Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria - Polo di Savona
via Cadorna 7 - 17100 Savona
Tel. +39 019 264555 - Fax +39 019 264558

Ingegneria Gestionale

Analisi Matematica 1+2

A.A 1998/99 - Prove parziali

PlainTex - DviPdf 1.2 op - 6 Maggio 2002

ANALISI MATEMATICA 1+2 (Sv) - 10 Marzo 1999 - (1^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri la disequazione**

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a$$

a) Determinare tutte le soluzioni della disequazione per $a = 2$.

Intanto deve essere $x \neq 1$; inoltre si ha

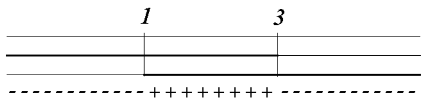
$$\frac{x+1}{x-1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-x}{x-1} \leq 0$$

Studiando il segno del numeratore e del denominatore si ha

$$3 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3 \qquad , \qquad x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

da cui la frazione risulta negativa per

$$x < 1 \quad \text{o} \quad x \geq 3$$



b) Determinare α e β reali tali che

$$\frac{x+1}{x-1} = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$$

Si ha

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

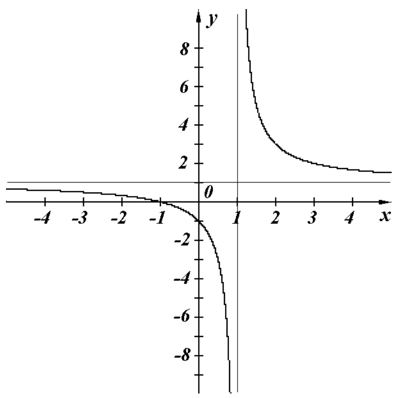
da cui $\alpha = 1$ e $\beta = 2$. (Si poteva anche eseguire la divisione dei due polinomi ed ottenere un quoziente di 1 ed un resto di 2, da cui $x + 1 = 1(x - 1) + 2$ e dividendo per $x - 1$ entrambi i membri, si ottiene il risultato voluto).

c) Disegnare il grafico di $\frac{x+1}{x-1}$.

Dal precedente risultato, essendo

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

il grafico richiesto si ottiene semplicemente dal grafico di $\frac{1}{x}$ traslato a destra di 1 (e moltiplicato per 2, ovvero mutando la scale delle ordinate) e quindi traslato in alto di 1.



d) Risolvere la disequazione al variare di a nei reali.

Sempre con $x \neq 1$, si ha

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} - a \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1+a)+(1-a)x}{x-1} \leq 0$$

Studiando il segno del numeratore e del denominatore si ha

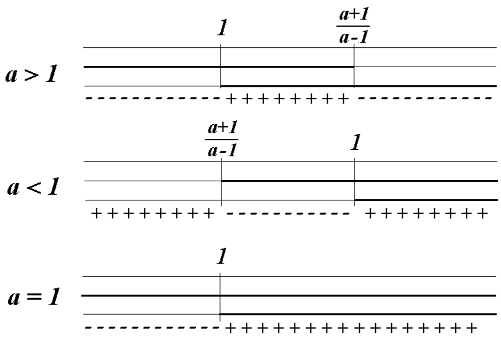
$$(1+a)+(1-a)x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)x \leq a+1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq \frac{a+1}{a-1} & \text{, se } a > 1 \\ x \geq \frac{a+1}{a-1} & \text{, se } a < 1 \\ x \in \mathbb{R} & \text{, se } a = 1 \end{cases}$$

e

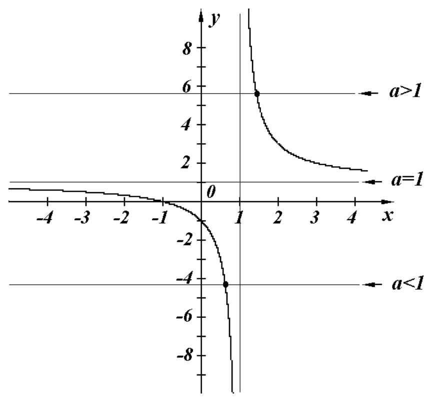
$$x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

