ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 5

LE SERIE

Il problema di sommare un numero non finito di quantità numeriche è stato per lungo tempo considerato privo di senso, ma è giustificabile facilmente, anche dal punto di vista intuitivo, non appena si consideri il seguente esempio.

Sia $I = [0, 1]$ e consideriamo una successione di intervalli così definita: poniamo

$$\begin{aligned} I_1 &= [0, 1/2] \\ I_2 &= [1/2, 1/4] \\ I_3 &= [1/4, 1/8] \\ I_4 &= [1/8, 3/4] \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

E' ovvio che

$$\cup I_k = [0, 1]$$

ed inoltre la lunghezza del segmento I_k è data da

$$\ell(I_k) = 1/2^k$$

Pertanto

$$1 = \ell([0,1]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

Possiamo cercare di puntualizzare il concetto di somma infinita mediante la seguente definizione

DEFINIZIONE 5.1. *Sia a_k una successione di numeri reali e definiamo*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Se $\lim S_n$ *esiste finito, diciamo che*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S = \lim\ S_n$$

In tal caso si dice che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *è una serie convergente che ha per somma* S.

Se $\lim S_n = +\infty$ $(-\infty)$ *diciamo che* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *è una serie positivamente (negativamente) divergente.*
Se $\lim S_n$ *non esiste diciamo che la serie non è determinata.*

Consideriamo ora qualche esempio importante di serie Sia $x \in \mathbb{R}$ possiamo considerare $a_n = x^n$ e avremo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$$

Se osserviamo che

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n+1}$$

si ottiene

$$(1 - x)S_n = 1 - x^{n+1}$$

e, per $x \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Di qui si vede che

- se $|x| < 1$ $\lim S_n = \frac{1}{1-x}$
- se $x \geq 1$ $\lim S_n = +\infty$

- se $x \leq -1$ $\lim S_n$ non esiste.

Pertanto

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{se} \quad |x| < 1}$$

mentre per i restanti valori di x la serie è divergente o indeterminata.

$$\sum x^k$$

si chiama serie geometrica di ragione x.

Possiamo ottenere facilmente altri esempi di serie convergenti. usando la formula di Taylor. Consideriamo lo sviluppo di McLaurin della funzione e^x

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \ldots - \frac{x^n}{n!} = R_{n+1}(x)$$

dove il resto R_{n+1} si può esprimere nella forma di Lagrange mediante la

$$|R_{n+1}(x)| = e^c \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \|c\| \leq \|x\|$$

Pertanto, se definiamo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

si ha

$$|e^x - S_n| \leq |R_{n+1}(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

e tenendo conto che

$$\lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \text{ per ogni } \; x \in \mathbb{R}$$

si ha

$$\boxed{e^x = \lim S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

In maniera del tutto analoga si prova che

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \forall x \in [-1/2, 1]}$$

Dal momento che, per n grande

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{k_0} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$

e dal momento che

$$\sum_{k=1}^{k_0} a_k \in \mathbb{R}$$

possiamo dire che una serie converge diverge o è indeterminata indipendentemente dal termine a partire da quale si inizia a sommare; ovviamente la somma della serie cambia, cambiando il punto di partenza.

Pertanto il carattere di una serie, cioè il fatto che sia convergente, divergente o indeterminata, non è influenzato dalla scelta del primo indice di somma.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

si chiama 'resto ennesimo' della serie data ed è una serie che ha lo stesso carattere della serie stessa poichè

$$S_N - S_n = \sum_{k=n}^{N} a_k$$

si ricava, per $N \to +\infty$

$$R_n = S - S_n$$

e quindi $\lim R_n = 0$ se e solo se la serie è convergente.

Dalla definizione di serie e dal criterio di convergenza di Cauchy possiamo subito dedurre che

TEOREMA 5.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\sum a_k$ sia convergente è che*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \textit{tale che} \;\; \forall n > n_\varepsilon \;, \; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \textit{si ha} \;\; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha infatti che $\sum a_k$ è convergente se e solo se la successione delle sue ridotte ennesime è convergente ad $S \in \mathbb{R}$.

Pertanto ad essa si può applicare il criterio di Cauchy e si può affermare che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $n, m > n_\varepsilon$

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

o, equivalentemente, se $n > n_\varepsilon$ e $p \in \mathbb{N}$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

$\square$

Come conseguenza immediata otteniamo per $p = 1$, che, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > n_\varepsilon$ (per $p = 1$)

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$$

e quindi

Condizione necessaria affinché

$$\sum a_k$$

sia convergente è che

$$\lim a_k = 0$$

Sottolineiamo che la condizione è solo necessaria e pertanto non assicura, da sola, la convergenza della serie; viceversa, se non è soddisfatta, permette di concludere che la serie non è convergente.

Se ad esempio consideriamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

si ha $\lim \frac{1}{k} = 0$ e tuttavia la serie è divergente.

Infatti le sue ridotte S_n formano una successione crescente che quindi ammette limite; tale limite non può essere finito in quanto non è soddisfatto il criterio di Cauchy perché

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

1. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi

Se $a_k \geq 0$, o più in generale se ha segno costante, la successione delle ridotte ennesime è monotona; pertanto il $\lim S_n$ esiste, essendo possibili i valori $+\infty$ e $-\infty$.

Sia

$$\sum a_k$$

una serie a termini positivi, allora essa è o convergente o positivamente divergente.

DEFINIZIONE 5.2. *Diciamo che* $\sum a_k$ *è assolutamente convergente se risulta convergente* $\sum |a_k|$. *Diciamo che* $\sum a_k$ *è assolutamente divergente se* $\sum |a_k| = +\infty$.

TEOREMA 5.2. *Se* $\sum a_k$ *è assolutamente convergente, allora è convergente.*

Infatti

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

e si può concludere per il criterio di convergenza di Cauchy.

1.1. Criterio del confronto di Gauss. Siano $m > 0$, $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie tali che $0 \leq a_k \leq m b_k$; allora:

- se $\sum b_k$ converge anche $\sum a_k$ converge
- se $\sum a_k$ diverge anche $\sum b_k$ diverge.

Infatti dette S_n^a ed S_n^b le ridotte di $\sum a_k$ e $\sum b_k$, rispettivamente, si ha:

$$0 \leq S_n^a \leq m S_n^b \ .$$

Inoltre S_n^a ed S_n^b sono successioni crescenti e pertanto ammettono limite.
Possiamo anche enunciare il criterio nella seguente forma

Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie tali che a_k, b_k $>$0 e supponiamo che esista un indice k_0 tale che, per $k > k_0$

$$0 < m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$$

allora si ha che $\sum a_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere.
Se invece

$$0 < m \leq \frac{a_k}{b_k}$$

si ha che se $\sum a_k$ converge allora anche $\sum b_k$ è convergente, mentre se $\sum b_k$ diverge allora anche $\sum a_k$ è divergente.

1.2. Criterio del confronto asintotico. Poichè il carattere di una serie (non la sua somma) non dipende dall'indice da cui si parte a sommare, possiamo affermare che:

se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ sono due serie a termini positivi e se supponiamo che

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R}_+$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Se invece

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$$

si ha:

- se $\sum a_k$ è divergente, allora $\sum b_k$ è divergente;
- se $\sum b_k$ è convergente, allora $\sum a_k$ è convergente.

1.3. Criterio del rapporto D'Alembert. Sia $\sum a_k$ una serie tale che a_k >0 e supponiamo che

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Se $\ell < 1$ allora $\sum a_k$ è convergente
- se $\ell > 1$ allora $\sum a_k$ è divergente.

Infatti se $\ell < 1$ si ha, definitivamente

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < (\ell + \varepsilon) < 1$$

e pertanto se ne deduce che

$$a_{k+p} < (\ell + \varepsilon)^p \, a_k$$

la serie di termine $(\ell + \varepsilon)^p \, a_k$ è una serie geometrica di ragione < 1 e quindi è convergente.

Se $\ell > 1$, definitivamente, si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > (\ell - \varepsilon) > 1$$

e quindi

$$a_{k+p} > (\ell - \varepsilon)^p a_k$$

ed a_k non tende a 0.

1.4. criterio della radice di Cauchy. Sia $\sum a_k$ una serie tale che $a_k \geq 0$ e supponiamo che

$$\lim \sqrt[k]{a_k} = \ell \in \mathbb{R}$$

- Se $\ell < 1$ allora $\sum a_k$ è convergente
- se $\ell > 1$ allora $\sum a_k$ è divergente.

Infatti se $\ell < 1$ si ha, definitivamente

$$\sqrt[k]{a_k} < (\ell + \varepsilon) < 1 \text{ e } a_k < (\ell + \varepsilon)^k$$

mentre se $\ell > 1$ si ha, definitivamente

$$\sqrt[k]{a_k} > (\ell - \varepsilon) > 1 \text{ e } a_k > 1$$

1.5. Il criterio dell'integrale di Mc Laurin-Cauchy. I concetti di serie e di integrale. sono profondamente affini ed il fatto si riflette nel seguente criterio

Sia

$$f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

decrescente e sia $a_k = f(k)$**, allora**

$$\int_n^{n+p+1} f(x)dx \le \sum_{k=n}^{n+p} a_k \le \int_{n-1}^{n+p} f(x)dx$$

e ne deduciamo che f **è integrabile in senso improprio su** $[1, +\infty)$ **se e solo se** $\sum a_k$ **è convergente. Inoltre, posto**

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$$

si ha

$$0 \le S - S_n = R_n \le I_n$$

e

$$\left| S - \left(S_n + \frac{I_n + I_{n+1}}{2} \right) \right| \le \frac{1}{2} \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Dal momento che f è decrescente si ha

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

e sommando per $k = n, .., n+p$ si ottengono le prime due disuguaglianze.

Inoltre la funzione

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

è definita e continua per $x \in \mathbb{R}_+$ ed è crescente in $\bar{\mathbb{R}}_+$ in quanto, se $0 \leq x < y$ si ha

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \geq 0$$

Ne deduciamo che $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ esiste e per le disuguaglianze precedenti l'integrale improprio e la serie hanno lo stesso carattere.

Inoltre l'errore che si commette considerando una ridotta S_n al posto della somma della serie, essendo $a_k \geq 0$, è per difetto e si ha $S - S_n \geq 0$.

Più precisamente

$$0 \leq I_{n+1} \leq S - S_n = R_n \leq I_n$$

L'approssimazione della somma S della serie può essere ancora migliorata se si sceglie

$$S_n + (I_n + I_{n+1})/2$$

in luogo di S_n.

In tal caso si ha infatti

$$|S - S_n - (I_n + I_{n+1})/2| = |R_n - (I_n + I_{n+1})/2| \leq$$

$$\leq (I_n - I_{n+1})/2 = \frac{1}{2} \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Il precedente teorema consente di stabilire il carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

Si ha infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{per } 0 < \alpha \leq 1 \\ S \in \mathbb{R}_+ & \text{per } 1 < \alpha \end{cases}$$

1.6. Criterio dell'ordine di infinitesimo. La serie armonica generalizzata è di grande aiuto nell'applicazione del criterio del confronto asintotico. Infatti, usando la definizione di ordine di infinitesimo possiamo affermare che

Sia $\sum a_k$ una serie a termini positivi e supponiamo che a_k sia infinitesima di ordine α (non necessariamente reale); allora

- **se** $\alpha \geq \beta > 1$ **,** $\beta \in \mathbb{R}$ **, la serie è convergente** ;
- **se** $\alpha \leq 1$ **la serie è positivamente divergente .**

Osserviamo che, se $\alpha > 1$ e non è reale, non si può affermare che $\sum a_k$ è convergente, come si vede dal seguente esempio:

sia

$$a_k = \frac{1}{k \ln k}$$

$\lim a_k = 0$ con ordine $\alpha > 1$, ma $\alpha < \beta \; \forall \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$.

Non si può pertanto applicare il criterio dell'ordine di infinitesimo ma, per il criterio dell'integrale,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} a_k = +\infty$$

Sempre per il criterio dell'integrale

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ S \in \mathbb{R}_+ & \text{se } 1 < \alpha \end{cases}$$

e

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ S \in \mathbb{R}_+ & \text{se } 1 < \alpha \end{cases}$$

1.7. Serie ”telescopiche”. Se a_k è una successione, allora $\sum(a_{k+1} - a_k)$ è convergente, divergente, indeterminata a seconda che a_k sia convergente, divergente, indeterminata.

Infatti si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

2. Serie a termini di segno alterno

Sia a_k una successione di numeri non negativi e sia

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$$

In questa situazione parliamo di serie a segni alterni; per le serie a segni alterni vale il seguente risultato.

2.1. Criterio di Leibnitz. Supponiamo che $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e che inoltre $\lim a_k = 0$. Allora

- la serie è convergente ad S;
- $S_1 \leq S \leq S_0$ e pertanto $S \geq 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$
$$S_{2n} - a_{2n+1} = S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$$
- le ridotte di indice pari approssimano S per eccesso mentre quelle di indice dispari approssimano S per difetto;
- $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

Cominciamo con il mostrare che la successione delle ridotte di indice pari è decrescente, mentre la successione delle ridotte di indice dispari è crescente.

