1. Potenze ad Esponente Intero

Definizione 1.1 *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; definiamo*

- $a^0 = 1$
- $a^n = a^{n-1}a \qquad \forall n \geq 1$

Teorema 1.1 *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; si ha che:*

- $a^n \geq 0 \ \forall n \geq 0$
- *Se $a \leq 1$, allora $a^n \geq 1 \ \forall n \geq 0$*
- *La funzione $a \mapsto a^n$ è crescente strettamente $\forall n \geq 1$*
- *La funzione $a \mapsto a^n$ è continua $\forall n \geq 0$*
- $\lim\limits_{a \to 0} a^n = 0 \ \forall n \geq 1$
- $\lim\limits_{a \to +\infty} a^n = +\infty \ \forall n \geq 1$

- $a^n \geq 0 \ \forall n \geq 0$
- Se $a \leq 1$, allora $a^n \geq 1 \ \forall n \geq 0$
- La funzione $a \mapsto a^n$ è crescente strettamente $\forall n \geq 1$
- La funzione $a \mapsto a^n$ è continua $\forall n \geq 0$
- $\lim\limits_{a \to 0} a^n = 0 \ \forall n \geq 1$
- $\lim\limits_{a \to +\infty} a^n = +\infty \ \forall n \geq 1$

- $a^n \geq 0 \ \forall n \geq 0$
- Se $a \leq 1$, allora $a^n \geq 1 \ \forall n \geq 0$
- La funzione $a \mapsto a^n$ è crescente strettamente $\forall n \geq 1$
- La funzione $a \mapsto a^n$ è continua $\forall n \geq 0$
- $\lim\limits_{a \to 0} a^n = 0 \ \forall n \geq 1$
- $\lim\limits_{a \to +\infty} a^n = +\infty \ \forall n \geq 1$

DIMOSTRAZIONE.
Si procede per induzione.
Ciascuna delle affermazioni è vera per $n = 1$ ed inoltre se è vera per n allora è vera anche per $n + 1$

□

Teorema 1.2 *Valgono le seguenti proprietà*

- $a^{n+m} = a^n a^m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$
- $(a^n)^m = a^{nm} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$
- $(ab)^n = a^n b^n$

DIMOSTRAZIONE. Si procede per induzione.

- Per definizione
$$a^{n+1} = a^n a$$
inoltre se $a^{n+m} = a^n a^m$ allora
$$a^{n+(m+1)} = a^{n+m+1} = a^{n+m}a = a^n a^m a = a^n a^{m+1}$$

- Si ha, dalle definizioni,

$$(a^n)^1 = a^n = (a^1)^n$$

inoltre se $(a^n)^m = a^{nm}$ allora

$$(a^n)^{m+1} = (a^n)^m a^n = a^{mn} a^n = a^{mn+n} = a^{(m+1)n}$$

- Per definizione

$$(ab)^1 = ab$$

inoltre se $(ab)^n = a^n b^n$ allora

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n (ab) = a^n b^n ab = a^{n+1} b^{n+1}$$

□

Lemma 1.1 *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; si ha*

$$\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \forall n \geq 0$$

Dimostrazione. Per $n = 0$ e per $n = 1$ si ha

$$\frac{1}{a^0} = \frac{1}{1} = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)^0$$

e

$$\frac{1}{a^1} = \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^1$$

Inoltre, se

$$\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

allora

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \left(\frac{1}{a}\right)$$

e

$$a^{n+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = a^{n+1} \left(\frac{1}{a}\right)^n \left(\frac{1}{a}\right) = a^n a \frac{1}{a^n} \frac{1}{a} = 1$$

□

Pertanto è lecito definire

Definizione 1.2 *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; definiamo*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \forall n \geq 1$$

Teorema 1.3 *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; si ha che:*

- $a^{-n} \geq 0 \; \forall n \geq 0$
- *Se* $a \leq 1$, *allora* $a^{-n} \leq 1 \; \forall n \geq 0$
- *La funzione* $a \mapsto a^{-n}$ *è decrescente strettamente* $\forall n \geq 1$
- *La funzione* $a \mapsto a^{-n}$ *è continua* $\forall n \geq 0$
- $\lim_{a \to 0} a^{-n} = +\infty \; \forall n \geq 1$
- $\lim_{a \to +\infty} a^{-n} = 0 \; \forall n \geq 1$

Teorema 1.4 *Valgono le seguenti proprietà*

- $a^{n+m} = a^n a^m \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$
- $(a^n)^m = a^{nm} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$
- $(ab)^n = a^n b^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Occorre dimostrare le uguaglianze nel caso in cui almeno uno tra n ed m è un intero negativo.