Dall'esame dei tre casi ($a < 1$, $a = 1$, $a > 1$) si conclude (si osservi che, se $a > 1$ si ha $\frac{a+1}{a-1} > 1$, mentre se $a < 1$ si ha $\frac{a+1}{a-1} < 1$)

$$\begin{cases} x < 1 \ \cup \ x \geq \frac{a+1}{a-1} & \text{, se } a > 1 \\ 1 < x \leq \frac{a+1}{a-1} & \text{, se } a < 1 \\ x < 1 & \text{, se } a = 1 \end{cases}$$



Si possono ottenere gli stessi risultati confrontando il grafico della funzione, con la retta orizzontale $y = a$, al variare di a nei reali.



e) Trovare gli a reali, se ne esistono, tali che

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a \qquad , \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ x \neq 1$$

Dalla soluzione del punto precedente si deduce che non esistono $a \in \mathbb{R}$ per i quali la disequazione si sempre soddisfatta, per $x \neq 1$.

Anche utilizzando il grafico, si nota che la funzione non è limitata superiormente.

ANALISI MATEMATICA 1+2 (Sv) - 24 Marzo 1999 - (2^a prova parziale) 1^h

- **Sia**

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+x+1} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Determinare i maggioranti di A e $\sup A$.

M è un maggiorante di A se e solo se

$$\frac{1}{x^2+x+1} \leq M \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ovvero, poiché x^2+x+1 è sempre positivo, se e solo se

$$Mx^2 + Mx + M - 1 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Affinché ciò risulti vero deve essere il primo coefficiente positivo ed il discriminante minore o uguale a zero (si noti che per $M = 0$ si ottiene $-1 \geq 0$ che risulta falso), ovvero

$$\begin{cases} M > 0 \\ 4M - 3M^2 \leq 0 \end{cases}$$

che fornisce $M \geq \frac{4}{3}$. Pertanto i maggioranti di A sono

$$M(A) = \left\{ M \in \mathbb{R} \ : \ M \geq \frac{4}{3} \right\}$$

e

$$\sup A \ = \ \min M(A) \ = \ \frac{4}{3} \quad .$$

b) Determinare i minoranti di A e $\inf A$.

Per quanto riguarda i minoranti, m è un minorante di A se e solo se

$$\frac{1}{x^2+x+1} \geq m \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ovvero, come sopra, poiché x^2+x+1 è sempre positivo, se e solo se

$$mx^2 + mx + m - 1 \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Affinché ciò risulti vero deve essere $m = 0$ (per il quale l'equazione diventa $-1 \leq 0$, banalmente vera) oppure il primo coefficiente negativo ed il discriminante minore o uguale a zero, ovvero

$$\begin{cases} m < 0 \\ 4m - 3m^2 \leq 0 \end{cases}$$

che fornisce $m < 0$. Pertanto i minoranti di A sono

$$m(A) = \{ m \in \mathbb{R} \ : \ m \leq 0 \ \}$$

e

$$\inf A \ = \ \max \ m(A) \ = \ 0$$

c) Stabilire se esistono $\max A$ **e** $\min A$ **e calcolarli.**

Per stabilire se $\sup A = \frac{4}{3}$ è anche massimo di A si deve verificare se $\frac{4}{3} \in A$ e questo avviene se e solo se

$$\exists x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \quad .$$

Risolvendo tale equazione si ottiene $x = -\frac{1}{2}$ da cui

$$\max A = \frac{4}{3} \quad .$$

Per stabilire se $\inf A = 0$ è anche minimo di A si deve verificare se $0 \in A$ e questo avviene se e solo se

$$\exists x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{x^2+x+1} = 0 \quad .$$

Poiché tale equazione non ha soluzioni reali si ha che non esiste $\min A$.

d) Provare che è vera la seguente affermazione
la funzione x^n **e strettamente crescente su** $(0, +\infty)$ **per ogni** $n \in \mathbb{N}$

Bisogna provare che, per ogni n naturale

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x^n < y^n$$

Intanto, per $n = 1$ si ha

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x < y$$

che è banalmente vera.

