni* $k \in \mathbf{N}$ *allora* $R_n(x) \to 0$ *per* $x \in (x_0 - 1/M, x_0 + 1/M)$.

Infatti nel primo caso si ha

$$|f(x) - S_n(x)| \leq H\frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall x \in (a,b)$$

mentre, nel secondo caso

$$|f(x) - S_n(x)| \leq H(M|x-x_0|)^{n+1} \qquad \forall x \in (a,b).$$

e Si può concludere osservando che in entrambi i casi i secondi membri tendono a zero, nelle ipotesi considerate (si può ad esempio usare il criterio del rapporto.

Osserviamo che può accadere che la serie (21.1) sia convergente senza che f *sia sviluppabile in serie di Taylor. Se infatti consideriamo*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si ha che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k$, *e pertanto*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0 \neq f(x) \qquad \forall x \neq 0$$

I criteri di cui sopra permettono di trovare facilmente gli sviluppi di e^x, $\sin x$, $\cos x$.

È anche possibile dimostrare un criterio di sviluppabilità in serie di Taylor facendo uso del resto in forma integrale.

Teorema 2.8 *- Bernstein it Sia* $f \in C^\infty((a,b))$ *e siano* $x_0, \alpha \in (a,b), x_0 < \alpha$. *Se supponiamo che* $f^{(k)}(x) \geq 0$ *e se* $x_0 \leq x \leq \alpha$. *Allora* f *è sviluppabile in serie di Taylor di centro* x_0 *in* $[x_0, \alpha]$

Dimostrazione. *Dalla formula di Taylor con il resto integrale si ottiene*

$$f(x) = S_n + R(x)$$

con

$$\begin{aligned} Rn(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt = \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-S)^n f^{(n+1)}(x_0 + S(x-x_0))ds \end{aligned}$$

Pertanto, tenendo conto che ogni $f^{(k)}$ *è positiva e crescente in* $[x_0, \alpha]$ *si ha per* $x_0 \leq x \leq \alpha$

$$f(\alpha) \geq R_n(\alpha) = \frac{(\alpha - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-S)^n f^{(n+1)}(x_0 + S(\alpha - x_0))ds \geq$$
$$\geq (\frac{\alpha - x_0}{x - x_0})^{n+1} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-S)^n f^{n+1}(x_0 + s(x - x_0))ds =$$
$$= (\frac{\alpha - x_0}{x - x_0})^{n+1} R_n(x).$$

Se ne deduce che

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x - x_0}{\alpha - x_0}\right)^{n+1} f(\alpha)$$

e $\lim R_n(x) = 0$ $\square$

Usando il teorema precedente si può provare che la serie binomiale converge in $[-1, 0]$.

Poichè le serie di Taylor sono anche serie di potenze si potrà vedere che la serie converge in $(-\alpha, \alpha]$.

Usando il teorema precedente si può provare che la serie binomiale converge in $[-1, 1)$.

2.4 Le serie di potenze.

Si tratta delle serie della forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ *è fissato e si chiama centro della serie. mentre i valori* a_k *si dicono coefficienti della serie.*

E' chiaro che a meno di una traslazione possiamo sempre supporre che $x_0 = 0$ *e pertanto consideriamo soltanto serie di potenze centrate nell'origine e cioè della forma:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

A proposito della convergenza di una serie di potenze si può subito verificare che

> *Se la serie*
>
> $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$
>
> *converge per* $x = \alpha$ *allora converge assolutamente in* $[-\beta, \beta]$ *per ogni* $\beta < |\alpha|$

Infatti, per $x \in [-\beta, \beta]$, avremo che

$$|a_k x^k| \leq |a_k|\beta^k = |a_k|\frac{\beta^k}{\alpha^k}\alpha^k \leq M\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k$$

dal momento che

$|a_k|\alpha^k$ *è infinitesimo in quanto termine generale di una serie convergente. Poichè inoltre* $\frac{\beta}{\alpha} < 1$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k$$

è il termine generale di una serie geometrica convergente e si può concludere, usando il criterio di Weierstraß.