Può essere utile ricordare che, poichè

$$\frac{1}{a}\frac{1}{b}ab = 1$$

si ha

$$\frac{1}{a}\frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

Se $-n, -m$ sono interi entrambi negativi si ha

- $a^{-n-m} = \frac{1}{a^{n+m}} = \frac{1}{a^n a^m} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{a^m} = a^{-n}a^{-m}$
- $(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{mn}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{nm}$
- $(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{a^m} = a^{-n}a^{-m}$

Nel caso in cui uno sia positivo , n, ed uno sia negativo, $-m$, possiamo supporre che $n > m > 0$ ed avremo

- $a^n = a^{n-m}a^m$ per cui $a^{n-m} = a^n \frac{1}{a^m} = a^n a^{-m}$
- $(a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-nm}$

$\square$

2. *Potenze ad esponente razionale*

Le proprietà dimostrate consentono di affermare che

Teorema 2.1 *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *,* $a > 0$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, allora la funzione* $a \mapsto a^n$ *è strettamente monotona e surgettiva su* $\mathbb{R}_+$ *e pertanto è invertibile.*

Dimostrazione. La monotonia è già stata dimostrata mentre la surgettività segue dalla continuità e dai limiti agli estremi del campo di definizione, anche questi provati nei precedenti teoremi.

□

È pertanto possibile considerare l'inversa di una potenza ad esponente intero e porre la seguente definizione.:

Definizione 2.1 *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *,* $a > 0$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, definiamo la funzione* $a \mapsto a^{\frac{1}{n}}$ *come l'inversa della funzione* $a \mapsto a^n$ *;*

quindi si ha

$$a = b^{\frac{1}{n}} \iff a^n = b$$

Lemma 2.1 *Sia* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *crescente strettamente .*

Se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

Se

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

. Allora

$$\lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) = 0$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e sia $\delta_\epsilon = f(\epsilon)$

Allora se $y > \delta_\epsilon$ si ha

$$f^{-1}(y) > f^{-1}(\delta_\epsilon) = f^{-1}(f(\epsilon)) = \epsilon$$

Sia $\epsilon > 0$ e sia $\delta_\epsilon = f(\epsilon)$

Allora se $y < \delta_\epsilon$ si ha

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(\delta_\epsilon) = f^{-1}(f(\epsilon)) = \epsilon$$

□

Teorema 2.2 • *La funzione* $a \mapsto a^{\frac{1}{n}}$ *è crescente strettamente* $\forall n \geq 1$

- *La funzione* $a \mapsto a^{-\frac{1}{n}}$ *è decrescente strettamente* $\forall n \geq 1$
- $\lim_{a\to 0} a^{\frac{1}{n}} = 0 \ \forall n \geq 1$
- $\lim_{a\to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = +\infty \ \forall n \geq 1$
- $\lim_{a\to 0} a^{-\frac{1}{n}} = +\infty \ \forall n \geq 1$
- $\lim_{a\to +\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 0 \ \forall n \geq 1$

Teorema 2.3 *Si ha:*

- $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
- $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$
- $a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$

Dimostrazione.

- Sia
$$a^{\frac{1}{n}} = x \quad , \quad b^{\frac{1}{n}} = y$$
per cui
$$a = x^n \quad , \quad b = y^n$$
Avremo
$$ab = x^n x^n = (xy)^n$$
per cui
$$a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = xy = (ab)^{\frac{1}{n}}$$
- per $m = 1$ si ha $\left(a^1\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^1$. Inoltre se
$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$
avremo
$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m+1} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right) = (a^m)^{\frac{1}{n}} \left(a^1\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{m+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

- Sia $a^{\frac{1}{nm}} = x$, avremo $x^{nm} = a$ e
$$a^{\frac{1}{n}} = (x^{nm})^{\frac{1}{n}} = \left((x^m)^n\right)^{\frac{1}{n}} = x^m$$
da cui
$$a^{\frac{1}{nm}} = x = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$$

□

Il secondo punto del precedente teorema giustifica la seguente definizione

Definizione 2.2 *Definiamo*
$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Possiamo dimostrare i seguenti fatti

Teorema 2.4 *Si ha*

- $a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}$
- $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$
- $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$

Dimostrazione.