Supponiamo ora che

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x^n < y^n$$

e proviamo che

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x^{n+1} < y^{n+1}$$

Si ha, se $0 < x < y$, (ricordando l'ipotesi)

$$x^{n+1} = x^n x < y^n x < y^n y = y^{n+1}$$

che è la tesi, e quindi il risultato è provato per induzione.

ANALISI MATEMATICA 1+2 (Sv) - 21 Aprile 1999 - (3^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}}$$

a) Calcolare, per $a > 1$, $b > 0$ e $c > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Raccogliendo x^{42} al numeratore si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{42}\,[a - (1+\frac{b}{x})^{42}]}{x^c \arctan x^{21}}$$

Poiché $a > 1$, la quantità al numeratore in parentesi quadra tende ad $a-1$, mentre $\arctan x^{21}$ tende a $\pi/2$; pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{42-c}[a - (1+\frac{b}{x})^{42}]}{\arctan x^{21}} = \begin{cases} +\infty & \text{, se } c < 42 \\ \frac{2(a-1)}{\pi} & \text{, se } c = 42 \\ 0 & \text{, se } c > 42 \end{cases}$$

b) Calcolare, per $a = 1$, $b > 0$ e $c > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Essendo $(x+b)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} b^k x^{42-k} = x^{42} + 42bx^{41} + \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} b^k x^{42-k}$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-42bx^{41} - \sum_{k=2}^{42} \binom{42}{k} b^k x^{42-k}}{x^c \arctan x^{21}}$$

Il numeratore tende all'infinito di ordine 41 (la sommatoria contiene potenze di x tutte inferiori a 41); il denominatore invece tende sempre all'infinito di ordine c (mentre $\arctan x^{21}$ tende a $\pi/2$); pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-42bx^{41}}{x^c \arctan x^{21}} = \begin{cases} -\infty & \text{, se } c < 41 \\ \frac{-84b}{\pi} & \text{, se } c = 41 \\ 0 & \text{, se } c > 41 \end{cases}$$

(In altro modo, si poteva anche procedere come al punto a) e scomporre $1-(1+\frac{b}{x})^{42}$ utilizzando la relazione $1 - z^{42} = (1-z)(1+z+z^2+ ... + z^{40} + z^{41})$.

c) Calcolare, per $b > 0$, $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \lim_{x\to0^+} \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^{c+21}} \frac{x^{21}}{\arctan x^{21}}$$

Poiché il numeratore tende a $-b^{42} < 0$, ricordando che $\lim_{x\to0^+} \frac{x^{21}}{\arctan\ x^{21}} = 1$, si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \begin{cases} -\infty & \text{, se } c > -21 \\ -b^{42} & \text{, se } c = -21 \\ 0 & \text{, se } c < -21 \end{cases}$$

d) Calcolare, per $a > 1$ e $b = 0$, $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

Essendo $b = 0$, si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \lim_{x\to0^+} \frac{(a-1)x^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \lim_{x\to0^+} \frac{(a-1)x^{21}}{x^c} \frac{x^{21}}{\arctan x^{21}}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(a-1)x^{42}}{x^c \arctan x^{21}} = \begin{cases} +\infty & \text{, se } c > 21 \\ a-1 & \text{, se } c = 21 \\ 0 & \text{, se } c < 21 \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA 1+2 (Sv) - 28 Aprile 1999 - (4^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri la successione definita da**

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sin(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

a) Per $a = 3$, verificare che $a_n \in (0, \pi)$.

Utilizzando il principio di induzione, si ha intanto $a_0 = 3 \in (0, \pi)$.
Supponendo quindi $a_n \in (0, \pi)$ risulta

$$a_{n+1} = \sin(a_n) \in (0, 1] \subset (0, \pi)$$

e con ciò si conclude quanto voluto.

b) Per $a = 3$, provare che a_n è decrescente.

Si è già visto che, per ogni n, si ha $a_n \in (0, \pi)$, per cui (utilizzando la relazione $|\sin x| \leq |x|$)

$$a_{n+1} = \sin(a_n) < a_n$$

ovvero la tesi.

