0.1 Le coniche

Si definisce cono una superficie nello spazio generata dalla rotazione di una retta, detta generatrice, attorno ad una seconda retta ad essa incidente, detta asse.

Qualora sia necessario trattare analiticamente un cono possiamo considerare un sistema di riferimento in cui l'asse del cono coincida con uno degli assi, ad esempio l'asse z, del sistema di riferimento e il punto di incidenza coincida con l'origine del sistema.

In queste condizioni, nel piano $y = 0$, l'equazione della retta generatrice del cono è $z = p\rho$ e la superficie ottenuta facendo ruotare tale retta è caratterizzata dal fatto che

$$z = p\sqrt{x^2 + y^2}$$

Infatti ogni punto della retta generatrice ha, nello spazio, coordinate $(\rho, 0, z)$, con $z = p\rho$; ruotando,la quota si mantiene costante per i punti del piano (x, y) che hanno la stessa distanza dall'asse z di $(\rho, 0)$; questi punti sono, nel piano xy sulla circonferenza di raggio

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ad essi corrisponde quindi una quota z tale che

$$z^2 = p^2\rho^2 = p^2(x^2 + y^2)$$

Ne segue che i punti dello spazio che appartengono al cono sono identificati dall'uguaglianza precedente. Ovviamente il cono avra' due falde: la prima, nel semispazio $z \geq 0$, di equazione

$$z = p\rho = p\sqrt{x^2 + y^2}$$

e la seconda, nel semispazio $z \leq 0$, di equazione

$$z = -p\rho = -p\sqrt{x^2 + y^2}$$

Consideriamo ora un piano; a meno di scegliere opportunamente il sistema di riferimento nel piano xy possiamo supporre che il piano sia individuato da una delle seguenti equazioni.

- $y = a$
- $z = ay + b$

Nel primo caso quindi, i punti comuni a cono e piano sono definiti dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = a \\ z^2 = p^2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y = a \\ z^2 = p^2(x^2 + a^2) \end{cases}$$

a equazione dell'ultimo sistema non contiene la variabi-
to rappresenta un cilindro con asse parallelo all'asse x
finisce quindi una curva nel piano $y = a$ che possiamo
piano xz ottenendo il luogo dei punti del piano tali che
$a^2)$.
ente esistono punti che soddisfano l'equazione per ogni
si ottiene una coppia di rette nel piano $y = 0$ di equazioni

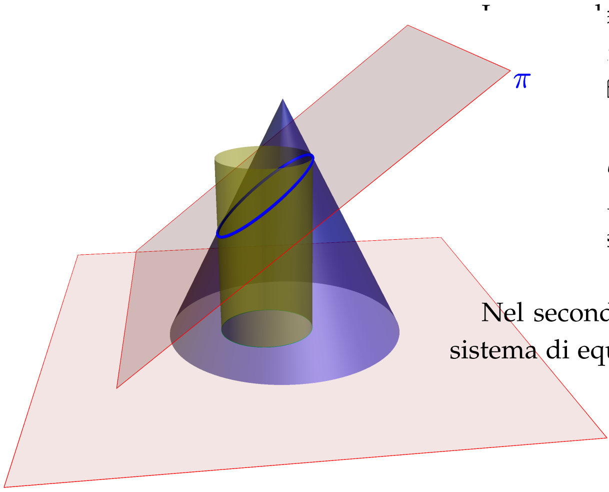


Figura 1:

Nel secondo caso, i punti comuni a cono e piano sono definiti dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} z = ay + b \\ z^2 = p^2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} z = ay + b \\ (ay + b)^2 = p^2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} z = ay + b \\ a^2y^2 + b^2 + 2aby = p^2x^2 + py^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = ay + b \\ p^2x^2 - b^2 + (p^2 - a^2)y^2 - 2aby = 0 \end{cases}$$

Risulta pertanto che l'intersezione tra cono e piano coincide con l'intersezione tra il piano ed un cilindro la cui generatrice G è definita nel piano xy come luogo dei punti (x, y) tali che

$$(p^2 - a^2)x^2 + p^2y^2 - b^2 - 2abx = 0$$

Intanto se $a = 0$ G è il luogo dei punti del piano tali che

$$p^2x^2 + p^2y^2 - b^2 = 0$$

e quindi è una circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio $\sqrt{|b/p|}$.

Nel caso in cui $p = a$ G è individuata dall'equazione

$$a^2x^2 - b^2 - 2aby = 0$$

ed identifica nel piano una curva che si chiama parabola.

Infine se $a \neq 0$ ed $a \neq p$, G è individuata come luogo dei punti del piano tali che

$$(p^2-a^2)y^2+p^2x^2-b^2-2aby =$$

$$\pm\left(\sqrt{|p^2-a^2|}y \mp \frac{ab}{\sqrt{|p^2-a^2|}}\right)^2+p^2x^2 \mp \frac{a^2b^2}{|p^2-a^2|}-b^2 =$$

$$\pm\left(\sqrt{|p^2-a^2|}y \mp \frac{ab}{|\sqrt{|p^2-a^2|}}\right)^2+p^2x^2 \mp b^2\left(1 \pm \frac{a^2}{|p^2-a^2|}\right)=0$$

Ora se $p^2 > a^2$, risulta $p^2-a^2 = |p^2-a^2|$ e si deve intendere $+$ in luogo di $\pm$ e $-$ in luogo di $\mp$ per cui l'equazione di G è

$$\left(\sqrt{p^2-a^2}y-\frac{ab}{\sqrt{p^2-a^2}}\right)^2+p^2x^2-b^2\left(1+\frac{a^2}{p^2-a^2}\right)=0$$

da cui

$$\frac{1}{p^2-a^2}\left((p^2-a^2)y-ab\right)^2+p^2x^2=b^2\left(\frac{p^2}{p^2-a^2}\right)$$

e

$$\left((p^2-a^2)y-ab\right)^2+p^2(p^2-a^2)x^2=b^2p^2$$

Evidentemente esistono punti del piano che soddisfano tale uguaglianza . G in questo caso di definisce ellisse.

poichè deve risultare

$$\left((p^2-a^2)y-ab\right)^2=b^2p^2-p^2(p^2-a^2)x^2 \geq 0$$

e

$$p^2(p^2-a^2)x^2=b^2p^2-\left((p^2-a^2)y-ab\right)^2 \geq 0$$

ed entrambe le precedenti equazioni sono soddisfatte per valori interni, si vede che una ellisse è limitata

Se infine $p^2 < a^2$, risulta $p^2-a^2 = -|p^2-a^2|$ e si deve intendere $-$ in luogo di $\pm$ e $+$ in luogo di $\mp$ per cui l'equazione di G è

$$-\left(\sqrt{a^2-p^2}y+\frac{ab}{\sqrt{a^2-p^2}}\right)^2+p^2y^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{a^2-p^2}\right)=0$$

da cui

$$-\frac{1}{a^2-p^2}\left((a^2-p^2)y-ab\right)^2+p^2x^2=-b^2\left(\frac{-p^2}{a^2-p^2}\right)$$

e

$$-\left((a^2-p^2)y-ab\right)^2+p^2(a^2-p^2)y^2=b^2p^2$$

Evidentemente esistono punti del piano che soddisfano tale uguaglianza . G in questo caso di definisce iperbole.

poichè deve risultare

$$\Big((p^2-a^2)y-ab\Big)^2 = b^2p^2 - p^2(p^2-a^2)x^2 \geq 0$$

e

$$p^2(p^2-a^2)x^2 = b^2p^2 + \Big((p^2-a^2)y-ab\Big)^2 \geq 0$$

essendo la prima disequazione soddisfatta per valori esterni e la seconda per ogni valore,si vede che un'iperbole non è limitata e che non ha punti vicini all'origine.

0.2 *Le proprieta' geometriche delle coniche.*

Le curve definite dall'intersezione di un cono con un piano, che abbiamo chiamato coniche, godono di numerose interessanti proprietà che cercheremo di illustrare nel seguito

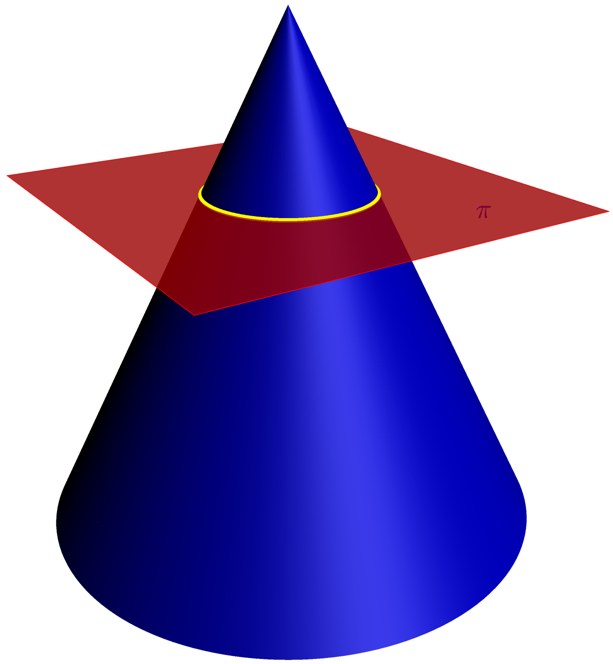
Consideriamo innanzi tutto un cono, che a meno di scegliere opportunamente il sistema di riferimento, ha equazione

$$z = p\sqrt{x^2+y^2}$$

ed un piano, che sempre per opportuna scelta del sistema di riferimento, avrà equazione

$$z = ay + b \qquad \text{oppure} \qquad y = b$$

Cominciamo a considerare il caso in cui $a = 0$ e il piano si riduce a $z = b$.