Si ha

$$
\begin{aligned}
S_{2n+2} &= S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n} \\
S_{2n+3} &= S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq S_{2n+1}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

inoltre

$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \geq 0$$

Pertanto $\lim S_{2n} = S'$ e $\lim S_{2n+1} = S''$ esistono finiti e si ha

$$S' - S'' = \lim S_{2n} - S_{2n+1} = \lim a_{2n} = 0$$

da cui deriva subito che $S' = S'' = S = \lim S_n$.

Per la 5.1 si ha inoltre

$$0 \leq a_0 - a_1 = S_1 \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_0 = a_0$$

A proposito della maggiorazione del resto di una serie a segni alterni, è evidente che è tanto più buona quanto è più grande l'ordine di infinitesimo della successione a_n. Si può migliorare la maggiorazione del resto n-esimo non appena si tenga presente il seguente che

Sia a_k **una successione tale che** $a_k \geq a_{k+i} \geq 0 \quad \forall \in \mathbb{N}$ **e supponiamo che** $\lim a_k = 0$**.**
Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{a_k - a_{k+1}}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k b_k.$$

Evidentemente $b_{k+1} \geq b_k \geq 0$ **ed inoltre**

$$\lim_{l-a+\infty} b_k = \lim \frac{a_k}{k} = 0$$

Infatti $b_{k+1} - b_k = \frac{1}{2}(a_{k+z} - a_{k+1} + a_{k+1} - a_k) \geq 0$ e l'uguaglianza dei due limiti può essere dimostrata usnado i teoremi sulle medie di Cesaro di un successione

In questo modo si ottiene una nuova serie a segni alterni, avente la stessa somma della serie data e avente un termine generale infinitesimo di ordine superiore a quello del termine generale della serie data.

Infatti

$$b_k = \frac{a_k}{k} + \omega_k$$

con $\omega_k \to 0$ e

$$\frac{b_k}{a_k} \to 0$$

2.2. Uguaglianza di Brunacci-Abel. Se a_k e b_k e se definiamo

$$B_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$$

si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p} B_{n,p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_{n,k-n}(a_k - a_{k+1})$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \ldots + a_{n+p}b_{n+p} = \\
= a_{n+1}B_{n,1} + a_{n+2}(B_{n,2} - B_{n,1}) + \ldots + a_{n+p}(B_{n,p} - B_{n,p-1}) = \\
= B_{n,1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + B_{n,2}(a_{n+2} - a_{n+3}) + \ldots + \\
+ B_{n,p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}B_{n,p} = \\
= a_{n+p}B_{n,p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_{n,k-n}(a_k - a_{k+1})\end{aligned}$$

Criterio di Dirichlet
Supponiamo che le ridotte B_n di $\sum b_k$ siano limitate da M e che a_k sia decrescente e convergente a zero.
Allora $\sum a_k b_k$ è convergente ed inoltre

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k b_k\right| \leq 2M a_{n+1}.$$

Criterio di Abel
Supponiamo che $\sum b_k$ sia convergente e a_k sia convergente e monotona. Allora $\sum a_k b_k$ è convergente.

3. Operazioni sulle serie

Per quel che concerne la somma Si può dimostrare che

TEOREMA 5.3. *Siano* $\sum a_k$ *e* $\sum b_k$ *due serie convergenti e sia* $\alpha \in \mathbb{R}$, *allora* $\sum (a_k + b_k)$ *e* $\sum \alpha a_k$ *sono convergenti e si ha*

- $\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$
- $\sum \alpha a_k = \alpha \sum a_k$

Per quanto riguarda il prodotto di due serie occorre innanzi tutto cercare di definire il termine k-esimo della serie prodotto.

Ciò può essere fatto in vari modi; qui consideriamo il prodotto secondo Cauchy, che si rivelerà utile quando tratteremo le serie di potenze.

In proposito si può dimostrare il seguente risultato.

TEOREMA 5.4. *- Mertens - Definiamo*

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Allora, se $\sum a_k$ *è assolutamente convergente e* $\sum b_k$ *è convergente, anche* $\sum c_k$ *è convergente ed inoltre, se*

$$\sum a_k = A \ , \ \sum b_k = B \ , \ \sum c_k = C$$

si ha

$$AB = C$$

Se nessuna delle serie di cui si fa il prodotto è assolutamente convergente, ma entrambe sono solo convergenti, il teorema può essere falso, come si vede considerando

$$a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \qquad , \qquad \alpha > 0$$

Si ha infatti

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{(i+1)^\alpha} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i+1)^\alpha} == (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{[(i+1)(k-i+1)]^\alpha}$$

e si vede subito che

$$|c_k| \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{k} 1 \ = (k+1)^{1-2\alpha}$$

da cui, per $0 < \alpha \leq 1/2$, $\lim c_k$ non può essere 0 .

Per quanto riguarda la possibilità di raggruppare i termini di una serie, possiamo provare un semplice risultato.

Precisiamo prima di tutto cosa intendiamo per raggruppamento dei termini di una serie.

DEFINIZIONE 5.3. *Consideriamo* $\sum a_n$ *e consideriamo una successione* k_n *a valori in* $\mathbb{N}$ *, strettamente crescente e con* $k_1 = 1$*. Definiamo*

$$b_n = \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} a_i$$

La serie $\sum b_n$ *si dice ottenuta dalla serie* $\sum a_n$ *raggruppando i termini secondo il riordinamento* k_n.

E' evidente che, dette

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad S''_m = \sum_{n=1}^{m} b_n$$

si ha

$$S''_m = \sum_{n=1}^{m} \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} a_i = \sum_{i=1}^{k_{m+1}-1} a_i = S'_{k_{m+1}-1}$$

e dal momento che $S''_{\ m}$ è una estratta di S'_n, si può affermare che:

TEOREMA 5.5. *Se $\sum a_k$ è una serie convergente, allora ogni serie ottenuta da essa, raggruppando i termini, è convergente alla stessa somma.*

Viceversa la convergenza di $\sum b_k$ per una particolare scelta della successione che genera il raggruppamento, non è sufficiente per assicurare che $\sum a_k$ converga; se infatti

$$a_k = (-1)^k \qquad \text{e} \qquad k_n = 2n - 1$$

si ha

$$b_n = \sum_{k=2n-1}^{2n} (-1)^k = 0.$$

Trattiamo per ultimo il problema del riordinamento dei termini di una serie e precisando, innanzi tutto, cosa intendiamo per riordinamento.

DEFINIZIONE 5.4. *Consideriamo $\sum a_k$ e supponiamo che $i\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sia una applicazione iniettiva e surgettiva.*

Diciamo che la serie

$$\sum a_{i(j)}$$

è ottenuta riordinando i termini di $\sum a_k$.

Per brevità chiamiamo l'applicazione i riordinamento dei termini della serie.

TEOREMA 5.6. *Se* $\sum a_k$ *è assolutamente convergente ed* $i(j)$ *è un riordinamento, allora anche* $\sum a_{i(j)}$ *è assolutamente convergente e si ha*

$$\sum a_k = \sum a_{i(j)}$$

Nel caso in cui $\sum a_k$ sia convergente, ma non assolutamente convergente è possibile trovare un riordinamento dei termini e due successioni n' e n'' in modo che $S_{n'}$ e $S_{n''}$ siano convergenti allo stesso limite o a limiti diversi, o siano divergenti.

Più precisamente

TEOREMA 5.7. - *Riemann-Dini - Supponiamo che* $\sum a_k$ *sia convergente, ma non assolutamente convergente. Siano inoltre* $\alpha < \beta$, *essendo possibile che* $\alpha = -\infty$ *e* $\beta = +\infty$.

Allora esiste un riordinamento i dei termini della serie in modo che la successione

$$S_h = \sum_{j=1}^{h} a_{i(j)}$$

abbia due estratte, l'una convergente ad α , *l'altra convergente a* β.

Concludiamo ora ricordando che la convergenza assoluta è equivalente alla convergenza di ogni suo riordinamento.

DEFINIZIONE 5.5. *Diciamo che* $\sum a_k$ *converge incondizionatamente se ogni suo riordinamento converge alla stessa somma.*

TEOREMA 5.8. - *Cauchy-Dirichlet* - $\sum a_k$ *converge assolutamente se e solo se converge incondizionatamente.*

CAPITOLO 6

LE SERIE DI FUNZIONI.

1. Successioni di Funzioni.

Lo studio di una serie di funzioni dipende, come per il caso delle serie numeriche dallo studio della successione delle sue ridotte.

Occorre pertanto definire cosa si intende per successione di funzioni ed i concetti di limite ad essa collegati.

DEFINIZIONE 6.1. *Chiamiamo successione di funzioni una applicazione definita*

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto S_n$$

con

$$S_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

DEFINIZIONE 6.2. *Sia S_n una successione di funzioni su I; diciamo che*

- *S_n converge puntualmente ad S se, per ogni $x \in I$, $\forall \varepsilon > 0$,esiste $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che*

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad \forall n > n_{\varepsilon,x}$$

- S_n *converge uniformemente ad* S *in* I *se* $\forall\varepsilon > 0$, *esiste* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\forall n > n_\varepsilon \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n > n_\varepsilon \ , \ \forall x \in I$$

Possiamo subito verificare che
S_n converge puntualmente ad S in I se

$$\lim_n S_n(x) = S(x) \quad \forall x \in I$$

mentre S_n converge uniformemente ad S in I se e solo se

$$\lim_n \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

Usando il criterio di convergenza di Cauchy, si può affermare che

S_n **converge puntualmente se e solo se la successione numerica** $S_n(x)$ **soddisfa la condizione di Cauchy**

Per quanto riguarda la convergenza uniforme si può analogamente ottenere che

Criterio di Cauchy uniforme
Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni S_n converga uniformemente su I è che $\forall\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $m, n > n_\varepsilon$ si ha

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

E' inoltre evidente che

Se S_n è una successione di funzioni uniformemente convergente ad S in I, allora S_n è puntualmente convergente ad S per ogni $x \in I$.

Non è viceversa vero che una successione puntualmente convergente sia anche uniformemente convergente, infatti la successione

$$S_n(x) = x^n \qquad \text{su} \qquad [0, 1]$$

Se una successione di funzioni converge uniformemente le proprietà di continuità, integrabilità e derivabilità della successione sono mantenute anche al limite; si può infatti dimostrare che

se S_n è una successione di funzioni continue su I, e se S_n converge uniformemente ad S su I, allora S è continua su I.

Infatti sia $x_0 \in I$ e proviamo che f è continua in x_0.

Si ha che

$$|S(x) - f(x_0)| \leq |S(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - S(x_0)|$$

per cui

$$|S(x) - S(x_0)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \ = 3\varepsilon$$

dal momento che n_0 può essere fissato in modo che

$$|S_{n_0}(x) - S(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in I$$

e che, per $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$$

Si ha anche che

Se S_n una successione di funzioni continue su $I = [a, b]$ e se S_n converge uniformemente ad S su I, allora

$$\int_a^x S_n(t)dt \text{ **converge uniformemente ad** } \int_a^x S(t)dt \text{ **su** } I$$

Poiché S_n e di conseguenza S sono continue su I, risultano anche integrabili su $[a, x] \subset I$ ed inoltre

$$\left| \int_a^x S_n(t)dt - \int_a^x S(t)dt \right| \le \int_a^x |S_n(t) - S(t)|dt \le \varepsilon(x - a) \le \varepsilon(b - a)$$

non appena si sia tenuto conto che S_n converge uniformemente ad S su $[a, b]$ e si sia scelto n abbastanza grande.

Osserviamo che l'ipotesi di continuità è comoda e ragionevole ma non indispensabile; con qualche complicazione può essere sostituita con l'ipotesi di integrabilità.

In questo senso possiamo provare che

Se S_n è una successione di funzioni integrabili in senso improprio in $[a,+\infty)$, se S_n converge uniformemente ad S su $[a,b]$ per ogni $b \geq a$ e se esiste una funzione g su $[a,+\infty)$ tale che

$$|S_n(x)| \leq g(x) \ , \forall x \in [a,+\infty] \ , \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx \ < +\infty$$

allora S risulta integrabile in senso improprio in $[a,+\infty)$ e si ha

$$\lim_n \int_a^{+\infty} S_n(x)dx = \int_a^{+\infty} S(x)dx$$

Infatti

$$\left| \int_a^{+\infty} S_n(x)dx - \int_a^{+\infty} S(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)|dx + \int_b^{+\infty} |S_n(x) - S(x)|dx \leq$$

$$\leq \varepsilon + 2\int_b^{+\infty} g(x)dx \ \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

se n è abbastanza grande e se b è fissato in modo che

$$\int_b^{+\infty} g(x)dx \; < \varepsilon$$

Per quanto riguarda la derivabilità

Se $S_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$ e se

- S_n' **converge uniformemente a** ϕ **su** (a,b)
- **esiste** $x_0 \in (a,b)$ **tale che**

$$S_n(x_0) \to \alpha.$$

Allora S_n **converge uniformemente alla funzione** S **definita da**

$$S(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt$$

e risulta

$$\frac{d}{dx} \lim S_n(x) = \lim \frac{d}{dx} S_n(x).$$

Infatti

$$S_n(x) = S_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} S_n'(t)dt$$

e pertanto, S_n converge uniformemente ad S.