In pratica quindi, se una serie di potenze converge in un punto, converge anche in tutto il segmento che congiunge il punto all'origine (centro della serie).

Ciò autorizza a definire quel che si chiama raggio di convergenza della serie di potenze come

$$R = \sup\{\alpha \geq 0 : \sum |a_k|\alpha^k \in \mathbb{R}\}$$

Si prova che

- *una serie di potenze converge totalmente per* $|x| \leq \beta < R$
- *una serie di potenze non converge se* $|x| \geq R$

Infatti poichè la serie converge per $x = \beta + \varepsilon < R$ *avremo che la convergenza per* $|x| \leq \beta$ *è garantita da quanto abbiamo detto in precedenza*

Se viceversa la serie convergesse anche solo puntualmente per $x = \gamma > R$ *allora ci sarebbe convergenza assoluta per* $|x| \leq \gamma - \varepsilon$ *e* $\gamma - \varepsilon > R$*, e questo contraddirrebbe la definizione di* R*.*

Non siamo invece in grado di dire qualcosa sul comportamento della serie quando $|x| = R$ *.*

Consideriamo infatti

$$\sum x^k \quad , \quad \sum \frac{x^k}{k} \quad , \quad \sum \frac{x^k}{k^2}$$

E' facile vedere che in tutti i casi $R = 1$*, mentre quando* $|x| = 1$ *si ha che*

- *la prima serie non è convergente* $\forall x$*;*
- *la seconda serie converge se* $x = -1$ *e diverge se* $x = 1$*;*
- *la terza serie converge* $\forall x$*.*

Vele il seguente teorema

Teorema 2.9 *- Abel - Consideriamo* $\sum a_k x^k$ *e sia* $R > 0$ *il suo raggio di convergenza.*

Se la serie

$$\sum a_k R^k$$

converge allora $\sum a_k x^k$ *converge uniformemente in* $[0, R]$.

DIMOSTRAZIONE. *Possiamo intanto supporre* $R = 1$ *a meno di considerare* $\frac{x}{R}$ *in luogo di* x *Per l'uguaglianza di Brunacci-Abel avremo che posto*

$$B_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = x^{n+p} B_{n,p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_{n,k-n}(x_k - x_{k+1})$$

per cui

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \right| \leq |x^{n+p} B_{n,p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left| B_{n,k-n}(x^k - x^{k+1}) \right| \leq$$
$$\leq |x^{n+p} B_{n,p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_{n,k-n}||x^k - x^{k+1}|$$

Per n *abbastanza grande avremo che* $|B_{n,p}| < \varepsilon$ *e quindi se consideriamo che* $x \in [0, 1]$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \right| \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x^k - x^{k+1} \right) \leq \varepsilon \left(1 + 1\right))$$

□

Possiamo calcolare il raggio di convergenza di una serie applicando il criterio del rapporto o il criterio della radice alla serie

$$\sum |a_k x^k|$$

I criteri citati sono inutili quando il limite del rapporto o della radice è 1*; osserviamo che questo caso si verifica negli estremi dell'intervallo di convergenza.*

Possiamo anche affermare che

Teorema 2.10 *Se*

$$\lim \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad , \quad \lim \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

esistono, allora sono uguali al raggio di convergenza R *di* $\sum a_k x^k$.

2.4.1 Derivabilità di una serie di potenze

Consideriamo

$$\sum a_k x^k$$

e supponiamo che $R > 0$ sia il suo raggio di convergenza, definiamo inoltre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Allora f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

per $|x| < R$;

Se infatti consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

poichè

$$|a_k x^k| \leq |k a_k x^{k-1}|$$

per $k \geq |x|$, possiamo affermare che se la serie delle derivate converge assolutamente allora anche la serie di partenza converge assolutamente, inoltre, poichè

$$|k a_k x^{k-1}| \leq |a_k y^{k-1}| k \left(\frac{|x|}{|y|} \right)^{k-1}$$

e quindi se la serie di partenza converge assolutamente allora anche la serie delle derivate converge assolutamente.

In altre parole le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza e quindi possiamo applicare il teorema di derivazione per serie per giustificare quanto affermato.

