Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria - Polo di Savona
via Cadorna 7 - 17100 Savona
Tel. +39 019 264555 - Fax +39 019 264558

Analisi Matematica 1

Testi d'esame e Prove parziali

PlainTex - DviPdf 1.2 op - 6 Maggio 2002

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 21 Ottobre 1998 - (1^a prova parziale) 1^h

a) Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{2x-1}{x^2+2} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

- **Determinare** $\sup A$**.**
- **È vero che** $\sup A = \max A$ **?**

Si osservi che $\frac{2x-1}{x^2+2}$ è definito per ogni x reale.
Per determinare l'estremo superiore di A cerchiamone i maggioranti: m è un maggiorante di A se e solo se

$$\frac{2x-1}{x^2+2} \leq m \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad .$$

Sviluppando i calcoli si ottiene (essendo $x^2 + 2$ sempre positivo)

$$mx^2 - 2x + 2m + 1 \ \geq \ 0$$

che è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se il primo coefficiente è maggiore di zero ed il discriminante è minore od uguale a zero, ovvero

$$\begin{cases} m > 0 \\ -2m^2 - m + 1 \leq 0 \end{cases}$$

cioè

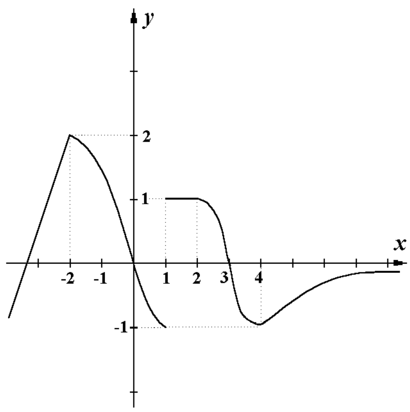
$$\begin{cases} m > 0 \\ m \leq -1 \ \cup \ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto m è maggiorante di A se e solo se $m \geq \frac{1}{2}$; ne segue che il minimo dei maggioranti, ovvero l'estremo superiore di A è $\frac{1}{2}$.
Per quanto riguarda la seconda domanda, poiché l'equazione

$$\frac{2x-1}{x^2+2} = \frac{1}{2}$$

ha come soluzione $x = 2$, si ha che $\frac{1}{2} \in A$ ovvero $\frac{1}{2}$ è anche il massimo di A.

2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **una funzione il cui grafico è quello in figura:**



Disegnare i grafici di

$$f_1(x) = |f(x)| \qquad , \qquad f_2(x) = f(|x|) \qquad , \qquad f_3(x) = 2f(x) \qquad , \qquad f_4(x) = f(x+1)$$

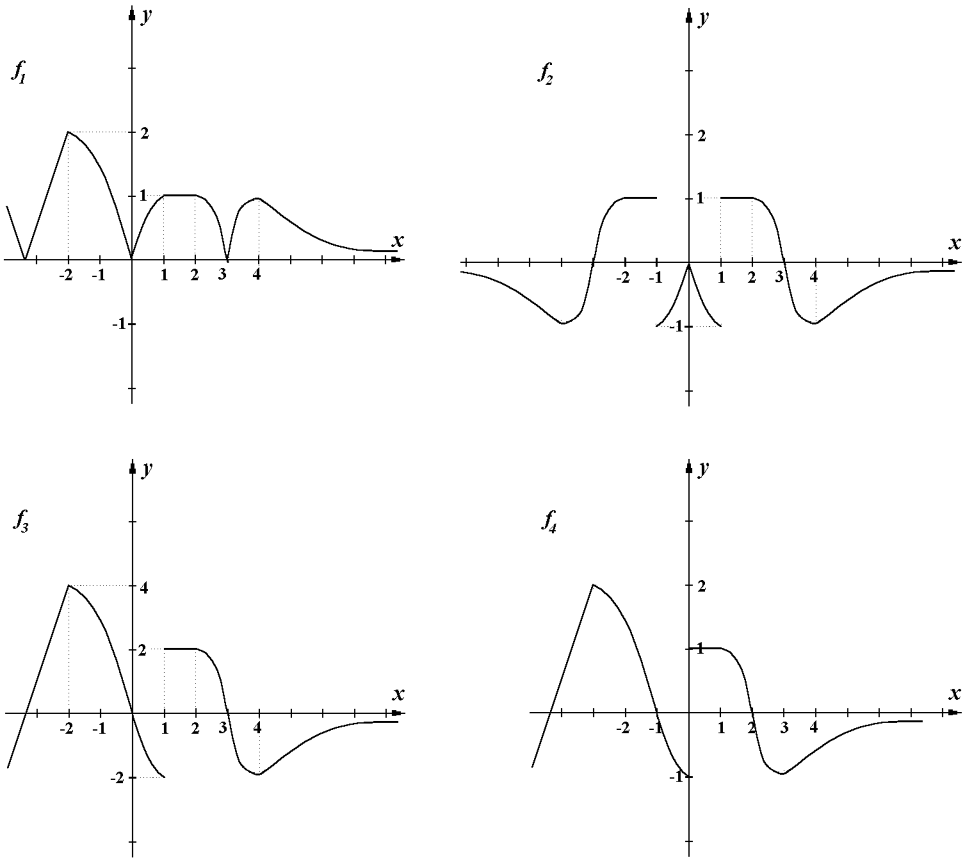
Per quanto riguarda f_1 sarà sufficiente ribaltare la parte negativa di f.

Per quel che riguarda f_2 si osservi che, se $x \geq 0$ risulta $f_2(x) = f(x)$, ed inoltre f_2 è pari, per cui il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Per disegnare il grafico di f_3 è sufficiente moltiplicare per 2 la scala delle ordinate.

Infine, il grafico di f_4 sarà semplicemente la traslazione di un'unità verso sinistra del grafico di f.

I quattro grafici richiesti saranno pertanto



ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 25 Novembre 1998 - (2^a prova parziale) 1^h

a) Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{12}a_n^2 + 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

- **Provare che a_n è crescente.**
- **Determinare il limite di a_n.**

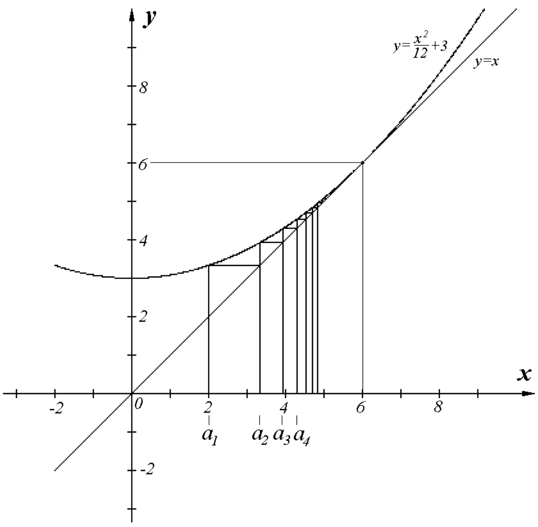
La successione a_n è crescente se e solo se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n, ovvero se e solo se

$$\frac{1}{12}a_n^2 + 3 \geq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad .$$

Sviluppando i calcoli ciò è vero se e solo se

$$a_n^2 - 12a_n + 36 \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

che risulta sempre vero, essendo il primo membro uguale ad $(a_n - 6)^2$.