Inoltre

$$\lim S_n'(x) = \phi(x) = S'(x) = (\lim f_n)'(x)$$

Si può anche provare che

Se f_n è una successione di funzioni derivabili in (a,b) e se S'_n converge uniformemente in (a,b) e esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $S_n(x_0)$ è convergente allora S_n converge uniformemente in (a,b) ad una funzione S che è derivabile e si ha

$$S'(x) = \lim S'_n(x)$$

Sia f_n una successione di funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n(x)$ è decrescente rispetto ad n e $\lim f_n(x) = $ **0 per ogni fissato** $x \in [a,b]$.
Allora f_n converge uniformemente alla funzione identicamente nulla su $[a,b]$.

Sia f_n una successione di funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n(x)$ è decrescente rispetto ad n e convergente verso f(x), $\forall x \in [a,b]$. **Se inoltre f risulta continua in $[a,b]$, allora f_n converge uniformemente ad f in $[a,b]$.**

Sia f_n una successione di funzioni continue in $[a, b]$ allora f_n converge uniformemente in $[a, b]$ se e solo se f_n converge uniformemente in (a, b).

Sia f_n una successione di funzioni su (a, b) un uniformemente convergente ad f. Supponiamo che

$$\lim_{x \to b^-} f_n(x) = C_n$$

e

$$\lim_n C_n = C$$

Allora

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = C$$

2. Serie di funzioni.

Ricordiamo alcune definizioni a proposito delle serie

Ad ogni successione f_k di funzioni su I; possiamo associare, come per le serie numeriche la successione delle sue ridotte definite da

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

e possiamo scrivere

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

qualora il $\lim S_n(x)$ esista finito in senso puntuale o uniforme.

Diciamo, nel primo caso che $\sum f_k$ converge puntualmente in I mentre, nel secondo caso diciamo che $\sum f_k$ converge uniformemente in I.

Diciamo inoltre che $\sum f_k$ converge assolutamente in I se $\sum |f_k|$ converge puntualmente in I.

Diciamo infine che $\sum f_k$ converge totalmente in I se, posto

$$\lambda_k = \sup_{x \in I}\{|f_k(x)|\}$$

$\sum \lambda_k$ è convergente.

Vale la pena di ricordare che, per il criterio di Cauchy

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\sum f_k$ sia uniformemente convergente in I è che $\forall \varepsilon > 0$ esista $n_\varepsilon \in N$ tale che se $n > n_\varepsilon$, $\forall p \in N$ si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Ne segue per $p = 1$

Se $\sum f_k$ converge uniformemente in I allora la successione f_k converge uniformemente a zero in I.

inoltre

$\sum f_k$ converge uniformemente in I se e solo se la successione R_n definita da

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

converge uniformemente a zero in I.

Poichè

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k$$

il criterio di convergenza di Cauchy permette di affermare che

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Convergenza Totale} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \text{Convergenza Uniforme} & & & & \text{Convergenza Assoluta} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \text{Convergenza Puntuale} & & \end{array}$$

mentre le due serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (x^k - x^{k+1})$$

mostrano che le implicazioni mancanti possono essere false.

Infatti la prima serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ ma non è ivi né assolutamente né totalmente convergente, mentre la seconda converge assolutamente in $[0, 1]$, ma non è ivi né uniformemente né totalmente convergente.

Il fatto che la convergenza totale implichi la convergenza uniforme è spesso indicato con il nome di *criterio di Weierstraß*; possiamo anche vedere che

$\sum f_k$ è totalmente convergente in I se e solo se esiste una successione numerica λ_k tale che

$$|f_k(x)| \leq \lambda_k \quad e \quad \sum \lambda_k < +\infty$$

Ricordiamo ora tutta una serie di risultati sulle serie di funzioni che derivano dai risultati sulle serie numeriche e sulle successioni di funzioni.

Siano f_k e φ_k due successioni di funzioni su I tali che

$$|f_k(x)| \leq |\varphi_k(x)| \qquad \forall x \in I.$$

Se $\sum |\varphi_k|$ è uniformemente convergente su I allora anche $\sum |f_k|$ e $\sum f_k$ è uniformemente convergente su I allora anche $\sum |f_k|$ è $\sum f_k$ è uniformemente convergente su I.

Siano f_k e g_k due successioni di funzioni su I tali che le ridotte F_n di $\sum f_k$ siano uniformemente limitate in I e sia g_k decrescente e convergente uniformemente a 0 su I. Allora $\sum f_k g_k$ è uniformemente convergente su I.
Alla stessa conclusione si può arrivare supponendo che $\sum f_k$ sia uniformemente convergente su I e g_k decresca uniformemente a g su I.

Sia $f_k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue e decrescenti a zero; allora

$$\sum (-1)^k f_k(x)$$

è uniformemente convergente su $[a, b]$.

Se f_k è una successione di funzioni continue su I e se $\sum f_k$ è ivi uniformemente convergente, allora

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

è una funzione continua in I.

Se f_k è una successione di funzioni integrabili in $[a, b]$ e se $\sum f_k$ è ivi uniformemente convergente ad S, allora si ha

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Se f_k è una successione di funzioni integrabili in senso improprio su $[a,+\infty)$ e se $\sum f_k$ è uniformemente convergente ad S su ogni intervallo $[a,b]$, con $b > a$; se inoltre esiste una funzione ϕ su $[a,+\infty)$ tale che

$$|S_n(x)| \leq \phi(x) \quad \forall x \in [a,+\infty) \quad e \quad \int_a^{+\infty} \phi(x)dx < +\infty$$

allora

$$\int_a^{+\infty} S(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^{+\infty} f_k(x)dx.$$

Sia f_k una successione di funzioni di classe $\mathcal{C}^1((a,b))$ e supponiamo che $\sum f_k'$ converga uniformemente su (a,b) ad una funzione s e che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che $\sum f_k(x_0)$ converga ad α.
Allora $\sum f_k$ risulta uniformemente convergente su (a,b) alla funzione S definita da

$$S(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} s(t)dt$$

ed inoltre

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$$

Sia f_k una successione di funzioni derivabili in (a,b) tali che $\sum f_k$ sia puntualmente convergente in $x_0 \in (a,b)$; supponiamo inoltre che $\sum f_k'$ sia uniformemente convergente ad s in (a,b).
Allora $\sum f_k$ è uniformemente convergente in (a,b) ad una funzione S derivabile e risulta $S' = s$ ovvero

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$$

Sia f_k una successione di funzioni continue e non negative su $[a,b]$; Se $\sum f_k$ è puntualmente convergente ad S e se S risulta continua in $[a,b]$, allora $\sum f_k$ è uniformemente convergente ad S su $[a,b]$.

3. Le Serie di Taylor.

Se $f \in \mathcal{C}^\infty((a,b))$ e se $x_0 \in (a,b)$ possiamo allora considerare la formula di Taylor di ordine n per f centrata in x_0 per qualunque valore di n ed avremo che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

dove

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad , \qquad \xi \in (a,b)$$

è il resto nella forma di Lagrange.

Se poniamo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

S_n risulta essere una ridotta della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

e risulta

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

Qualora $R_n(x) \to 0$, quando $n \to +\infty$, per $x \in I \subset \mathbb{R}$, possiamo affermare che

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x) \to 0 \quad \text{per} \quad x \in I$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ risulta convergente e la sua somma è $f(x)$

Possiamo quindi scrivere che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \text{per} \quad x \in I$$

e diciamo che f è sviluppabile in serie di Taylor nel punto x_0 per $x \in I$.

Risulta quindi interessante conoscere condizioni sufficienti affichè $R_n(x) \to 0$ per $x \in I$ e, in proposito, possiamo dimostrare che

- **se** $|f^{(k)}(x)| \leq HM^k$ **per ogni** $x \in (a, b)$ **e per ogni** $k \in \mathbf{N}$ **allora** $R_n(x) \to 0$ **per** $x \in (a, b)$**;**
- **se** $|f^{(k)}(x)| \leq HM^k k!$ **per ogni** $x \in (a, b)$ **e per ogni** $k \in \mathbf{N}$ **allora** $R_n(x) \to 0$ **per** $x \in (x_0 - 1/M, x_0 + 1/M)$**.**

Infatti nel primo caso si ha

$$|f(x) - S_n(x)| \leq H \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall x \in (a, b)$$

mentre, nel secondo caso

$$|f(x) - S_n(x)| \leq H(M|x - x_0|)^{n+1} \qquad \forall x \in (a, b).$$

e Si può concludere osservando che in entrambi i casi i secondi membri tendono a zero, nelle ipotesi considerate (si può ad esempio usare il criterio del rapporto.

Osserviamo che può accadere che la serie (21.1) sia convergente senza che f sia sviluppabile in serie di Taylor. Se infatti consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si ha che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k$, e pertanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \neq f(x) \qquad \forall x \neq 0$$

I criteri di cui sopra permettono di trovare facilmente gli sviluppi di e^x, $\sin x$, $\cos x$.

È anche possibile dimostrare un criterio di sviluppabilità in serie di Taylor facendo uso del resto in forma integrale.

TEOREMA 6.1. *-Bernstein- Sia* $f \in C^{\infty}((a,b))$ *e siano* $x_0, \alpha \in (a,b), x_0 < \alpha$.
Se $f^{(k)}(x) \geq 0$ *per* $x_0 \leq x \leq \alpha$. *Allora* f *è sviluppabile in serie di Taylor di centro* x_0 *in* $[x_0, \alpha]$

Poichè le serie di Taylor sono anche serie di potenze si potrà vedere che la serie converge in $(-\alpha, \alpha]$.
Usando il teorema precedente si può provare che la serie binomiale converge in $[-1, 1)$.

4. Le serie di potenze.

Si tratta delle serie della forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ è fissato e si chiama centro della serie. mentre i valori a_k si dicono coefficienti della serie.

E' chiaro che a meno di una traslazione possiamo sempre supporre che $x_0 = 0$ e pertanto consideriamo soltanto serie di potenze centrate nell'origine e cioè della forma:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

A proposito della convergenza di una serie di potenze si può subito verificare che

Se la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

converge per $x = \alpha$ **allora converge assolutamente in** $[-\beta, \beta]$ **per ogni** $\beta < |\alpha|$

Infatti, per $x \in [-\beta, \beta]$, avremo che

$$|a_k x^k| \leq |a_k|\beta^k = |a_k|\frac{\beta^k}{\alpha^k}\alpha^k \leq M\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k$$

dal momento che

$|a_k|\alpha^k$ è infinitesimo in quanto termine generale di una serie convergente. Pichè inoltre $\frac{\beta}{\alpha} < 1$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k$$

è il termine generale di una serie geometrica convergente e si può concludere, usando il criterio di Weierstraß.

In pratica quindi, se una serie di potenze converge in un punto, converge anche in tutto il segmento che congiunge il punto all'origine (centro della serie).

Ciò autorizza a definire quel che si chiama raggio di convergenza della serie di potenze come

$$R = \sup\{\alpha \geq 0 : \sum |a_k|\alpha^k \in \mathbb{R}\}$$

Si prova che

- **una serie di potenze converge totalmente per** $|x| \leq \beta < R$
- **una serie di potenze non converge se** $|x| \geq R$

Infatti poichè la serie converge per $x = \beta + \varepsilon < R$ avremo che essendo la convergenza per $|x| \leq \beta$ è garantita da quanto abbiamo detto in precedenza

Se viceversa la serie convergesse anche solo puntualmente per $x = \gamma > R$ allora ci sarebbe convergenza assoluta per $|x| \leq \gamma - \varepsilon$ e $\gamma - \varepsilon > R$, e questo contraddirrebbe la definizione di R.

Non siamo invece in grado di dire qualcosa sul comportamento della serie quando $|x| = R$.

Consideriamo infatti

$$\sum x^k \ , \ \sum \frac{x^k}{k} \ , \ \sum \frac{x^k}{k^2}$$

E' facile vedere che in tutti i casi $R = 1$, mentre quando $|x| = 1$ si ha che

- la prima serie non è convergente $\forall x$;
- la seconda serie converge se $x = -1$ e diverge se $x = 1$;
- la terza serie converge $\forall x$.