- $\left(\left((a^m)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$
- Sia $a^{\frac{m}{n}} = x$ e $a^{\frac{p}{q}} = y$, ne segue che $a^m = x^n$ e $a^p = y^q$
Ne viene che
$$a^{mq} = x^{nq} \qquad \text{e} \qquad a^{pn} = y^{nq}$$
da cui
$$(xy)^{nq} = (x)^{nq}(y)^{nq} = a^{mq}a^{np} = a^{mq+np}$$
ed infine
$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = xy = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$
- $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\left((a^m)^{\frac{1}{n}}\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(((a^m)^p)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{n}\frac{1}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{nq}} = a^{\frac{mp}{nq}}$$

□

I risultati riguardo le proprietà delle funzioni composte ci consentono di enunciare il seguente teorema:

Teorema 2.5 *Sia $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.*

- $a^{\frac{m}{n}} \geq 0$

- *La funzione* $a \mapsto a^{\frac{m}{n}}$ *è crescente strettamente se* $m > 0$
- *La funzione* $a \mapsto a^{\frac{m}{n}}$ *è decrescente strettamente se* $m < 0$
- $\lim_{a\to 0} a^{\frac{m}{n}} = 0$ *se* $m > 0$
- $\lim_{a\to +\infty} a^{\frac{m}{n}} = +\infty$ *se* $m > 0$
- $\lim_{a\to 0} a^{\frac{m}{n}} = +\infty$ *se* $m < 0$
- $\lim_{a\to +\infty} a^{\frac{m}{n}} = 0$ *se* $m < 0$

Teorema 2.6 *Se* $a > 1$, *allora la funzione* $\mathbb{Q} \ni s \mapsto a^s$ *è strettamente crescente.*

Se $0 < a < 1$, *allora la funzione* $\mathbb{Q} \ni s \mapsto a^s$*è strettamente decrescente.*

Dimostrazione. Supponiamo $a > 1$, essendo la dimostrazione del tutto analoga per $0 < a < 1$. Sia $s < t$ Dal momento che $a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1)$ basta osservare che $a^s > 0$, e $a^{t-5} > 1$ perchè $t - s \in \mathbb{Q}$.

□

Vale il seguente risultato dovuto a Bernoulli.

Teorema 2.7 *Se* $a > 1$, *allora*

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

$$1 - a^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{a-1}{n}$$

Se $0 < a < 1$ *allora*

$$1 - a^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1-a}{an}$$

$$a^{-\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1-a}{an}$$

Dimostrazione. Sia $a > 1$ e poniamo

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \omega_n$$

si ha

$$a = (1 + \omega_n)^n \geq 1 + n\omega_n$$

e

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \omega_n \leq \frac{a-1}{n}$$

Inoltre

$$1 - a^{-\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{a^{\frac{1}{n}}} \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

Sia $0 < a < 1$, avremo

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{\frac{1}{a} - 1}{n}$$

Pertanto

$$\frac{1-a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1-a}{a\,n}$$

e

$$1-a^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}}\frac{1-a}{a\,n} \leq \frac{1-a}{a\,n}$$

Inoltre

$$1-\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{a}-1}{n}$$

Pertanto

$$\frac{a^{-\frac{1}{n}}-1}{a^{-\frac{1}{n}}} \leq \frac{1-a}{a\,n}$$

e

$$a^{-\frac{1}{n}}-1 \leq a^{\frac{1}{n}}\frac{1-a}{a\,n} \leq \frac{1-a}{a\,n}$$

□

Teorema 2.8 *Sia $a > 1$.*

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_{\epsilon,s} \in \mathbb{N}$ tale che se $r, s \in \mathbb{Q}$, $|r-s| \leq \frac{1}{n_{\epsilon,s}}$ si ha

$$|a^r - a^s| \leq \epsilon$$

Se inoltre $r, s \leq p \in \mathbb{Q}$ possiamo affermare che, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $|r-s| \leq \frac{1}{n_\epsilon}$ si ha

$$|a^r - a^s| \leq a^p \epsilon$$

e si ha l'uniforme continuità dell'esponenziale sui razionali minori di p.

Risultati analoghi valgono se $0 < a < 1$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $r > s$ ed abbiamo che

$$a^r - a^s = a^s(a^{r-s}-1) \leq a^s(a^{\frac{1}{n_\epsilon}}-1) \leq a^s\frac{a-1}{n_\epsilon} \leq \epsilon$$

non appena si scelga $n_\epsilon \geq a^s\frac{a-1}{\epsilon}$.