Per quanto riguarda la seconda domanda, poiché la successione è crescente, esisterà sicuramente il limite di a_n; tale limite (che coincide con l'estremo superiore) può essere $a \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$. (Dalla figura a fianco si può facilmente desumere che il limite è reale e vale 6)

Proviamo pertanto che a_n è limitata superiormente da 6, ovvero che

$$a_n \leq 6 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Utilizzando l'induzione si ha, per $n = 1$, $a_1 = 2 \leq 6$ che è vero.

Supponendo poi $a_n \leq 6$ proviamo che $a_{n+1} \leq 6$; la tesi è vera se e solo se $\frac{1}{12}a_n^2 + 3 \leq 6$ ovvero se e solo se $a_n^2 \leq 36$ che risulta vera per l'ipotesi (ricordando che a_n è crescente e quindi maggiore di $a_1 = 2 > 0$).

Pertanto essendo a_n limitata, si ha $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$.

Per calcolare il valore di a sarà sufficiente passare al limite nella relazione di ricorrenza (ricordando che $\lim a_{n+1} = a$) dalla quale si ottiene

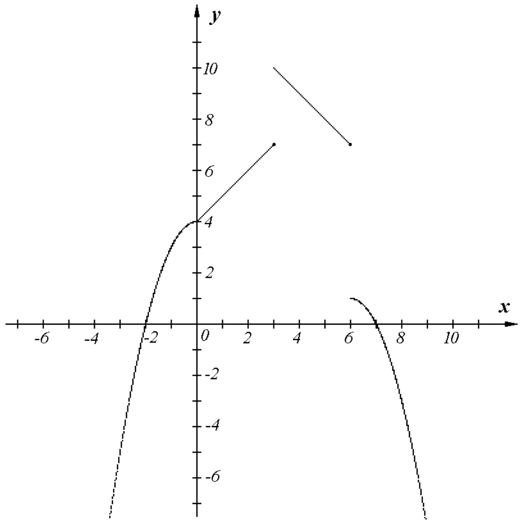
$$a = \frac{1}{12}a^2 + 3 \qquad \text{ovvero} \qquad a = 6 \quad .$$

b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & , x \leq 0 \\ x + 4 & , 0 < x \leq 3 \\ -x + 13 & , 3 < x \leq 6 \\ 1 - (x-6)^2 & , x > 6 \end{cases}$$

- **Disegnare il grafico di f.**
- **Determinare il più grande intervallo che contiene l'origine in cui f è invertibile, disegnare il grafico dell'inversa g e trovare, se possibile, $g(9)$.**
- **Determinare una espressione esplicita di g.**

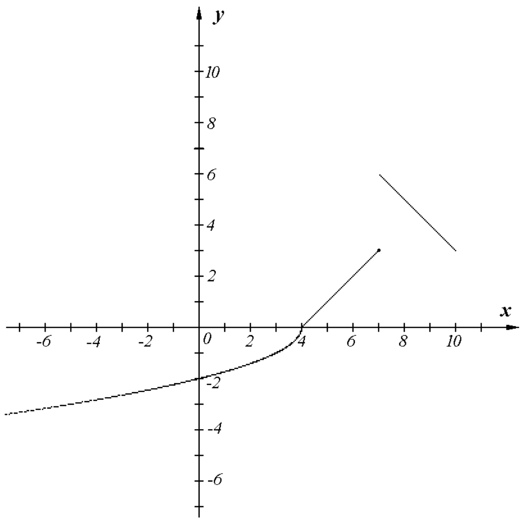
Il grafico di f risulta



Si noti che $f : (-\infty, 6) \to (-\infty, 10)$ è iniettiva (e non lo è su intervalli più grandi contenenti l'origine); infatti $f : (-\infty, 3] \to (-\infty, 7]$ è strettamente crescente, mentre $f : (3, 6) \to (7, 10)$ è strettamente decrescente.

Pertanto l'intervallo richiesto è $(-\infty, 6)$.

Il grafico dell'inversa $g : (-\infty, 10) \to (-\infty, 6)$ è



e, poiché $f(4) = 9$, risulta $g(9) = 4$.

Una espressione esplicita di g è (trovando l'inversa sui vari intervalli)

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x} & , x \leq 4 \\ x - 4 & , 4 < x \leq 7 \\ -x + 13 & , 7 < x < 10 \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 16 Dicembre 1998 - (3^a prova parziale) 1^h

1) Calcolare, se esiste, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\alpha x) - 2x^3 + 1 - \cos(2x)}{\sin(x^3) - x^2 + \sqrt{\alpha}\, x}$$

Intanto deve essere $\alpha \geq 0$ affinché la funzione sia definita.
Consideriamo prima il caso $\alpha > 0$:
il numeratore è la somma di tre funzioni infinitesime:

$$\begin{array}{ll} \arctan \alpha x & \text{di ordine } 1 \\ -\,2x^3 & \text{di ordine } 3 \\ 1 - \cos(2x) & \text{di ordine } 2 \end{array}$$

mentre il denominatore è la somma di tre funzioni infinitesime:

$$\begin{array}{ll} \sin(x^3) & \text{di ordine } 3 \\ -\,x^2 & \text{di ordine } 2 \\ \sqrt{\alpha}\, x & \text{di ordine } 1 \end{array}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\alpha x) - 2x^3 + 1 - \cos(2x)}{\sin(x^3) - x^2 + \sqrt{\alpha}\, x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\alpha x)}{\sqrt{\alpha}\, x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\alpha x)}{\alpha\, x}\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}$$

Se invece $\alpha = 0$ allora il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3 + 1 - \cos(2x)}{\sin(x^3) - x^2}$$

e per le considerazioni fatte sopra si ha, (tenendo come sempre gli ordini inferiori)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3 + 1 - \cos(2x)}{\sin(x^3) - x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(2x)}{-x^2} = \lim_{x\to 0^+} -4\frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} = -4\frac{1}{2} = -2$$

2) Si consideri, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x - x^2) & x \leq 0 \\ -3x^2 + (2a - b + 3)x - (a + b - 2) & x > 0 \end{cases}$$

a) Determinare a e b in modo che f risulti continua sul suo dominio.
b) Determinare a e b in modo che f risulti derivabile sul suo dominio.
c) Per i valori di a e b per i quali f è derivabile, disegnare il grafico di f.

Per quel che riguarda il dominio di f dovrà essere, per $x \leq 0$, $1 + x - x^2 > 0$ ovvero $x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0]$.
Essendo formata a tratti da funzioni continue, f risulta quindi continua in $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ ed in $(0, +\infty)$.
Resta da verificare la continuità in 0. Poiché

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(1 + x - x^2) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} -3x^2 + (2a - b + 3)x - (a + b - 2) = 2 - a - b$$

dovrà risultare $0 = 2 - a - b$ ovvero

$$a + b = 2 \quad .$$

Per quanto riguarda la derivabilità, ancora come sopra f risulta derivabile (in quanto formata da funzioni derivabili) in $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ ed in $(0, +\infty)$.