In tal caso abbiamo già mostrato che la curva intersezione può essere definita da

$$\begin{cases} z = b \\ z = p\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \begin{cases} z = b \\ p^2x^2 + p^2y^2 = b^2 \end{cases}$$

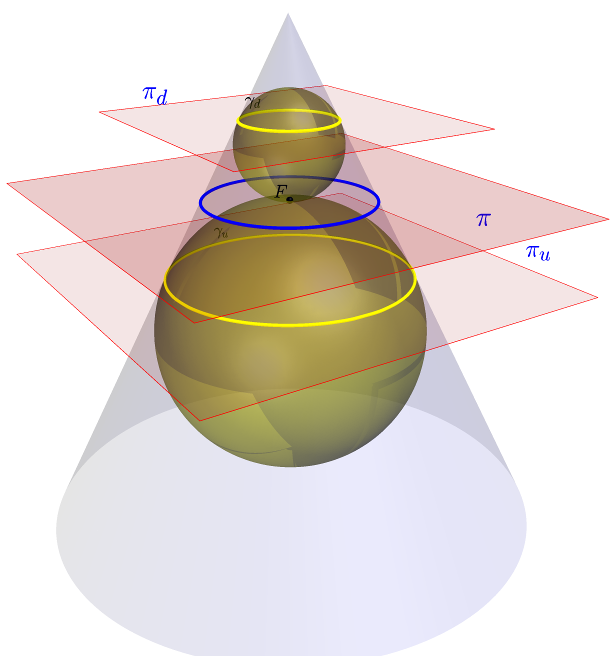
e che quindi si può caratterizzare come l'intersezione del piano $z = b$ con il cilindro con asse parallelo all'asse z generato dalla curva di equazione

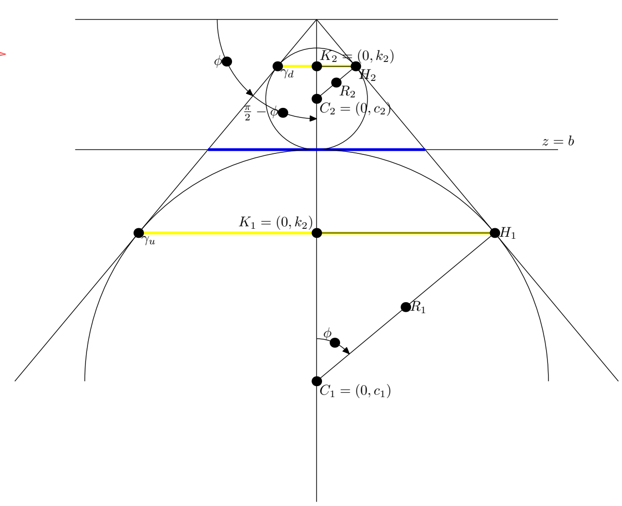
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{b}{p}\right)^2$$

Evidentemente i punti della curva appartengono al piano $z = b$ e sono equidistanti dall'asse z o, equivalentemente, dall'intersezione dell'asse z con il piano $z = b$.

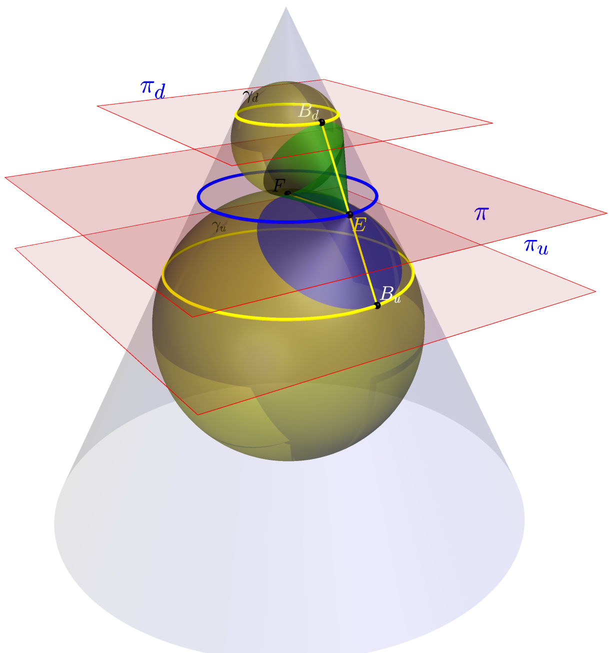
Si ha $p = \tan(\phi)$, $\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, $\sin(\phi) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ ed esistono due sfere tangenti al cono ed al piano. Se $C_i = (0, c_i)$ è il centro ed R_i il raggio delle due sfere, si ha $(b - c_i)^2 = (c_i \cos(\phi))^2$. Ne segue che $b - c_i = \pm c_i \cos(\phi)$ e $b = c_i(1 \pm \cos(\phi))$ da cui $c = \frac{b}{1\pm\cos(\phi)} = \frac{b\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}\pm 1}$

Inoltre $R_i = c_i \cos(\phi) = \frac{b\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}\pm 1}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{b}{\sqrt{1+p^2}\pm 1}$. Le sfere sono tangenti al cono nei punti di due circonferenzeγ_i giacenti nei piani $z = k_i$ e $c_i - k_i = R_i \cos(\phi)$, da cui $k_i = c_i - R_i \cos(\phi) = c_i - c_i \cos^2(\phi) = c_i \sin^2(\phi) = \frac{c_i p}{1+p^2}$





La circonferenza è ovviamente il luogo dei punti del piano, in cui giace, equidistanti da un punto che e' detto centro. Questa proprietà si può dedurre dal fatto che il cono è una superficie di rotazione attorno all'asse z e che il piano $z = b$ è ortogonale all'asse; si evince anche facilmente dai calcoli algebrici dai quali risulta che che i punti di una circonferenza hanno distanza costante dall'origine.



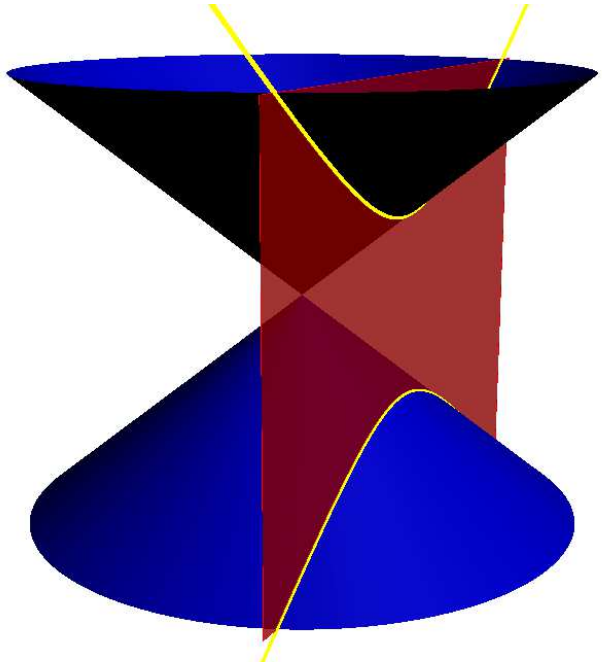
È anche interessante notare che si puo' dedurre questa proprietà dalla costruzione riportata precedentemente. Infatti , con riferimento alla figura possiamo vedere che, se E è un punto della circonferenza, B_d e B_u sono i punti in cui la generatrice del cono per E interseca le circonferenze γ_d e γ_u ed F è il punto in cui le sfere sono tangenti al piano $z = b$, per le proprietà delle rette per un punto tangenti ad una sfera, si ha

$$B_d E = B_u E = EF$$

e quindi EF è costante.

Osserviamo che il centro della circonferenza è il punto in cui il piano $z = b$ è tangente alle due sfere che abbiamo introdotto.