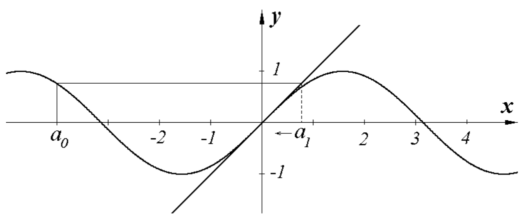
c) Calcolare, per $a = 3$, il $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Essendo a_n decrescente esisterà sicuramente il $\lim a_n$ e tale limite sarà necessariamente un numero reale α, in quanto a_n è limitata in $(0, \pi)$. Passando al limite nella relazione $a_{n+1} = \sin(a_n)$ si ottiene

$$\alpha = \sin(\alpha) \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha = 0 \quad .$$

d) Per $a = -4$, studiare il comportamento di a_n.

Essendo $a_1 = \sin(a_0) = \sin(4) \in (0, 1]$ è possibile ripetere tutte le considerazioni sopra fatte ed ottenere che, per $n \geq 1$ la successione è decrescente e tende a zero.



ANALISI MATEMATICA 1+2 (Sv) - 12 Maggio 1999 - (5^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = (x^2 + 1)\arctan(x) - 2x$$

a) Calcolare $f'(x)$ ed $f''(x)$.

f risulta derivabile due volte su $\mathbb{R}$ in quanto composta di funzioni derivabili due volte. Si ha

$$f'(x) = 2x\arctan(x) + (x^2+1)\frac{1}{x^2+1} - 2 = 2x\arctan(x) - 1$$

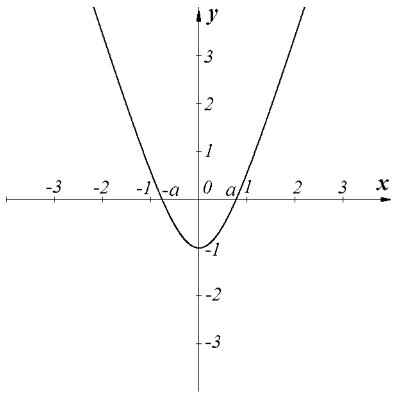
$$f''(x) = 2\arctan(x) + \frac{2x}{x^2+1}$$

b) Disegnare il grafico di f'.

La derivata è definita su $\mathbb{R}$; inoltre $f'(0) = -1$, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$ (si noti che la funzione è pari in quanto $f'(-x) = f'(x)$).

La crescenza di f' si ottiene dallo studio della positività di $f''(x) = 2\arctan(x) + \frac{2x}{x^2+1}$ che risulta positiva per $x > 0$ in quanto somma di funzioni positive (e analogamente negativa per $x < 0$); pertanto f' è crescente per $x > 0$.

Osserviamo quindi che vi sarà un solo zero per $x > 0$ ($x = a$) e poiché $f'(0) = -1 < 0$ e $f'(1) = 2\arctan(1) - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, tale zero è localizzato tra 0 e 1.



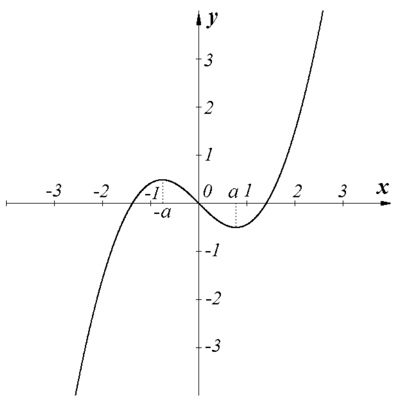
c) Disegnare il grafico di f.

Si osservi che f risulta dispari in quanto $f(-x) = -f(x)$. Inoltre $f(0) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Inoltre $f(1) = 2\arctan(1) - 2 = \frac{\pi}{2} - 2 < 0$ mentre $f(2) = 5\arctan(2) - 4 > 5\arctan(\sqrt{3}) - 4 = \frac{5\pi}{3} - 4 > 0$ per cui lo zero positivo è compreso tra 1 e 2.

Dal grafico della derivata prima visto al punto precedente si deduce che f è decrescente per $-a < x < a$ ed è crescente per $x < -a$ e $x > a$.

Poiché la derivata seconda risultava positiva per $x > 0$, f sarà convessa per $x > 0$ (e concava per $x < 0$).



d) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 0$.