Vele il seguente teorema

TEOREMA 6.2. - *Abel - Consideriamo* $\sum a_k x^k$ *e sia* $R > 0$ *il suo raggio di convergenza. Se la serie*

$$\sum a_k R^k$$

converge allora $\sum a_k x^k$ *converge uniformemente in* $[0, R]$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo intanto supporre $R = 1$ a meno di considerare $\frac{x}{R}$ in luogo di x Per l'uguaglianza di Brunacci-Abel avremo che posto

$$B_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = x^{n+p} B_{n,p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_{n,k-n}(x_k - x_{k+1})$$

per cui

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k\right| \leq |x^{n+p}B_{n,p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left|B_{n,k-n}(x^k - x^{k+1})\right| \leq$$

$$\leq |x^{n+p}B_{n,p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_{n,k-n}||x^k - x^{k+1}|$$

Per n abbastanza grande avremo che $|B_{n,p}| < \varepsilon$ e quindi se consideriamo che $x \in [0,1]$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k\right| \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x^k - x^{k+1}\right) \leq \varepsilon \left(1 + 1\right))$$

$\square$

Possiamo calcolare il raggio di convergenza di una serie applicando il criterio del rapporto o il criterio della radice alla serie

$$\sum |a_k x^k|$$

I criteri citati sono inutili quando il limite del rapporto o della radice è 1; osserviamo che questo caso si verifica negli estremi dell'intervallo di convergenza.

Possiamo anche affermare che

TEOREMA 6.3. *Se*

$$\lim \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \qquad , \qquad \lim \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

esistono, allora sono uguali al raggio di convergenza R di $\sum a_k x^k$.

4.1. Derivabilità di una serie di potenze. Consideriamo

$$\sum a_k x^k$$

e supponiamo che $R > 0$ sia il suo raggio di convergenza, definiamo inoltre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Allora f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

per $|x| < R$;

Se infatti consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

poichè

$$|a_k x^k| \leq |k a_k x^{k-1}|$$

per $k \geq |x|$, possiamo affermare che se la serie delle derivate converge assolutamente allora anche la serie di partenza converge assolutamente, inoltre, poichè

$$|k a_k x^{k-1}| \leq |a_k y^{k-1}| k \left(\frac{|x|}{|y|} \right)^{k-1}$$

e quindi se la serie di partenza converge assolutamente allora anche la serie delle derivate converge assolutamente.

In altre parole le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza e quindi possiamo applicare il teorema di derivazione per serie per giustificare quanto affermato.

Inoltre si può dimostrare per induzione che

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

per cui f è sviluppabile in serie di Taylor ed il suo sviluppo di Taylor è dato da

$$\sum a_k z^k$$

.

Concludiamo questo paragrafo illustrando brevemente come possono essere ricavati gli sviluppi di Taylor delle funzioni (reali) $\ln(1+x)$ e $\arctan(x)$; osserviamo che lo sviluppo della prima funzione può essere ricavato anche elementarmente e qui ne estendiamo solo il campo di sviluppabilità, mentre lo sviluppo della seconda funzione non è facilmente ricavabile in maniera diversa da quella più sotto illustrata.

Tali sviluppi sono ottenuti per integrazione da particolari serie geometriche. Ci limitiamo ad indicare le operazioni da compiere precisando solo che tali operazioni sono giustificate dai precedenti teoremi di integrazione per serie.

Si ha

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

per $-1 < x < 1$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-t^2)^k \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

per $-1 < x < 1$

Osserviamo altresì che si può vedere che lo sviluppo di $\ln(1+x)$ è valido in $(-1, 1]$.

5. Le serie di Fourier.

È spesso utile saper rappresentare una funzione

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

mediante la somma infinita

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

per opportune scelte dei coefficienti a_k e b_k.

Chiaramente la funzione F ottenuta è periodica di periodo 2π e può non coincidere con f fuori dall'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Gli enunciati relativi alla possibilità di ottenere una rappresentazione di questo tipo trovano collocazione naturale in uno spazio di funzioni per definire il quale è necessario conoscere la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, tuttavia possiamo trovare un ragionevolmente semplice ambiente di lavoro considerando la seguente classe di funzioni.

Chiamiamo $\mathcal{F}^2$ lo spazio vettoriale delle funzioni

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

tali che f ed f^2 sono integrabili in $[-\pi, \pi]$

Possiamo verificare che $\mathcal{F}^2$ è uno spazio vettoriale e definiamo

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in [-\pi, \pi]\}$$
$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

Si può verificare, che

$$\|f\|_2 \leq 2\pi \|f\|_\infty$$

e quindi se f_n è una successione di funzioni in $\mathcal{F}^2$

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

se e solo se f_n converge uniformemente ad $f \in \ [-\pi, \pi]$

Ciò suggerisce la possibilità di dire che f_n converge in media quadratica ad f se

$$\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$$

Questo tipo di convergenza è molto naturale nell'ambito che stiamo esaminando ed è intuitivamente evidente che esso tiene conto del comportamento medio delle funzioni f_n.

Quanto abbiamo in precedenza osservato permette di affermare che se f_n converge uniformemente ad f, allora f_n converge in media quadratica alla stessa funzione.

Infine si può verificare che se

$$f_n(x) = \left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)^n$$

f_n converge in media quadratica ma non uniformemente.

Cominciamo con l'osservare che affinchè si possa avere

$$f(x) = F(x)$$

i coefficienti a_n e b_n devono essere definiti in un certo modo; infatti, si può calcolare, integrando ed usando le formule di bisezione e di prostaferesi che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos hx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx \sin hx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin hx dx = 0$$

per ogni scelta di $k, h = 1, 2, \ldots$ e quindi, moltiplicando la

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

per $\cos kx$ e per $\sin kx$ ed integrando, possiamo ottenere che deve risultare

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt$$

per $k = 0, 1, .., n, ..$.

Le precedenti uguaglianze risultano pertanto necessarie affinchè la $f(x) = F(x)$ sia verificata e quindi è d'obbligo porre la seguente definizione.

Se $f \in \mathcal{F}^2$, chiamiamo coefficienti di Fourier di f i valori

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt$$

per $k = 0, 1, .., n, ..$.

Osserviamo che

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \quad , \quad b_0 = 0.$$

La serie

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

si chiama serie di Fourier associata alla funzione f. Indichiamo con F_n le sue ridotte.

E' importante stabilire sotto quali condizioni accade che

$$f(x) = F(x)$$

Per $f \in \mathcal{F}^2$, usando opportunamente le regole del calcolo integrale (integrazione per sostituzione, per parti ...) si può verificare che

- **se** f **è pari** $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ktdt$**,** $b_k = 0$**;**
- **se** f **è dispari** $a_k = 0$ **,** $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin ktdt$**;**
- **se** f **è derivabile su** $\mathbb{R}$ **e** $f' \in \mathcal{F}^2$

$$a'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos ktdt = kb_k$$

$$b'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ktdt = -ka_k$$

Si possono inoltre dimostrare i seguenti risultati:

Se $f \in \mathcal{F}^2$ **e se** x **è tale che**

$$f(x+) = \lim_{x\to 0+} f(x) \;\;,\;\; f(x-) = \lim_{x\to 0-} f(x) \;\;,\;\; f'_+(x) \;\;,\;\; f'_-(x)$$

esistono finiti. Allora

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = F(x)$$

Se $f \in \mathcal{F}^2$, se f è continua su $\mathbb{R}$ ed $f' \in \mathcal{F}^2$ allora

$$\lim \|f - F_n\|_\infty = 0$$

Se supponiamo che $f \in \mathcal{F}^2$, allora

$$\lim \|f - F_n\|_2 = 0$$

5.1. Polinomi trigonometrici e Ridotte della serie di Fourier. Le ridotte di una serie di Fourier sono della forma

$$F_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Si tratta pertanto di combinazioni lineari delle funzioni

$$\sin kx \quad , \quad \cos kx \quad , k = 0, 1, 2, 3, ..., n, ...$$

ottenute usando i coefficienti di Fourier a_k e b_k.

Simili combinazioni lineari, ma a coefficienti generici

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

dove $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. si indicano di solito con il nome di polinomi trigonometrici.

Possiamo pertanto affermare che le ridotte di una serie di Fourier sono particolari polinomi trigonometrici.

Indichiamo con $\mathcal{T}^n$ l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado n. e verifichiamo che in $\mathcal{T}^n$, le ridotte F_n godono di particolari proprietà.

Possiamo calcolare usando le uguaglianze trigonometriche che abbiamo citato in precedenza che, se T_n è un polinomio trigonometrico, allora

$$\|T_n\|_2^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right).$$

ed, in particolare, se $f \in \mathcal{F}^2$

$$\|F_n\|_2^2 = \pi \left(\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Si verifica che, fissata $f \in \mathcal{F}^2$, tra tutti i polinomi trigonometrici T_n di grado n, quello che rende minimo lo scarto quadratico medio

$$\|f - T_n\|_2^2$$

è quello i cui coefficienti sono i coefficienti di Fourier.

Infatti se ricordiamo che

$$\langle f, T_n \rangle =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx = \pi \left(\frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k) \right) =$$

$$= \langle F_n, T_n \rangle$$

si ha

$$\begin{aligned}\|f-T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2 + \|F_n\|_2^2 + \|T_n\|_2^2 - 2\langle f, T_n\rangle = \\ = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2 + \|F_n\|_2^2 + \|T_n\|_2^2 - 2\langle F_n, T_n\rangle = \\ = \|F_n - T_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2\end{aligned}$$

quindi

$$\min\{\|f-T_n\|_2^2 \ : \ T_n \in \mathcal{T}^n \} = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2$$

ed il minimo è assunto quando $T_n = F_n$.

Poichè quindi

$$\|f-T_n\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2$$

possiamo infine ottenere che

Disuguaglianza di Bessel - Per $f \in \mathcal{F}^2$,

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$

Avremo inoltre che

$$\|f - F_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2$$

e, poichè per $f \in \mathcal{F}^2$ la serie di Fourier converge in media quadratica, otteniamo

$$\lim_n \|f\|_2^2 - \|F_n\|_2^2 = 0$$

Ciò si può riscrivere nella forma

uguaglianza di Parseval -

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$

Ricordiamo infine un risultato di stima dell'errore per le serie di Fourier

Se $f, f^{(p)} \in \mathcal{F}^2$ **e se**

$$\|f^{(p)}\|_2 \leq M$$

allora

$$|f(x) - F_n(x)| \leq \frac{2M}{\pi(2p-1)n^{p-1/2}}$$

È anche molto interessante studiare il comportamento delle medie di Cesaro della successione delle ridotte di una serie di Fourier, in quanto ciò permette di provare un importante teorema di approssimazione per le funzioni continue e periodiche.

Ricordiamo che, date una successione a_n si chiamano medie di Cesaro di an i termini b_n della successione definita da $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$

Sia $f \in \mathcal{F}^2$ definiamo le medie di Cesaro C_n della successione delle ridotte della serie di Fourier nella seguente maniera:

$$C_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k(x)$$

Sia $f \in \mathcal{F}^2$ e sia $K_n(t)$ definito da

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$$

Si ha

$$k_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2n} (\frac{\mathrm{sin} Y_2 nt}{sin Y_2 t}^2 & 0 < (t) \leq K \\ \frac{1}{2n} & t = 0 \end{cases}$$

ed inoltre

$$C - n(x) = \frac{1}{K} \int_{-K}^{K} f(x+t) K_n(t) dt.$$

Teorema di Fejér - Sia f continua in $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π. Allora la successione C_n delle medie di Fejér converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$.

Teorema di approssimazione di Weierstrass - È possibile approssimare uniformemente ogni funzione continua su $\mathbb{R}$ periodica di periodo 2π mediante polinomi trigonometrici.

5.2. Serie di Fourier su intervalli generici. Naturalmente accade di voler sviluppare in serie di Fourier una funzione

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

per cui è opportuno studiare come i risultati ottenuti su $[-\pi,\pi]$ possano essere usati per il caso in esame.