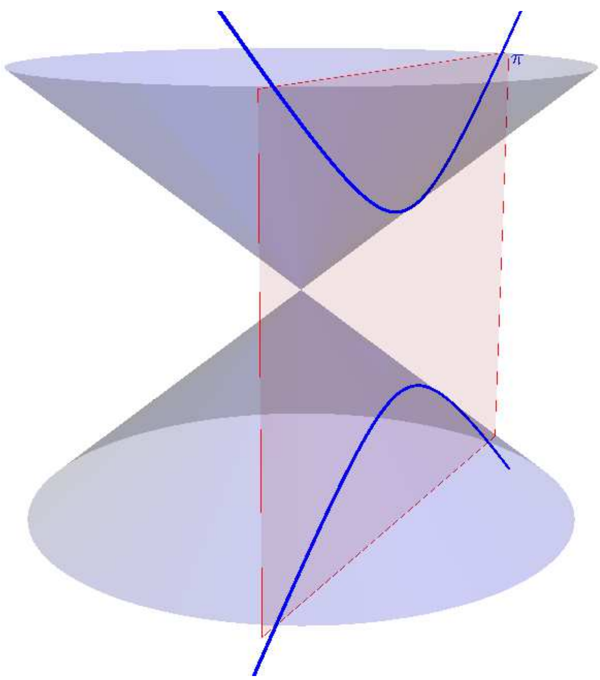
Consideriamo ora il caso in cui il cono sia intersecato da un piano di equazione $y = b$

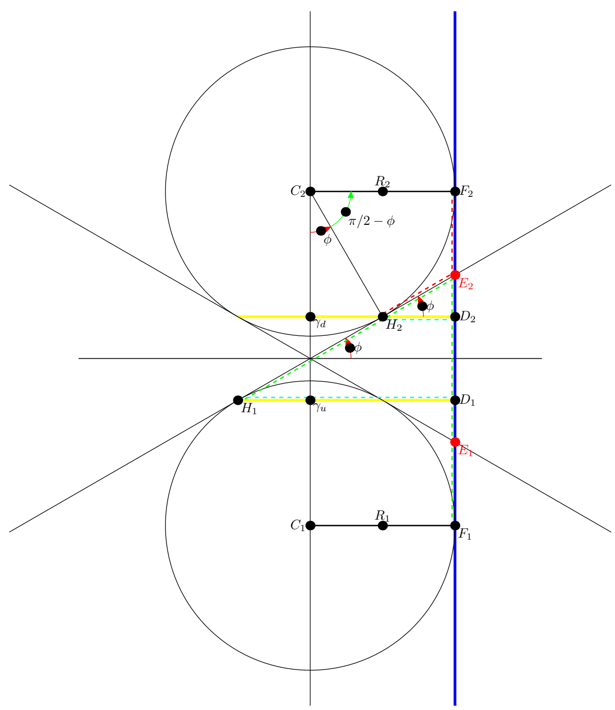


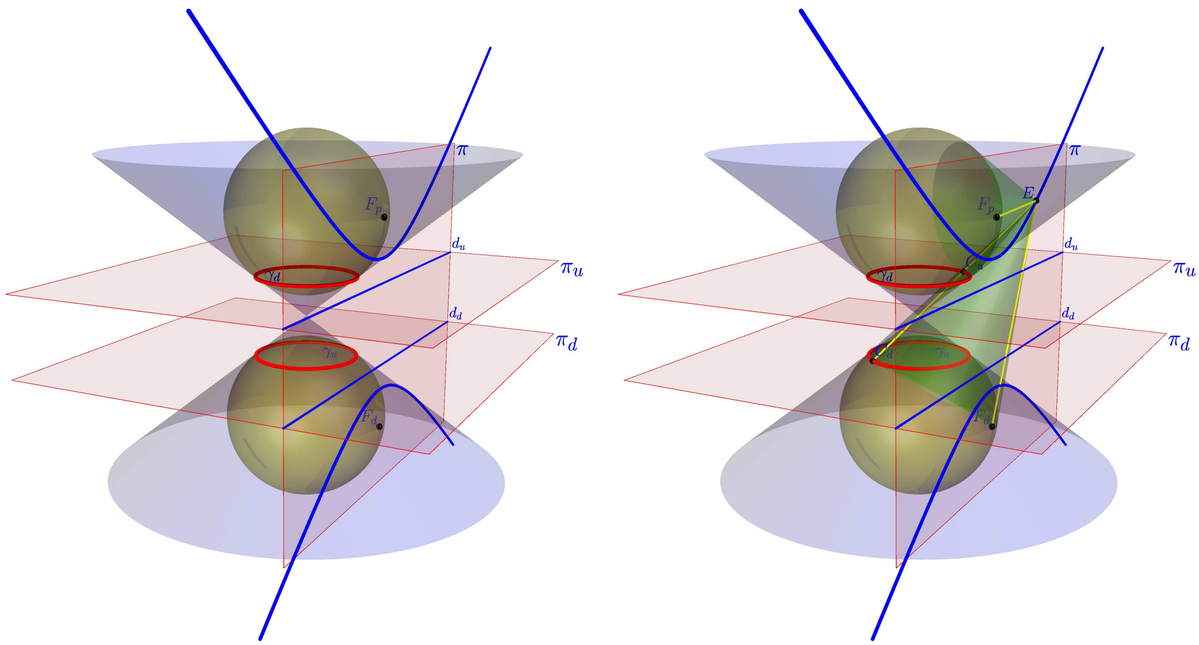
In tal caso abbiamo già mostrato che la curva intersezione può essere definita da

$$\begin{cases} y = b \\ z = p\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \begin{cases} y = b \\ p^2x^2 + p^2b^2 = z^2 \end{cases}$$

Anche qui $p = \tan(\phi)$, $\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, $\sin(\phi) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ ed esistono due sfere tangenti al cono ed al piano. $C_i = (0, c_i)$ è il centro ed R_i il raggio delle due sfere, si ha $\pm b = c_i \cos(\phi)$, da cui $c_i = \pm\frac{b}{\cos(\phi)} = b\sqrt{1+p^2}$. Inoltre $R_i = b$. Le sfere sono tangenti al cono nei punti di due circonferenze γ_i giacenti nei piani $z = \pm k_i$ e $k_i = \frac{b}{\cos(\phi)} - b\cos(\phi) = b\frac{\sin^2(\phi)}{\cos(\phi)}$, da cui $k_i = \frac{bp^2}{\sqrt{1+p^2}}$ ed aventi raggio $r_i = \frac{b}{\sin(\phi)} = \frac{bp}{\sqrt{1+p^2}}$. Le sfere sono tangenti al piano nei punti $F_i = (0, b, b/\cos(\phi))$ che prendono il nome di fuochi. Su ogni generatrice del cono ci sono un punto di ciascuna delle circonferenze γ_i ed un punto del piano considerato che descrive, al variare delle generatrici, la curva intersezione.







Ogni punto della circonferenza γ_2 può essere rappresentato mediante le $\begin{cases} x = b\,\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = b\,\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = k_i = \frac{b}{\cos(\phi)} \end{cases}$ e $\begin{cases} x = t\,b\,\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = t\,b\,\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = t\frac{b}{\cos(\phi)} \end{cases}$ descrive, per $t \in \mathbb{R}$, la retta individuata da un generico punto di γ_2 e dall'origine; poichè il punto scelto su γ_2 sta sul cono, così come l'origine, tale retta è una generatrice del cono ed interseca tanto la circonferenza γ_2 quanto il piano $y = b$; tale retta individua in tal modo un punto della curva intersezione tra piano e cono, le cui coordinate si possono calcolare scegliendo t in modo che $y = tb\sin(\phi)\sin(\theta) = b$, cioè $t = \frac{1}{\sin(\phi)\sin(\theta)}$. Ne segue che la conica in oggetto può essere rappresentata parametricamente mediante le: $\begin{cases} x = b\frac{\sin(\phi)}{\sin(\phi)\sin(\theta)}\cos(\theta) \\ y = b\frac{\sin(\phi)}{\sin(\phi)\sin(\theta)}\sin(\theta) \\ z = \frac{bp^2}{\sqrt{1+p^2}}\frac{1}{\sin(\phi)\sin(\theta)} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{b\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ y = b \\ z = \frac{bp}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

Ognuno dei piani Π_u e Π_d su cui giacciono le circonferenze di tangenza individuano sul piano $z = b$ una retta, d_u e d_d,che si chiama direttrice.

Dalle precedenti figure si verifica che la conica, in questo caso, soddisfa due notevoli proprietà:

- La differenza delle distanze dei punti della conica dai fuochi è costante.
- Il rapporto tra le distanze dei punti della conica da un fuoco e dalla corrispondente direttrice è costante.