Inoltre se $r, s \leq p$ avremo $a^s \leq a^p$ e l'uniforme continuità dell'esponenziale in base a su $\{r \in \mathbb{Q} \;,\; r \leq p\}$ □

3. Potenze ad esponente reale

Definizione 3.1 *Sia $a > 0$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ definiamo*

$$A_{<} = \{a^r \; : \; r \in \mathbb{Q} \, , \, r < \alpha\}$$
$$A_{\leq} = \{a^r \; : \; r \in \mathbb{Q} \, , \, r \leq \alpha\}$$
$$A_{\geq} = \{a^r \; : \; r \in \mathbb{Q} \, , \, r \geq \alpha\}$$
$$A_{>} = \{a^r \; : \; r \in \mathbb{Q} \, , \, r > \alpha\}$$

si ha che

$$A_{<} \subset A_{\leq} \quad , \quad A_{>} \subset A_{\geq}$$

Quindi $A_{\leq}$ ed $A_{\geq}$ sono sottoinsiemi separati in R e pertanto esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$a^s \leq \lambda \leq a^r \qquad \forall r, s \in \mathbb{Q} \qquad , \qquad s \leq \alpha \leq r$$

Inoltre, poichè è possibile trovare $r, s \in \mathbb{Q}$, $s \leq \alpha \leq r$, $r - s \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ se ci fossero $\lambda' e \lambda''$ soddisfacenti le condizioni di cui sopra, si avrebbe

$$|\lambda' - \lambda''| \leq a^r - a^s \leq \epsilon \quad , \quad \forall \epsilon > 0$$

Definiamo

$$a^\alpha = \lambda$$

si ha evidentemente che

- *Se $a > 1$*
$$a^\alpha = \sup A_{<} = \sup A_{\leq} = \inf A_{\geq} = \inf A_{>}$$
- *Se $0 < a < 1$*
$$a^\alpha = \inf A_{<} = \inf A_{\leq} = \sup A_{\geq} = \sup A_{>}$$

Teorema 3.1 *Sia $a > 0$ avremo*

$$\frac{1}{a^\alpha} = \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha$$

Dimostrazione. Sia $r_n \to \alpha$

$$\frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\lim a^{r_n}} = \lim \frac{1}{a^{r_n}} = \lim \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha$$

□

Teorema 3.2 *Sia $a > 0$. Allora*

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$$

Dimostrazione. Supponiamo $a > 1.$, essendo la dimostrazione del tutto analoga per $0 < a < 1$.

Per definizione si ha

$$a^\alpha = \sup\{a^r \ : \ r \in \mathbb{Q} \ , \ r < \alpha\}$$

$$a^\beta = \sup\{a^s \ : \ s \in \mathbb{Q} \ , \ r < \beta\}$$

$$a^{\alpha+\beta} = \sup\{a^t \ : \ t \in \mathbb{Q} \ , \ r < \alpha + \beta\}$$

Osserviamo che se $r, s \in \mathbb{Q}$ $r < \alpha$, $s < \beta$ allora $r + s \in \mathbb{Q}$ e $r + s = t < \alpha + \beta$.

Viceversa se $t \in \mathbb{Q}$, $t < \alpha + \beta$ e se scegliamo $s \in \mathbb{Q}$ tale che $t - \alpha < s < \beta$, posto $r = t - s$, avremo che $t - s < \alpha$ e $r + s = t$

□

Teorema 3.3 *Sia $a > 0$ avremo*

$$1 = a^0 = a^{\alpha-\alpha} = a^\alpha a^{-\alpha}$$

per cui

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha} = \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha$$

Teorema 3.4 *Se $a > 1$, allora la funzione $x \mapsto a^x$ è strettamente crescente.*

Se $0 < a < 1$, allora la funzione $x \mapsto a^x$ è strettamente decrescente.

Dimostrazione. Supponiamo $a > 1$, essendo la dimostrazione del tutto analoga per $0 < a < 1$. Sia $y > x$ Dal momento che $a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1)$ basta osservare che $a^x > 1$, per ogni $x > 0$ in quanto $a^r > 1$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$

□

Teorema 3.5 *sia $a > 0$, allora*

$$\lim_{h \to 0} a^h - 1 = 0$$

Ne segue che la funzione $x \mapsto a^x$ è continua.

