1. Le serie di Fourier.

È spesso utile saper rappresentare una funzione

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

mediante la somma infinita

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

per opportune scelte dei coefficienti a_k e b_k.

Chiaramente la funzione F ottenuta è periodica di periodo 2π e può non coincidere con f fuori dall'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Gli enunciati relativi alla possibilità di ottenere una rappresentazione di questo tipo trovano collocazione naturale in uno spazio di funzioni per definire il quale è necessario conoscere la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, tuttavia possiamo trovare un ragionevolmente semplice ambiente di lavoro considerando la seguente classe di funzioni.

Chiamiamo $\mathcal{F}^2$ lo spazio vettoriale delle funzioni

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

tali che f ed f^2 sono integrabili in $[-\pi, \pi]$

Possiamo verificare che $\mathcal{F}^2$ è uno spazio vettoriale e definiamo

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in [-\pi, \pi]\}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

Si può verificare, che

$$\|f\|_2 \leq 2\pi\|f\|_\infty$$

e quindi se f_n è una successione di funzioni in $\mathcal{F}^2$

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

se e solo se f_n converge uniformemente ad $f \in [-\pi, \pi]$

Ciò suggerisce la possibilità di dire che f_n converge in media quadratica ad f se

$$\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$$

Questo tipo di convergenza è molto naturale nell'ambito che stiamo esaminando ed è intuitivamente evidente che esso tiene conto del comportamento medio delle funzioni f_n.

Quanto abbiamo in precedenza osservato permette di affermare che se f_n converge uniformemente ad f, allora f_n converge in media quadratica alla stessa funzione.

Infine si può verificare che se

$$f_n(x) = \left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)^n$$

f_n converge in media quadratica ma non uniformemente.

Cominciamo con l'osservare che affinchè si possa avere

$$f(x) = F(x)$$

i coefficienti a_n e b_n devono essere definiti in un certo modo; infatti, si può calcolare, integrando ed usando le formule di bisezione e di prostaferesi che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos hx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx \sin hx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin hx dx = 0$$

per ogni scelta di $k, h = 1, 2, ...$ e quindi, moltiplicando la

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

per $\cos kx$ e per $\sin kx$ ed integrando, possiamo ottenere che deve risultare

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

per $k = 0, 1, .., n, ..$.

Le precedenti uguaglianze risultano pertanto necessarie affinchè la $f(x) = F(x)$ sia verificata e quindi è d'obbligo porre la seguente definizione.

Se $f \in \mathcal{F}^2$, chiamiamo coefficienti di Fourier di f i valori

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt$$

per $k = 0, 1, .., n, ..$.

Osserviamo che

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \quad , \quad b_0 = 0.$$

La serie

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

si chiama serie di Fourier associata alla funzione f. Indichiamo con F_n le sue ridotte.

E' importante stabilire sotto quali condizioni accade che

$$f(x) = F(x)$$

Per $f \in \mathcal{F}^2$, usando opportunamente le regole del calcolo integrale (integrazione per sostituzione, per parti ...) si può verificare che

- se f è pari $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos ktdt$, $b_k = 0$;
- se f è dispari $a_k = 0$, $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ktdt$;
- se f è derivabile su $\mathbb{R}$ e $f' \in \mathcal{F}^2$

$$a'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos ktdt = kb_k$$

$$b'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ktdt = -ka_k$$

Si possono inoltre dimostrare i seguenti risultati:

Se $f \in \mathcal{F}^2$ e se x è tale che

$$f(x+) = \lim_{x\to 0+} f(x) \quad , \quad f(x-) = \lim_{x\to 0-} f(x) \quad , \quad f'_+(x) \quad , \quad f'_-(x)$$

esistono finiti. Allora

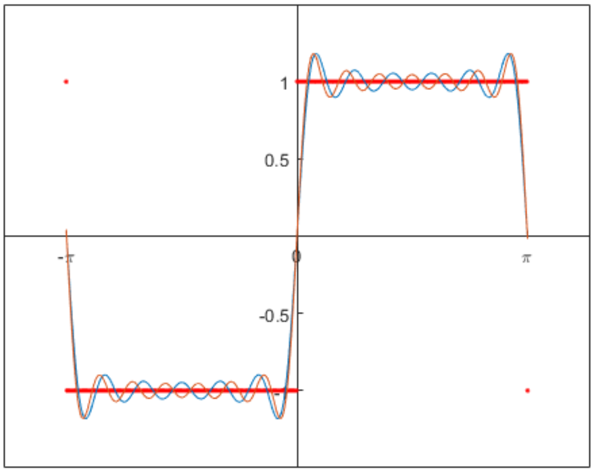
$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = F(x)$$

Se $f \in \mathcal{F}^2$, se f è continua su $\mathbb{R}$ ed $f' \in \mathcal{F}^2$ allora

$$\lim \|f - F_n\|_\infty = 0$$

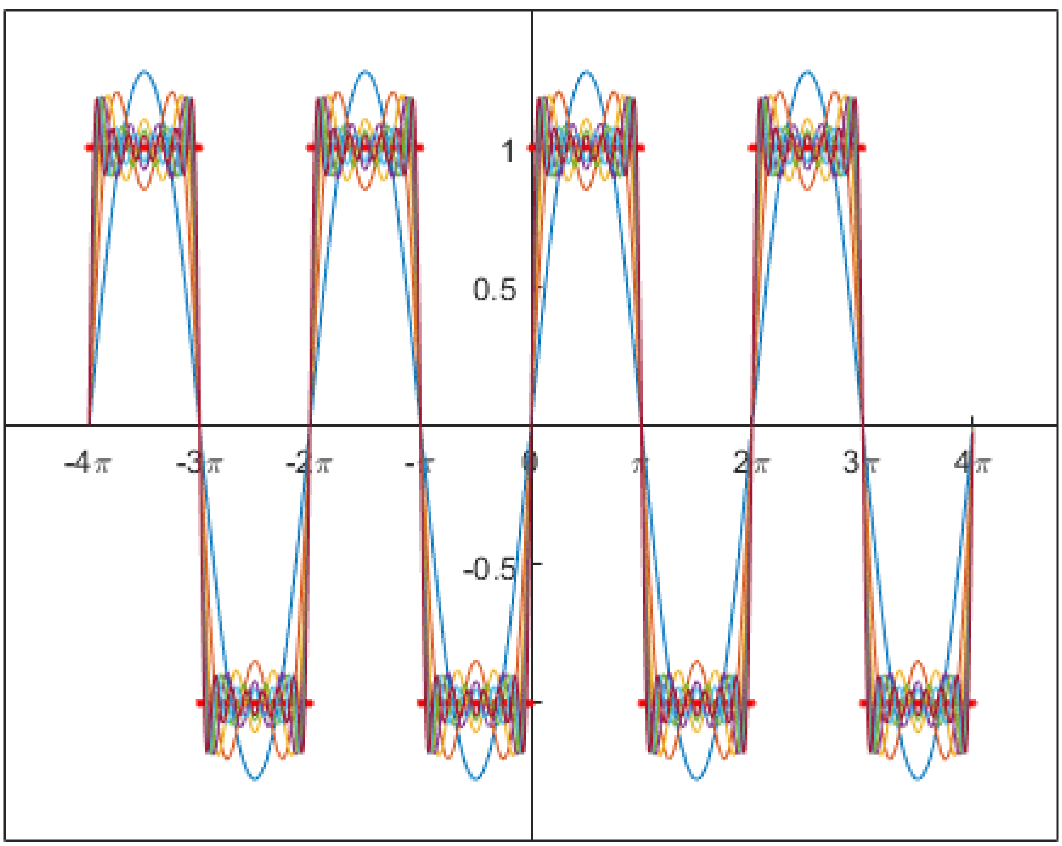
Se supponiamo che $f \in \mathcal{F}^2$, allora

$$\lim \|f - F_n\|_2 = 0$$



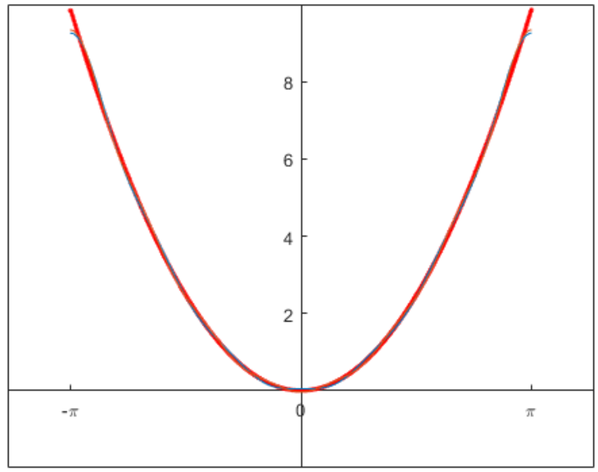
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