Nell'origine si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-2x}{1+x-x^2} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -6x + (2a - b + 3) = (2a - b + 3)$$

Dovrà quindi risultare $2a - b + 3 = 1$, che unita alla condizione di continuità sopra trovata, fornisce

$$a = 0 \qquad , \qquad b = 2 \quad .$$

Disegnamo ora (nel caso $a = 0$ e $b = 2$) il grafico di

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x - x^2) & \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \le 0 \\ -3x^2 + x & x > 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \ln(1 + x - x^2) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} -3x^2 + x = -\infty$$

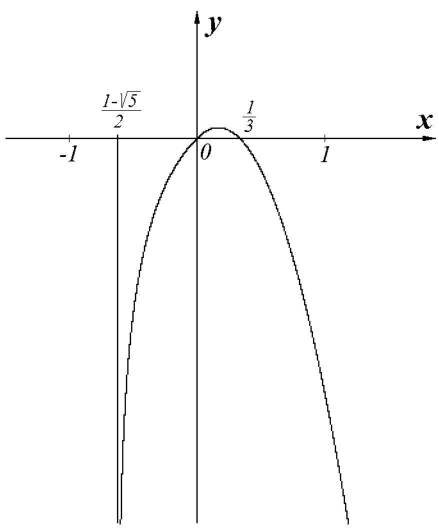
Intersezioni con gli assi: per $x = 0$, f(0)=0; inoltre per $x \le 0$, $\ln(1 + x - x^2) = 0$ fornisce $1 + x - x^2 = 1$ ovvero $x = 0$ (e $x = 1$ non accettabile); infine, per $x > 0$, $-3x^2 + x = 0$ fornisce $x = \frac{1}{3}$ (e $x = 0$).

Crescenza e decrescenza: essendo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{1+x-x^2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \le 0 \\ -6x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

dallo studio di $f'(x) \ge 0$, si ha, per $x \le 0$, $\frac{1-2x}{1+x-x^2} \ge 0$, e ricordando che il denominatore è sempre positivo, risulta $x \le \frac{1}{2}$, ovvero sempre verificato (essendo $x \le 0$); infine, per $x > 0$, si ha $-6x + 1 \ge 0$ ovvero $x \le \frac{1}{6}$.

In conclusione f risulta crescente in $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{6}]$ (il suo massimo si ha per $x = \frac{1}{6}$ e vale $\frac{1}{12}$) e quindi il grafico è:



ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 20 Gennaio 1999 1^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(x-1)^2} - 4} \quad .$$

a) Disegnare il grafico di f.

f risulta definita per $\mathrm{e}^{(x-1)^2} - 4 \neq 0$, ovvero per $x \neq 1 \pm \sqrt{\ln 4}$.
Si ha $f(0) = \frac{1}{\mathrm{e}-4}$ mentre f non si annulla mai.
Inoltre

$$f(x) \; > \; 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x \in (-\infty, 1 - 1 - \sqrt{\ln 4}) \cup (1 + \sqrt{\ln 4}, +\infty)$$

e

$$\lim_{x \to (1-\sqrt{\ln 4})^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to (1-\sqrt{\ln 4})^+} f(x) = -\infty$$

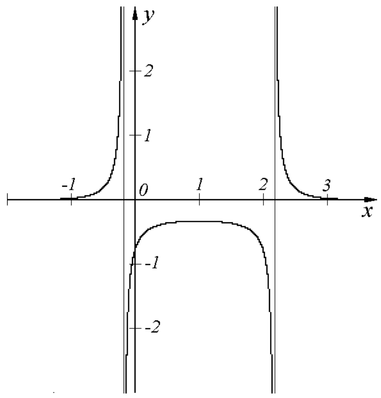
$$\lim_{x \to (1+\sqrt{\ln 4})^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to (1+\sqrt{\ln 4})^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Calcolando la derivata prima

$$f'(x) = -\frac{1}{(\mathrm{e}^{(x-1)^2} - 4)^2} 2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2}$$

essa risulta positiva per $x < 1$, $x \neq 1 - \sqrt{\ln 4}$; pertanto f sarà crescente in $(-\infty, 1-\sqrt{\ln 4}) \cup (1-\sqrt{\ln 4}, 1)$.
Il grafico di f risulterà pertanto:



(Si poteva più semplicemente disegnare la funzione pari e^{x^2}, quindi traslarla a sinistra di 1 ed in basso di 4, e infine disegnarne la reciproca).

b) Calcolare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico di f, per $x = 0$.

f è derivabile in 0 e quindi l'equazione della retta richiesta è

$$y = f(0) + f'(0)x = \frac{1}{\mathrm{e}-4} + \frac{2\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-4)^2}x$$

c) Determinare, se esiste, l'inversa di f su $[0, 1]$.

Poiché si è già visto che f risulta strettamente crescente in $[0, 1]$, allora $f : [0, 1] \to [\frac{1}{\mathrm{e}-4}, -\frac{1}{3}]$ è invertibile e risolvendo $x = f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(f^{-1}(x)-1)^2} - 4}$ si ottiene

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)} \qquad x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}-4}, -\frac{1}{3}\right]$$

ove si è scelto il segno negativo della radice perché $f^{-1}(x) \in [0, 1]$.

- **Si consideri la successione**

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

a) Verificare che, per ogni n naturale, $a_n = 1 + 2^n$.

Per $n = 1$ si ha $a_1 = 1 + 2^1 = 3$, che risulta vero.
Supponendo ora $a_n = 1 + 2^n$, si ottiene

$$a_{n+1} = 2(1 + 2^n) - 1 = 1 + 2^{n+1}$$

e quindi il risultato è provato per induzione.

b) Calcolare, se esiste, l'ordine di infinito di $\ln a_n$.

Per quanto visto sopra

$$\ln a_n = \ln(1 + 2^n) = \ln[2^n(1 + 2^{-n}] = \ln(2^n) + \ln(1 + 2^{-n}) = n \ln 2 + \ln(1 + 2^{-n})$$

Poiché $\ln(1 + 2^{-n}) \to 0$, la parte che è infinita risulta $n \ln 2$, che ha ordine 1.
(In altre parole $\ln(1 + 2^n)$ si comporta all'infinito come $\ln(2^n) = n \ln 2$).

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 8 Febbraio 1999 1^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + b & \textbf{, se } x \geq 0 \\ e^x + c & \textbf{, se } x < 0 \end{cases}$$

a) Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che f sia continua su $\mathbb{R}$.

f risulta sicuramente continua per $x \neq 0$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x + c = c + 1 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} ax^2 + x + b = b = f(0)$$

per cui f sarà continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $b = c + 1$.

b) Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che f sia derivabile su $\mathbb{R}$.

f risulta sicuramente derivabile per $x \neq 0$ e vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 1 & \text{, se } x > 0 \\ e^x & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora, come visto al punto precedente, che sia $b = c + 1$, e studiamo la derivabilità in $x = 0$. Poiché i limiti delle derivate esistono e valgono

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 2ax + 1 = 1$$

allora $f'(0) = 1$ e f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $b = c + 1$.