Inoltre si può dimostrare per induzione che

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

per cui f è sviluppabile in serie di Taylor ed il suo sviluppo di Taylor è dato da

$$\sum a_k z^k$$

.

Concludiamo questo paragrafo illustrando brevemente come possono essere ricavati gli sviluppi di Taylor delle funzioni (reali) $\ln(1+x)$ e $\arctan(x)$; osserviamo che lo sviluppo della prima funzione può essere ricavato anche elementarmente e qui ne estendiamo solo il campo di sviluppabilità, mentre lo sviluppo della seconda funzione non è facilmente ricavabile in maniera diversa da quella più sotto illustrata.

Tali sviluppi sono ottenuti per integrazione da particolari serie geometriche. Ci limitiamo ad indicare le operazioni da compiere precisando solo che tali operazioni sono giustificate dai precedenti teoremi di integrazione per serie.

Si ha

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

per $-1 < x < 1$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty}(-t^2)^k \, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

per $-1 < x < 1$

Osserviamo altresì che si può vedere che lo sviluppo di $\ln(1+x)$ *è valido in* $(-1, 1]$.

3. Le Serie di Potenze complesse

Se

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

è una funzione complessa di una variabile complessa, si ha

$$f(z) = f(x + iy) = \phi(z) + i\psi(z).$$

S i definirà pertanto

$$\sum f_k(z) = \sum \phi_k(z) + i \sum \psi_k(z)$$

ed è facile vedere che

> $\sum f_k$ *converge (puntualmente, assolutamente, uniformemente, totalmente) se e solo se* $\sum \phi_k$ *e* $\sum \psi_k$ *convergono (puntualmente, assolutamente, uniformemente, totalmente).*

Osserviamo anche che, nel caso complesso si ha

$$|f_k(z)| \leq [\phi_k^2(z) + \psi_k^2(z)]$$

e che pertanto il concetto di convergenza assoluta è adeguato alla definizione di modulo di un numero complesso. Tuttavia, tenuto conto che

$$|\phi_k(z)| \leq |f_k(z)| \quad , \quad |\psi_k(z)| \leq |f_k(z)|$$

non è difficile convincersi che, anche in questo caso, la convergenza assoluta implica la convergenza puntuale, ma non viceversa.

Osserviamo infine che i concetti di convergenza uniforme e totale restano invariati con la sola differenza che l'uniformità è da intendersi rispetto alla variabile z o rispetto alla coppia (x, y).

Fatte queste premesse possiamo porre la seguente definizione.

Definizione 3.1 *Sia* $a_k \in \mathbf{C}$ *e consideriamo la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{22.1}$$

dove $z, z_0 \in \mathbf{C}$.

La serie (22.1) si chiama serie di potenze con centro nel punto z_0 *e gli* a_k *si dicono coefficienti della serie.*

E' chiaro che a meno di una traslazione possiamo sempre supporre che $z_0 = 0$ e pertanto considereremo soltanto serie di potenze centrate nell'origine e cioè della forma:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

con la tacita convenzione che quanto proveremo per tali serie è provato anche per la serie della forma (22.1).

Per le serie di potenze è sempre possibile trovare un cerchio entro il quale la serie converge assolutamente e al di fuori del quale la serie non converge; nulla si può tuttavia asserire a riguardo del carattere della serie nei punti della circonferenza di tale cerchio.

Teorema 3.1 *Consideriamo*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k;$$

esiste $R \in [0, +\infty]$ tale che

$\sum a_k z^k$ converge assolutamente se $|z| < R$;

$\sum a_k z^k$ non converge se $|z| > R$.

L'insieme $C_R = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z| < R\}$ si chiama cerchio di convergenza della serie di potenze; R è il raggio di convergenza della serie stessa.

Dimostrazione. *Definiamo*

$$R = \sup\{\alpha \geq 0 : \sum |a_k|\alpha^k < +\infty\} = \sup I_R.$$

Sia ora $z \in \mathbf{C}$, $|z| < R$, allora esiste $\alpha \in I_R$ tale che

$$|z| < \alpha < R$$

e pertanto

$$|a_k z^k| \leq |a_k|\alpha^k$$

e $\sum a_k z^k$ è assolutamente convergente.