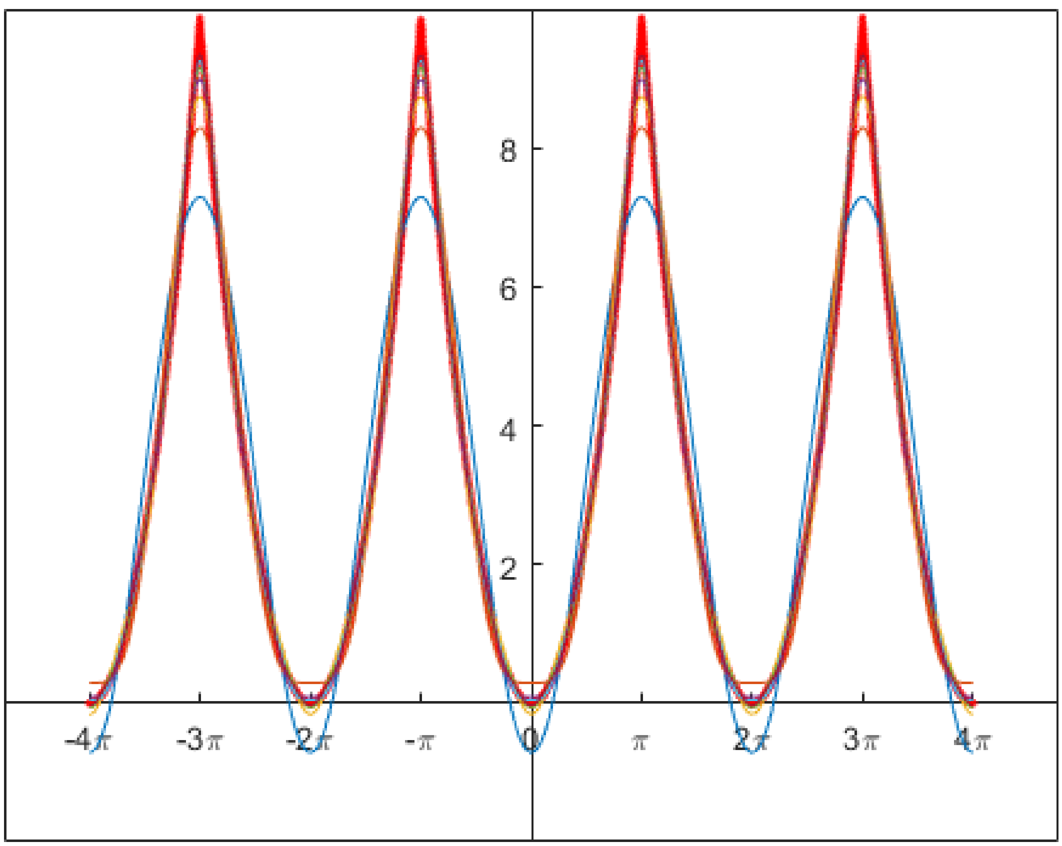
$$F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$