- **Si consideri la funzione**

$$g(x) = \frac{1}{\ln(1 + x^2) - 1}$$

a) Disegnare il grafico di g.

g risulta definita per $\ln(1 + x^2) - 1 \neq 0$, ovvero per $x \neq \pm\sqrt{e - 1}$.
Si ha $g(0) = -1$ mentre g non si annulla mai.
Inoltre

$$g(x) \ > \ 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \ln(1 + x^2) \ > \ 1$$

ovvero

$$1 + x^2 \ > \ e \qquad \text{se e solo se} \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{e - 1}) \cup (\sqrt{e - 1}, +\infty)$$

e

$$\lim_{x \to (-\sqrt{e-1})^-} g(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to (-\sqrt{e-1})^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to (\sqrt{e-1})^-} g(x) = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to (\sqrt{e-1})^+} g(x) = +\infty$$

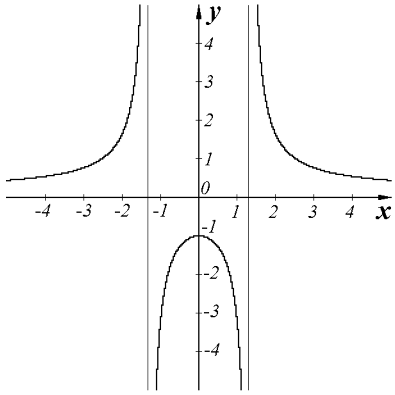
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

Calcolando la derivata prima

$$g'(x) = -\frac{1}{(\ln(1 + x^2) - 1)^2} \frac{1}{1 + x^2} 2x$$

essa risulta positiva per $x < 0$, $x \neq -\sqrt{e-1}$; pertanto g sarà crescente in $(-\infty, -\sqrt{e-1}) \cup (-\sqrt{e-1}, 0)$.

Il grafico di g risulterà pertanto:



(Si poteva più semplicemente disegnare la funzione pari $\ln(1+x^2)$, quindi traslarla in basso di 1, e infine disegnarne la reciproca).

b) Calcolare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico di g, per $x = 1$.

g è derivabile in 1 e quindi l'equazione della retta richiesta è

$$y = g(1) + g'(1)(x-1) = \frac{1}{\ln 2 - 1} - \frac{1}{\ln 2 - 1}(x-1)$$

c) Determinare, se esiste, l'inversa di g su $[-1, 0]$.

Si è già visto che g risulta strettamente crescente in $[-1, 0]$, allora $g : [-1, 0] \to [\frac{1}{\ln 2 - 1}, -1]$ è invertibile e risolvendo $x = g(g^{-1}(x)) = \frac{1}{\ln(1+(g^{-1}(x))^2 - 1}$ si ottiene

$$g^{-1}(x) = -\sqrt{e^{1+\frac{1}{x}} - 1} \qquad x \in \left[\frac{1}{\ln 2 - 1}, -1\right]$$

ove si è scelto il segno negativo della radice perché $g^{-1}(x) \in [-1, 0]$.

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 24 Febbraio 1999 1^h

- **Si consideri la successione definita da**

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

a) Stabilire se a_n è crescente.

a_n è crescente se e solo se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero se e solo se

$$a_n^2 - a_n + 1 \;\geq\; a_n \qquad \Leftrightarrow \qquad (a_n - 1)^2 \;\geq\; 0$$

che è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Pertanto a_n è crescente.

b) Calcolare, se esistono, $\lim a_n$**,** $\inf\{a_n\}$**,** $\sup\{a_n\}$**,** $\min\{a_n\}$**,** $\max\{a_n\}$**.**

Poiché a_n è crescente esiste il $\lim a_n = \sup\{a_n\}$ e tale limite può essere o $+\infty$ o reale ($= a$). Se è reale, passando al limite nella definizione di a_n, si ha

$$a = a^2 - a + 1 \qquad \text{ovvero} \qquad a = 1$$

che è impossibile perché $a_1 = 2$ e a_n è crescente.

Pertanto $\lim a_n = +\infty$; da cui $\sup\{a_n\} = +\infty$ e non esiste $\max\{a_n\}$.

Inoltre, sempre per la crescenza di a_n, $\inf\{a_n\} = \min\{a_n\} = a_1 = 2$.

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = 2 - 3x + 2\ln(x+1)$$

a) Disegnare il grafico di f.

f è definita per $x + 1 > 0$ ovvero $x > -1$. Inoltre $f(0) = 2$ e

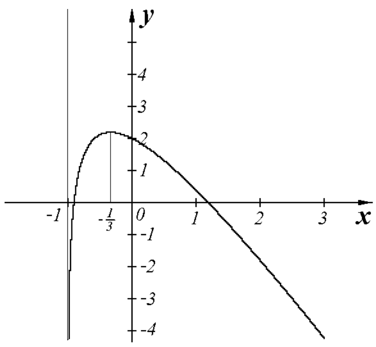
$$\lim_{x \to -1} 2 - 3x + 2\ln(x+1) = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} 2 - 3x + 2\ln(x+1) = -\infty$$

Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = -3 + \frac{2}{x+1}$$

che è positiva (essendo $x > -1$), per $-1 < x < -\frac{1}{3}$.

f risulta pertanto crescente in $(-1, -\frac{1}{3}]$ e decrescente in $[-\frac{1}{3}, +\infty)$ e il suo grafico è:



b) Determinare il più grande intervallo contenente 0 in cui f è invertibile.

Si è già visto che f è strettamente decrescente in $[-\frac{1}{3}, +\infty)$ e quindi è ivi invertibile (e non su intervalli più grandi).

c) Calcolare, se esiste, $(f^{-1})'(2)$**.**

Poiché $f(0) = 2$ ed $f'(0) = -1$ si avrà, per il teorema di derivazione della funzione inversa

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = -1$$

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 14 Giugno 1999 1^h

- **Si consideri la successione definita da**

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{6-a_n}{2} \\ a_1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

a) Verificare che $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{2^n}$

È possibile verificare quanto richiesto per induzione: infatti si ha $a_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e

$$a_{n+1} = \frac{6-a_n}{2} = \frac{6-2-\frac{(-1)^n}{2^n}}{2} = 2 - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

b) Calcolare $\lim a_n$

Risulta $\lim a_n = 2$ (poiché $\frac{(-1)^n}{2^n} \to 0$).

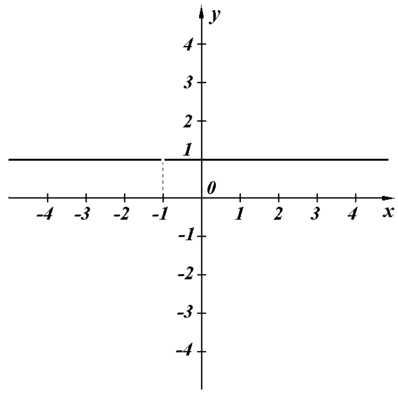
- **Si consideri la funzione definita da**

$$f(x) = x + \arctan(x+1) + \arctan\frac{1}{x+1}$$

c) Disegnare il grafico di f'.

f è definita per $x \neq -1$ e si ha, essendo composta di funzioni derivabili,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(x+1)^2}} = 1$$



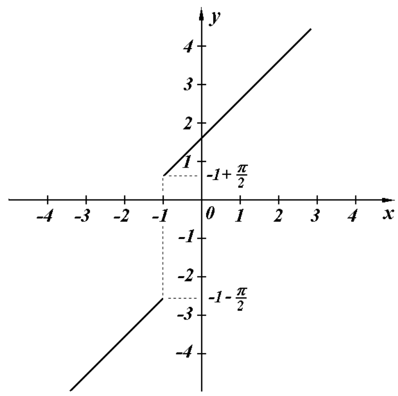
d) Disegnare il grafico di f.