Sia invece $z \in \mathbf{C}$, $|z| > R$ e supponiamo per assurdo che $\sum a_k z^k$ sia convergente. Allora, se $w \in \mathbf{C}$ è scelto in modo che $R < |w| < |z|$, si ha

$$a_k w^k = a_k z^k (w/z)^k.$$

Ora dal momento che $\sum a_k z^k$ è convergente, si ha $\lim a_k z^k = 0$ e

$$|a_k z^k| \leq M$$

per cui

$$|a_k||w|^k = |a_k w^k| \leq M(|w|/|z|)^k$$

e, poiché $|w|/|z| < 1$, la serie dell'ultimo membro è convergente, da cui $|w| \in I_R$.

Ciò è contro la definizione di $\sup$ *.* □

Teorema 3.2 *Consideriamo* $\sum a_k z^k$ *e sia* C_R *il suo cerchio di convergenza, allora la serie converge totalmente, e quindi uniformemente in ogni cerchio chiuso contenuto in* C_R *.*

Dimostrazione. *Sia* $0 < R_1 < R$ *e sia* $\alpha \in I_R$ *tale che* $R_1 < \alpha < R$*; se* $|z| \leq R_1$ *si ha*

$$|a_k z^k| \leq |a_k| R_1^k < |a_k| \alpha^k \quad ,$$

e si conclude usando il teorema 20.16. □

Osserviamo che nulla si può dire sul comportamento della serie quando $|z| = R$ *.*

Consideriamo infatti

$$\sum z^k \ , \ \sum \frac{z^k}{k} \ , \ \sum \frac{z^k}{k^2}.$$

E' facile vedere che in tutti i casi $R = 1$*, ma nel primo caso la serie non è convergente* $\forall z$, $|z| = 1$*; nel secondo caso se* $z = -1$ *converge e se* $z = 1$ *diverge; nel terzo caso la serie converge* $\forall z$, $|z| = 1$ *.*

Nel secondo caso è possibile vedere, facendo uso di un teorema che dimostreremo tra poco, che c'è convergenza in tutti i punti del cerchio $|z| = 1$ *diversi da* $z = 1$ *.*

Passiamo ora a provare, usando il lemma 19.22, che può essere riscritto senza difficoltà anche se $a_k, b_k \in \mathbf{C}$*, un notevole risultato di convergenza uniforme per le serie di potenze.*

Teorema 3.3 *- Abel - Consideriamo* $\sum a_k z^k$ *e sia* $R \in \mathbb{R}_+$ *il suo raggio di convergenza.*

Se la serie converge in z_0 *con* $|z_0| = R$ *e se* T *è un settore circolare di centro* z_0*, delimitato da due raggi uscenti da* z_0 *e interni al cerchio di convergenza, allora* $\sum a_k z^k$ *converge uniformemente in* T*.*

Dimostrazione. *Cominciamo con il supporre* $R = 1$*, in quanto è sempre possibile ricondursi a questo caso a meno di considerare* z/R *in luogo di* z*, e supponiamo anche* $z_0 = 1$*; cosa sempre possibile a meno di una rotazione.*

Il settore T *sarà pertanto costituito dai punti*

$$z = 1 - \rho e^{i\theta} \quad , \quad \text{con} \ \ \rho \leq r_0 \ \ \text{e} \ |\theta| \leq \sigma$$

essendo σ *ed* r_0*, ampiezza e raggio del settore, scelti in modo che*

$$0 \leq \sigma < \pi/2 \quad , \quad 0 < r_0 < 2\cos\sigma \quad ,$$

Per l'uguaglianza del lemma 19.22 si ha, posto

$$A_{n,p} = \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \quad ,$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k = A_{n,p}\, z^{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n,k-n}\,(z^k - z^{k+1}) =$$
$$= A_{n,p}\, z^{n+p} + (1-z) \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n,k-n}\, z^k$$