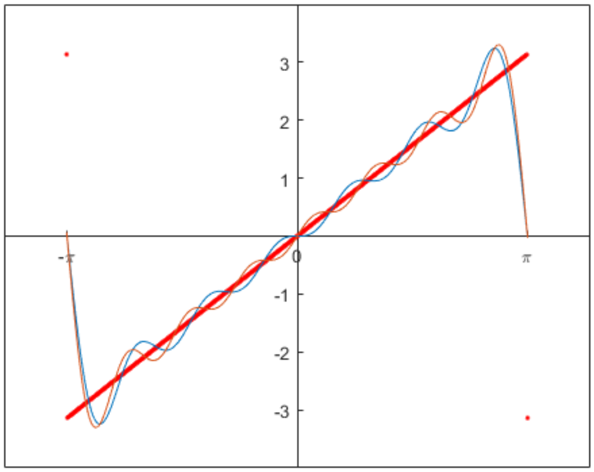
$f(x) = x^2$

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k 4\frac{\cos(kx)}{k^2}$$

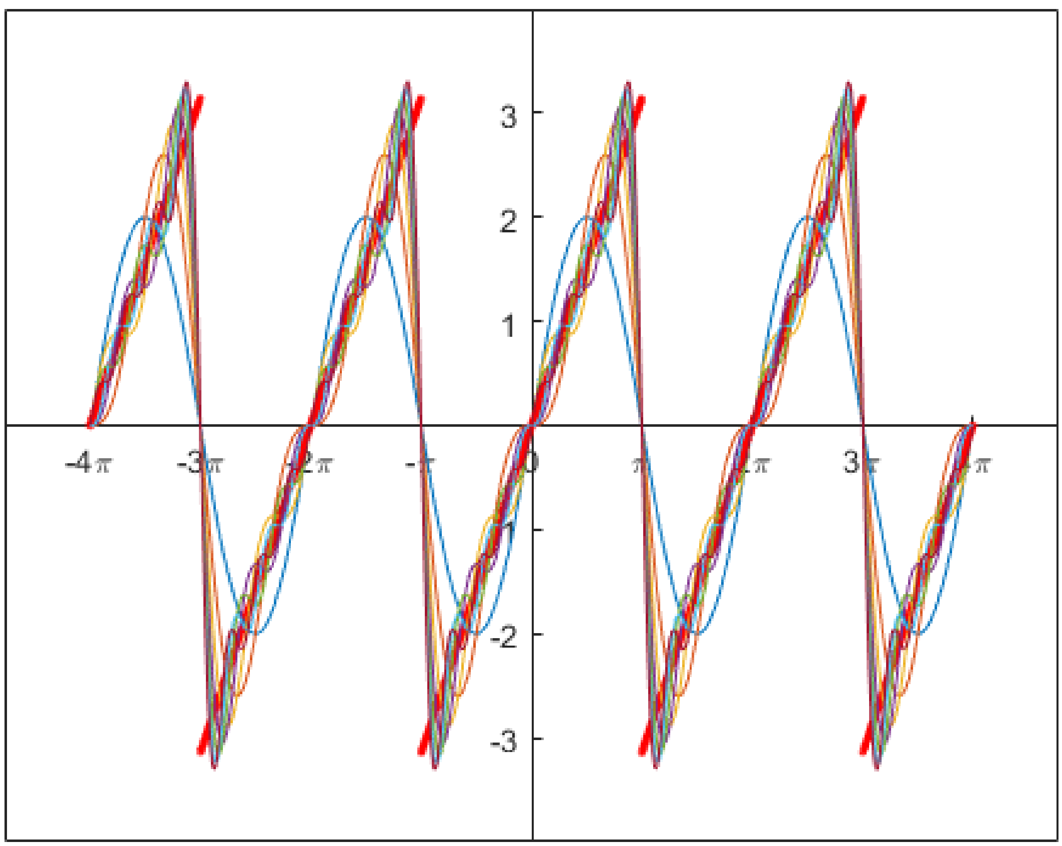




$$f(x) = x$$

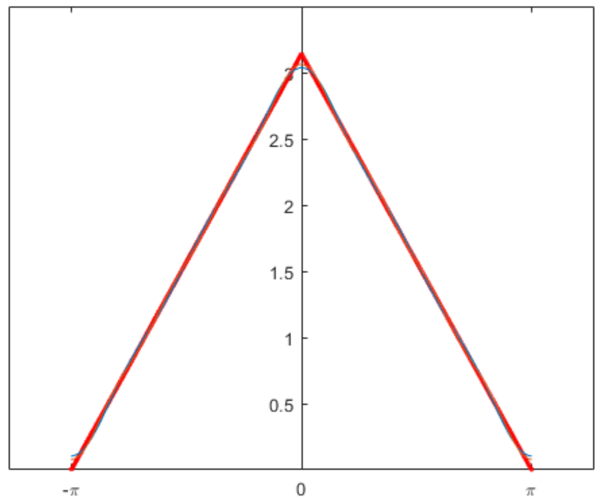


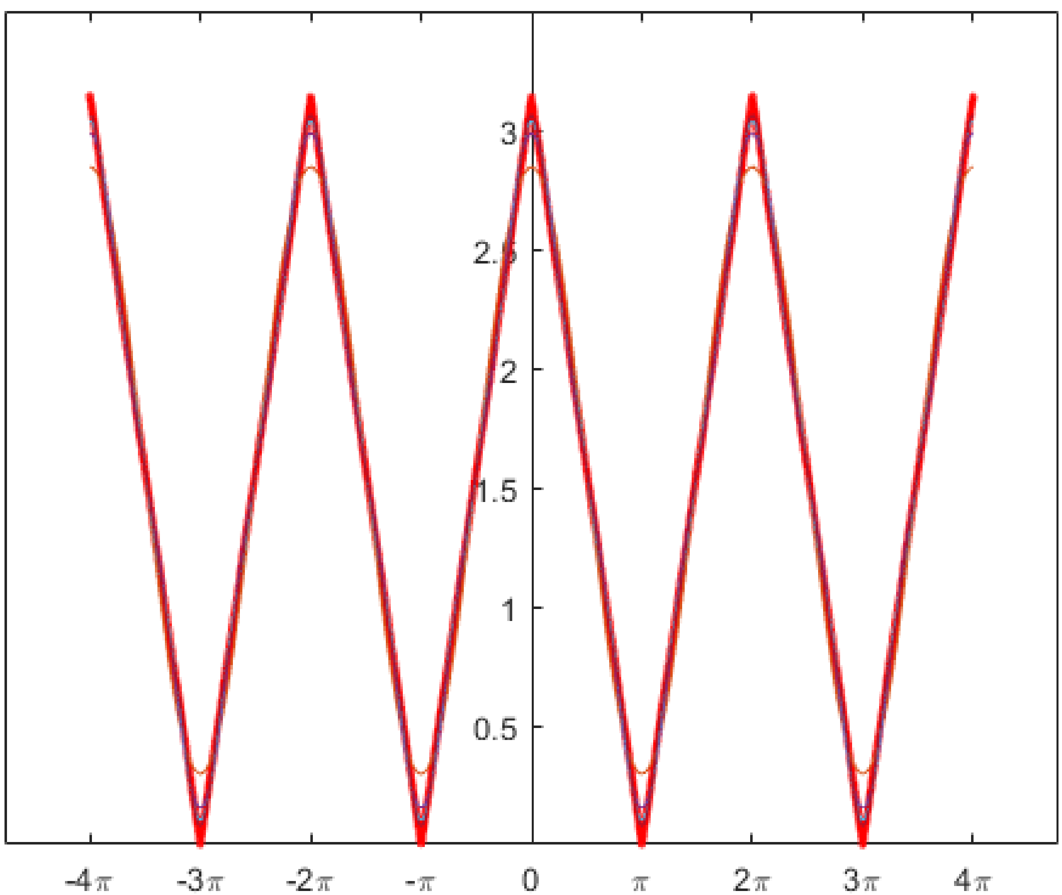
$$F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \cos(kx)$$



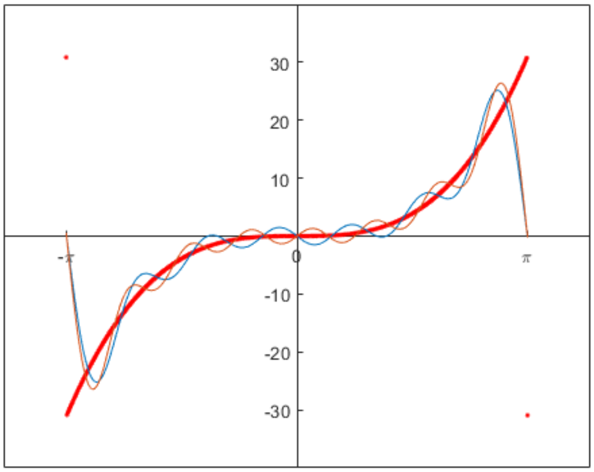
$$f(x) = \pi - |x|$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} 4\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$$

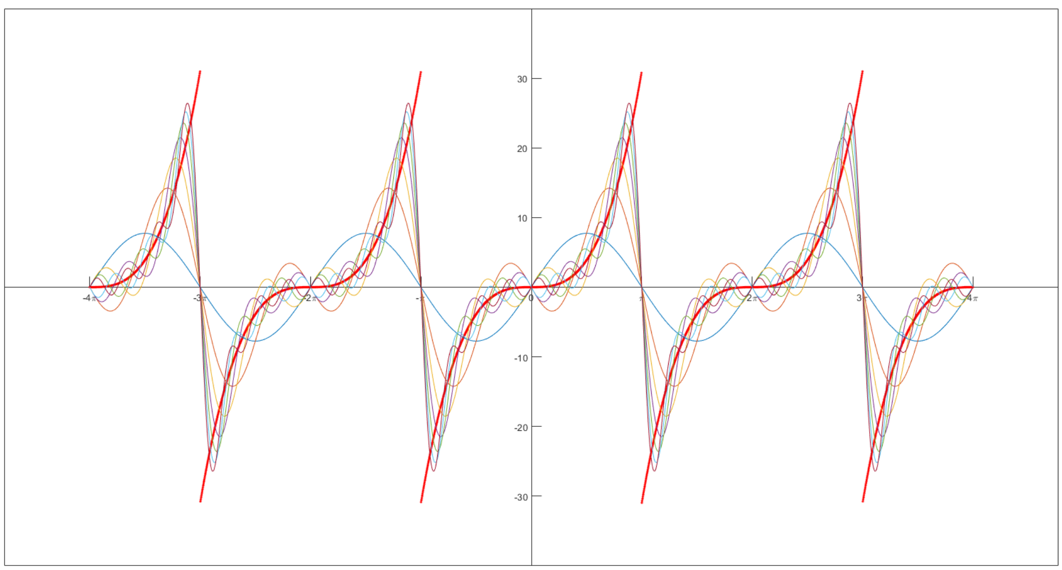




$$f(x) = x^3$$



$$F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2(-1)^{k-1} k(k^2\pi^2 - 1)\frac{\sin(kx)}{k^4}$$



1.0.1 Polinomi trigonometrici e Ridotte della serie di Fourier.

Le ridotte di una serie di Fourier sono della forma

$$F_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Si tratta pertanto di combinazioni lineari delle funzioni

$$\sin kx \quad , \quad \cos kx \quad , k = 0, 1, 2, 3, ..., n, ...$$

ottenute usando i coefficienti di Fourier a_k e b_k.

Simili combinazioni lineari, ma a coefficienti generici

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

dove $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. si indicano di solito con il nome di polinomi trigonometrici.

Possiamo pertanto affermare che le ridotte di una serie di Fourier sono particolari polinomi trigonometrici.

Indichiamo con $\mathcal{T}^n$ l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado n. e verifichiamo che in $\mathcal{T}^n$, le ridotte F_n godono di particolari proprietà.

Possiamo calcolare usando le uguaglianze trigonometriche che abbiamo citato in precedenza che, se T_n è un polinomio trigonometrico, allora

$$\|T_n\|_2^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right).$$

ed, in particolare, se $f \in \mathcal{F}^2$

$$\|F_n\|_2^2 = \pi \left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Si verifica che, fissata $f \in \mathcal{F}^2$, tra tutti i polinomi trigonometrici T_n di grado n, quello che rende minimo lo scarto quadratico medio

$$\|f - T_n\|_2^2$$

è quello i cui coefficienti sono i coefficienti di Fourier.

Infatti se ricordiamo che

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx = \pi \left(\frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\alpha_k + b_k\beta_k) \right) = \\ &= \langle F_n, T_n \rangle\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\|f - T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2 + \|F_n\|_2^2 + \|T_n\|_2^2 - 2\langle f, T_n\rangle = \\ = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2 + \|F_n\|_2^2 + \|T_n\|_2^2 - 2\langle F_n, T_n\rangle = \\ = \|F_n - T_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2\end{aligned}$$

quindi

$$\min\{\|f - T_n\|_2^2 \ : \ T_n \in \mathcal{T}^n \} = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2$$

ed il minimo è assunto quando $T_n = F_n$.

Poichè quindi

$$\|f - T_n\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2$$

possiamo infine ottenere che

Disuguaglianza di Bessel - Per $f \in \mathcal{F}^2$,

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$

Avremo inoltre che

$$\|f - F_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2$$

e, poichè per $f \in \mathcal{F}^2$ la serie di Fourier converge in media quadratica, otteniamo

$$\lim_n \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2 = 0$$

Ciò si può riscrivere nella forma

uguaglianza di Parseval -

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$

Corollario 1.1 - *Se* $f \in \mathcal{F}^2$ *, allora, per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \sin(n+\alpha)x \ dx = 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n+\alpha)x dx = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi f(x)\cos(\alpha x))\sin(nx)dx + \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi f(x)\sin(\alpha x))\cos(nx)dx\end{aligned}$$

Perciò dal momento che le funzioni $\pi f(x)\sin(\alpha x)$ e $\pi f(x)\cos(\alpha x)$ ristrette a $[-\pi,\pi)$ sono in $\mathcal{F}$, gli integrali sulla destra, che sono i loro coefficienti di Fourier, hanno serie di quadrati convergente e sono pertanto infinitesimi. □

Lemma 1.1 *Sia $f \in \mathcal{F}^2$ e sia $D_n(t)$ definito da*

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad ;$$

allora

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} & 0 < |t| \leq \pi \\ n + 1/2 & t = 0 \end{cases}$$

ed inoltre

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt. \tag{23.4}$$

Dimostrazione. La prima parte segue dalle (22.2). Per il resto si ha

$$\begin{aligned} F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} [f(t)\cos(kt)\cos(kx) + \\ + f(t)\sin(kt)\sin(kx)]dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right) dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt \end{aligned}$$

non appena si ricordi che se g è periodica di periodo 2π

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t)dt.$$

□

Nel seguito indicheremo con

$$f(x+) = \lim_{y \to x^+} f(x) \quad , \quad f(x-) = \lim_{y \to x^-} f(x).$$

Teorema 1.1 - *Sia $f \in \mathcal{F}^2$ e supponiamo che x sia tale che $f(x+)$, $f(x-)$, $f'_+(x)$ ed $f'_-(x)$ esistano finiti. Allora*

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}$$

e, moltiplicando per $f(x+)/\pi$ e integrando su $[0,\pi]$,

$$\frac{1}{2}\, f(x+) = \frac{1}{\pi}\ \int_0^{\pi}\ f(x+)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}dt \ \ ;$$

analogamente

$$\frac{1}{2}\, f(x-) = \frac{1}{\pi}\ \int_{-\pi}^{0}\ f(x-)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}dt.$$

Per la (23.4) si ha allora

$$\begin{aligned} F_n(x) - \frac{1}{2}\ [f(x+) + f(x-)] = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\sin(t/2)}\ \sin(n+1/2)tdt\ + \\ +\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+t) - f(x-)}{2\sin(t/2)}\ \sin(n+1/2)tdt \end{aligned}$$

e tenuto conto del corollario 23.10 si può concludere. □

Teorema 1.2 *Sia $f \in \mathcal{F}^2$, se f è continua su $\mathbb{R}$ ed $f' \in \mathcal{F}^2$ allora*

$$\lim\ \|f - F_n\|_\infty = 0.$$

Dimostrazione. Per il teorema 23.12 F_n converge ad f puntualmente ed inoltre si ha

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|.$$

Ora

$$|a_k| = \frac{1}{k}\ |b'_k| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |b'_k|^2\right),$$

e si può pertanto concludere ricordando la disuguaglianza di Bessel.