Per quanto visto sopra risulterà

$$f(x) = \begin{cases} x+a & \text{, se } x < -1 \\ x+b & \text{, se } x > -1 \end{cases}$$

Poichè si ha $f(-2) = -2 + \arctan(-1) + \arctan(-1) = -2 - \frac{\pi}{2}$ e $f(0) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ avremo che

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & \text{, se } x < -1 \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{, se } x > -1 \end{cases}$$



e) Determinare, se esiste, l'inversa di f.

Essendo $f : (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty) \to (-\infty,-1-\frac{\pi}{2})\cup(-1+\frac{\pi}{2},+\infty)$ strettamente monotona, essa risulta invertibile e si ha

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & \text{, se } x < -1 - \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{, se } x > -1 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 12 luglio 1999 1^h

- **Si consideri la funzione definita da**

$$f(x) = x^3 + x$$

a) Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$

Poiché f è la somma di due funzioni strettamente crescenti (x^3 ed x) risulterà strettamente crescente, e quindi invertibile, su tutto il suo dominio, che è $\mathbb{R}$.

b) Detta g l'inversa di f su $\mathbb{R}$, calcolare, se esiste $g'(2)$

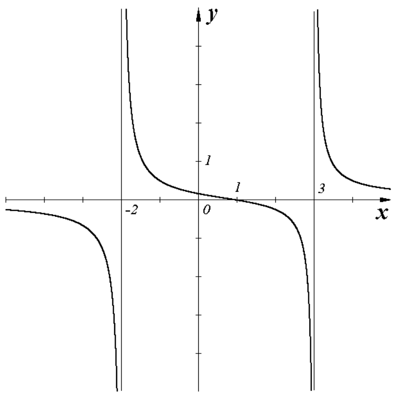
Poiché f è derivabile su $\mathbb{R}$, $2 = f(1)$ e $f'(1) = 4$, per il teorema di derivazione della funzione inversa, si ha

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

c) Calcolare l'ordine di infinitesimo di $g(x) - g(2)$ in $x = 2$

La funzione considerata si annulla per $x = 2$ ed inoltre la sua derivata prima vale $g'(2) = \frac{1}{4} \neq 0$, per cui l'ordine di infinitesimo è 1 (ordine della prima derivata non nulla).

- **Si consideri la funzione h il cui grafico è**

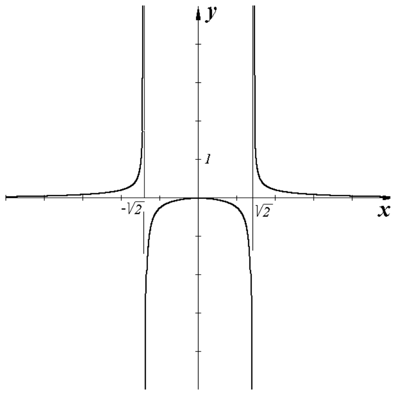


d) Disegnare il grafico di $k(x) = h(x^2 + 1)$.

Il grafico cercato si ottiene, prima traslando a sinistra di una unità il grafico di h, ottenendo in tal modo il grafico di $h(x + 1)$, e quindi disegnando, per $x > 0$ un grafico analogo a quello di h (essendo x^2 crescente per $x > 0$), e facendo poi il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, essendo la funzione k una funzione pari.

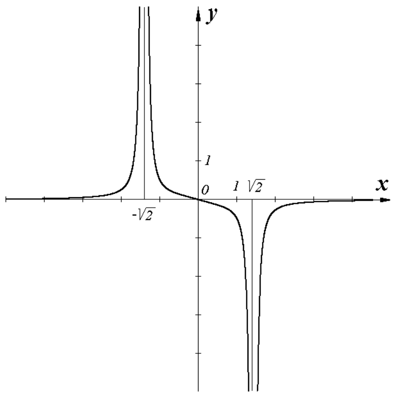
Si noti che $k(0) = h(1) = 0$ e che l'asintoto verticale per $x > 0$, si ha per $x^2 + 1 = 3$, ovvero per $x = \sqrt{2}$.

Inoltre, nell'origine, k deve essere derivabile e quindi non vi può essere una 'punta' nel grafico.



e) Disegnare il grafico di k'.

Essendo k una funzione pari, k' sarà una funzione dispari.
È quindi sufficiente disegnarla per $x > 0$ (essendo poi il grafico simmetrico rispetto all'origine).
Si ha $k'(0) = 0$ e $k'(x) < 0$ per ogni $x > 0$, $x \neq \sqrt{2}$. Inoltre $\lim_{x \to \sqrt{2}} k'(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} k'(x) = 0$. Infine, essendo k convessa per $x > \sqrt{2}$ risulterà k' crescente per $x > \sqrt{2}$ (e decrescente per $0 < x < \sqrt{2}$).
In definitiva il grafico richiesto è



ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 10 settembre 1999 1^h

- **Si consideri la successione**

$$a_n = \frac{n^2+3}{n^2+1}$$

a) Verificare che a_n è decrescente.

a_n è decrescente se e solo se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n, ovvero

$$\frac{(n+1)^2+3}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n^2+3}{n^2+1}$$

e sviluppando i calcoli, ne segue $4n+2 \geq 0$, che è sempre vero per ogni n naturale.

Più rapidamente si poteva notare che

$$a_n = \frac{n^2+1+2}{n^2+1} = 1 + \frac{2}{n^2+1}$$

che risulta decrescente.

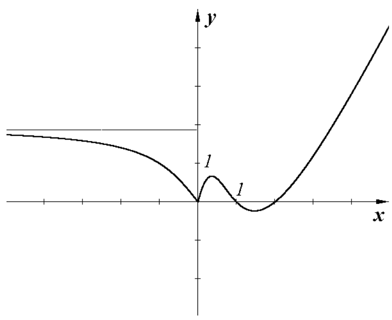
b) Determinare, se esistono, il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore della successione data.

Essendo a_n decrescente si ha

$$\max\{a_n\} = \sup\{a_n\} = a_1 = 2 \quad , \quad \inf\{a_n\} = \lim a_n = 1$$

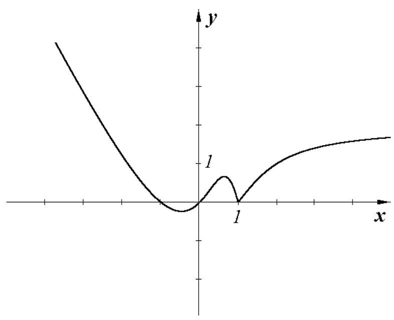
mentre non esiste il minimo, non essendo alcun termine della successione uguale a 1.