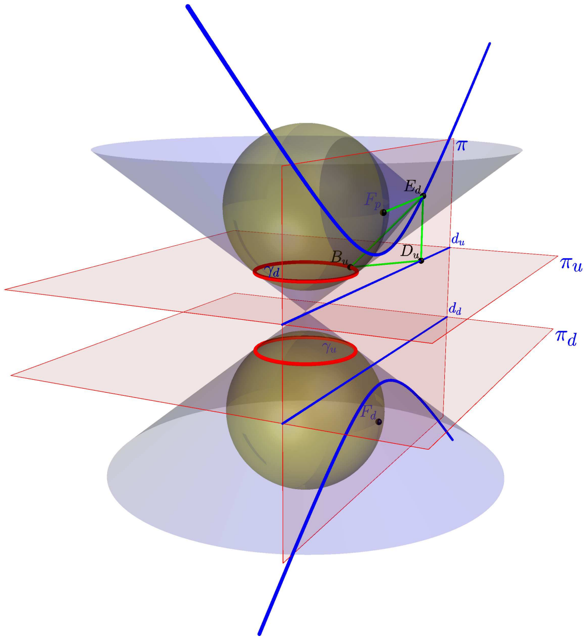
Possiamo convincerci che la prima affermazione sussiste dalle figure precedenti, osservando che ogni generatrice della conica passa per l'origine e contiene un punto di ciascuna delle circonferenze di tangenza, simmetrici rispetto all'origine; inoltre un punto della conica è individuato dall'intersezione di una generatrice col piano$y = b$.

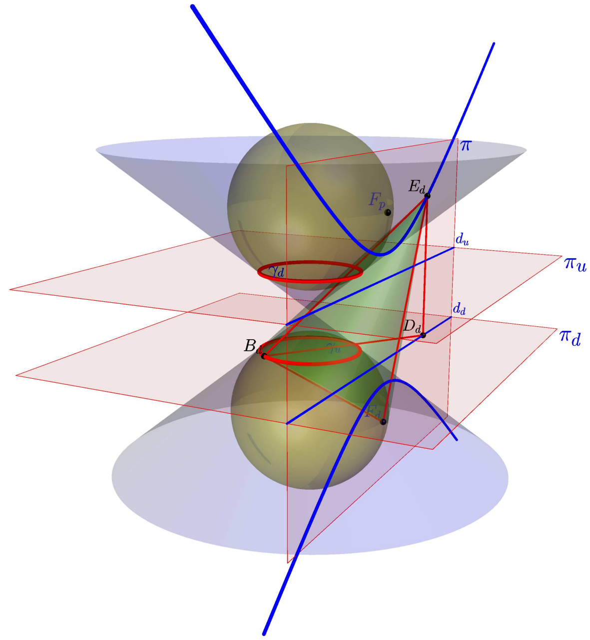
Nella figura in sezione, ad esempio, il punto della conica è indicato con E_2, la generatrice è la retta per e_2 e per l'origine e taglia le circonferenza di tangenza in H_1 e H_2. Si ha $H_2H_1 = E_2H_1 - E_2H - 2 = E_2F_1 - E_2F_2$ inoltre H_2H_1 è costante.

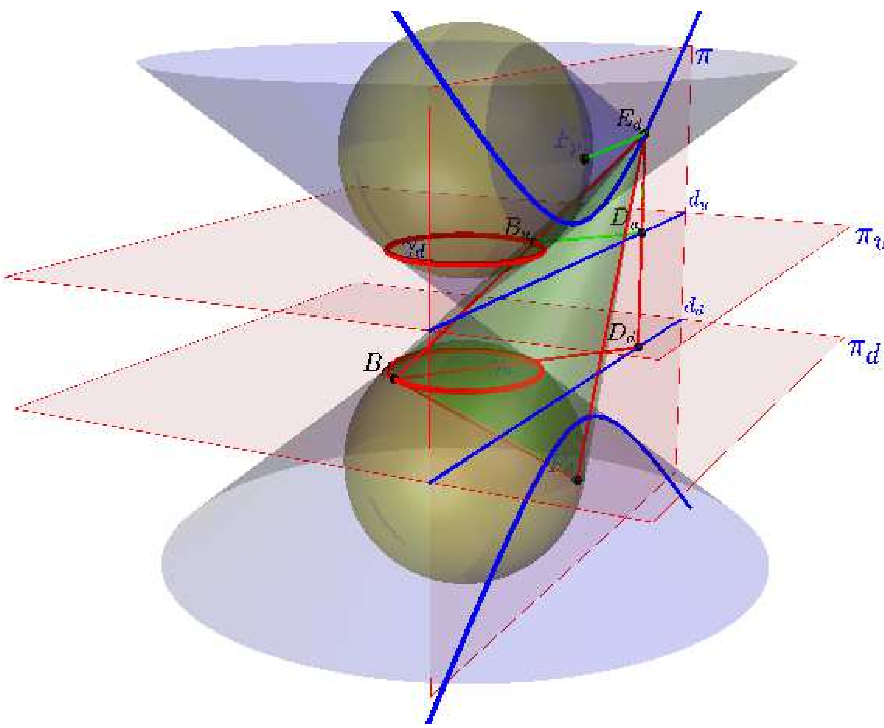
Simili considerazioni possono essere fatte osservando le figure nello spazio che immediatamente precedono.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, sempre dalla figura in sezione si vede che il rapporto $\frac{E_2D_2}{E_2H_2} = \frac{E_2D_2}{E_2F_2} = \sin(\phi) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ è costante e dipende unicamente dall'inclinazione delle generatrici del cono.

Le figure nella pagina successiva mostrano come lo stesso argomento si applichi i generale.


π
E_d
D_u
B_u
d_u
π_u
γ_d
d_d
π_d
γ_u
F_d

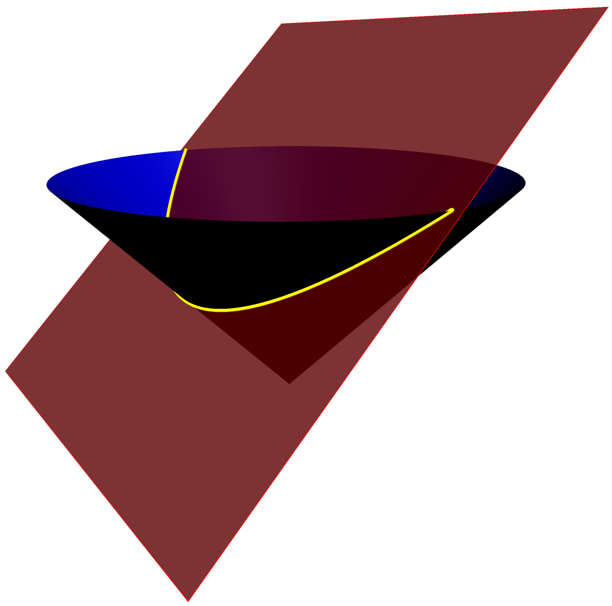

π
E_d
F_p
d_u
π_u
γ_d
d_d
D_d
π_d
B


π
E_d
d_u
D_u
B_u
π_u
γ_d
d_d
D_d
π_d
B_d

Consideriamo ora il caso in cui $a = p$.

In tal caso abbiamo già mostrato che la curva intersezione può essere definita da

$$\begin{cases} z = py + b \\ z = p\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \begin{cases} z = py + b \\ y = \frac{p}{2b}x^2 - \frac{b}{2p} \end{cases}$$



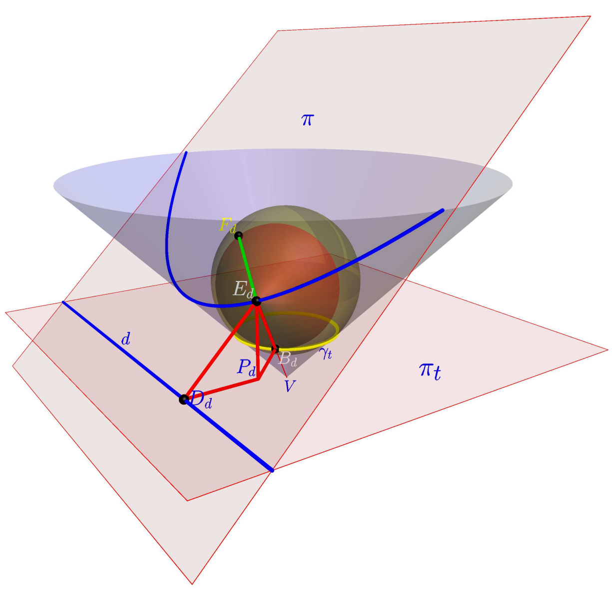
Sia Π il piano secante il cono e sia $p = \tan(\phi)$ l'apertura del cono. Π interseca solamente una delle due falde del cono ed esiste una sola sfera tangente al cono ed al piano Π ; $C = (0, 0, c)$ è il centro ed R il raggio della sfera e si ha $c = \frac{b}{2}$, e $R = \frac{b}{2}\cos(\phi) = \frac{b}{2\sqrt{1+p^2}}$. La sfera è tangente al cono nei punti di una circonferenza γ giacente nel piano $z = k$, che chiamiamo Π_t, con $k = \frac{b}{2}\sin^2(\phi) = \frac{b}{2\sin^2(\phi)} = \frac{bp^2}{2(1+p^2)}$ ed avente raggio $r = \frac{b}{2}\sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{bp}{2(1+p^2)}$. Il piano $z = k$ su cui giace la circonferenza γ interseca il piano Π in una retta d che si chiama direttrice. La sfera è tangente al piano nel punto $F = (0, \frac{b}{2}\cos(\phi)\sin(\phi), \frac{b}{2}\cos^2(\phi))$ che prende il nome di fuoco. Ogni generatrice del cono contiene un punto della circonferenza γ e determina un punto E del piano considerato che descrive, la curva intersezione cioè la conica. d è la proiezione du d di E per cui ED è la distanza di un punto della conica dalla retta direttrice; EF è la distanza di un punto della conica dal fuoco, P è la proiezione di E su Π_t e B è la proiezione di P su γ.