□

Teorema 1.3 *Supponiamo che $f \in \mathcal{F}^2$, allora*

$$\lim\ \|f - F_n\|_2\ = 0.$$

Dimostrazione. Dal momento che f^2 è integrabile, esiste una funzione σ, costante a tratti, tale che

$$0 \leq \sigma(x) \leq f^2(x) \quad e \qquad \int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) - \sigma(x)]dx < \varepsilon^2/25.$$

(σ può essere definita uguale a 0 in un intorno di ogni punto in cui f non è limitata, altrove come la funzione il cui integrale coincide con una opportuna somma inferiore).

Definiamo

$$s(x) = sgnf(x)\ \sigma(x)\ \ ;$$

si ha

$$s(x)f(x) = |s(x)||f(x)| \geq s^2(x) = \sigma(x)$$

e

$$\|f - s\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) + s^2(x) - 2s(x)f(x)]dx \leq$$
$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) - s^2(x)]dx \leq \varepsilon^2/25$$

Sia ora h una funzione continua, lineare a tratti in $[-\pi, \pi]$ tale che $h(\pi) = h(-\pi)$ e

$$\|s - h\|_2 \leq \varepsilon/5.$$

(Se x_0 è un punto di discontinuità di s è sufficiente definire in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$h(x) = (x - x_0 + \delta)[s(x_0 + \delta) - s(x_0 - \delta)]/(2\delta) + s(x_0 - \delta);$$

altrove si definisca $h = s$. La scelta di δ deve essere fatta in modo da far sì che valga la condizione richiesta).

Ora, se H_n sono le ridotte della serie di Fourier di h, per il teorema 23.13, si ha definitivamente

$$\|h - H_n\|_\infty < \varepsilon/5$$

e si ha, tenuto conto della (23.1)

$$\|f - H_n\|_2 \leq \|f - s\|_2 + \|s - h\|_2 + \|h - H_n\|_2 \leq \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + 3\varepsilon/5 = \varepsilon$$

(si veda appendice 6) e per il corollario 23.8, definitivamente si ha

$$\|f - F_n\|_2 \leq \|f - H_n\|_2 \leq \varepsilon.$$

□

Corollario 1.2 *Sia $f \in \mathcal{F}^2$, allora*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2.$$

Dimostrazione. Per il Lemma 23.7 si ha

$$\|f - F_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2.$$

perciò, dal lemma 23.6 e dal teorema 23.14, si conclude. □

Teorema 1.4 *Sia $f \in \mathcal{F}^2$ e supponiamo che $f^{(p)} \in \mathcal{F}^2$ e*

$$\|f^{(p)}\|_2 \leq M.$$

Allora

$$|f(x) - F_n(x)| \leq \frac{2M}{(\pi(2p-1))} \frac{1}{n^{p-1/2}}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$|f(x) - F_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| + |b_k| =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}(|a_k^{(p)}| + |b_k^{(p)}|) \leq$$

(dove con $a_k^{(p)}$ e $b_k^{(p)}$ si sono indicati i coefficienti di Fourier di $f^{(p)}$)

$$\leq \qquad 2\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k^{(p)}|^2 + |b_k^{(p)}|^2\right)^{1/2} \qquad \leq$$

(si veda appendice 6)

$$\leq \frac{2}{\pi}\|f^{(p)}\|_2 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{(\pi(2p-1))} \frac{1}{n^{p-1/2}}$$

□

È anche molto interessante studiare il comportamento delle medie di Cesaro della successione delle ridotte di una serie di Fourier, in quanto ciò permette di provare un importante teorema di approssimazione per le funzioni continue e periodiche.

Ricordiamo che, date una successione a_n si chiamano medie di Cesaro di an i termini b_n della successione definita da $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$

Definizione 1.1 *Sia $f \in \mathcal{F}^2$ definiamo le medie di Cesaro C_n della successione delle ridotte della serie di Fourier nella seguente maniera:*

$$C_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F_k(x)$$

Lemma 1.2 *Sia $f \in \mathcal{F}^2$ e sia $K_n(t)$ definito da*

$$K_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$$

Si ha

$$k_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2n}(\frac{\sin Y_2 nt}{\sin Y_2 t}^2 & 0 < (t) \leq K \\ & t = 0 \end{cases}$$

ed inoltre

$$C - n(x) = \frac{1}{K}\int_{-K}^{K} f(x+t)K_n(t)dt.$$

Dimostrazione. D se lemma 23.11, si ha

$$K_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$\frac{1}{2n\sin\frac{t}{2}}\sum_{k-0}^{n-1}\frac{(\sin kt cos\frac{1}{2}t + coskt\sin\frac{1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2n\sin\frac{t}{2}}\Big(cos\frac{1}{2} + \frac{(cos\frac{t}{2} - cos(n-\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}} + \sin\frac{t}{2}\frac{(\sin\frac{t}{2} + \sin(n-\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2n(\sin\frac{t}{2})^2}\frac{1}{2}\big(1 + \sin\frac{t}{2}\sin(n-\frac{1}{2})t - cos\frac{t}{2}cos(n-\frac{1}{2})t\big) =$$

$$= \frac{1}{2n(\sin\frac{t}{2})^2}\frac{1-cosnt}{2} = \frac{1}{2n}\frac{(cosn\frac{t}{2})^2}{(\sin\frac{t}{2})^2}$$

l'espressione di C_n è ovvia conseguenza della fusione. □

Teorema 1.5 *- Fejér - Sia f continua in $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π. Allora la successione C_n delle medie di Fejér converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che $K_n \geq 0$ e che poiché

$$\frac{1}{K}\int_{-K}^{K} D_n(t)dt = 1 \quad \text{si ha } \frac{1}{K}\int_{-K}^{K} K_n(t) = 1.$$

Osserviamo inoltre che, poiché la funzione $\sin x$ è concava in $[0, \frac{K}{2}]$ si ha

$$\sin x \geq \frac{2x}{K}$$

pertanto

$$0 \leq \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \leq \frac{K}{t} \leq \frac{K}{\delta} \qquad \text{se}\delta \leq t \leq K$$

onde

$$0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{2n}(\frac{K}{\delta})^2 \qquad se\delta \leq t \leq K$$

Poiché f è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0$ tale che se $t < \delta$ si ha $|f(x+t) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

Pertanto si può ottenere che

$$|C_n(x) - f(x)| = \frac{1}{K}|\int_{-K}^{K}[f(x+t) - f(x)K_n(t)dt| \leq$$

$$\leq \frac{1}{K}\int_{-K}^{K}|f(x+t) - f(x)|K_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{K}\big(\int^{f} -f|f(x+t) - f(x)|K_n(t)dt +$$

$$+ \int_{|t|\geq f}|f(x+t) - f(x)|(K_n|t|)dt\big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{K}\big(\epsilon\int_{-K}^{k} K(t)dt + \int_{|t|\leq f}|f(x-t) - f(x(|K_n|t|dt\big)$$

Ove, si ha

$$\frac{1}{K}\int_f^K |f(x+t)-f(x)|K_n(t)dt \leq$$
$$\leq \frac{2\|f\|_\infty}{k}\int_f^K (\frac{K}{f})^2 dt =$$
$$= \frac{\|f\|_\infty}{nf^2}\frac{(K-f)}{K}K^2 \leq$$
$$\frac{\|f\|_\infty K^2}{n} < \epsilon.$$

Se n è sufficientemente grandi. Analogamente per n grande

$$\frac{1}{K}\int_{-K}^{-f} |f(x+t)-f(x)|K_n(t)dt < \epsilon$$

e

$$|C_n(x)-f(x)| \leq \frac{\epsilon}{K} + 2\epsilon$$

se n è abbastanza grande Resta cosìprovato anche il seguente

□

Teorema 1.6 - *di approssimazione di Weierstrass - È possibile approssimare uniformemente ogni funwione continua su* $\mathbb{R}$ *periodica di periodo* 2π *mediante polinomi trigonometrici.*

1.0.2 Serie di Fourier su intervalli generici

Naturalmente accade di voler sviluppare in serie di Fourier una funzione

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

per cui è opportuno studiare come i risultati ottenuti su $[-\pi,\pi]$ possano essere usati per il caso in esame.