- **Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il cui grafico è:**



c) Disegnare il grafico di $f(1-x)$

Il grafico richiesto si ottiene traslando a sinistra di 1 e quindi ribaltando orizzontalmente il grafico di f.



d) Disegnare il grafico di $f'(x)$

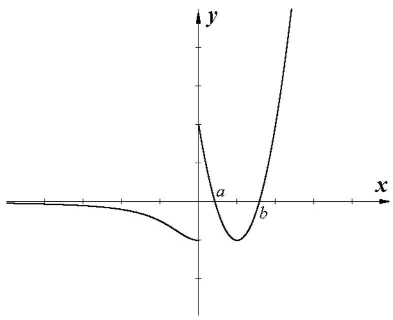
La funzione f è decrescente (e quindi f' è negativa per $x < 0$ e per $a < x < b$, ove si sono indicati con a e b i punti di massimo e di minimo relativo di f per $x > 0$.

Inoltre $\lim_{x\to infty} f'(x) = 0$ poiché la perdenza tende a diventare nulla.

Infine, sempre dall'esame del grafico di f, si ha $\lim_{x\to 0^-} f'(x) \approx -1$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) \approx 2$.

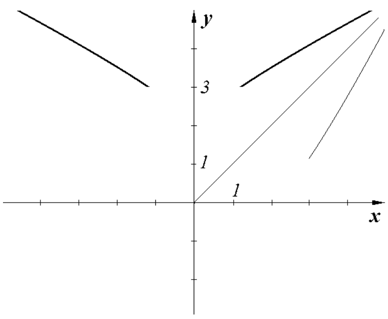
Si noti che non sono richieste considerazioni sulla derivata seconda di f; in ogni caso si avrebbe f' crescente (cioè f convessa) per x maggiore del punto di flesso vicino ad 1.

Un grafico ragionevole sarà pertanto



e) Disegnare il grafico di $g(|x|)$, dove g è l'inversa di f su $[3, +\infty)$.

Per $x > 0$, sarà sufficiente considerare la parte di grafico di f con $x \geq 3$ e disegnarne il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1^o e 3^o quadrante; essendo poi $g(|x|)$ una funzione pari, ci sarà anche il ramo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 5 Novembre 1999 - (1^a prova parziale) 1^h

a) Provare che, per ogni n naturale,

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

È possibile provare ciò per induzione: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{1} 3^k = 3^0 + 3^1 = 1 + 3 = 4 = \frac{3^2-1}{2}$$

e quindi la formula risulta vera.

Supponiamo ora che $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ e proviamo che $\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \frac{3^{n+2}-1}{2}$; si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-1+2\,3^{n+1}}{2} = \frac{3^{n+2}-1}{2}$$

e quindi la formula è valida per ogni naturale.

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

b) Determinare l'estremo superiore di f.

Osserviamo intanto che $x^2 - 2x + 2$ non si annulla mai.

Determiniamo quindi l'insieme dei maggioranti, ovvero degli $m \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2-2x+2} \le m \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Risolvendo la disequazione (ricordando che il denominatore della frazione è sempre positivo) si ottiene

$$mx^2 - 2mx + 2m - 1 \ge 0$$

Tale disequazione sarà verificata per ogni x reale se e solo se m è positivo ed il discriminante è negativo o nullo, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} m > 0 \\ m - m^2 \le 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \le 0 \quad \text{oppure} \quad m \ge 1 \end{cases}$$

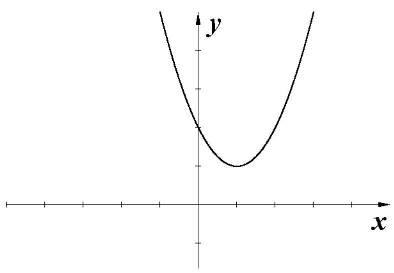
che fornisce come soluzione $m \ge 1$.

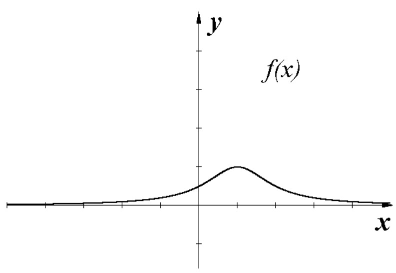
Pertanto l'estremo superiore (minimo dei maggioranti) è 1.

c) Disegnare il grafico di f.

Il grafico di $x^2 - 2x + 2$ è una parabola di vertice (1,1) con la concavità rivolta verso l'alto.

Da tale grafico è immediato dedurre quello di f (reciproco del precedente).





d) Verificare che f è invertibile su $(-\infty, 0)$.

f è sicuramente invertibile su $(-\infty, 0)$ essendo ivi strettamente crescente (lo si deduce dal grafico, o dal fatto che è la reciproca di una funzione strettamente decrescente e positiva).

e) Determinare l'inversa di f su $(-\infty, 0)$.

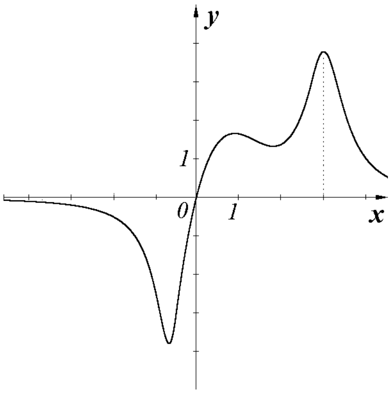
Poiché $f : (-\infty, 0) \to (0, \frac{1}{2})$, si avrà $f^{-1} : (0, \frac{1}{2}) \to (-\infty, 0)$ ed essendo

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$$

si ricava facilmente l'espressione dell'inversa (ricordando che il rango di f^{-1} è $(-\infty, 0)$)

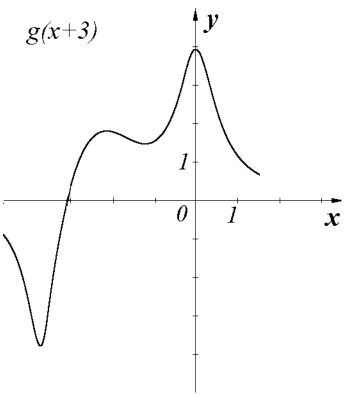
$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

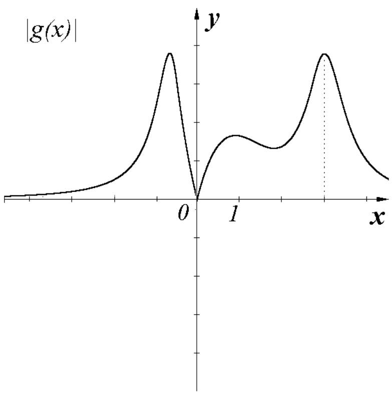
- **Dato il grafico della funzione** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

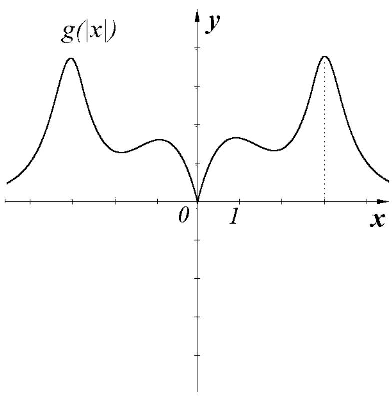


f) Disegnare il grafico di $g(x+3)$ **,** $|g(x)|$ **e** $g(|x|)$**.**

Il grafico di $g(x+3)$ si ottiene traslando a sinistra di 3 unità quello di g; il grafico di $|g(x)|$ si ottiene ribaltando in alto la parte negativa del grafico di g; il grafico di $g(|x|)$ si ottiene ribaltando a sinistra la parte del grafico di g avente ascissa positiva:







ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 26 Novembre 1999 - (2^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri la successione definita da**

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n} \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

a) Provare che, per ogni n naturale, si ha $a_n > 0$.