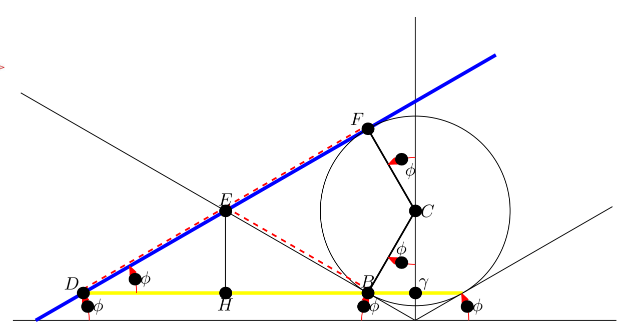
Dalle figure si vede che $\frac{EP}{ED} = \sin(\phi) = \frac{EP}{EB} = \frac{EP}{EF}$ e si ottiene che $\frac{EP}{EF} = 1$ cioè $EF = ED$.

Possiamo quindi concludere che i punti della conica sono equidistanti da fuoco e direttrice e anche che il rapporto tra le distanze di un punto da fuoco e direttrice è costante.

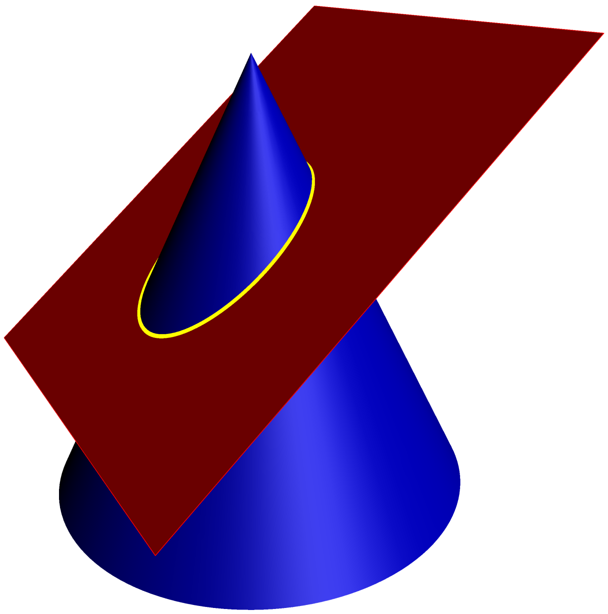
I punti della circonferenza γ possono essere rappresentati mediante da $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = k = pr \end{cases}$ e la generatrice pe tale punto si ottiene, per θ fissato, dalle $\begin{cases} x = tr\cos(\theta) \\ y = tr\sin(\theta) \\ z = tk = tpr \end{cases}$ al variare di t. Dal momento che al variare di θ la direttrice descrive il cono, la sua intersezione col piano Π descriverà la conica; tale intersezione di ottiene per t tale che $z = py + b$. Ne viene che $tpr = tpr\sin(\theta) + b$ da cui $t = \frac{b}{pr - pr\sin(\theta)}$.

Avremo quindi che $\begin{cases} x = \frac{b}{p - p\sin(\theta)}\cos(\theta) \\ y = \frac{b}{p - p\sin(\theta)}\sin(\theta) \\ z = \frac{b}{1 - \sin(\theta)} \end{cases}$ che quindi forniscono una rappresentazione parametrica della conica.





Consideriamo ora il caso in cui $a < p$.

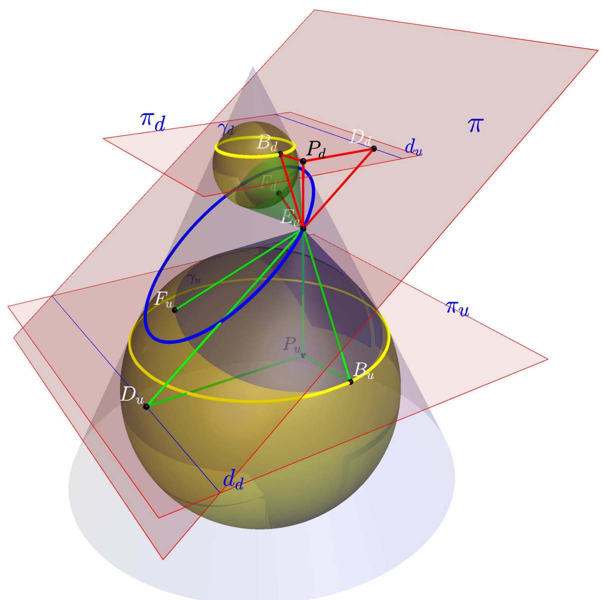


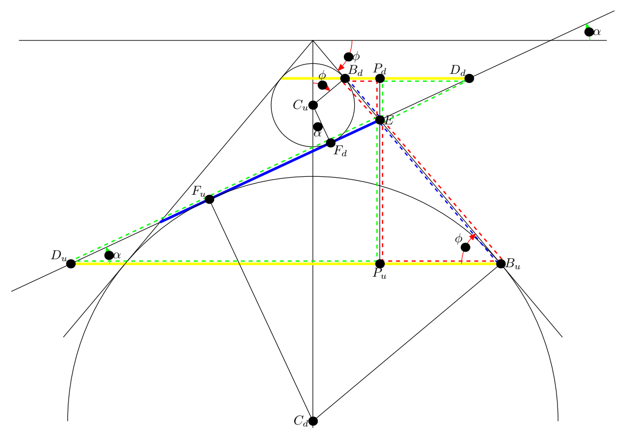
In tal caso la curva intersezione può essere definita da

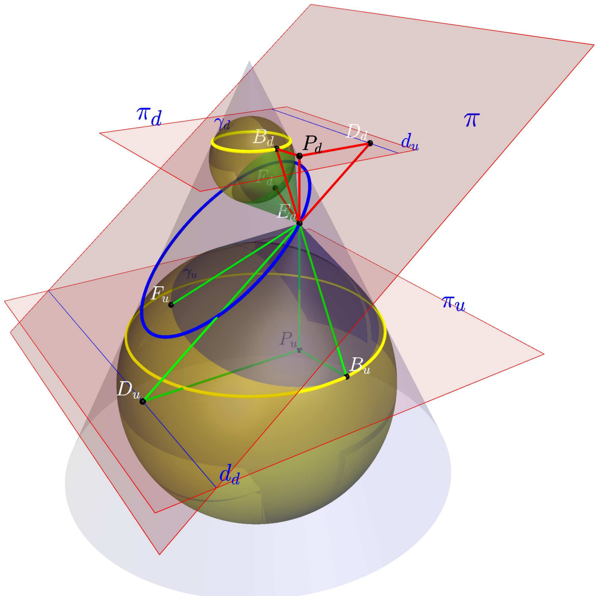
$$\begin{cases} z = ay + b \\ z = p\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \begin{cases} z = py + b \\ \left((p^2-a^2)y - ab\right)^2 + p^2(p^2-a^2)x^2 = b^2p^2 \end{cases}$$