A tal fine è sufficiente considerare la funzione

$$g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$$

definita da

$$g(x) = f\left(a + (x+\pi)\frac{b-a}{2\pi}\right)$$

Se infatti consideriamo il suo sviluppo in serie di Fourier

$$G(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos ktdt \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin ktdt$$

per $k = 0, 1, .., n, ..$. e, sotto opportune condizioni per g, possiamo affermare che

$$g(x) = G(x)$$

da cui

$$f(x) = g\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) =$$
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) + b_k \sin k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) \tag{1.1}$$

Occorre a questo punto esprimere i coefficienti a_k e b_k in funzione di f e questo può essere fatto integrando per sostituzione.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos kt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(a + (t+\pi)\frac{b-a}{2\pi}\right)\cos ktdt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) d\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{b-a}\int_a^b f(x)\cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx =$$
$$= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx$$

In maniera del tutto simile si calcola che

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin kt\, dt == \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{b-a}\int_a^b f(x)\sin k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx =$$
$$= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx$$

Poichè, usando ad esempio le formule di addizione, si ottiene che

$$\cos(k\pi + \beta) = \pm\cos(\beta)$$
$$\sin(k\pi + \beta) = \pm\sin(\beta)$$

possiamo scrivere che

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) + b_k \sin k\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) \tag{1.2}$$

con

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos k\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx$$
$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin k\left(+(x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx$$

1.0.3 Casi Particolari interessanti

Per particolari scelte significative dell'intervallo $[a, b]$ troviamo

Per $[a, b] = [0, 2T]$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx\frac{\pi}{T} + b_k \sin kx\frac{\pi}{T}$$

con

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x) \cos k\frac{\pi}{T}xdx$$
$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x) \sin k\frac{\pi}{T}xdx$$

Per $[a, b] = [-T, T]$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k(x+T)\frac{\pi}{T} + b_k \sin k(x+T)\frac{\pi}{T}$$

con

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \cos k(x+T)\frac{\pi}{T}dx$$
$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \sin k(x+T)\frac{\pi}{T}dx$$

ed anche

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx\frac{\pi}{T} + b_k \sin kx\frac{\pi}{T}$$

con

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \cos kx\frac{\pi}{T}dx$$
$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \sin kx\frac{\pi}{T}dx$$

in quanto

$$\cos k(x+T)\frac{\pi}{T} = \pm \cos kx\frac{\pi}{T}$$
$$\sin k(x+T)\frac{\pi}{T} = \pm \sin k(x\frac{\pi}{T}$$

1.0.4 Serie di Fourier in forma complessa

Consideriamo lo sviluppo di una funzione f su un intervallo $[-t, T]$ (si veda il paragrafo precedente); dalle formule di Eulero otteniamo che

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} + e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right)$$
$$\sin kx = \frac{1}{2\imath}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} - e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right)$$

e che

$$e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} = \cos k\frac{\pi}{T}x + \imath sink\frac{\pi}{T}x$$
$$e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x} = \cos k\frac{\pi}{T}x - \imath \sin k\frac{\pi}{T}x$$

quindi

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{\pi}{T}x = \\ &\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{1}{2}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} + e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right) + b_k\frac{1}{2\imath}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} - e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right) = \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(a_k - \imath b_k\right)e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} + \frac{1}{2}\left(a_k + \imath b_k\right)e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\end{aligned}$$

Se teniamo conto che

$$a_k = a_{-k} \qquad , \qquad b_k = -b_{-k}$$

ricaviamo infine che

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(a_k - \imath b_k\right)e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} + \sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{2}\left(a_k - \imath b_k\right)e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k\frac{\pi}{T}x}.\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2}\left(a_{-k} - \imath b_{-k}\right) = \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\frac{1}{2}\left(\cos k\frac{\pi}{T}x - \imath \sin k\frac{\pi}{T}x\right) = \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}.\end{aligned}$$

Riassumendo avremo che

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k\frac{\pi}{T}x}$$

con

$$c_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}.$$

1.1 Il fenomeno di Gibbs.

I grafici delle ridotte di una serie di Fourier relativa ad una funzione che presenta 'salti' (diciamo che una funzione f presenta un salto in x_0 se $f(x_0+) \neq f(x_0-)$ ed entrambi sono reali) mettono in evidenza come, in prossimità dei punti di 'salto' la convergenza della serie di Fourier non sia uniforme (si vedano i grafici a pag. 67). In prossimità di tali punti infatti si verifica una 'impennata' dei grafici delle ridotte stesse.

Tale comportamento può essere illustrato più precisamente come segue

Sia $f \in \mathcal{F}^2$ e sia $x_0 \in [-\pi, \pi)$ un punto di salto per f; posto

$$\sigma = f(x_0+) - f(x_0-),$$

detta F la serie di Fourier di f ed F_n la sua ridotta n-esima, si ha (Teorema 20.22)

$$F(x_0) = \sigma/2$$

ed inoltre esiste $x_n \to x_0$, $x_n \geq x_0$, tale che, se

$$G_M = \lim \; F_n(x_n)$$

si ha

$$\frac{G_M}{\sigma/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin}{s} ds = 1.1789797444721672 7023.. > 1$$

Questo fatto è noto come 'fenomeno di Gibbs' ed è stato studiato in seguito a constatazioni sperimentali del fenomeno.

Per stabilire quanto abbiamo affermato cominciamo a considerare la più semplice funzione che presenta un 'salto' che, nell'attuale contesto è data da:

$$\phi(x) = \begin{cases} (x-\pi)/2 & , sexin[0,\pi) \\ -(x+\pi)/2 & , sex \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Si potrebbero ovviamente considerare funzioni più semplici dal punto di vista formale (ad esempio la solita funzione a gradino) ma nel nostro caso una simile scelta comporterebbe la perdita di notevoli semplificazioni di calcolo.

Consideriamo dunque la serie di Fourier di ϕ e le sue ridotte Φ_n.

Avremo

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\; kx}{k} \quad , \quad \Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\; kx}{k}$$

e quindi

$$\frac{x}{2}+\Phi_n(x)=\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\ kx}{k}=$$
$$=\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\ kt\right)dt=\int_0^x D_n(t)dt=$$

(si veda il lemma 23.11)

$$=\int_0^x\frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin t/2}dt=$$
$$=\int_0^x\frac{\sin nt}{2\tan t/2}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\cos nt\ dt=$$
$$=\int_0^x\frac{\sin nt}{t}dt+\int_0^x\sin nt\left(\frac{1}{2\ \tan t/2}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_0^x\cos ntdt.$$

Ora non appena si osservi che

$$\frac{1}{2\tan t/2}-\frac{1}{t}=\frac{t-2\tan t/2}{2t\tan t/2}$$

è limitata in un intorno di 0, si ha che, comunque si scelga una successione $x_n\to 0$, $x_n\geq 0$

$$\lim\left(\frac{x_n}{2}+\Phi_n(x_n)\right)=\lim\int_0^{x_n}\frac{\sin nt}{t}dt$$

essendo gli altri due integrali infinitesimi.

Ora

$$\int_0^{x_n}\frac{\sin nt}{t}dt=\int_0^{nx_n}\frac{\sin t}{t}dt$$

e

$$G=\lim\Phi_n(x_n)=\lim\int_0^{nx_n}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Se $nx_n\to\alpha$, $\alpha\in[0,+\infty]$, si ha

$$G=\int_0^{\alpha}\frac{\sin t}{t}dt;$$

pertanto

$$G\in\{\int_0^{\alpha}\frac{\sin t}{t}dt\ :\ \alpha\in\bar{\mathbb{R}}_+\}=[0,\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt]$$

ed il valore massimo G_M, il più sfavorevole nel nostro caso, che G possa assumere è

$$G_M=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt>\frac{\pi}{2}.$$

Pertanto se

$$S=\frac{\phi(0+)-\phi(0-)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

si ha

$$\frac{G_M}{S}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}$$

Più in generale se $f \in \mathcal{F}^2$ e se $x_0 \in [-\pi, \pi)$ è un punto di salto per f, posto

$$\sigma = f(x_0+) - f(x_0-)$$

si ha

$$f(x) = \left(f(x) - \frac{\sigma}{\pi}\phi(x - x_0)\right) + \frac{\sigma}{\pi}\phi(x - x_0) = \\ = f_1(x) + f_2(x)$$

Ora se F_n, F_n^1, F_n^2, sono le ridotte della serie di Fourier di f, f_1, f_2, rispettivamente si ha

$$F_n(x) = F_n^1(x) + F_n^2(x)$$

e, se $x_n \to x_0$, $x_n \geq x_0$, usando il teorema 23.12 si ottiene

$$G = \lim\ F_n(x_n) - \frac{\sigma}{2} = \lim F_n^1(x_n) - \frac{\sigma}{2} + \lim F_n^2(x_n) = \\ = \lim F_n^2(x_n) = \lim \frac{\sigma}{\pi}\Phi_n(x_n - x_0)$$

e se $n(x_n - x_0) \to \pi$, si ha

$$G_M = \lim\ F_n(x_n) - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

onde

$$\frac{G_M}{\sigma/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1.17897974447216727023.. > 1.$$

2. La Trasformata di Fourier.

Sostituendo i valori di c_k nella serie otteniamo, nel caso in cui $f = F$ e cioè f sia sviluppabile in serie di Fourier,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T} s} ds \right) e^{\imath k \frac{\pi}{T} x} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T} (s-x)} ds \approx$$

$$\approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T} (s-x)} ds$$

non appena si supponga f assolutamente integrabile su R e T sufficientemente grande.