Per $n = 1$ si ha $a_1 = 5 > 0$. Supponendo poi $a_n > 0$ si ha

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \; > \; 0$$

(essendo positivi sia il numeratore che il denominatore).
Pertanto quanto richiesto è provato per induzione.

b) Provare che a_n è decrescente.

a_n è decrescente se e solo se $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n$, se e solo se

$$\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n \qquad , \qquad \forall n$$

se e solo se (essendo $1 + a_n > 0$)

$$a_n \; \leq \; a_n + a_n^2 \qquad \text{ovvero} \qquad 0 \leq a_n^2 \qquad \forall n$$

che è banalmente vero.

c) Determinare, se esiste, il $\lim a_n$.

Essendo a_n decrescente, esiste sicuramente $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ (essendo $a = \inf\{a_n\}$ si ha che $a \in \mathbb{R}$ oppure $a = -\infty$, ma il secondo caso è impossibile poiché a_n è sempre positiva).
Pertanto, passando al limite nella relazione di ricorrenza, si ottiene

$$a = \frac{a}{1+a} \qquad \text{da cui} \qquad a = 0 \quad .$$

d) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{3+n^2}{1+n+n^2} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos(2x))}{(\sin(3x))^3} \qquad , \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2+2x-3} \quad .$$

Tutti e tre i limiti risultano forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_n \frac{3+n^2}{1+n+n^2} = \lim_n \frac{\frac{3}{n^2}+1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos(2x))}{(\sin(3x))^3} = \lim_{x\to 0} x\,(2x)^2 \frac{1}{(3x)^3} \frac{(1-\cos(2x))}{(2x)^2} \frac{(3x)^3}{(\sin(3x))^3} = \frac{4}{27}\frac{1}{2} = \frac{2}{27}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-1}{x+3} = \frac{1}{4}$$

e) Verificare, utilizzando la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Si tratta di verificare che

$$\forall\epsilon > 0 \ \ \exists\delta_\epsilon > 0 \ : \ x \in I^o(+\infty, \delta_\epsilon) \ \Rightarrow \ \frac{x}{x+1} \in I(1, \epsilon)$$

ovvero

$$\forall\epsilon > 0 \ \ \exists\delta_\epsilon > 0 \ : \ x > \delta_\epsilon \ \Rightarrow \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \epsilon$$

Si ha

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| \ = \ \frac{1}{|x+1|} \ < \ \epsilon \qquad \text{se e solo se} \qquad |x+1| > \frac{1}{\epsilon}$$

ovvero se $x > \frac{1}{\epsilon} - 1$ e la tesi, scegliendo (se $\epsilon < 1$), $\delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - 1$.

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 17 Dicembre 1999 - (3^a prova parziale) 1^h

- **Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(3x) + 2x^2 \sin(2x)}{x^3 \cos(x) + \ln(1 + \alpha x^2)}$$

Si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$; esaminando gli ordini di infinitesimo, si ha

$$\begin{array}{rl} 1-\cos(3x) & \text{è infinitesima di ordine 2} \\ 2x^2\sin(2x) & \text{è infinitesima di ordine 3} \\ x^3\cos(x) & \text{è infinitesima di ordine 3} \\ \ln(1+\alpha x^2) & \text{è infinitesima di ordine 2 se } \alpha > 0 \end{array}$$

Pertanto, se $\alpha > 0$, il limite richiesto è uguale a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(3x)}{\ln(1+\alpha x^2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2} \frac{\alpha x^2}{\ln(1+\alpha x^2)} \frac{(3x)^2}{\alpha x^2} = \frac{1}{2}\, 1\, \frac{9}{\alpha} = \frac{9}{2\alpha} \; .$$

Se invece $\alpha = 0$, sempre per le considerazioni fatte sugli ordini, il limite risulta $+\infty$, essendo il numeratore di ordine inferiore al denominatore.

- **Si consideri la funzione definita da**

$$f(x) = \begin{cases} a + \arctan(2x) & \text{, se } x < 0 \\ \dfrac{b}{x+1} & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ f risulta continua su $\mathbb{R}$.

f è sicuramente continua per $x \neq 0$, essendo formata da composte di funzioni continue. Per quel che riguarda $x = 0$, si ha $\lim_{x\to 0^-} a + \arctan(2x) = a$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x+1} = b = f(0)$ per cui f sarà continua su $\mathbb{R}$ se e solo se

$$a = b$$

b) Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ f risulta derivabile su $\mathbb{R}$.

f è sicuramente derivabile per $x \neq 0$, essendo formata da composte di funzioni derivabili e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+4x^2} & \text{, se } x < 0 \\ -\dfrac{b}{(x+1)^2} & \text{, se } x > 0 \end{cases}$$

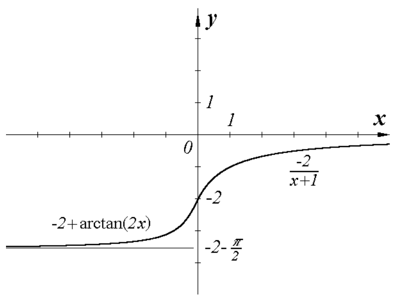
Per quel che riguarda $x = 0$, si ha $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1+4x^2} = 2$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{-b}{(x+1)^2} = -b$ per cui f sarà derivabile su $\mathbb{R}$ se e solo se

$$a = b = -2$$

c) Per i valori di a e b per i quali f risulta derivabile in $\mathbb{R}$ disegnarne il grafico.

Si tratta di disegnare il grafico di

$$f(x) = \begin{cases} -2 + \arctan(2x) & \text{, se } x < 0 \\ -\dfrac{2}{x+1} & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$$



d) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x = 0$.

Essendo $f(0) = -2$ e $f'(0) = 2$, l'equazione della retta tangente risulta

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = -2 + 2x$$

e) Detta f^{-1} l'inversa di f, determinare $(f^{-1})'(1)$.

Si noti che f risulta invertibile su tutto $\mathbb{R}$ essendo strettamente crescente; inoltre, essendo $f(0) = -2$, si ha

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 10 Gennaio 2000 - 1^h

- **Si consideri la successione definita da**

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 1 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

a) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni n, si abbia $a_n = \beta\,\alpha^n + 1$.

Se $a_n = \beta\,\alpha^n + 1$ si ha, sostituendo nell'equazione che definisce la successione

$$\beta\,\alpha^{n+1} + 1 = 2\beta\,\alpha^n + 2 - 1$$

da cui, semplificando e dividendo per $\beta\alpha^n$ ($\beta\alpha \neq 0$ in quanto se fosse nullo si avrebbe a_n identicamente 1),

$$\alpha = 2$$

Dalla condizione $a_1 = 7$ si ha poi $\beta\alpha + 1 = 7$ ovvero $2\beta + 1 = 7$ e quindi $\beta = 3$.

b) Determinare, se esiste, l'ordine di infinito di $\ln(a_n)$.