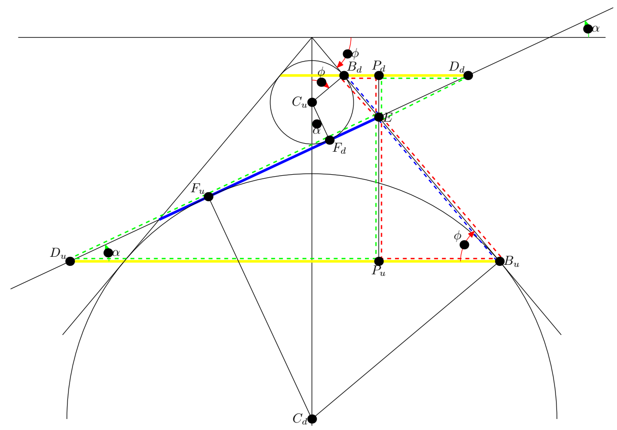
Sia Π il piano secante il cono e sia $p = \tan(\phi)$ l'apertura del cono, sia $p = \tan(\phi)$ l'apertura del cono e sia $a = \tan(\alpha)$ l'inclinazione deli piano. Esistono due sfere tangenti al cono ed al piano Π ; $C_{d,u)} = (0, 0, c_{d,u})$ sono i centri ed $R_{d,u)}$ i raggi di tali sfere e si ha $c_{d,u} = \frac{b\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}\pm\sqrt{1+a^2}}$, e $R_{d,u} = \frac{b}{\sqrt{1+p^2}\pm\sqrt{1+a^2}}$. Ogni sfera è tangente al cono nei punti di una circonferenza $\gamma_{d,u}$ giacente nel piano $z = k_{d,u}$, che chiamiamo $\Pi_{d,u}$, con $k_{d,u} = \frac{bp^2}{\sqrt{1+p^2}\pm\sqrt{1+a^2}}$ ed avente raggio $r_{d,u} = \frac{bp}{\sqrt{1+p^2}\pm\sqrt{1+a^2}}$. Il piano $z = k_{d,u}$ su cui giace la circonferenza $\gamma_{d,u}$ interseca il piano $\Pi_{d,u}$ in una retta $d_{d,u)}$ che si chiama direttrice. La sfera è tangente al piano nel punto $F_{d,u} = (0, \frac{a(c_{d,u}-b)}{1+a^2}, b + \frac{a^2(c_{d,u}-b)}{1+a^2})$ che prendono il nome di fuochi. Ogni generatrice del cono contiene un punto di ognuna delle circonferenze $\gamma_{d,u}$ e determina un punto E del piano Π che descrive, la curva intersezione cioè la conica. D_d, D_u sono le proiezioni su $d_{d,u}$ di E per cui $ED_{d,u}$ è la distanza di un punto della conica dalla retta direttrice $d_{d,u}$; $EF_{d,u}$ è la distanza di un punto della conica dai fuochi, $P_{d,u}$ è la proiezione di E su $\Pi_{d,u}$ mentre $B_{d,u}$ è la proiezione di E su $\Pi_{d,u}$.

Dalle figure si vede che $B_dB_u = B_dE + EB_u = EF_d + EF_u$ e si deduce che i punti della curva intersezione hanno somma delle distanze dai fuochi costante. Inoltre $\frac{EB_{d,u}}{ED_{d,u}} = \frac{EB_{d,u}}{EP_{d,u}} \frac{EP_{d,u}}{ED_{d,u}} = \frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)}$ per cui risulta costante il rapporto tra le distanze dai fuochi e dalle direttrici di un punto della curva intersezione



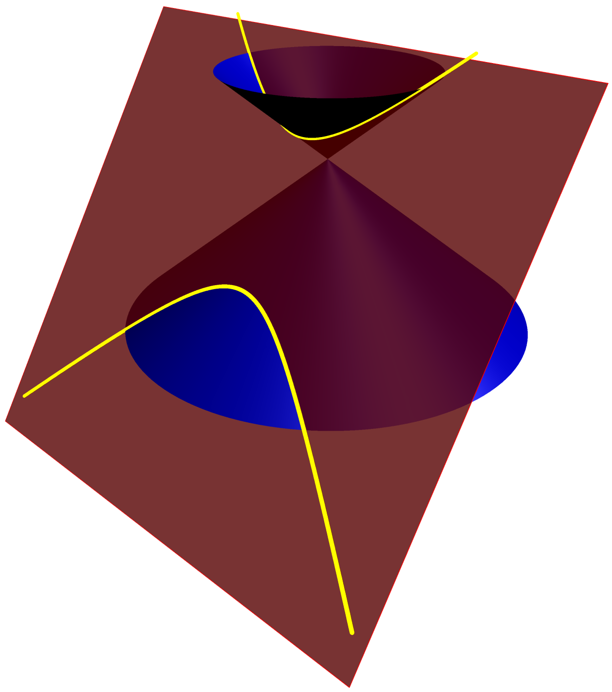






I punti delle circonferenza $\gamma_{d,u}$ possono essere rappresentati mediante da $\begin{cases} x_{d,u} = r_{d,u}\cos(\theta) \\ y_{d,u} = r_{d,u}\sin(\theta) \\ z_{d,u} = k_{d,u} = pr_{d,u} \end{cases}$ e la generatrice per tale punto si ottiene, per θ fissato, da una delle $\begin{cases} x_{d,u} = tr_{d,u}\cos(\theta) \\ y_{d,u} = tr_{d,u}\sin(\theta) \\ z_{d,u} = tpr_{d,u} \end{cases}$ al variare di t. Dal momento che al variare di θ la direttrice descrive il cono, la sua intersezione col piano Π descriverà la conica; tale intersezione di ottiene per t tale che $z = ay + b$. Ne viene che $tpr = atr\sin(\theta) + b$ da cui $tr = \frac{b}{p - a\sin(\theta)}$. Avremo quindi che le $\begin{cases} x = \frac{b}{p-a\sin(\theta)}\cos(\theta) \\ y = \frac{b}{p-a\sin(\theta)}\sin(\theta) \\ z = \frac{b}{1-a\sin(\theta)} \end{cases}$ forniscono una rappresentazione parametrica della conica.

Consideriamo ora il caso in cui $a > p$.



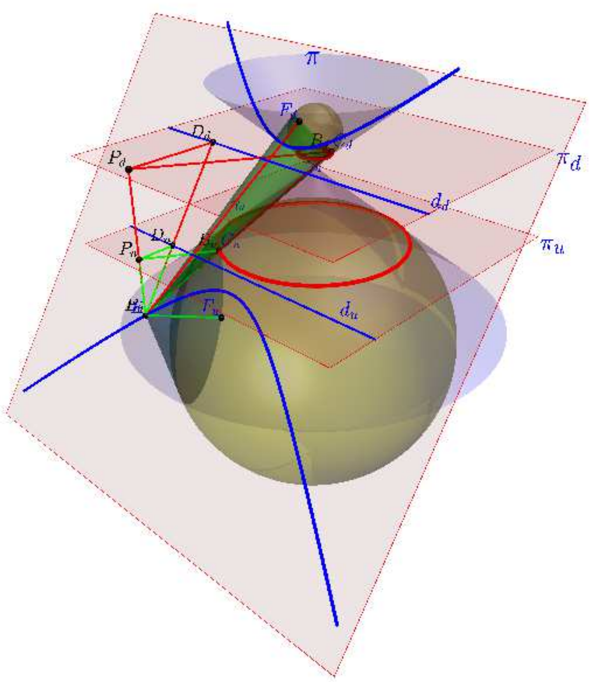
Anche in tal caso la curva intersezione può essere definita da

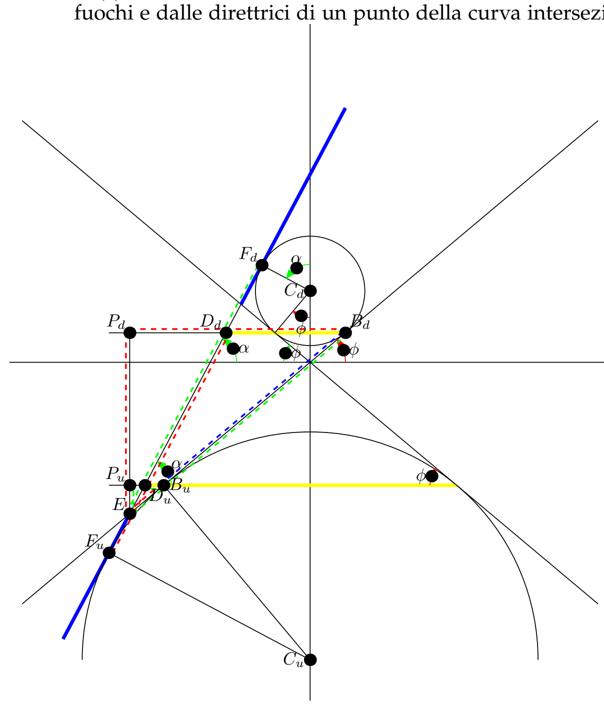
$$\begin{cases} z = ay + b \\ z = p\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \begin{cases} z = py + b \\ \left((p^2 - a^2)y - ab\right)^2 + p^2(p^2 - a^2)x^2 = b^2p^2 \end{cases}$$