A tal fine è sufficiente considerare la funzione

$$g : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$g(x) = f\left(a + (x+\pi)\frac{b-a}{2\pi}\right)$$

Se infatti consideriamo il suo sviluppo in serie di Fourier

$$G(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos ktdt \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin ktdt$$

per $k = 0, 1, .., n, ..$. e, sotto opportune condizioni per g, possiamo affermare che

$$g(x) = G(x)$$

da cui

$$f(x) = g\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) + b_k \sin k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) \tag{6.1}$$

Occorre a questo punto esprimere i coefficienti a_k e b_k in funzione di f e questo può essere fatto integrando per sostituzione.

$$
\begin{aligned}
a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos kt\, dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(a + (t+\pi)\frac{b-a}{2\pi}\right)\cos kt dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) d\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{b-a}\int_a^b f(x)\cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx = \\
&= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) dx
\end{aligned}
$$

In maniera del tutto simile si calcola che

$$
\begin{aligned}
b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin kt\; dt == \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{b-a}\int_a^b f(x)\sin k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right)dx = \\
= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin k\left(-\pi + (x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right)dx
\end{aligned}
$$

Poichè, usando ad esempio le formule di addizione, si ottiene che

$$
\begin{aligned}
\cos(k\pi + \beta) &= \pm\cos(\beta)\\
\sin(k\pi + \beta) &= \pm\sin(\beta)
\end{aligned}
$$

possiamo scrivere che

$$
(6.2)\quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) + b_k \sin k\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a}\right)
$$

con

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos k \left((x-a) \frac{2\pi}{b-a} \right) dx$$
$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin k \left(+(x-a) \frac{2\pi}{b-a} \right) dx$$

5.3. Casi Particolari interessanti. Per particolari scelte significative dell'intervallo $[a, b]$ troviamo

Per $[a, b] = [0, 2T]$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx\frac{\pi}{T} + b_k \sin kx\frac{\pi}{T}$$

con

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x) \cos k\frac{\pi}{T}x dx$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x) \sin k\frac{\pi}{T}x dx$$

Per $[a, b] = [-T, T]$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k(x+T)\frac{\pi}{T} + b_k \sin k(x+T)\frac{\pi}{T}$$

con

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \cos k(x+T)\frac{\pi}{T} dx$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \sin k(x+T)\frac{\pi}{T} dx$$

ed anche

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx\frac{\pi}{T} + b_k \sin kx\frac{\pi}{T}$$

con

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \cos kx\frac{\pi}{T}dx$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \sin kx\frac{\pi}{T}dx$$

in quanto

$$\cos k(x+T)\frac{\pi}{T} = \pm\cos kx\frac{\pi}{T}$$
$$\sin k(x+T)\frac{\pi}{T} = \pm\sin k(x\frac{\pi}{T}$$

5.4. Serie di Fourier in forma complessa. Consideriamo lo sviluppo di una funzione f su un intervallo $[-t, T]$ (si veda il paragrafo precedente); dalle formule di Eulero otteniamo che

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} + e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right)$$
$$\sin kx = \frac{1}{2\imath}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} - e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right)$$

e che

$$e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} = \cos k\frac{\pi}{T}x + \imath sink\frac{\pi}{T}x$$
$$e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x} = \cos k\frac{\pi}{T}x - \imath\sin k\frac{\pi}{T}x$$

quindi

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{\pi}{T}x =$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{1}{2}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} + e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right) + b_k \frac{1}{2\imath}\left(e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} - e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(a_k - \imath b_k\right) e^{\imath k\frac{\pi}{T}x} + \frac{1}{2}\left(a_k + \imath b_k\right) e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}$$

Se teniamo conto che

$$a_k = a_{-k} \qquad , \qquad b_k = -b_{-k}$$

ricaviamo infine che

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(a_k - \imath b_k\right) e^{\imath k \frac{\pi}{T} x} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}\left(a_{-k} - \imath b_{-k}\right) e^{\imath k \frac{\pi}{T} x} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k \frac{\pi}{T} x} . e^{\imath k \frac{\pi}{T} x}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k \frac{\pi}{T} x} .$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2}\left(a_{-k} - \imath b_{-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\frac{1}{2}\left(\cos k\frac{\pi}{T}x - \imath \sin k\frac{\pi}{T}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\frac{1}{2}e^{-\imath k\frac{\pi}{T}x}.$$

Riassumendo avremo che

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k \frac{\pi}{T} x}$$

con

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-\imath k \frac{\pi}{T} x}.$$

6. La Trasformata di Fourier.

Sostituendo i valori di c_k nella serie otteniamo, nel caso in cui $f = F$ e cioè f sia sviluppabile in serie di Fourier,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T} s} ds \right) e^{\imath k \frac{\pi}{T} x} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T}(s-x)} ds \approx$$

$$\approx \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T}(s-x)} ds$$

non appena si supponga f assolutamente integrabile su R e T sufficientemente grande.

Se ora definiamo

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\imath k \frac{\pi}{T}(s-x)} ds$$

Passando al limite per $T \to +\infty$ è quindi naturale affermare, e si può dimostrare sotto opportune condizioni, che

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{T}\varphi\left(k\frac{\pi}{T}\right) \to \int_{-\infty} +\infty\varphi(\omega)d\omega$$

Otteniamo in questo modo che, sotto opportune ipotesi,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-\imath k\omega(s-x)}ds\right)d\omega$$

e

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath k\omega x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{\imath k\omega s}ds\right)d\omega$$

Quest'ultima uguaglianza è nota come Uguaglianza integrale di Fourier e costituisce la base su cui si fonda la teoria delle trasformate di Fourier. Più precisamente si può dimostrare che

Se f è assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$ e se in $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+s)-f(x+)}{s}\right| ds \quad e \quad \int_{-\delta}^0 \left|\frac{f(x+s)-f(x-)}{s}\right| ds$$

esistono finiti per $\delta > 0$ allora

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega(t-x)}dtd\omega$$

Osserviamo esplicitamente che l'integrale esterno è da intendersi nel senso della parte principale, (o del valore principale) , ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}.$$

DEFINIZIONE 6.3. *Se fè assolutamente integrabile; chiamiamo trasformata di Fourier di f la funzione $\mathcal{F}$ definita in $\mathbb{R}$ da*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Osserviamo che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - \imath\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

e poiché $|f|$ è integrabile, è lecito affermare l'esistenza dei tre integrali.

Il teorema integrale di Fourier consente di affermare che

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega}$$

intendendo il secondo integrale convergente nel senso della parte principale e consente di ricostruire la funzione nota la sua trasformata.

Procediamo ora ad elencare le proprietà delle trasformate di Fourier.

Se f, g sono assolutamente integrabili, allora

- **per ogni** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g}$$

- **se** $\varphi(t) = f(\alpha t)$ **,** $\alpha \neq 0$
$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$
- **se** $\varphi(t) = f(t - t_0)$ **,** $t_0 \in \mathbb{R}$
$$\hat{\phi}(\omega) = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega)$$
- **se** $\varphi(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$ **,** $\omega_0 \in \mathbb{R}$
$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

Se inoltre f è derivabile e se f' è assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$, allora

- $$\widehat{f'}(\omega) = \imath\omega\hat{f}(\omega);$$
- **se $\varphi_n(t) = t^n f(t)$ e se ϕ è assolutamente integrabile si ha**
$$(-\imath)^n\widehat{\phi_n}(\omega) = \frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega)$$
- **se**
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)| dt < HM^n n!$$

allora

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\imath)^n m_n \omega^n}{n!}$$

per $|\omega| < 1/M$**, dove**

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt$$

è il momento di ordine n **di** f**.**

Se la maggiorazione vale senza $n!$**, lo sviluppo in serie è valido per ogni** $\omega \in \mathbb{R}$**.**

DEFINIZIONE 6.4. *Se f e g sono assolutamente integrabili, ed almeno una è limitata definiamo prodotto di convoluzione di f per g la funzione, che indicheremo con $f * g$, definita da*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds$$

Osserviamo subito che si ha

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) g(u) du = (g * f)(t)$$

Si può dimostrare che

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}}$$

6.1. Il teorema del campionamento di Shannon. Consideriamo una funzione f che non abbia componenti di frequenza maggiore di T, cioè supponiamo che

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = 0 \qquad \text{per} \qquad |\omega| > \omega_0$$

Possiamo allora sviluppare F in serie di Fourier ed ottenere che, se definiamo F_p il prolungamento di F per periodicità,

$$F_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\imath k \frac{\pi}{\omega_0}\omega}$$

con

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\omega) e^{\imath k \frac{\pi}{\omega_0} \omega}.$$

(Osserviamo che i segni negli esponenziali che compaiono nella serie e nella definizione dei coefficienti hanno segno opposto a quello solitamente usato; ciò non cambia la sostanza in quanto la serie è estesa a tutti gli interi)

Se adesso chiamiamo

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

possiamo scrivere che

$$F(\omega) = F_p(\omega) H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k H(\omega) e^{-\imath k \frac{\pi}{\omega_0} \omega}$$

ed, antitrasformando,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}c_k H(\omega)e^{-\imath k\frac{\pi}{\omega_0}\omega}e^{\imath\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}e^{-\imath\omega(k\frac{\pi}{\omega_0}-t)}d\omega$$

Pertanto

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} c_k \left(\frac{e^{\imath\omega_0 (k\frac{\pi}{\omega_0} - t)} - e^{-\imath\omega_0 (k\frac{\pi}{\omega_0} - t)}}{\imath(k\frac{\pi}{\omega_0} - t)} \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} c_k \frac{\sin(\omega_0 (k\frac{\pi}{\omega_0} - t))}{(k\frac{\pi}{\omega_0} - t)} =$$

Dalla definizione di $\hat{f}$ si ricava che

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{\imath\omega t} d\omega$$

e quindi

$$\hat{f}\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\omega) e^{\imath k \frac{\pi}{\omega_0}\omega} d\omega = c_k \frac{\omega_0}{\pi}$$

$$c_k = \frac{k\pi}{\omega_0}$$

e ne concludiamo che

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0}{\pi} c_k \frac{\sin(\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0} - t))}{\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0} - t)} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin(\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0} - t))}{\omega_0(k\frac{\pi}{\omega_0} - t)}$$

7. La trasformata di Laplace

Sia $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti che supponiamo prolungata a 0 sui reali negativi; definiamo

$$\tilde{f}(\sigma + i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt$$

ovvero, se $\xi = \sigma + i\omega$,

$$\tilde{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\xi t}dt$$

per quei valori di $\xi \in \mathbb{C}$ per cui l'integrale risulta convergente.

Allo scopo di chiarire la struttura del campo di definizione di $\tilde{f}$ si può dimostrare che: sea $\tilde{f}(\xi_0)$ esiste; allora $\tilde{f}(\xi)$ risulta definita anche per Re $\xi > \sigma_0$.

Osserviamo che, se definiamo

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t}, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

si vede subito che

$$\tilde{f}(\sigma + i\omega) = \widehat{f_\sigma}(\omega)$$

Diremo nel seguito che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è nella classe $\mathcal{L}$ se

- $f(t) = 0$ per $t < 0$
- f è continua a tratti
- $|f(t)| \leq He^{\sigma_0 t}$ con $H, \sigma_0 > 0$.

Si può vedere che se $f \in \mathcal{L}$ allora $\tilde{f}$ è definita almeno nel semipiano $\Re\xi > \sigma_0$.

Elenchiamo di seguito alcune proprietà della trasformata di Laplace

Siano $f, g \in \mathcal{L}$ e supponiamo che $\tilde{f}$ ed $\tilde{g}$ siano definite nei semipiani $\Re\xi > \sigma_0$ e $\Re\xi > \sigma_1$ rispettivamente.

Allora

- $$(\widetilde{\alpha f + \beta g})(\xi) = (\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g})(\xi)$$

  se $\Re\xi > max\{\sigma_0, \sigma_1\}$

- **se** $\phi(t) = f(\alpha t)$ **,** $\alpha > 0$

$$\tilde{\phi}(\xi) = \frac{1}{\alpha}\tilde{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \quad , \quad Re\xi > \alpha\sigma_0$$

- **se** $\phi(t) = f(t - t_0)$ **,** $t_0 > 0$

$$\tilde{\phi}(\xi) = e^{-\xi t_0}\tilde{f}(\xi) \quad , \Re\xi > \sigma_0$$

- **se** $\phi(t) = e^{\xi_0 t}$**f(t) ,** $\xi_0 \in \mathrm{C}$

$$\tilde{\phi}(\xi) = \tilde{f}(\xi - \xi_0) \quad , \quad Re\xi > \sigma_0 + Re\xi_0$$

- **se** f **è derivabile, se** f' **è continua a tratti**

$$\widetilde{f'}(\xi) = \xi\tilde{f}(\xi) - f(0) \quad , \quad Re\xi > \sigma_0$$

- **se** $\phi(t) = \int_0^t f(s)ds$

$$\tilde{\phi})(\xi) = \frac{1}{\xi}\tilde{f}(\xi) \quad Re\xi > \sigma_0.$$

- **se** $\phi(t) = tf(t)$ **si ha** $\phi \in \mathcal{L}$ **e si può affermare che**

$$\frac{d}{d\xi}\tilde{f}(\xi) = -\tilde{\phi}(\xi).$$

- **se**

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

allora si ha

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f}\tilde{g}$$

nell'intersezione dei rispettivi semipiani di definizione

È anche possibile dimostrare un teorema di inversione per le trasformate di Laplace.