Ora, dal momento che $\sum a_k$ *è convergente, se* $n > n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$ *, si ha* $A_{n,p} < \varepsilon$ *e pertanto, se* $n > n_\varepsilon$ *e* $z \in T$*, si ha*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \right| \leq \varepsilon + \varepsilon|1-z| \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^k = \varepsilon\left(1 + \frac{|1-z|}{1-|z|}\right) =$$
$$= \varepsilon\left(1 + (1+|z|)\frac{|1-z|}{1-|z|^2}\right)$$

Poiché $z \in T$

$$1 - z = \rho e^{i\theta} \quad con \ \ |\theta| < \sigma \quad e \quad \rho < r_0$$

da cui

$$|1-z| = \rho.$$

D'altra parte

$$|z|^2 = |1 - \rho\cos\theta - \rho i \sin\theta\,|^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta$$

e

$$1 - |z|^2 = -\rho^2 + 2\rho\cos\theta = \rho(2\cos\theta - \rho)$$

per cui

$$\frac{|1-z|}{1-|z|^2} = \frac{1}{2\cos\theta - \rho} \leq \frac{1}{2\cos\sigma - r_0}.$$

Ne viene che, se $z \in T$ *e se* $n > n_\varepsilon$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k\right| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{2}{2\cos\sigma - r_0}\right)$$

e pertanto è provato che $\sum a_k z^k$ *converge uniformemente in* T. □

Vale anche il seguente risultato dovuto a Picard che fa luce sul comportamento delle serie di potenze sulla circonferenza che delimita il cerchio di convergenza.

A questo scopo è sufficiente usare il criterio di Dirichlet ed osservare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{\cos\theta/2 - \cos(n\theta + \theta/2)}{2\sin\theta/2}$$

$$(22.2). \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\theta/2 + \sin(n\theta + \theta/2)}{2\sin\theta/2} \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

Si ha infatti

$$\cos(k\theta + \theta/2) - \cos(k\theta - \theta/2) = -2\sin k\theta \sin \theta/2$$

e

$$\sin(k\theta + \theta/2) - \sin(k\theta - \theta/2) = 2\cos k\theta \sin \theta/2$$

da cui sommando per $k = 0, .., n$*, si ottengono le uguaglianze descritte.*

Si può con ciò provare il seguente teorema

Teorema 3.4 *- Picard - Sia* $\sum a_k z^k$ *una serie di potenze con raggio di convergenza uguale ad* 1*; se* a_k *è decrescente e* $\lim a_k = 0$ *si ha che* $\sum a_k z^k$ *è convergente per ogni* $z \in \mathbf{C}$ *tale che* $|z| = 1$*, escluso al più il punto* $z = 1$ *.*

Dimostrazione. *Si ha, per* $z \in \mathbf{C}$ *,* $|z| = 1$*,*

$$\sum a_k z^k = \sum a_k \cos k\theta \ + i \sum a_k \sin k\theta$$

e si può concludere usando il teorema 19.23 e le (22.2). □

Considerando $a_k = 1/k$ *ci si convince facilmente, come era già stato precedentemente affermato, che*

$$\sum \frac{z^k}{k} \quad \textit{converge per } |z| = 1,\ z \neq 1$$

ed inoltre si vede che se $z = 1$ *la serie non converge.*

Passiamo ora a caratterizzare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Teorema 3.5 *Sia* $\sum a_k z^k$ *e supponiamo che* R *sia il suo raggio di convergenza; allora*

$$R = \lim \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad ,$$

$$R = \lim \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

qualora tali limiti esistano.

Dimostrazione. *E' conseguenza immediata dei criteri della radice e del rapporto applicati alla serie* $\sum |a_k z^k|$*.* □

Vediamo ora di dare alcuni risultati di regolarità per la somma di una serie di potenze. Più precisamente dimostriamo che la somma di una serie di potenze è derivabile infinite volte in senso complesso, che è sviluppabile in serie di Taylor nel punto in cui è centrata la serie e che il suo sviluppo di Taylor coincide con la serie stessa.

Ciò consente tra l'altro di affermare, qualora si conosca lo sviluppo in serie di potenze di una funzione, che tale sviluppo è anche lo sviluppo di Taylor della serie stessa.