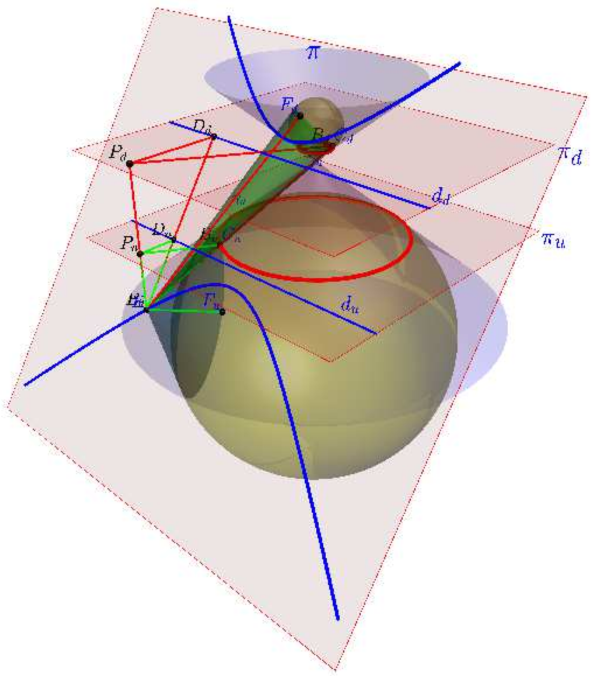
dove ovviamente $p^2 - a^2 < 0$

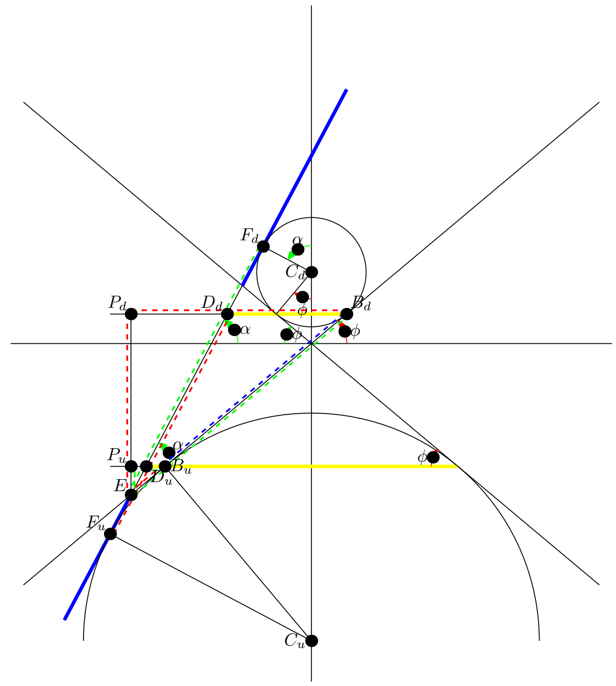
Sia Π il piano secante il cono, sia $p = \tan(\phi)$ l'apertura del cono e sia $a = \tan(\alpha)$ l'inclinazione deli piano. Esistono due sfere tangenti al cono ed al piano Π ; $C_{d,u)} = (0, 0, c_{d,u})$ sono i centri ed $R_{d,u)}$ i raggi di tali sfere e si ha $c_{d,u} = \frac{b\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2} \pm \sqrt{1+a^2}}$, e $R_{d,u} = \frac{b}{\sqrt{1+p^2} \pm \sqrt{1+a^2}}$. Ogni sfera è tangente al cono nei punti di una circonferenza $\gamma_{d,u}$ giacente nel piano $z = k_{d,u}$, che chiamiamo $\Pi_{d,u}$, con $k_{d,u} = \frac{bp^2}{\sqrt{1+p^2} \pm \sqrt{1+a^2}}$ ed avente raggio $r_{d,u} = \left| \frac{bp}{\sqrt{1+p^2} \pm \sqrt{1+a^2}} \right|$. Il piano $z = k_{d,u}$ su cui giace la circonferenza $\gamma_{d,u}$ interseca il piano $\Pi_{d,u}$ in una retta $d_{d,u)}$ che si chiama direttrice. La sfera è tangente al piano nel punto $F_{d,u} = (0, \frac{a(c_{d,u} - b)}{1+a^2}, b + \frac{a^2(c_{d,u} - b)}{1+a^2})$ che prendono il nome di fuochi. Ogni generatrice del cono contiene un punto di ognuna delle circonferenze $\gamma_{d,u}$ e determina un punto E del piano Π che descrive, la curva intersezione cioè la conica. D_d, D_u sono le proiezioni su $d_{d,u}$ di E per cui $ED_{d,u}$ è la distanza di un punto della conica dalla retta direttrice $d_{d,u}$; $EF_{d,u}$ è la distanza di un punto della conica dai fuochi, $P_{d,u}$ è la proiezione di E su $\Pi_{d,u}$ mentre $B_{d,u}$ è la proiezione di E su $\Pi_{d,u}$.

Dalle figure si vede che $B_dB_u = B_dE - EB_u = EF_d - EF_u$ e si deduce che per i punti della curva intersezione è costante la differenza delle distanze dai fuochi. Inoltre $\frac{EB_{d,u}}{ED_{d,u}} = \frac{EB_{d,u}}{EP_{d,u}} \frac{EP_{d,u}}{ED_{d,u}} = \frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)}$ per cui risulta costante il rapporto tra le distanze dai fuochi e dalle direttrici di un punto della curva intersezione









I punti delle circonferenza $\gamma_{d,u}$ possono essere rappresentati mediante da $\begin{cases} x_{d,u} = r_{d,u}\cos(\theta) \\ y_{d,u} = r_{d,u}\sin(\theta) \\ z_{d,u} = k_{d,u} = pr_{d,u} \end{cases}$ e la generatrice per tale punto si ottiene, per θ fissato, da una delle $\begin{cases} x_{d,u} = tr_{d,u}\cos(\theta) \\ y_{d,u} = tr_{d,u}\sin(\theta) \\ z_{d,u} = tpr_{d,u} \end{cases}$ al variare di t. Dal momento che al variare di θ la direttrice descrive il cono, la sua intersezione col piano Π descriverà la conica; tale intersezione di ottiene per t tale che $z = ay + b$. Ne viene che $tpr = atr\sin(\theta) + b$ da cui $tr = \frac{b}{p - a\sin(\theta)}$. Avremo quindi che le $\begin{cases} x = \frac{b}{p-a\sin(\theta)}\cos(\theta) \\ y = \frac{b}{p-a\sin(\theta)}\sin(\theta) \\ z = \frac{b}{1-a\sin(\theta)} \end{cases}$ forniscono una rappresentazione parametrica della conica.

Le due figure seguenti si riferiscono infine al caso in cui il piano secante il cono passa per il vertice del cono stesso.

La curva intersezione si riduce allora ad una coppia di rette per l'origine e le sfere di Dandelin si riducono all'origine.

Nel caso in cui il piano oltre che a passare per l'origine sia anche perpendicolare all'asse del cono, la conica si riduce ad un solo punto, l'origine stessa.

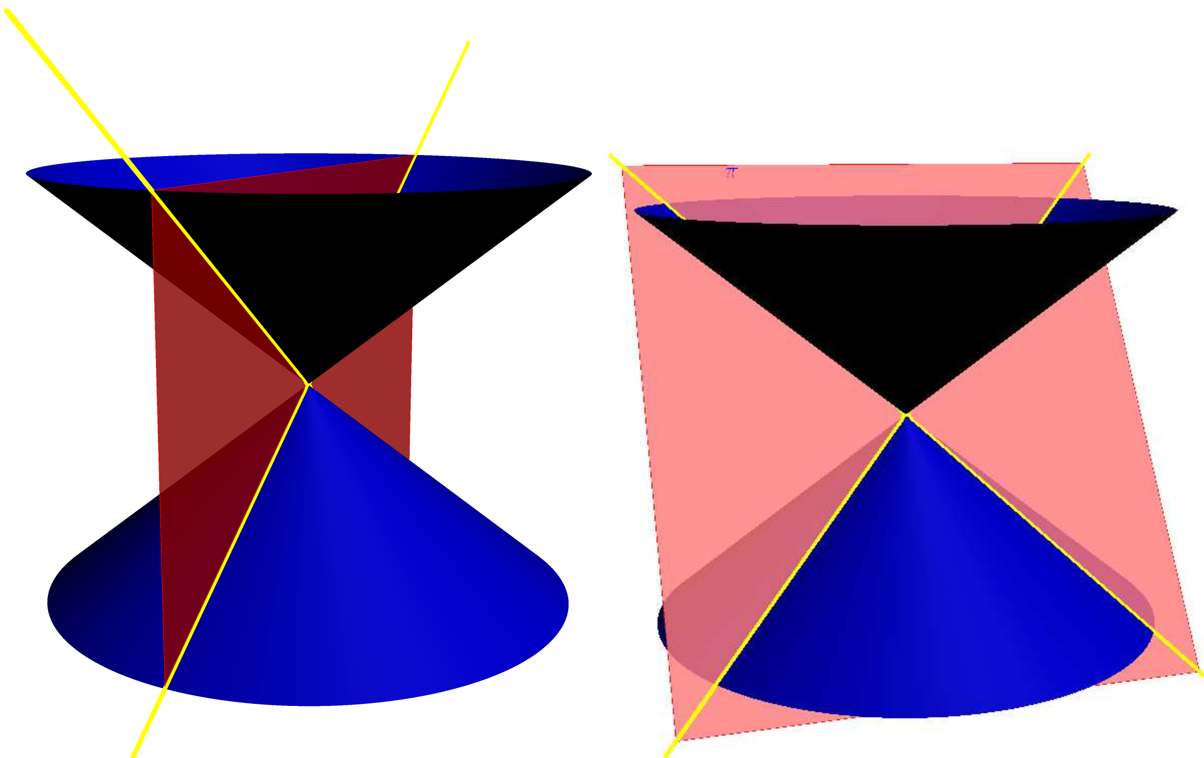


Figura 2: Coppia di Rette

0.3 *Le equazioni canoniche per una conica*

Abbiamo visto che i punti di una sezione conica sono caratterizzati, a seconda dell'inclinazione del piano secante, da prorieà che coinvolgono punti detti fuochi e rette dette direttrici.