Se $x \in \mathbb{R}_+$ è tale che

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+s)-f(x+)}{s}\right| ds \ \ e \ \ \int_{-\delta}^0 \left|\frac{f(x+s)-f(x-)}{s}\right| ds$$

esistano finiti per $\delta > 0$.
Allora si ha

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)(t-x)}dt d\omega \ \ , \ \forall\sigma > \sigma_0$$

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x+)+f(x-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+i\omega)x}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt\right)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+i\omega)x}\tilde{f}(\sigma+i\omega)d\omega = \\ &= \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{(\sigma+i\omega)x}\tilde{f}(\sigma+i\omega)d\omega\end{aligned}$$

operando il cambio di variabile $s = \sigma + i\omega$ si ottiene

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ia}^{\sigma+ia} e^{sx}\tilde{f}(s)ds$$

e ciò si esprime scrivendo

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\tilde{f}(s)ds.$$

Quest'ultima formula è nota come formula di inversione di Mellin e la funzione a secondo membro si chiama antitrasformata di Laplace.

CAPITOLO 7

EQUAZIONI E SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un aperto e sia $A \subset \mathbb{R}$ un aperto; sia $\Omega = I \times A \subset \mathbb{R}^2$, $x_0 \in I$, $y_0 \in A$, cioè $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia ancora $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione e consideriamo il problema di trovare una funzione

$$y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \longrightarrow A$$

derivabile e tale che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & , x \in I_\delta \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Il problema enunciato si chiama problema di Cauchy.

1. Il teorema di esistenza ed unicità di Picard

È importante dimostrare un teorema di esistenza ed unicità per questo problema.

TEOREMA 7.1. - *Picard - Se* $f : I \times A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $I = [x_0 - a, x_0 + a]$, $A = \{y \in \mathbb{R} : \ |y - y_0| \leq b\}$ *e se sono verificate le seguenti condizioni:*

- *f è continua in $\Omega = I \times A$;*
- $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|\ \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in A$

Allora, posto

$$M = \max\{|f(x, y)| \ : \ (x, y) \in \Omega\} \quad e \quad \delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

esiste una ed una sola funzione $y : I_\delta \longrightarrow A$ soddisfacente il problema di Cauchy

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che risolvere il problema di Cauchy è equivalente a dimostrare esistenza ed unicità di una funzione y definita su I_δ continua e soddisfacente la

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \qquad , \qquad x \in I_\delta \tag{7.2}$$

Per questo scopo definiamo una successione di funzioni

$$y_k : I_\delta \longrightarrow A$$

mediante le

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt \end{cases}$$

Le y_k sono note come **approssimazioni di Picard della soluzione del problema di Cauchy**.

Procediamo nella dimostrazione mettendo in evidenza i passi principali

. La definizione di y_k è coerente in quanto possiamo verificare per induzione che

$$y_k(x) \in A, \qquad \forall x \in I_\delta \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si ha infatti

$$y_0(x) = y_0 \in A \qquad \forall x \in I_\delta$$

ed inoltre, supposto

$$y_k(x) \in A \qquad \forall x \in I_\delta$$

si ha

$$|y_{k+1}(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))|dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq b$$

da cui

$$y_{k+1}(x) \in A \qquad \forall x \in I_\delta$$

. Proviamo ora che la successione y_k è uniformemente convergente su I_δ.
Si ha

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

infatti

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| dt \right| \leq M|x - x_0|$$

e, per induzione, supponendo

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq ML^{k-1} \frac{|x-x_0|^k}{k!}$$

si ottiene subito che

$$
\begin{aligned}
|y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| dt \right| \leq \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| dt \right| \leq \\
&\leq \frac{ML^k}{k!} \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^k dt \right| \leq ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

Possiamo pertanto affermare che

$$|y_{k+p}(x) - y_k(x)| \leq \sum_{h=1}^{p} |y_{k+h}(x) - y_{k+h-1}(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{p} M L^{k+h-1} \frac{|x-x_0|^{k+h}}{(k+h)!} =$$

$$= \frac{M}{L} \sum_{h=1}^{p} L^{k+h} \frac{|x-x_0|^{k+h}}{(k+h)!} \leq$$

$$\leq \frac{M}{L} \sum_{i=k+1}^{k+p} \frac{(L\delta)^i}{i!} = E_{k,p}$$

. Ora, dal momento che

$$e^{L\delta} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(L\delta)^i}{i!}$$

per k sufficientemente grande si ha che $|E_{k,p}| < \varepsilon$ per ogni $p \in \mathbb{N}$ e quindi y_k converge uniformemente su I_δ ad una funzione che denoteremo con y.

Inoltre y è continua su I_δ in quanto è limite uniforme di funzioni continue.

. Verifichiamo che y è soluzione del problema di Cauchy.

Se passiamo al limite per $p \to +\infty$ otteniamo

$$|y(x) - y_k(x)| \leq \frac{M}{L} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(L\delta)^i}{i!} = \frac{M}{L} \left(e^{L\delta} - \sum_{i=0}^{k} \frac{(L\delta)^i}{i!} \right) =$$

$$= \frac{M}{L} e^{\xi} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M}{L} e^{L\delta} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} = E_k$$

essendo $|\xi| \leq L\delta$.

Ovviamente $\lim_k E_k = 0$ e, dal momento che

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt$$

e che

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_k(t))-f(t,y(t))]dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(t)-y(t)|dt\right| \leq L\delta E_k$$

si ha, per $k \to +\infty$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

ed y è soluzione di 7.2 e quindi del problema di Cauchy.

. Per quanto riguarda l'unicità della soluzione osserviamo che, se y e z sono soluzioni del problema di Cauchy, allora

$$|y(x)-z(x)| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} |y(t)-z(t)|dt\right|$$

e per il lemma di Gronwall si può concludere.

$\square$

Usando argomentazioni simili a quelle del teorema precedente si può provare per induzione che:

Con le notazioni e le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità, si ha

$$|y_k(x) - y(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

2. Il teorema di esistenza di Peano

DEFINIZIONE 7.1. *Sia* $I = [x_0 - a, x_0 + a]$, $A = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - y_0| \leq b\}$ *e sia* $f : I \times A \longrightarrow A$ *continua; poniamo*

$$M = \max\{|f(x, y)| \ : \ (x, y) \in I \times A\}$$

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

Siano $\delta_k > 0$, $\delta_k \to 0$ *ed*

$$x_i = x_0 + i\delta_k \ , \ \ x_0 \leq x_i \leq x_0 + \delta$$

chiamiamo **approssimazioni di Eulero della soluzione del problema di Cauchy**, *a destra di* x_0 , *la successione di funzioni*

$$y_k : [x_0, x_0 + \delta] \longrightarrow A$$

definita da:

$$y_k(x_0) = y_0$$
$$y_k(x) = y_k(x_i) + f(x_i, y_k(x_i))(x - x_i), x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Osserviamo che la definizione è consistente in quanto $y_k(x) \in A$ se $x \in [x_0, x_0+\delta]$ e quindi è possibile calcolare $f(x_i, y_k(x_i))$.

Infatti si ha $y_k(x_0) = y_0 \in A$ e supposto $y_k(x_j) \in A$, $j = 1, ..., i$ si ha

$$|y_k(x_{i+1}) - y_0| \leq M|x_{i+1} - x_0| \leq M\delta \leq b.$$

Notiamo inoltre che evidentemente si ha, se $\xi, \eta \in [x_0, x_0 + \delta]$,

$$|y_k(\xi) - y_k(\eta)| \leq M(\xi - \eta)$$

in quanto y_k è una poligonale i cui tratti rettilinei hanno tutti coefficiente angolare minore, in modulo, ad M.

Osserviamo infine che è banale definire le approssimazioni di Eulero del problema di Cauchy anche a sinistra del punto x_0 e di conseguenza in tutto l'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

È possibile provare il seguente teorema di esistenza dovuto a Peano.

TEOREMA 7.2. *- Peano - Siano* $I = [x_0 - a, x_0 + a]$, $A = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - y_0| \leq b\}$, $f : I \times A \longrightarrow A$ *continua.*
Sia

$$M = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in I \times A\}$$

$$\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

Allora esiste $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow A$*, derivabile e tale che*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si può inoltre provare che, qualora la soluzione sia unica, la successione di approssimanti di Eulero converge alla soluzione stessa.

Passiamo ora a valutare l'errore che si commette usando le approssimanti di Eulero in luogo della soluzione effettiva.

TEOREMA 7.3. *sia $f \in \mathcal{C}^1(I \times A)$; denotiamo con L_x ed L_y due valori tali che*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le L_x \quad , \quad |\nabla_y f(x,y)| \le L_y$$

Allora si ha

$$|y_k(x) - y(x)| \le \delta_k(L_x + L_y M)(x - x_0)e^{L_y(x-x_0)}/2$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$|y_k(x) - y_h(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_k(t)) - f(t, y_h(t))]dt\right| + \\ + \left|\int_{x_0}^{x} \Delta_k(t)dt\right| + \left|\int_{x_0}^{x} \Delta_h(t)dt\right|$$

dove

$$\Delta_k(t) = |f(t, y_k(t)) - f(t, y_k(x_i))|$$

Inoltre dalle ipotesi introdotte si ottiene

$$\begin{aligned} |\Delta_k(x)| \le L_x|x - x_i| + L_y|y_k(x) - y_k(x_i)| \le \\ \le L_x|x - x_i| + L_y M|x - x_i| = \\ = (L_x + L_y M)|x - x_i| \end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} |y_k(x) - y_h(x)| \le (L_x + L_y M)(\delta_k + \delta_h)(x - x_0)/2+ \\ + \left| \int_{x_0}^{x} L_y |y_k(t) - y_h(t)| dt \right| \end{aligned}$$

e, per il lemma di Gronwall,

$$|y_k(x) - y_h(x)| \le (\delta_k + \delta_h)(L_x + L_y M)\frac{x - x_0}{2} e^{L_y(x - x_0)}.$$

Pertanto y_k è convergente uniformemente ad y che, come nel teorema precedente, è soluzione del problema di Cauchy. Facendo $h \to +\infty$ si ottiene la tesi. □

Rendiamo a questo punto conto brevemente di quello che è noto come fenomeno di Peano. Per semplicità consideriamo il caso di una sola equazione differenziale; in parole povere il fenomeno di cui sopra può essere descritto come segue.

In presenza di condizioni che garantiscono l'esistenza, ma non l'unicità della soluzione del problema di Cauchy accade che, se esistono due soluzioni uscenti dal punto (x_0, y_0), comunque si scelga un punto (x_1, y_1) nella zona di piano delimitata dalle due soluzioni e dalle rette $x_0 \pm \delta$, esiste una soluzione uscente da (x_0, y_0) che passa per il punto (x_1, y_1).

Si può inoltre provare l'esistenza di una soluzione massima e di una soluzione minima per il problema di Cauchy.

3. Metodi numerici per la soluzione di un problema di Cauchy.

Accenniamo infine ai metodi di approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy.

Abbiamo già visto come le approssimazioni di Picard danno la possibilità di approssimare la soluzione ed abbiamo dato una maggiorazione dell'errore.

Questo modo di procedere genera tuttavia numerose difficoltà di tipo calcolistico, in quanto gli integrali da svolgere spesso non ammettono primitive elementari.

Un secondo tentativo può essere fatto usando la formula di Taylor. In tal caso si sostituisce alla soluzione $y(x)$ il suo sviluppo di Taylor di ordine m, $P_m(x,h)$, relativo al punto x ed all'incremento h. Si ha così

$$P_m(x,h) = \sum_{i=0}^{m} y^{(i)}(x)\frac{h^i}{i!}$$

e la soluzione è approssimata mediante le

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = P_m(x_n, h) \end{cases}$$

Osserviamo che $y^{(i)}(x)$ si può ricavare dai dati del problema, ricordando che

$$\begin{cases} y' = f \\ y'' = f_x + f_y y' = f_x + f f_y \\ y''' = f_{xx} + f_{xy} f + f_x f_y + f_y^2 f + f f_{yx} + f^2 f_{yy} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Osserviamo che nel caso in cui $m = 1$, la formula appena descritta si riduce al classico metodo di Eulero, mentre per valori di m più grandi i calcoli si fanno troppo complicati e, per evitare questo inconveniente, è necessario considerare quelli che si chiamano metodi di integrazione ad un passo.

Essi si basano sull'idea di cercare una soluzione definita da

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n + h \\ y_{n+1} & = y_n + \alpha_0 k_0 + \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_m k_m \end{cases}$$

dove

$$
\begin{cases}
k_0 & = hf(x_n, y_n) \\
k_1 & = hf(x_n + a_1 h, y_n + b_{10} k_0) \\
k_2 & = hf(x_n + a_2 h, y_n + b_{20} k_0 + b_{21} k_1) \\
\dots & \dots\dots\dots\dots \\
k_m & = hf(x_n + a_m h, y_n + b_{m0} k_0 + \ldots + b_{m,m-1} k_{m-1})
\end{cases}
$$

Ora, sviluppando secondo Taylor le espressioni dei k_i, sostituendo nelle precedenti uguaglianze e confrontando quanto si ottiene con lo sviluppo di Taylor della soluzione, si ha un sistema di equazioni algebriche sottodeterminato, che consente di trovare più di una scelta dei coefficienti $\alpha_i,\ a_i$ e b_{ij}.