Se ora definiamo

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T} (s-x)} ds$$

Passando al limite per $T \to +\infty$ è quindi naturale affermare, e si può dimostrare sotto opportune condizioni, che

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{T} \varphi \left(k \frac{\pi}{T} \right) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) d\omega$$

Otteniamo in questo modo che, sotto opportune ipotesi,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\imath k\omega (s-x)} ds \right) d\omega$$

e

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath k\omega x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{\imath k\omega s} ds \right) d\omega$$

Quest'ultima uguaglianza è nota come Uguaglianza integrale di Fourier e costituisce la base su cui si fonda la teoria delle trasformate di Fourier.

2.1 L'INTEGRALE DI FOURIER.

Ricordiamo un risultato che si può ottenere dalle proprietà degli integrali dipendenti da un parametro. Si ha

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \forall \alpha > 0.}$$

Per la verifica di tale fatto rimandiamo all'appendice 3.
Proviamo ora un risultato che estende il corollario 23.10.

Lemma 2.1 - *Riemann-Lebesgue - Sia f una funzione limitata e integrabile sull'intervallo [a,b] chiuso e limitato. Allora*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\alpha x + \beta) dx = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Dal momento che f è integrabile, per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare una funzione ϕ, costante a tratti su $[a, b]$, in modo che

$$\phi(x) \leq f(x) \quad , \quad \int_a^b (f(x) - \phi(x)) dx < \varepsilon/2.$$

E' sufficiente infatti scegliere una partizione $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b])$, $P_\varepsilon = \{x_i : i = 0, .., q\}$, per cui

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon/2$$

e definire

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{q-1} m_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}(x) \, m_i = inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}).$$

Si ha

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b f(x) dx - L(f, P_\varepsilon) \leq$$
$$\leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon/2.$$

D'altra parte si ha

$$\left| \int_a^b \phi(x) \sin(\alpha x + \beta) dx \right| = \left| \sum_{i=0}^{q-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(\alpha x + \beta) dx \right| =$$
$$= \left| \sum_{i=0}^{q-1} m_i \frac{-\cos(\alpha x + \beta)}{\alpha} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right| \leq \frac{2Mq}{\alpha}$$

se M è un maggiorante di f.
Pertanto, se scegliamo $\alpha > 4Mq/\varepsilon$, si ottiene

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right| = \left|\int_a^b (f(x)-\phi(x))\sin(\alpha x+\beta)dx\right| +$$
$$+\left|\int_a^b \phi(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right| \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

□

Il lemma 27.1 di Riemann-Lebesgue può essere esteso anche al caso di intervalli di integrazione non limitati o di funzioni non limitate.

Lemma 2.2 - *Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, assolutamente integrabile (supponiamo cioè che $|f|$ sia integrabile su $\mathbb{R}$), allora*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx=0.$$

Dimostrazione. Supporremo per semplicità che f sia limitata su $\mathbb{R}$ dal momento che nel caso generale la dimostrazione è solo apparentemente più complicata.

Sia $\varepsilon>0$ e sia $\delta>0$ scelto in modo che

$$\int_{|x|>\delta}|f(x)|dx<\varepsilon/2.$$

Allora

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right| + \int_{|x|>\delta}|f(x)||\sin(\alpha x+\beta)|dx \leq$$
$$\leq \left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right| + \varepsilon/2.$$

Applicando il lemma 27.1, se si sceglie α abbastanza grande, si può affermare che

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\sin(\alpha x+\beta)dx\right| \leq \varepsilon/2$$

e la tesi. □

Lemma 2.3 - *Dini - Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, sia $x\in(a,b)$ e supponiamo che esista $\delta>0$ tale che*

$$\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+s)-f(x+)}{s}\right|ds$$

esista finito. Allora

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} f(x+s)\frac{\sin(\alpha s)}{s}ds=f(x+).$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_0^{\delta} f(x+s)\frac{\sin(\alpha s)}{s}ds =$$
$$= \int_0^{\delta} \frac{f(x+s)-f(x+)}{s}\sin(\alpha s)ds + \int_0^{\delta} f(x+)\frac{\sin(\alpha s)}{s}ds =$$
$$= \int_0^{\delta} \frac{f(x+s)-f(x+)}{s}\sin(\alpha s)ds + f(x+)\int_0^{\alpha\delta} \frac{sinu}{u}du$$

Passando al limite per $\alpha \to +\infty$ si può concludere ricordando il lemma 27.2 e il fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{sinu}{u}du = \frac{\pi}{2}.$$

□

Lemma 2.4 *Sia f una funzione assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$ e sia h una funzione continua e limitata su $\mathbb{R} \times I$, allora*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t,s)dt$$

è una funzione continua in I.

Se inoltre h è derivabile rispetto ad s e se $(\partial h/\partial s)$ è limitata e continua in $\mathbb{R} \times I$ allora F è derivabile e si ha

$$F'(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\partial}{\partial s}h(t,s)dt.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che, dal momento che il prodotto di due funzioni integrabili e limitate è a sua volta integrabile su intervalli chiusi e limitati e che

$$|f(t)h(t,s)| \leq |f(t)|M$$

si ha che $F(s)$ è ben definito $\forall s \in I$.

Sia pertanto $\delta > 0$ scelto in modo che

$$\int_{|x|>\delta} |f(t)|dt < \varepsilon$$

si ha

$$|F(s) - F(s_0)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[h(t,s) - h(t,s_0)]dt\right| \leq$$
$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(t)||h(t,s) - h(t,s_0)|dt + 2M\int_{|x|>\delta} |f(t)|dt \leq$$
$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(t)||h(t,s) - h(t,s_0)|dt + 2M\varepsilon$$

Dal momento che h è uniformemente continua su $[-\delta,\delta]\times[s_0-\sigma, s_0+\sigma]$, si ottiene allora che

$$|F(s)-F(s_0)| \le \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt + 2M\varepsilon$$

non appena si sia scelto s convenientemente vicino ad s_0, e la tesi.

La seconda parte dell'enunciato si prova analogamente non appena si ricordi anche il teorema 26.34. □

Lemma 2.5 - *scambio dell'ordine di integrazione - Sia* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *assolutamente integrabile su* $\mathbb{R}$ *e sia* $h : \mathbb{R}\times[0,\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua e limitata. Allora*

$$\int_0^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t,s)\ dtds = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\alpha} f(t)h(t,s)dsdt.$$

Dimostrazione. Dal momento che il prodotto di funzioni integrabili è integrabile, f(t)h(t,s) è integrabile su ogni insiemedel tipo $[a,b]\times[0,\alpha]$ e pertanto si ha

$$\int_a^b\int_0^{\alpha} f(t)h(t,s)dsdt = \int_0^{\alpha}\int_a^b f(t)h(t,s)dtds$$

non appena si tenga conto che il primo integrale iterato esiste per il teorema 26.33, il secondo esiste per il lemma 27.4.

Passando al limite per $a,b\to+\infty$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\alpha} f(t)h(t,s)dsdt = \\ = \lim_{a,b\to+\infty}\int_a^b\int_0^{\alpha} f(t)h(t,s)dsdt = \\ = \lim_{a,b\to+\infty}\int_0^{\alpha}\int_a^b f(t)h(t,s)dtds$$

D'altro canto si ha

$$\lim_{a,b\to+\infty}\int_0^{\alpha}\int_a^b f(t)h(t,s)dtds = \\ = \int_0^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t,s)dtds$$

l'integrale iterato a secondo membro essendo definito in virtù del lemma 27.4 ; infatti

$$\left|\int_0^{\alpha}\int_a^b f(t)h(t,s)dtds - \int_0^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t,s)dtds\right| = \\ = \left|\int_0^{\alpha}\int_{t<a,t>b} f(t)h(t,s)dtds\right| \le \\ \le M\int_0^{\alpha}\int_{t<a,t>b} |f(t)|dtds \le \alpha M\varepsilon$$

se a e b sono scelti sufficientemente grandi, per l'assoluta convergenza di f. $\square$

Teorema 2.1 - *integrale di Fourier - Sia* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *assoluta- mente integrabile su* $\mathbb{R}$*. Sia* $x \in \mathbb{R}$ *un punto in cui*

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x+s) - f(x+)}{s} \right| ds \quad e \quad \int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(x+s) - f(x-)}{s} \right| ds$$

esistono finiti per $\delta > 0$*.*

Allora

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt d\omega.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+s) \frac{\sin(\alpha s)}{s} ds = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+s) \frac{\sin(\alpha s)}{s} ds = \\ = \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{0} + \int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty} \right) f(x+s) \frac{\sin(\alpha s)}{s} ds.$$

Il primo e l'ultimo integrale tendono a 0, quando $\alpha \to +\infty$, per il lemma di 27.2; inoltre si ha, per il lemma 27.3

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^\delta f(x+s) \frac{\sin(\alpha s)}{s} ds = \pi \frac{f(x+)}{2}$$

e

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\delta}^0 f(x+s) \frac{\sin(\alpha s)}{s} ds = \pi \frac{f(x-)}{2}.$$

Ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+s) \frac{\sin(\alpha s)}{s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin a(t-x)}{t-x} dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_0^\alpha \cos \omega(t-x) d\omega dt = \\ = \int_0^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt d\omega$$

la prima uguaglianza essendo dovuta ad un cambio di variabile, la seconda a note formule di integrazione elementari, e la terza al lemma 27.5 .