Si ha

$$P_2(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \;=\; -x$$

e) Scrivere il resto di Peano ed il resto di Lagrange relativi al polinomio di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 0$.

Il resto di Peano è

$$x^3\omega(x) \qquad , \quad \text{con} \quad \lim_{x\to 0}\omega(x) = 0$$

Il resto di Lagrange è

$$\frac{f'''(c)}{3!}x^3 \;=\; \frac{2x^3}{3(1+c^2)^2} \qquad , \qquad |c| < |x|$$

ANALISI MATEMATICA 1+2 (Sv) - 26 Maggio 1999 - (6^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x)=\int_0^x \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}\ (t-1)\ \sqrt{t+2}}dt$$

a) Determinare il dominio di f.

La funzione integranda risulta definita e continua (e quindi integrabile) per $t\in(-2,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. Inoltre

$$\lim_{t\to-2}\frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}}=-\infty \qquad \text{di ordine } 1/2$$

in quanto l'infinito è causato dal fattore a denominatore $\sqrt{t+2}$;

$$\lim_{t\to0^-}\frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}}=-\infty \qquad \text{di ordine } 1/3$$

a causa del fattore a denominatore $\sqrt[3]{1-e^t}$ (si ricordi che $1-e^t$ è infinitesimo in zero di ordine 1); analogamente

$$\lim_{t\to0^+}\frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}}=+\infty \qquad \text{di ordine } 1/3$$

Infine

$$\lim_{t\to1^-}\frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}(t-1)\sqrt{t+2}}=+\infty \qquad \text{di ordine } 1$$

a causa del $t-1$ a denominatore.

Ne segue che la funzione integranda è integrabile (anche in senso improprio) in $[-2,1)\cup(1,+\infty)$. Essendo l'integrale tra 0 e x dovrà pertanto essere $x\in[-2,1)$.

b) Studiare la derivabilità di f.

Dal teorema fondamentale, essendo la funzione integranda continua per $t\in(-2,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ risulta (si ricordi che f è definita in $[-2,1)$)

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{1-e^x}(x-1)\sqrt{x+2}} \qquad , \qquad x\in(-2,0)\cup(0,1)$$

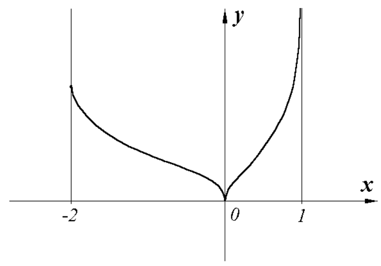
Per $x=-2$ e $x=0$ si è già visto che il limite di $f'(x)$ (per $x\to-2$ e $x\to0$) è a seconda dei casi $+\infty$ o $-\infty$ per cui f non è derivabile in tali punti.

c) Disegnare il grafico di f.

Utilizzando quanto determinato ai punti precedenti, osservato che

$$f'(x)>0 \qquad \text{per} \qquad x\in(0,1)$$

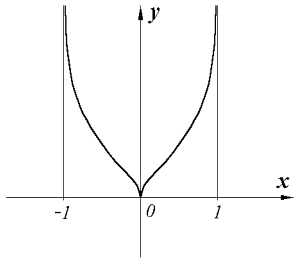
$\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty$, e sempre ricordando che f non è derivabile in -2 ed in 0 (grafico con tangente verticale) il grafico di f risulta:



d) Disegnare il grafico di

$$g(x) = \int_0^{|x|} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}\ (t-1)\ \sqrt{t+2}} dt$$

Essendo $g(x) = f(|x|)$ il grafico di g sarà uguale a quello di f per gli $x \in [0,1)$ ed il simmetrico rispetto all'asse y per gli $x \in (-1,0]$.



e) Calcolare la derivata di

$$h(x) = \int_{x^3}^{x^2+2} \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{1-e^t}\ (t-1)\ \sqrt{t+2}} dt$$

Si osservi che, per quanto visto al punto a), (f è integrabile in $[-2,1) \cup (1,+\infty)$) essendo il secondo estremo $x^2+2 > 1$, la funzione h risulta definita per $x^3 > 1$ ovvero per $x > 1$.