A seconda dell'ordine di sviluppo di Taylor e delle scelte effettuate nel risolvere il sistema, questo procedimento genera diverse formule di integrazione.

Qui di seguito elenchiamo quelle più diffuse.

- Metodo di Eulero (ordine 1)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned}$$

- Metodo di Eulero modificato (ordine 2)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + (k_1 + k_2)/2 \end{aligned}$$

- Metodo di Heun (ordine 3)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + h/3, y_n + k_1/3) \\
k_3 &= hf(x_n + 2h/3, y_n + 2k_2/3) \\
y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 3k_3)/4
\end{aligned}
$$

- Metodo di Kutta (ordine 3)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
k_3 &= hf(x_n + h, y_n + 2k_2 - k_1) \\
y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6
\end{aligned}
$$

- Metodo di Runge-Kutta (ordine 4)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6
\end{aligned}
$$

- Metodo di Runge-Kutta II (ordine 4)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h/3, y_n + k_1/3) \\ k_3 &= hf(x_n + 2h/3, y_n + k_2 - k_1/3) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8 \end{aligned}$$

Infine esistono metodi di integrazione per equazioni differenziali che sono basati sulle formule di quadratura aperte e chiuse per intervalli equispaziati.

Tali metodi sono basati sull'uso di una formula di quadratura aperta che usa i punti $y_{n-p}, .., y_n$ per predire il punto y_{n+1} e di una formula di quadratura chiusa che fa uso dei punti $y_{n-q}, .., y_{n+1}$ per correggere la previsione fatta.

Per il loro modo di operare tali metodi si dicono metodi predictor-corrector: riportiamo qui di seguito i più diffusi tra di essi.

- Metodo di Eulero modificato (ordine 2)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
y^*_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= y_n + h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})]/2
\end{aligned}
$$

- Metodo di Milne a tre punti (ordine 4)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
y^*_{n+1} &= y_{n-3} + h[8f(x_n, y_n) - 4f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 8f(x_{n-2}, y_{n-2})]/3 \\
y_{n+1} &= y_{n-1} + h[f(x_{n+1}, y^*_{n+1}) + 4f(x_n, y_n) + f(x_{n-1}, y_{n-1})]/3
\end{aligned}
$$

- Metodo di Adams-Moulton (ordine 4)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
y^*_{n+1} &= y_n + h[55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \\
&\quad + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})]/24 \\
y_{n+1} &= y_n + h[9f(x_{n+1}, y^*_{n+1}) + 19f(x_n, y_n) - \\
&\quad - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})]/24
\end{aligned}
$$

- Metodo di Milne a cinque punti (ordine 6)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h \\
y^*_{n+1} &= y_{n-5} + h[33f(x_n, y_n) - 42f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 78f(x_{n-2}, y_{n-2}) - \\
&\quad - 42f(x_{n-3}, y_{n-3}) + 33f(x_{n-4}, y_{n-4})]/10 \\
y_{n+1} &= y_{n-3} + h[14f(x_{n+1}, y^*_{n+1}) + 64f(x_n, y_n) + 24f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \\
&\quad + 64f(x_{n-2}, y_{n-2}) + 14f(x_{n-3}, y_{n-3})]/45
\end{aligned}
$$

4. Prolungabilità della soluzione di un problema di Cauchy.

Abbiamo dimostrato un teorema di esistenza ed unicità di una soluzione locale del problema di Cauchy, abbiamo cioè provato che la soluzione esiste ed è unica in un intorno del punto iniziale.

Se esiste un'altra soluzione del problema di Cauchy assegnato, definita su un intervallo più grande di quello precedentemente trovato e coincidente con la prima nella parte comune diciamo che tale soluzione è prolungabile e che la nuova soluzione è un suo prolungamento.

Più precisamente diciamo che y è una soluzione prolungabile a destra se esiste

$$z : [a, c) \longrightarrow A$$

soluzione, con $c > b$ e $y(x) = z(x)\ \forall x \in [a, b)$.

Una applicazione del lemma di Gronwall assicura che:

Se f è continua in Ω e se

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad , \quad \forall x \in I \ , \ \forall y_1, y_2 \in A$$

Allora, se y e z sono due soluzioni definite sugli intervalli I_1 ed I_2 rispettivamente, si ha

$$y(x) = z(x) \qquad \forall x \in I_1 \cap I_2$$

Sotto opportune condizioni una soluzione locale può essere prolungata; più precisamente:

Se f è continua in Ω e se

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2| \qquad \forall x\in I\ ,\ \forall y_1,y_2\in A$$

Allora, se y è una soluzione definita su $[a,b)$ e se poniamo

$$\Gamma=\{(x,y(x))\ :\ x\in[a,b)\}$$

sono equivalenti le seguenti condizioni:

- **y è prolungabile a destra;**
- **Γ è limitato e $d(\Gamma,\partial\Omega)>0$. dove**

$$d(A,B)=\inf\{|x-y|\ :\ x\in A\ ,\ y\in B\ \}$$

È anche possibile stabilire una semplice condizione sufficiente per la prolungabilità di una soluzione e quindi per l'esistenza di quella che si chiama una soluzione globale: una soluzione cioè che sia definita per tutti i valori di $I=(x_0-a,x_0+a)$.

Infatti se

$$f:I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

e se

$$|f(x,y)|\leq M+L|y| \tag{7.3}$$

per ogni $x\in I$, ed $y\in\mathbb{R}$

Allora esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy definita su tutto I.

Per dimostrare questa affermazione è sufficiente osservare che nelle condizioni assunte si ha

$$|y(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \leq |y_0| + 2aM + \left| \int_{x_0}^{x} L|y(t)|dt \right|$$

e, per il lemma di Gronwall, ciò è sufficiente per affermare che la soluzione y è limitata e quindi prolungabile.

Le condizioni

- $|f(x, y)| \leq M$ per ogni $x \in I$, $y \in \mathbb{R}$, ed inoltre f è lipschitziana sugli insiemi limitati contenuti in $I \times \mathbb{R}$;
- $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ per ogni $x \in I$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

sono entrambe sufficienti per la 7.3

Consideriamo la disequazione differenziale

$$\begin{cases} z'(x) \leq \omega(x, z(x)) \\ z(x_0) \leq a \end{cases}$$

L'esistenza di soluzioni della disequazione è ovvia conseguenza del teorema di esistenza per le equazioni; non così si può ovviamente dire dell'unicità.

Si può tuttavia provare il seguente notevole risultato

TEOREMA 7.4. *Se z è una soluzione della disequazione definita su un intervallo J e se y è la soluzione del problema*

$$\begin{cases} y'(x) = \omega(x, y(x)) \\ y(x_0) = a \end{cases}$$

Allora si ha

$$z(x) \leq y(x)$$

DIMOSTRAZIONE. *Sia $u(x) = z(x) - y(x)$, si ha $u(x_0) \leq 0$; supponiamo che esista $x_1 > x_0$ tale che $u(x_1) > 0$. Dal momento che u è continua esiste ξ tale che $u(\xi) = 0$ e $u(x) > 0$ per $x \in (\xi, x_1]$.*

Inoltre,

$$u'(x) = z'(x) - y'(x) \leq \omega(x, z(x)) - \omega(x, y(x)) \leq$$
$$\leq |\omega(x, z(x)) - \omega(x, y(x))| \leq L|z(x) - y(x)| = L|u(x)|$$

Poichè si ha

$$\frac{d}{dx}|u(x)| = \frac{d}{dx}\sqrt{\langle u(x), u(x)\rangle} = \frac{2\langle u'(x), u(x)\rangle}{2\sqrt{\langle u(x), u(x)\rangle}} \le \frac{|u'(x)||u(x)|}{|u(x)|}$$

otteniamo

$$\frac{d}{dx}|u(x)| \le |u'(x)| \le L|u(x)|$$

e, per il lemma di Gronwall

$$0 < u(x_1) \le u(\xi)e^{L(x_1-\xi)} = 0$$

il che è assurdo. □

TEOREMA 7.5. *Supponiamo che* $\alpha : [x_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *sia continua,* $\beta : \bar{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *sia continua e*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta(s)} ds = +\infty$$

Allora il problema

$$\begin{cases} u'(x) = \alpha(x)\beta(y(x)) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

ammette soluzioni definite per $x \geq x_0$.

DIMOSTRAZIONE. Separando le variabili si ottiene

$$\frac{u'(x)}{\beta(u(x))} = \alpha(x)$$

ed integrando

$$B(u(x)) = A(x)$$

dove

$$B(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{\beta(s)} ds$$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} \alpha(s) ds$$

Per le ipotesi fatte B è crescente, invertibile e dal momento che

$$\lim_{u \to +\infty} B(u) = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\beta(s)} ds + k = +\infty$$

possiamo affermare che B assume tutti i valori positivi, inoltre evidentemente A assume solo valori positivi e possiamo affermare che

$$u(x) = B^{-1}(A(x))$$

è definita per $x \geq x_0$ $\square$

TEOREMA 7.6. *Supponiamo che* $f : [x_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sia continua e lipschitziana in* y*, uniformemente rispetto ad* x*, sugli insiemi limitati.*

Supponiamo inoltre che esistano $\alpha : [x_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua,* $\beta : \bar{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *continua e crescente, con*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta(s)} ds = +\infty$$

tali che

$$|f(x, y)| \leq \alpha(x)\beta(|y|).$$

Allora il problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette soluzioni definite per $x \geq x_0$.

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando le ipotesi si ha che

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|y(x)| \leq \alpha(x)\beta(|y(x)|) \\ |y(x_0)| = |y_0| \end{cases}$$

Per cui se u è la soluzione del problema di cui al teorema precedente con $u_0 = |y_0|$ si ha

$$|y(x)| \leq u(x)$$

Poichè u è definita per $x \geq x_0$, $|y|$ ed y si mantiene limitata e quindi è prolungabile per $x \leq x_0$

$\square$

5. Dipendenza continua dai dati iniziali

Le soluzioni di un problema di Cauchy evidentemente cambiano se i dati del problema cambiano, ma è importante conoscere quali alterazioni subiscono.

In particolare è utile sapere se piccoli cambiamenti dei dati provochino piccoli cambiamenti delle soluzioni.

La questione è evidentemente importante in quanto i problemi di Cauchy sono di grande utilità nella modellistica matematica e non è realistico sperare che le funzioni ed i dati che entrano a definire un modello matematico descrivano il fenomeno da studiare senza alcun margine di errore o che non si introducano errori di approssimazione dovuti ai calcoli.

Lo scopo dello studio della dipendenza dai dati è perciò di fornire una stima delle modificazioni introdotte dall'approssimazione dei dati nelle soluzioni.

L'applicazione del Lemma di Gronwall permette di stabilire alcuni risultati nell'enunciare i quali supponiamo verificate le ipotesi di esistenza ed unicità della soluzione di un problema di Cauchy.

Siano y e z tali che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I_\delta \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) & x \in I_\delta \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$**;**
Allora si ha

$$|y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0| e^{L|x - x_0|}$$

per ogni $x \in I_\delta$.

Infatti

$$|y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0| + \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \right| \leq$$

$$\leq |y_0 - z_0| + \left| \int_{x_0}^{x} L|y(t) - z(t)| dt \right|$$

e si conclude per il lemma di Gronwall.

Siano y **e** w **tali che**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I_\delta \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w'(x) = g(x, w(x)) & x \in I_\delta \\ w(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$**;**

Allora si ha

$$|y(x) - w(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, w(t)) - g(t, w(t))| dt \right| e^{L|x-x_0|}$$

per ogni $x \in I_\delta$**.**

Infatti

$$
\begin{aligned}
|y(x)-w(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,y(t))-g(t,w(t))|dt\right| \leq \\
\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,y(t))-f(t,w(t))|dt\right| + \\
+ \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,w(t))-g(t,w(t))|dt\right| \leq \\
\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,w(t))-g(t,w(t))|dt\right| + \\
+ \left|\int_{x_0}^{x} L|y(t)-w(t)|dt\right|
\end{aligned}
$$

ed ancora si conclude per il lemma di Gronwall.

Siano y e w tali che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I_\delta \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) & x \in I_\delta \\ u(\xi_0) = y_0 \end{cases}$$

$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$**;**
Allora si ha

$$|y(x) - u(x)| \leq M|\xi_0 - x_0|e^{L|x-x_0|}$$

per ogni $x \in I_\delta$**.**

Infatti

$$\begin{aligned} |y(x) - u(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt - \int_{\xi_0}^{x} f(t, u(t))dt \right| \leq \\ \leq \left| \int_{x_0}^{\xi_0} f(t, u(t))dt \right| + \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, u(t))]dt \right| \leq \\ \leq M|\xi_0 - x_0| + \left| \int_{x_0}^{x} L|y(t) - u(t)|dt \right| \end{aligned}$$

ed anche qui si conclude per il lemma di Gronwall.