Si può perciò concludere che

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dtd\omega = \\ = \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dtd\omega = \\ = \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+s)\frac{\sin(\alpha s)}{s}ds = \\ = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\end{aligned}$$

□

Il teorema 27.6 si può porre in forma esponenziale usando semplici considerazioni.

Teorema 2.2 *Sia* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *soddisfacente le ipotesi del teorema 27.6. Allora*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega(t-x)}dtd\omega.$$

Dimostrazione. Per il teorema 27.6 si ha, dal momento che

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt$$

è una funzione pari,

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dtd\omega$$

mentre, dal momento che

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega(t-x)dt$$

è una funzione dispari

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)isin\omega(t-x)dtd\omega.$$

Sottraendo membro a membro si ha la tesi. ■

Osserviamo esplicitamente che l'integrale esterno è da intendersi nel senso della parte principale, ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}.$$

□

Definizione 2.1 *Sia* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *una funzione assolutamente integrabile; chiamiamo trasformata di Fourier di* f *la funzione* $\mathcal{F}(f)$ *definita in* $\mathbb{R}$ *da*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Osserviamo che

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

e poiché $|f|$ è integrabile, è lecito affermare l'esistenza dei tre integrali.

Osserviamo esplicitamente che l'integrale esterno è da intendersi nel senso della parte principale, (o del valore principale) , ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}.$$

Definizione 2.2 *Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che g ammette antitrasformata di Fourier se esiste*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. In tal caso chiamiamo $\mathcal{F}^{-1}(g)(t)$ tale limite e $\mathcal{F}^{-1}(g)$ antitrasformata di Fourier di g.

Si può più brevemente scrivere

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

intendendo il secondo integrale convergente nel senso della parte principale.

Procediamo ora ad elencare alcune semplici proprietà delle trasformate di Fourier.

Osserviamo innanzi tutto che il teorema 27.7 può scriversi come

Teorema 2.3 *Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente le ipotesi del teorema 27.6 ; se inoltre f è continua in t si ha*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(t).$$

Teorema 2.4 *- Siano f,g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni assolutamente integrabili, allora*

1. $$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g) \quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R};$$

2. *se $\phi(t) = f(\alpha t)$, $\alpha \neq 0$, si ha*

$$\mathcal{F}(\phi)(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right);$$

3. *se $\phi(t) = f(t - t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, si ha*

$$\mathcal{F}(\phi)(\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}(f)(\omega);$$

4. *se* $\phi(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$, *si ha*

$$\mathcal{F}(\phi)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - \omega_0).$$

Se inoltre f *è derivabile e se* f' *è assolutamente integrabile su* $\mathbb{R}$*, allora*

5. $$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega);$$

6. *sia* $\phi_n(t) = t^n f(t)$*; se* ϕ *è assolutamente integrabile si ha*

$$(-i)^n \mathcal{F}(\phi_n)(\omega) = \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}(f)(\omega);$$

7. *se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)| dt < HM^n n!$$

allora

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n m_n \omega^n}{n!} \qquad per\ |\omega| < 1/M$$

dove

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt$$

è il momento di ordine n *di* f.

Se la maggiorazione vale senza n!, lo sviluppo in serie è valido per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. 1) è ovvia per la linearità dell'integrale.

Proviamo 2). Si ha per $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}(\phi)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{\alpha}t} dt =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

e si può concludere, osservato che se $\alpha < 0$ l'integrale a destra risulta esteso a $(+\infty, -\infty)$.

3) Si ha

$$\mathcal{F}(\phi)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega(t+t_0)} dt$$
$$= e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}(f)(\omega).$$

4) Si ha

$$\mathcal{F}(\phi)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt =$$
$$= \mathcal{F}(f)(\omega - \omega_0)$$

5) Si ha

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt =$$

$$= f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Ora, dal momento che f' è integrabile su $\mathbb{R}$, in quanto è ivi assolutamente integrabile, si ha che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

esiste finito, e pertanto deve essere

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Ne viene che

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$

6) Non appena si ricordi il lemma 27.4. Si ha

$$\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)e^{-i\omega t}dt.$$

7) Da 6) si ha

$$\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}(f)(0) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt = (-i)^n m_n.$$

La tesi segue allora dal teorema 21.2.

□

Definizione 2.3 *Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assolutamente integrabili, g limitata; definiamo prodotto di convoluzione di f per g la funzione, che indicheremo con $f * g$, definita da*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds.$$

Osserviamo subito che si ha

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du = (g * f)(t).$$

Vogliamo ora provare che $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ essendo il prodotto a secondo membro il normale prodotto di funzioni.

Teorema 2.5 *Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni assolutamente integrabili, g continua e limitata, allora*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dtds = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)e^{-i\omega t}dt\right)ds$$

esiste in quanto f è assolutamente integrabile e, posto

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)e^{-i\omega t}dt,$$

G risulta continua per il lemma 27.4 e si ha

$$|G(s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-s)|dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt = M.$$

Proviamo ora che

$$\lim_{a,b\to+\infty}\int_{a}^{b}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dsdt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dtds$$

Si ha infatti per il lemma 27.5

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dtds - \int_{a}^{b}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dsdt\right| = \\ = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t<a,t>b} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dtds\right| \leq \\ \leq \int_{|s|\geq c}|f(s)|\left(\int_{t<a,t>b}|g(t-s)e^{-i\omega t}|dt\right)ds + \\ + \left|\int_{-c}^{c} f(s)\left(\int_{t<a,t>b} g(t-s)e^{-i\omega t}dt\right)ds\right| \leq$$

pur di scegliere c sufficientemente grande

$$\leq M\varepsilon + \int_{-b}^{b}|f(s)|\int_{u<a+c,u>b-c}|g(u)e^{-i\omega(u+s)}|duds \leq \\ \leq M\varepsilon + \left(\int_{-b}^{b}|f(s)|ds\right)\left(\int_{u<a+c,u>b-c}|g(u)|du\right) \leq \\ \leq M\varepsilon + K\varepsilon$$

pur di scegliere anche a e b sufficientemente grandi.

Pertanto, usando la (27.1),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds\right)e^{-i\omega t}dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dsdt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-i\omega t}dtds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)e^{-i\omega t}dt\right)ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega(t+s)}dt\right)ds = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt\right).\end{aligned}$$

□

Il teorema 27.11.5) permette di esprimere la trasformata di Fourier di f' mediante la trasformata di Fourier di f, non appena sia f che f' siano assolutamente integrabili. Il risultato è molto utile e spesso viene usato anche quando non ha più senso nell'ambito fin qui considerato.

Per giustificare l'uso esteso occorre fare riferimento alla nozione di integrale di Riemann-Stieltjes che viene introdotto e studiato in appendice 1.

Osserviamo innanzi tutto che se $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ si ha

$$\int_a^x df(t) = \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)\ \forall x \in [a,b]$$

e che, grazie alla nozione di integrale di Riemann-Stieltjes, si può asserire che

$$f(x) = f(a) + \int_a^x df(t)$$

ogniqualvolta f è una funzione continua o di variazione limitata.

Ricordando pertanto che, se f' è assolutamente integrabile, si ha

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}df(t)$$

si può pensare di definire una nuova operazione di trasformazione che chiameremo di Fourier-Stieltjes nella seguente maniera.

Definizione 2.4 *Sia f una funzione crescente limitata su $\mathbb{R}$, chiamiamo trasformata di Fourier-Stieltjes di f la funzione $\mathcal{S}(f)$ definita da*

$$\mathcal{S}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}df(t).$$

Osserviamo che $\mathcal{S}(f)(\omega)$ è ben definito per $\omega \in \mathbb{R}$ in quanto $|e^{-i\omega t}| = 1 \forall \omega \in \mathbb{R}$.

Si può analogamente definire $\mathcal{S}(f)$ qualora f sia decrescente e limitata, e quindi anche nel caso in cui f sia la differenza di funzioni crescenti limitate (sia cioè di variazione limitata su $\mathbb{R}$).