Ricordiamo ancora che stiamo operando su funzioni definite sui complessi a valori nei complessi e ricordiamo brevemente che

Una funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ si dice derivabile in senso complesso nel punto z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

esiste.

Si può dimostrare che

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \sup\{|f'(z_0 + \lambda(z - z_0))| \; : \; \lambda \in [0,1]\}|z - z_0|$$

ed usando questo risultato si può vedere che il teorema 20.9 (di passaggio al limite sotto il segno di derivazione) vale anche nel campo complesso.

Si può anche dimostrare che se f è derivabile una volta in z_0 è ivi derivabile infinite volte e si può ridare la definizione 21.1 considerando f complessa e sostituendo la variabile reale x con la variabile complessa z. Questi fatti sono per la maggior parte di facile comprensione e dimostrazione non appena si abbia una certa dimestichezza con le funzioni di due variabili reali (ricordiamo che $\mathbf{C}$ può essere posto in isomorfismo con $\mathbb{R}^2$) e consentono di dimostrare nel campo dei complessi i risultati che concludono questo paragrafo.

In mancanza di tale dimestichezza i risultati seguenti possono essere letti nel campo reale rimandando l'estensione al caso complesso ad un tempo successivo alla lettura del paragrafo 25.

Teorema 3.6 *Consideriamo $\sum a_k z^k$ e supponiamo che R sia il suo raggio di convergenza, definiamo inoltre*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Allora f è derivabile e si ha

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1} \quad , \; per \; |z| < R;$$

inoltre il raggio di convergenza della serie delle derivate è uguale ad R.

Dimostrazione. *Proviamo che, detti C e C' i cerchi in cui la serie e la sua derivata rispettivamente convergono, si ha $C = C'$.*

Intanto, dal momento che

$$|a_k z^k| \leq |k a_k z^{k-1}| \quad per \;\; k \geq |z| \;\; ,$$

si ha $C' \subset C$.

Sia viceversa $z \in C$, allora esiste $w \in C$ tale che $|w| > |z|$ e pertanto

$$|k a_k z^{k-1}| \leq |a_k w^{k-1}| k \left(\frac{|z|}{|w|} \right)^{k-1}$$

e si può concludere, come nel teorema 22.2 che $z \in C'$. □

Teorema 3.7 *Consideriamo*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

allora si ha

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

Pertanto f è sviluppabile in serie di Taylor ed inoltre il suo sviluppo di Taylor è dato dalla serie $\sum a_k z^k$.

Dimostrazione. *Si ha*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-p)!} a_k z^{k-p} \quad ; \tag{22.3}$$

infatti la (22.3) è vera per $p = 1$ ed è facile vedere che, se la stessa vale per l'indice p, allora vale anche per $p + 1$.

Pertanto

$$f^{(p)}(0) = \frac{p!}{(p-p)!} a_p = p!\, a_p.$$

Ne viene che lo sviluppo di f è dato dalla serie $\sum a_k\, z^k$ e pertanto f è sviluppabile in serie di Taylor. □

Corollario 3.1 $\sum a_k z^k = \sum b_k z^k$ *se e solo se* $a_k = b_k\ \forall k$.

Concludiamo questo paragrafo illustrando brevemente come possono essere ricavati gli sviluppi di Taylor delle funzioni (reali) $\ln(1 + x)$ *e* $\arctan(x)$*; osserviamo che lo sviluppo della prima funzione può essere ricavato anche elementarmente e qui ne estendiamo solo il campo di sviluppabilità, mentre lo sviluppo della seconda funzione non è facilmente ricavabile in maniera diversa da quella più sotto illustrata.*

Tali sviluppi sono ottenuti per integrazione da particolari serie geometriche. Ci limitiamo ad indicare le operazioni da compiere precisando solo che tali operazioni sono giustificate dai precedenti teoremi di integrazione per serie.

Si ha

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k \ dt = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad -1 < x < 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-t^2)^k\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \ \ -1 < x < 1\end{aligned}$$

Osserviamo altresì che, usando anche il risultato di pag. 7 si può vedere che lo sviluppo di $\ln(1 + x)$ *è valido in* $(-1, 1]$.