I tre risultati precedenti consentono di affermare che

Se ye v sono tali che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I_\delta \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \begin{cases} v'(x) = g(x, v(x)) & x \in I_\delta \\ u(\xi_0) = v_0 \end{cases}$$

$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$**;**
Allora si ha

$$|y(x) - v(x)| \leq |y(x) - z(x)| + |z(x) - w(x)| + |w(x) - v(x)|$$

per ogni $x \in I_\delta$**.**

6. Stabilità.

I precedenti risultati assicurano in altre parole che piccoli cambiamenti dei dati del problema inducono piccoli cambiamenti nei valori delle soluzioni. Essi tuttavia perdono significato qualora si considerino valori grandi dell'ampiezza a dell'intervallo I_δ.

In tal caso infatti, anche supponendo che le soluzioni del problema di Cauchy siano definite sulla semiretta $x \geq x_0$, le maggiorazioni ottenute tendono all'infinito.

Lo studio del comportamento delle soluzioni di una equazione differenziale sulla semiretta $x \geq x_0$ si definisce studio della stabilità.

A meno di considerare una equazione ottenuta con un semplice cambio di variabili, ci si può sempre ricondurre allo studio della stabilità della soluzione identicamente nulla.

Infatti z è soluzione di

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad , \qquad x \geq x_0$$

se e solo se la funzione identicamente nulla risolve

$$y'(x) = f(x, z(x) + y(x)) - z'(x), \qquad x \geq x_0$$

La stabilità assume particolare rilevanza nel caso in cui il problema di Cauchy sia autonomo, sia cioè della forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Supporremo verificate le seguenti ipotesi
Sia $f : A \longrightarrow A$, $A = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y| < a\}$
e supponiamo che

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L_B |y_1 - y_2|$$

$\forall y_1, y_2 \in B$,$B \subset A$, limitato,

$$f(0) = 0.$$

Sia $f : A \longrightarrow A$ **,** $A = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y| < a\}$ **tale che**

- f **sia continua in** $[x_0, +\infty) \times A$**,**
- $$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L_B |y_1 - y_2|$$
  $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ \ \forall B \subset \mathbb{R}$ **limitato,**
- $f(0) = 0$

Le condizioni assunte assicurano che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

esiste per $x \in [x_0, x_0 + \delta]$, con δ opportuno ed è ivi unicamente determinata.

In accordo con il teorema di prolungabilità considereremo sempre soluzioni definite su un intervallo massimale a destra che indicheremo con $[x_0, b)$.

Le condizioni assicurano inoltre che la funzione identicamente nulla, $y(x) \equiv 0$, $x \geq x_0$, è soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale nullo , $y_0 = 0$.

DEFINIZIONE 7.2. *Diciamo che la soluzione nulla è stabile per l'equazione data se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta_\varepsilon > 0$ *tale*

che se $|y_0| < \delta_\varepsilon$, *la soluzione del problema di Cauchy è definita per* $x \geq x_0$ *e si ha*

$$|y(x)| < \varepsilon$$

per ogni $x \geq x_0$.

DEFINIZIONE 7.3. *Diciamo che la soluzione nulla è asintoticamente stabile per l'equazione data se è stabile e se esiste* $\delta > 0$ *tale che per* $|y_0| < \delta$ *,*

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0.$$

6.0.1. *Stabilità per i sistemi lineari.* E' facile provare un criterio di stabilità per i sistemi lineari.

Consideriamo il sistema lineare

$$y'(x) = Ay(x).$$

Sia G una matrice fondamentale del sistema; allora la soluzione identicamente nulla è stabile se e solo se

$$|G(x)| \leq K \quad , \quad \forall x \geq x_0$$

inoltre la soluzione nulla è asintoticamente stabile se e solo se

$$\lim_{x \to +\infty} |G(x)| = 0$$

Infatti le soluzioni del sistema lineare possono essere scritte nella forma

$$y(x) = G(x)C \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

mentre le soluzioni del problema di Cauchy sono date da

$$y(x) = G(x)G^{-1}(x_0)y_0$$

Pertanto

$$\|y(x)\| \leq \|G(x)\| \|G^{-1}(x_0)\| \|y_0\|$$

Ciò permette di concludere sulla sufficienza delle condizioni proposte per la stabilità e l'asintotica stabilità della soluzione nulla. Inoltre

$$G(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$$

dove $y_k(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y_k(x_0) = e_k$ (indichiamo con e_k gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

6.0.2. *Stabilità per i sistemi non lineari, (Criterio di Lyapunov).* Nel caso dei sistemi non lineari

TEOREMA 7.7. *Se esiste una funzione differenziabile $V : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ se $y \in A \setminus \{0\}$. e se accade che*

$$\langle \nabla V(y), f(y) \rangle \leq 0 \qquad \forall y \in A$$

allora la soluzione nulla è stabile per l'equazione.

Se di più

$$\langle \nabla V(y), f(y) \rangle < 0 \qquad \forall y \in A \setminus \{0\}$$

la soluzione nulla è asintoticamente stabile.

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\min\{V(y) \ : \ |y| = \varepsilon\} = m > 0$$

e, dal momento che $V(0) = 0$, esiste $\delta < \varepsilon$ tale che

$$V(y) < m \ \text{ se } \ |y| < \delta$$

Sia ora $y_0 \in A$, $|y_0| < \delta$, sia y(x) la soluzione massimale del problema definita in $[x_0, b)$, e sia $v(x) = V(y(x))$; si ha

$$v(x_0) = V(y_0) < m$$

ed inoltre

$$v'(x) = \langle \nabla V(y(x)), f(y(x)) \rangle \leq 0 \quad per\ x \in [x_0, b)\ .$$

Pertanto

$$v(x) \leq v(x_0) < m \quad per\ x \in [x_0, b)$$

e se esistesse $\hat{x} \in [x_0, b)$, con $|y(\hat{x})| \geq \varepsilon$, per il teorema dei valori intermedi sarebbe possibile trovare $x' \in [x_0, \hat{x}$ con $|y(x')| = \varepsilon$ e si avrebbe

$$v(x') = V(y(x')) \geq m$$

il che è assurdo.

Ne viene che y(x) è limitato per $x \in [x_0, b)$ e pertanto $b = +\infty$ per il teorema di prolungabilità.

Per quel che riguarda il secondo enunciato osserviamo che, essendo ovviamente provata la stabilità della soluzione nulla, si ha

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|y_0| < \delta_\varepsilon$

$$|y(x)| < \varepsilon \quad per \quad x \geq x_0,$$

inoltre come precedentemente visto

$v(x) = V(y(x))$ è decrescente per $x \geq x_0$.

Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} v(x) = \lambda \geq 0 \quad e \quad v(x) \geq \lambda \;\; se \; x \geq x_0;$$

se fosse $\lambda > 0$ si potrebbe scegliere $\eta > 0$ tale che, se $|y| < \eta$, $V(y) < \lambda$.

Allora, dal momento che $V(y(x)) \geq \lambda$ si avrebbe $|y(x)| \geq \eta$; sia

$$m = \max\{\langle \nabla V(y), f(y) \rangle \; : \; \eta \leq |y| \leq \varepsilon\} < 0,$$

si ha

$$v'(x) \leq m < 0 \qquad se \quad x \geq x_0$$

e

$$v(x) \leq v(x_0) + m(x - x_0).$$

Facendo $x \to +\infty$ si ottiene $v(x) \to -\infty$, il che è assurdo.

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} V(y(x)) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = 0.$$

Se

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) \neq 0$$

esisterebbe $x_n \to +\infty$ tale che $|y(x_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$ e

$$V(y(x_n)) \geq \min\{V(y) \ : \ \varepsilon_0 \leq |y| \leq \varepsilon\} = \xi_0 > 0$$

e ciò è assurdo. $\square$

Possiamo anche formulare un risultato di instabilità può invece essere così riformulato.

TEOREMA 7.8. *Supponiamo che esistano un aperto $G \subset A$ e due funzioni $V : G \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, $k : \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ continua, tali che*

$$\langle \nabla V(y), f(y) \rangle \geq k(V(y)) > 0 \qquad \forall y \in G \setminus \{0\}$$

Supponiamo inoltre che

- $0 < V(y) \leq M \ \forall y \in G$
- $V(y) = 0$ *se* $y \in \partial G \cap A$

- $0 \in \partial G$.

Allora la soluzione nulla è instabile.

DIMOSTRAZIONE. Per la continuità di V e per la (iii), $\forall \delta > 0\ \exists y_0 \in G$ tale che $|y_0| < \delta$ e $0 < V(y_0) < \delta$.

Sia $\hat{v} = V(y_0)$; se la soluzione nulla fosse stabile per l'equazione (30.12) potremmo affermare che la soluzione y(x) di (30.11) è definita per $x \geq x_0$.

Sia ora

$$\xi = sup\{x \ :\ y(x) \in G\},$$

come nel teorema 30.23 si può vedere che $\xi = +\infty$; pertanto se $v(x) = V(y(x)$ si ha $0 \leq v(x) \leq M$ e

$$v'(x) \geq k(v(x)).$$

Ne deduciamo che

$$\int_{\hat{v}}^{v(x)} \frac{ds}{k(s)} \geq x - x_0$$

e, detta K una primitiva di $1/k$ si ha

$$K(v(x)) - K(\hat{v}) \geq x - x_0.$$

Dal momento che K è crescente

$$K(M) \geq K(v(x)) \geq K(\hat{v}) - x_0 + x \quad \text{per } x \geq x_0$$

il che è assurdo. $\square$

6.1. Stabilità in prima approssimazione. Molto spesso, per studiare la stabilità di un sistema non lineare si procede allo studio della stabilità del sistema lineare ottenuto usando lo sviluppo di Taylor del primo ordine della funzione che compare a secondo membro. Tale sistema si chiama sistema linearizzato ed è interessante conoscere sotto quali condizioni la stabilità del sistema linearizzato è sufficiente per la stabilità del sistema originale.

Questo tipo di studio si chiama studio della stabilità in prima approssimazione.

TEOREMA 7.9. *Sia P una matrice $n \times n$ e siano $A = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y| < a\}$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, tali che $f(0) = 0$, f è continua e*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|} = 0.$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y'(x) = Py(x) + f(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora, se P ha tutti gli autovalori con parte reale negativa, la soluzione nulla è stabile per il sistema.

DIMOSTRAZIONE. Se $|y| < \sigma$ si ha

$$|f(y)| \leq \frac{\alpha}{2K}|y|;$$

e per il seguito è lecito supporre che $a < \sigma$.

Sia G la matrice fondamentale principale del sistema linearizzato $y' = Py$ e sia y la soluzione definita in un intervallo massimale $[x_0, b)$; posto

$$z(x) = G(x - x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} G(x - t)f(y(t))dt$$

si ha

$$z'(x) = G'(x-x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} G'(x-t)f(y(t))dt + G(0)f(y(x)) =$$

$$= P\left(G(x-x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} G(x-t)f(y(t))dt\right) + f(y(x)) =$$

$$= Pz(x) + f(y(x))$$

e

$$z(x_0) = y_0$$

Tenuto conto del fatto che

$$y'(x) = Py(x) + f(y(x)) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

si ha

$$(z-y)'(x) = P(z-y)(x) \ , \ (z-y)(x_0) = 0$$

da cui

$$z(x) \equiv y(x)$$

Pertanto

$$y(x) = G(x - x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} G(x - t)f(y(t))dt$$

ed inoltre, poiché gli autovalori di P hanno parte reale negativa

$$|G(x - t)| \leq Ke^{-\alpha(x-t)} \quad , \quad x_0 \leq t \leq x.$$

Allora

$$|y(x)| \leq Ke^{-\alpha(x-x_0)}|y_0| + \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha(x-t)}|y(t)|dt$$

da cui

$$e^{\alpha(x-x_0)}|y(x)| \leq K|y_0| + \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha}{2} e^{\alpha(t-x_0)}|y(t)|dt$$

e per il lemma di Gronwall

$$e^{\alpha(x-x_0)}|y(x)| \leq K|y_0|e^{\alpha(x-x_0)/2}$$

e

$$|y(x)| \leq K|y_0|e^{-\alpha(x-x_0)} \leq K|y_0| \quad , \forall x \geq x_0 \tag{30.14}$$

Pertanto si ha, se $0 < \varepsilon < \sigma$ e $|y_0| < \varepsilon/K$,

$$|y(x)| < \varepsilon \quad , \forall x \in [x_0, b)$$

e con le solite argomentazioni circa la prolungabilità delle soluzioni si vede che deve essere $b = +\infty$.

Passando al limite per $x \to +\infty$ nella si conclude anche l'asintotica stabilità. $\square$

Si può inoltre dimostrare che qualora la soluzione sia instabile per il sistema linearizzato allora anche il sistema di partenza è instabile.

Elenco delle figure

Indice