Poichè $a_n = 3\,2^n + 1$ si ha $\ln(a_n) = \ln(3\,2^n + 1)$ che tende all'infinito con lo stesso ordine di $\ln(3\,2^n) = \ln 3 + n\ln 2$, ovvero di ordine 1.

- **Si consideri la funzione definita da**

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$$

c) Disegnare il grafico di f, precisando dominio, limiti, continuità, derivabilità e crescenza.

La funzione risulta definita per $x \neq 0$ e sul suo dominio è continua e derivabile, in quanto composta da funzioni derivabili.

Inoltre, utilizzando per il secondo limite gli ordini di infinito,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$$

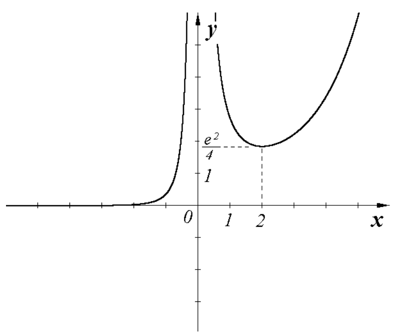
Si ha poi, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x\,\frac{x^2 - 2x}{x^4}$$

da cui f risulta crescente per $x^2 - 2x > 0$ ovvero per $x < 0$ oppure per $x > 2$.

Nel punto di minimo si ha $f(2) = \frac{\mathrm{e}^2}{4}$

Il grafico di f sarà pertanto:



d) Scrivere, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico di f per $x = 1$.

L'equazione della retta richiesta è

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = \mathrm{e} - \mathrm{e}(x - 1) = \mathrm{e}(2 - x)$$

e) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero degli zeri dell'equazione $\mathrm{e}^x = kx^2$.

L'equazione data è equivalente, per $x \neq 0$, a

$$k = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$$

(d'altra parte per $x = 0$ l'equazione diventa $1 = 0$ per ogni k e quindi $x = 0$ non è mai soluzione).

Dal grafico della funzione al punto c) si deduce pertanto che si avranno

nessuna soluzione per	$k \leq 0$
una soluzione per	$0 < k < \frac{\mathrm{e}^2}{4}$
due soluzioni per	$k = \frac{\mathrm{e}^2}{4}$
tre soluzioni per	$k > \frac{\mathrm{e}^2}{4}$

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 31 Gennaio 2000 - 1^h

- **Si consideri la successione definita da**

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

a) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni n, si abbia $a_n = \beta\,\alpha^n - 2$.

Se $a_n = \beta\,\alpha^n - 2$ si ha, sostituendo nell'equazione che definisce la successione

$$\beta\,\alpha^{n+1} - 2 = 3\beta\,\alpha^n - 6 + 4$$

da cui, semplificando e dividendo per $\beta\alpha^n$ ($\beta\alpha \neq 0$ in quanto se fosse nullo si avrebbe a_n identicamente -2),

$$\alpha = 3$$

Dalla condizione $a_1 = 1$ si ha poi $\beta\alpha - 2 = 1$ ovvero $3\beta - 2 = 1$ e quindi $\beta = 1$.

b) Determinare, se esiste, l'ordine di infinito di $\ln(a_n)$.

Poichè $a_n = 3^n - 2$ si ha $\ln(a_n) = \ln(3^n - 2)$ che tende all'infinito con lo stesso ordine di $\ln(3^n) = n\ln 3$, ovvero di ordine 1.

- **Si consideri la funzione definita da**

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$$

c) Disegnare il grafico di f, precisando dominio, limiti, continuità, derivabilità e crescenza.

La funzione risulta definita per $x \neq 0$ e sul suo dominio è continua e derivabile, in quanto composta da funzioni derivabili.

Inoltre, utilizzando per il secondo limite gli ordini di infinito,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^-} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$$

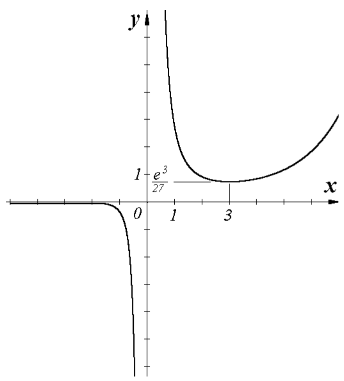
Si ha poi, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \frac{x^3 - 3x^2}{x^6}$$

da cui f risulta crescente per $x^3 - 3x^2 > 0$ ovvero per $x > 3$.

Nel punto di minimo si ha $f(3) = \frac{\mathrm{e}^3}{27}$

Il grafico di f sarà pertanto:



d) Scrivere, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico di f per $x = 1$.

L'equazione della retta richiesta è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \mathrm{e} - 2\mathrm{e}(x-1)$$

e) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero degli zeri dell'equazione $\mathrm{e}^x = kx^3$.

L'equazione data è equivalente, per $x \neq 0$, a

$$k = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$$

(d'altra parte per $x = 0$ l'equazione diventa $1 = 0$ per ogni k e quindi $x = 0$ non è mai soluzione).

Dal grafico della funzione al punto c) si deduce pertanto che si avranno

una soluzione per	$k < 0$
nessuna soluzione per	$0 \leq k < \frac{\mathrm{e}^3}{27}$
una soluzione per	$k = \frac{\mathrm{e}^3}{27}$
due soluzioni per	$k > \frac{\mathrm{e}^3}{27}$

ANALISI MATEMATICA 1 (Sv) - 21 Febbraio 2000 - 1^h

Si consideri la successione

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$

a) Provare che, per ogni n naturale, si ha

$$a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Utilizzando il principio di induzione si ha, per $n = 1$

$$a_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1} \quad .$$

Supponendo ora vera la formula per n,

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

e quindi il risultato è provato anche per $n + 1$.

b) Calcolare, se esiste, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Si ha

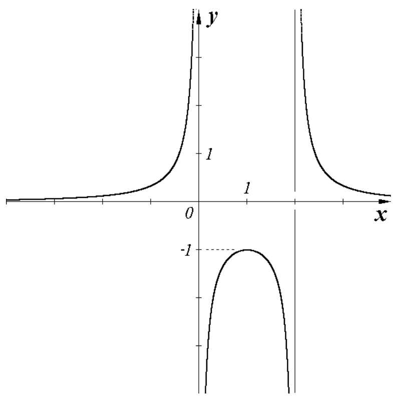
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1$$

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

c) Determinare il rango di f.

Dal grafico della funzione (facilmente ottenibile da quello di $x^2 - 2x$)



si deduce che il rango è $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

In altro modo si possono cercare i valori di y per cui l'equazione

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

ha soluzioni (diverse da 0 e -2). Risolvendo si ottiene

$$yx^2 - 2yx - 1 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + y}}{y}$$

e quindi affinché esistano soluzioni deve essere $y^2 + y > 0$, con $y \neq 0$, ed il risultato precedente.

d) Determinare, se esiste, l'inversa di f in $(-\infty, 0)$.

$f : (-\infty, 0) \to (0, +\infty)$ è invertibile in quanto strettamente crescente.
Dai calcoli del punto precedente, scegliendo quindi la soluzione negativa, si ha

$$f^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 + y}}{y} \qquad , \ y > 0 \quad .$$

e) Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt{1 - 1/x}} = 1 \end{aligned}$$