Usando le proprietà degli integrali di Riemann-Stieltjes si può provare che

Teorema 2.6 - *Siano f,g due funzioni di variazione limitata su $\mathbb{R}$, allora*

1. $$\mathcal{S}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{S}(f) + \beta \mathcal{S}(g) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,;$$

2. *se* $\phi(t) = f(\alpha t)$, $\alpha \neq 0$,
$$\mathcal{S}(\phi)(\omega) = sgn(\alpha) \mathcal{S}(f) \left(\frac{\omega}{\alpha}\right) ;$$

3. *se* $\phi(t) = f(t - t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{S}(\phi)(\omega) = e^{-i\omega t_0} \mathcal{S}(f)(\omega);$$

4. *se* $\phi(t) = e^{-i\omega_0 t} f(t)$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{S}(\phi)(\omega) = \mathcal{S}(f)(\omega - \omega_0);$$

5. *se* f *è assolutamente integrabile su* $\mathbb{R}$ *allora*
$$\mathcal{S}(f)(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega);$$

6. *se* t^n *è assolutamente integrabile rispetto ad* f *su* $\mathbb{R}$ *allora*
$$\frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{S}(f)(\omega) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-i\omega t} df(t);$$

7. *se*
$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} t^n df(t) \right| \leq HM^n n!$$
allora
$$\mathcal{S}(f)(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n m_n}{n!} \omega^n \quad per \ |\omega| < 1/M$$
dove
$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n df(t)$$
è il momento di ordine n di Riemann-Stieltjes della funzione f.

   Qualora la maggiorazione sia vera senza n! lo sviluppo in serie vale $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 27.11 ove si usino i teoremi di integrazione per sostituzione, per parti, derivazione sotto il segno di integrale, dati in appendice per gli integrali di Riemann-Stieltjes.

La trasformata di Fourier-Stieltjes è spesso usata quando si trattano argomenti di teoria di probabilità; ricollegandoci a quanto abbiamo detto in precedenza, osserviamo che la 5) del teorema 27.15 è la relazione che consente di estendere la 5) del teorema 27.11 anche al caso delle funzioni non derivabili.

Allo scopo di consentire una rapida valutazione della possibilità di applicazioni delle 6) e 7) nel teorema 27.15, osserviamo che

$$\int_0^{+\infty} t^n df(t) = \lim_{\delta\to+\infty} \int_0^{\delta} t^n df(t) =$$
$$= \lim_{\delta\to+\infty} \delta^n f(\delta) - \int_0^{\delta} f(t) dt^n =$$
$$= \lim_{\delta\to+\infty} \delta^n f(\delta) - \int_0^{\delta} n t^{n-1} f(t) dt$$

esiste finito se f è infinitesima per $t \to +\infty$ di ordine $n+\alpha$ con $\alpha > 0$.

Le maggiorazioni del punto 7) sono caratteristiche delle funzioni che tendono a zero per $t \to +\infty$ con ordine esponenziale.

2.2 *Il teorema del campionamento di Shannon*

Consideriamo una funzione f che non abbia componenti di frequenza maggiore di ω_0, cioè supponiamo che

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = 0 \qquad \text{per} \qquad |\omega| > \omega_0$$

Possiamo allora sviluppare F in serie di Fourier ed ottenere che, se definiamo F_p il prolungamento di F per periodicità,

$$F_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\imath k \frac{\pi}{\omega_0}\omega}$$

con

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\omega) e^{\imath k \frac{\pi}{\omega_0}\omega}.$$

(Osserviamo che i segni negli esponenziali che compaiono nella serie e nella definizione dei coefficienti hanno segno opposto a quello solitamente usato; ciò non cambia la sostanza in quanto la serie è estesa a tutti gli interi)

Se adesso chiamiamo

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

possiamo scrivere che

$$F(\omega) = F_p(\omega) H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k H(\omega) e^{-\imath k \frac{\pi}{\omega_0}\omega}$$

ed, antitrasformando,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}c_k H(\omega)e^{-\imath k\frac{\pi}{\omega_0}\omega}e^{\imath\omega t}d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-\imath\omega(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)}d\omega$$

Pertanto

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}c_k\left(\frac{e^{\imath\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)}-e^{-\imath\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)}}{\imath(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)}\right) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}c_k\frac{\sin(\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0}-t))}{(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)} =$$

Dalla definizione di $\hat{f}$ si ricava che

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega$$

e quindi

$$\hat{f}\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}F(\omega)e^{\imath k\frac{\pi}{\omega_0}\omega}d\omega = c_k\frac{\omega_0}{\pi}$$
$$c_k = \frac{k\pi}{\omega_0}$$

e ne concludiamo che

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_0}{\pi}c_k\frac{\sin(\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0}-t))}{\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right)\frac{\sin(\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0}-t))}{\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)}$$

3. La trasformata di Laplace

Sia $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti che supponiamo prolungata a 0 sui reali negativi; definiamo

$$\tilde{f}(\sigma + i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt$$

ovvero, se $\xi = \sigma + i\omega$,

$$\tilde{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\xi t}dt$$

per quei valori di $\xi \in \mathbb{C}$ per cui l'integrale risulta convergente.

Allo scopo di chiarire la struttura del campo di definizione di $\tilde{f}$ si può dimostrare che: sea $\tilde{f}(\xi_0)$ esiste; allora $\tilde{f}(\xi)$ risulta definita anche per Re $\xi > \sigma_0$.

Osserviamo che, se definiamo

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t}, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

si vede subito che

$$\tilde{f}(\sigma + i\omega) = \widehat{f_\sigma}(\omega)$$

Diremo nel seguito che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è nella classe $\mathcal{L}$ se

- $f(t) = 0$ per $t < 0$
- f è continua a tratti
- $|f(t)| \leq He^{\sigma_0 t}$ con $H, \sigma_0 > 0$.

Si può vedere che se $f \in \mathcal{L}$ allora $\tilde{f}$ è definita almeno nel semipiano $\Re\xi > \sigma_0$.

Elenchiamo di seguito alcune proprietà della trasformata di Laplace

Siano $f, g \in \mathcal{L}$ e supponiamo che $\tilde{f}$ ed $\tilde{g}$ siano definite nei semipiani $\Re\xi > \sigma_0$ e $\Re\xi > \sigma_1$ rispettivamente.

Allora

- $$(\alpha \widetilde{f + \beta} g)(\xi) = (\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g})(\xi)$$

  se $\Re\xi > max\{\sigma_0, \sigma_1\}$

- se $\phi(t) = f(\alpha t)$, $\alpha > 0$

$$\tilde{\phi}(\xi) = \frac{1}{\alpha}\tilde{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \quad , \quad Re\xi > \alpha\sigma_0$$

- se $\phi(t) = f(t - t_0)$, $t_0 > 0$

$$\tilde{\phi}(\xi) = e^{-\xi t_0}\tilde{f}(\xi) \quad , \ \Re\xi > \sigma_0$$

- se $\phi(t) = e^{\xi_0 t}$f(t) , $\xi_0 \in$ C

$$\tilde{\phi}(\xi) = \tilde{f}(\xi - \xi_0) \quad , \quad Re\xi > \sigma_0 + Re\xi_0$$

- se f è derivabile, se f' è continua a tratti

$$\widetilde{f'}(\xi) = \xi\tilde{f}(\xi) - f(0) \quad , \quad Re\xi > \sigma_0$$

- se $\phi(t) = \int_0^t f(s)ds$

$$\tilde{\phi})(\xi) = \frac{1}{\xi}\tilde{f}(\xi) \quad Re\xi > \sigma_0.$$

- se $\phi(t) = tf(t)$ si ha $\phi \in \mathcal{L}$ e si può affermare che

$$\frac{d}{d\xi}\tilde{f}(\xi) = -\tilde{\phi}(\xi).$$

- se
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$
allora si ha
$$\widetilde{f * g} = \tilde{f}\tilde{g}$$
nell'intersezione dei rispettivi semipiani di definizione

È anche possibile dimostrare un teorema di inversione per le trasformate di Laplace.

Se $x \in \mathbb{R}_+$ è tale che

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+s) - f(x+)}{s}\right| ds \quad e \quad \int_{-\delta}^0 \left|\frac{f(x+s) - f(x-)}{s}\right| ds$$

esistano finiti per $\delta > 0$.

Allora si ha

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)(t-x)}dtd\omega \quad , \ \forall\sigma > \sigma_0$$

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x+)+f(x-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+i\omega)x}\left(\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt\right)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+i\omega)x}\tilde{f}(\sigma+i\omega)d\omega = \\ &= \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{(\sigma+i\omega)x}\tilde{f}(\sigma+i\omega)d\omega\end{aligned}$$

operando il cambio di variabile $s = \sigma + i\omega$ si ottiene

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ia}^{\sigma+ia} e^{sx}\tilde{f}(s)ds$$

e ciò si esprime scrivendo

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\tilde{f}(s)ds.$$

Quest'ultima formula è nota come formula di inversione di Mellin e la funzione a secondo membro si chiama antitrasformata di Laplace.