Dimostrazione. Supponiamo, per semplicità, $a > 1$.
Sia $\epsilon > 0$ e sia $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$; sia inoltre $\delta_\epsilon < \frac{1}{n_\epsilon}$.
Se $|h| < \delta_\epsilon$ allora

$$a^{|h|} - 1 \leq a^{\frac{1}{n_\epsilon}} - 1 \leq \frac{a-1}{n_\epsilon} \leq \epsilon(a-1)$$

Pertanto se $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $(x > x_0)$ si ha

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$$

e ne segue la continuita; di $x \mapsto a^x$.

$\square$

Teorema 3.6 *Sia $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Sia r_n una successione, $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to \alpha$, $r_n < \alpha$ Allora*

$$a^\alpha = \begin{cases} \sup a^{r_n} & a > 1 \\ \inf a^{r_n} & 0 < a < 1 \end{cases} = \lim a^{r_n}$$

Dimostrazione. Supponiamo $a > 1$, essendo la dimostrazione del tutto analoga per $0 < a < 1$.
Dal momento che

$$a^\alpha = \sup A_<$$

possiamo affermare che $a^\alpha \geq a^{r_n}$ per ogni r_n ed inoltre , fissato $\epsilon > 0$ possiamo trovare $p_\epsilon \in \mathbb{Q}$, $p_\epsilon < \alpha$ tale che

$$a^\alpha - \epsilon < a^{p_\epsilon} < a^\alpha$$

Dal momento che $r_n \to \alpha$, $r_n < \alpha$ possiamo trovare n_ϵ tale che $p_\epsilon < r_{n_\epsilon} < \alpha$ per cui

$$a^\alpha = \sup a^{r_n}$$

Inoltre

$$a^\alpha - a^{r_n} = a^\alpha(1 - a^{r_n - \alpha}) \to 0$$

in quanto $r_n \to \alpha$

$\square$

Teorema 3.7 *Sia $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; allora*

$$a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha$$

Dimostrazione. Siano $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to \alpha$; $r_n \leq \alpha$; allora

$$a^{r_n} \to a^\alpha \quad , \quad b^{r_n} \to b^\alpha \quad , \quad (ab)^{r_n} \to (ab)^\alpha$$

Ma, essendo $r_n \in \mathbb{Q}$
$$a^{r_n} b^{r_n} = (ab)^{r_n}$$
e
$$a^{\alpha} b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}$$

$\square$

Teorema 3.8 *Sia $a > 0$ e siano $\alpha \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$ allora*

- $(a^{\alpha})^n = a^{n\alpha}$
- $a^{\frac{\alpha}{n}} = (a^{\alpha})^{\frac{1}{n}}$

  e quindi

$$(a^{\alpha})^{\frac{n}{m}} = (a^{\alpha})^{\frac{1}{m}n} = (a^{\frac{\alpha}{m}})^n = a^{\alpha\frac{n}{m}}$$

Dimostrazione.

- Si ha $(a^{\alpha})^1 = a^{\alpha \cdot 1}$.

  Inoltre se $(a^{\alpha})^n = a^{n\alpha}$ si ha

$$(a^{\alpha})^{n+1} = (a^{\alpha})^n a^{\alpha} = a^{n\alpha} a^{\alpha} = a^{\alpha(n+1)}$$

- Si ha, per il precedente punto,

$$(a^{\frac{\alpha}{n}})^n = a^{\frac{\alpha}{n}n} = a^{\alpha}$$

da cui
$$a^{\frac{\alpha}{n}} = (a^{\alpha})^{\frac{1}{n}}$$

$\square$

Teorema 3.9 *Sia $a > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; allora*

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$$

Dimostrazione. Possiamo sempre ricondurci al caso in cui $\alpha, \beta > 0$. Infatti qualora fosse ,ad esempio, $\alpha < 0$ possiamo osservare che

$$a^{\alpha} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}$$

Sia $s_n \in \mathbb{Q}$, $t_n \to \beta$, $s_n \leq \beta$.
Allora

$$(a^{\alpha})^{\beta} = \lim (a^{\alpha})^{s_n} = \lim a^{\alpha s_n} = a^{\alpha\beta}$$

$\square$

Teorema 3.10 *Sia $a > 0$. Allora la funzione $x \mapsto x^a$ è continua e strettamente crescente per $x > 0$*