A parte tre casi, possiamo sempre definire almeno un fuoco ed una direttrice per la sezione conica. I tre casi in questione si verificano quando

- il piano secante sia perpendicolare all'asse del cono e passi per il suo vertice. (con la scelta del riferimento che abbiamo fatta si tratta del caso in cui $a = b = 0$)

- il piano secante passi per il vertice ($b = 0$ oppure $y = 0$)

- il piano secante sia perpendicolare all'asse del cono ma non passi per l'origine ($a = 0$, $b \neq 0$)

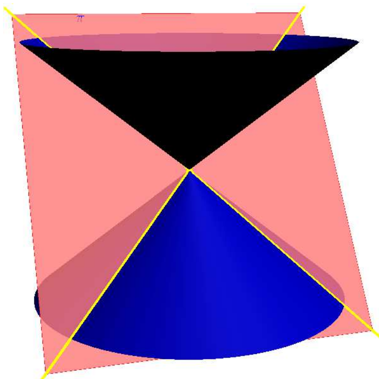


Figura 3:

Otteniamo in ciascuno dei casi

- un punto (l'origine stessa)
- una coppia di rette
- una circonferenza

Nei primi due casi le sfere di Dandelin si riducono alla sola origine e quindi non è possibile parlare di fuochi (definiti come i punti di tangenza di ciascuna sfera al piano secante) nè di direttrici (definite come le rette intersezione tra il piano secante ed il piano che contiene la circonferenza di tangenza tra cono e sfera).

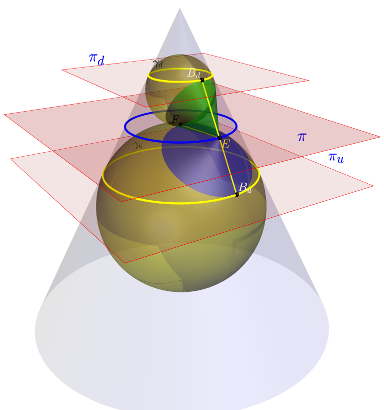


Figura 4:

Nel terzo caso otteniamo due fuochi, coincidenti ma, poichè il piano secante ed i piani che contengono le circonferenze di tangenza sono paralleli, non è possibile parlare di direttrici; possiamo al più, dire che le direttrici si collocano "all'infinito".

I casi restanti, quando cioè $a \neq 0$ e $b \neq 0$, si differenziano in base all'inclinazione del piano secante.

Osserviamo che il cono $z^2 = p^2(x^2 + y^2)$ è generato dalla rotazione attorno all'asse z della retta $z = py$ del piano (y, z) , scelto opportunamente il sistema di riferimento, il piano secante ha equazione $z = ay$

Nel caso in cui $p > a$ il piano interseca una sola falda del cono, si trovano due sfere di Dandelin tutte e due nella stessa falda del cono, ci sono due fuochi F_1 ed F_2(punti di tangenza piano sfere), e due direttrici d_1 e d_2 (rette intersezione tra il piano secante ed i piani su cui giacciono le circonferenze di tangenza tra cono e sfere).

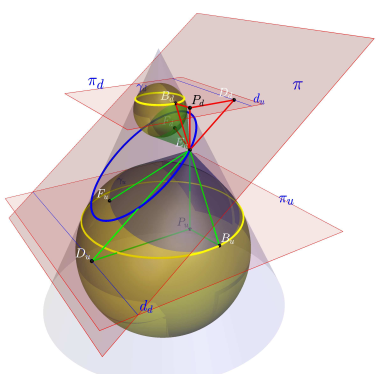


Figura 5:

I punti P della curva intersezione tra cono e piano soddisfano le seguenti proprietà:

1. la somma delle distanze di P dai fuochi F_1 ed F_2 è costante.
2. il rapporto tra de distanze di P da un fuoco F_i e da una direttrice d_i è costante

Nel caso in cui $p = a$ il piano interseca una sola falda del cono, si trova una sola sfera di Dandelin troviamo un fuoco F (punto di tangenza piano sfera), ed una direttrice d (rette intersezione tra il piano secante ed il piano su cui giace la circonferenza di tangenza tra cono e sfera).

I punti P della curva intersezione tra cono e piano soddisfano le seguenti proprietà:

1. la distanza di P dai F è uguale alla distanza di p da d.

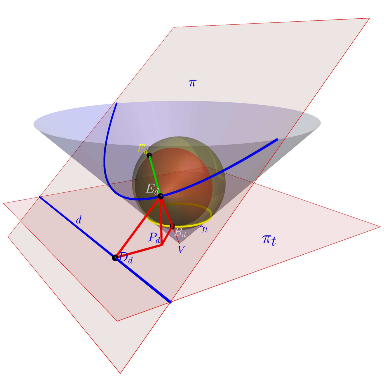


Figura 6:

2. il rapporto tra de distanze di P da un fuoco F_i e da una direttrice d_i è costante

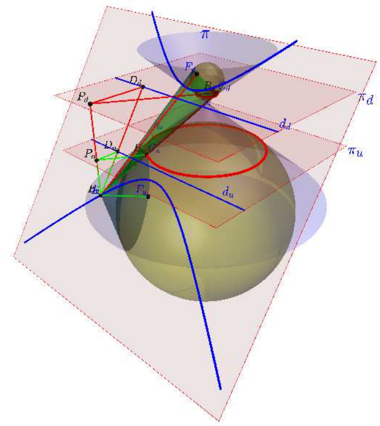


Figura 7:

Nel caso in cui $p < a$ il piano interseca entrambe le falde del cono, si trovano due sfere di Dandelin una in ciascuna falda del cono, ci sono due fuochi F_1 ed F_2(punti di tangenza piano sfere), e due direttrici d_1 e d_2 (rette intersezione tra il piano secante ed i piani su cui giacciono le circonferenze di tangenza tra cono e sfere).

I punti P della curva intersezione tra cono e piano soddisfano le seguenti proprietà:

1. la differenza delle distanze di P dai fuochi F_1 ed F_2 è costante.

2. il rapporto tra le distanze di P da un fuoco F_i e da una direttrice d_i è costante

Troviamo un fuoco F (punto di tangenza piano sfera), ed una direttrice d (retta intersezione tra il piano secante ed il piano su cui giace la circonferenza di tangenza tra cono e sfera).

I punti P della curva intersezione tra cono e piano soddisfano le seguenti proprietà:

1. la distanza di P dai F è uguale alla distanza di p da d.

2. il rapporto tra de distanze di P da un fuoco F_i e da una direttrice d_i è costante

Mediante le proprietà enunciate è possibile ricavare mediante calcoli quelle che sono le equazioni canoniche di ellisse parabola ed iperbole, trascurando le ben più semplici equazioni di circonferenza e coppie di rette, va tuttavia osservato che occorre, in ogni caso seguire strade leggermente diverse.

Esiste però una proprietà comune a tutti i casi: il rapporto tra la distanza di un punto della conica da un fuoco e da una direttrice è costante .

Questa proprietà consente di trovare una equazione in grado di descrivere tutti e tre i tipi di coniche al variare di un parametro che ne identifica il tipo.

Allo scopo basta considerare un riferimento polare nel piano centrato in un fuoco F e scegliere come semiasse positivo delle x la semiretta passante per F e perpendicolare alla direttrice d.

Siano P_0 il punto della conica che giace sull'asse x eD_0 il punto di intersezione tra asse x e direttrice. Siano inoltre P e D un generico punto della conica e la sua proiezione sulla direttrice d rispettivamente. Poniamo inoltre $FD_0 = f$. Avremo che, detto e il valore del rapporto tra la distanza di un generico punto della conica da fuoco e direttrice

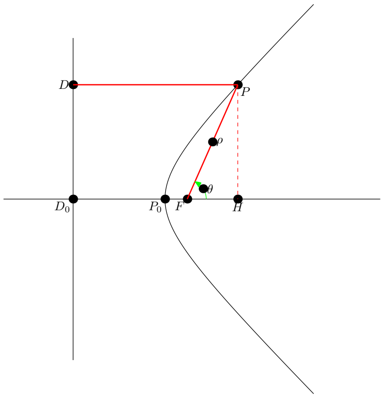


Figura 8:

ed f la distanza tra fuoco e direttrice,

$$\frac{P_0F}{P_0D} = \frac{PF}{PD} = e$$

Indicando, come d'uso, con ρ e θ le usuali coordinate polari del punto P, si ha che

$$\frac{\rho}{f + \rho\cos(\theta)} = e$$

da cui

$$\rho = ef + e\rho\cos(\theta)$$

e

$$\rho = \frac{ef}{1 - e\cos(\theta)}$$