Dimostrazione. Siano $x, y > 0$ avremo

$$y^a - x^a = x^a(\frac{y^a}{x^a} - 1)$$

pertanto sarà sufficiente dimostrare che

$$x^a \to 1 \qquad \text{se} \qquad x \to 1$$

Per defnizione possiamo trovare $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x^a - x^r < \epsilon$ per cui dal momento che la funzione $x \mapsto x^r$ è continua, se $|x - 1|$ e' sufficientemente piccolo si ha

$$|x^a - 1| \leq |x^a - x^r| + |x^r - 1| < 2\epsilon$$

Inoltre se $y > x > 1$ avremo $y/x > 1$ e

$$y^a - x^a = x^a(\frac{y^a}{x^a} - 1) > 0$$

□

Possiamo ora studiare le proprietà di una successione di notevole importanza.

Sia E_n la successione definita da

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

si ha che E_n è una successione strettamente crescente ed inoltre

$$2 \leq E_n < 3$$

.

Infatti si ha

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

per cui

$$E_n \geq 1 + n(1/n) = 2$$

Per dimostrare che E_n è crescente osserviamo che si ha

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = E_{n-1}$$

se e solo se

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

se e solo se

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

se e solo se

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

e l'ultima disuguaglianza si deduce immediatamente dal lemma **??**.

Infine, dal momento che si può facilmente provare per induzione che

$$(k+1)! \geq 2^k \quad per\ k \geq 0$$

si ha

$$E_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} < 3 \tag{3.1}$$

Pertanto E_n è una successione crescente e limitata per cui possiamo affermare che

$$\lim_n \ E_n$$

esiste ed è reale e pertanto è lecito definire chiamare e il suo limite.

$$e = \lim_n \ E_n$$

Se x_n è una successione a termini positivi, $x_n \longrightarrow x$ si può provare (si veda il capitolo successivo sulla continuità) che

$$\lim \log_a x_n = \log_a x$$

e pertanto si ha

$$\lim n \log_a \left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_a e$$

Osserviamo anche che

$$\log_a e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = e$$

per cui si è naturalmente indotti a privilegiare il numero e come base per i logaritmi.

Si ha con 51 cifre decimali esatte

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959$$

Definizione 3.2 *Definiamo funzione esponenziale la funzione*

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

mediante la

$$exp(x) = e^x$$

Per quanto già visto $exp(\cdot)$ è una funzione invertibile e
Definiamo logaritmo naturale la funzione

$$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

inversa dell'esponenziale.

Ovviamente la funzione esponenziale e la funzione logaritmo naturale sono continue ovunque.

Dal momento che

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

si ha

$$1 + \frac{1}{E(x)+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{E(x)}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{E(x)+1}\right)^{E(x)} \leq \left(1 + \frac{1}{E(x)+1}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1 + \frac{1}{E(x)}\right)^{x} \leq \left(1 + \frac{1}{E(x)}\right)^{E(x)+1}$$

Pertanto, poichè

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

possiamo concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

ed anche

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

D'altro canto

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = e \qquad \text{ed anche } \lim_{x\to 0^+} (1-x)^{\frac{1}{-x}} = \lim_{x\to 0^-} (1x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln(e) = 1$$

Inoltre, sostituendo $y = e^x - 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \Im\mathrm{m}_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

e

$$(e^x)' = e^x$$

Inoltre

$$(\ln(y))' = \frac{1}{exp'(\ln(y))} = \frac{1}{y}$$

Teorema 3.11 *Sia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescente strettamente .*

Se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

Se

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

. Allora

$$\lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) = 0$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e sia $\delta_\epsilon = f(\epsilon)$
Allora se $y > \delta_\epsilon$ si ha

$$f^{-1}(y) > f^{-1}(\delta_\epsilon) = f^{-1}(f(\epsilon)) = \epsilon$$

Sia $\epsilon > 0$ e sia $\delta_\epsilon = f(\epsilon)$
Allora se $y < \delta_\epsilon$ si ha

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(\delta_\epsilon) = f^{-1}(f(\epsilon)) = \epsilon$$

□

Per la continuità della funzione potenza si ha , per $x > 0$,

$$e^x = \left(\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{x^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} \le \\ &\le \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \le 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{2^k} = 1 + x\frac{1-(x/2)^n}{1-x/2} \le \\ &\le 1 + \frac{x}{1-x/2} 1 + \frac{2x}{2-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2-x} \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Ne segue che

$$e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq 1 + x + \frac{x^2}{2 - x} \tag{3.3}$$