Poiché l'integranda è continua per $t > 1$ e gli estremi di integrazione sono derivabili, si ha, per $x \in (1,+\infty)$

$$h'(x) = \frac{2x e^{(x^2+2)^2}}{\sqrt[3]{1-e^{x^2+2}}\ (x^2-1)\ \sqrt{x^2+3}} - \frac{3x^2 e^{x^6}}{\sqrt[3]{1-e^{x^3}}\ (x^3-1)\ \sqrt{x^3+2}}$$

ANALISI MATEMATICA 1+2 (Sv) - 2 Giugno 1999 - (7^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri il problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = \mathrm{e}^{-(y(x))^4} - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato.

Dal teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali a variabili separabili ($y'(x) = f(x)g(y(x))$ essendo in questo caso $f(x) = 1$ e $g(y) = \mathrm{e}^{-y^4} - 1$, con $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, si avrà una ed una sola soluzione per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $y_0 \in \mathbb{R}$.

b) Determinare le soluzioni costanti dell'equazione e precisare i dati iniziali in corrispondenza dei quali si hanno soluzioni costanti.

Dovrà essere $y(x) = c$ e quindi

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{e}^{-c^4} - 1 \\ c = y_0 \end{cases}$$

da cui la sola soluzione costante è la soluzione nulla $y(x) = c = 0$, per $y_0 = 0$.

c) Disegnare il grafico della soluzione relativa al dato iniziale $x_0 = 0$ ed $y_0 = 1$.

Essendo $y_0 = 1$ si può supporre $y(x) \neq 0$ in un intorno di 0.
Separando quindi le variabili ed integrando tra 0 ed x si ottiene

$$\frac{y'(x)}{\mathrm{e}^{-(y(x))^4} - 1} = 1 \qquad\qquad \int_0^x \frac{y'(t)}{\mathrm{e}^{-(y(t))^4} - 1}\, dt = \int_0^x dt$$

ovvero

$$\int_1^{y(x)} \frac{ds}{\mathrm{e}^{-s^4} - 1} = x$$

Studiamo ora la funzione integrale a primo membro $h(y) = \int_1^y \frac{ds}{\mathrm{e}^{-s^4}-1}$.

Poiché l'integranda è definita e continua per $s \neq 0$ e

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^{-s^4} - 1} = -\infty \qquad\qquad \text{di ordine 4}$$

l'integrale è divergente per $y \to 0$; ne segue che, essendo il primo estremo di integrazione positivo, la funzione è definita per $y > 0$.

Inoltre

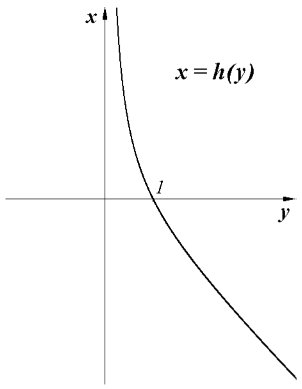
$$\lim_{s\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-s^4} - 1} = -1$$

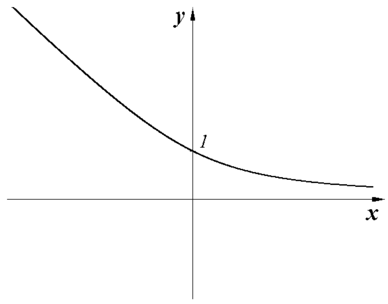
da cui l'integrale è divergente anche per $y \to +\infty$.

Si ha infine $h(1) = 0$ e $h'(y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-y^4}-1}$ essendo l'integranda continua per $y > 0$, e tale derivata risulta sempre negativa.

(Si osservi pure che $h''(y) = \frac{4y^3\mathrm{e}^{-y^4}}{(\mathrm{e}^{-y^4}-1)^2} > 0$ per ogni $y > 0$, per cui la funzione risulterà convessa; si noti infine che, poiché $\lim_{y\to+\infty} h'(y) = -1$ il grafico della funzione tenderà a diventare parallelo alla bisettrice del secondo e quarto quadrante)

Il grafico della funzione h, risulterà quindi il seguente (a sinistra); essendo $h(y(x)) = x$ il grafico della soluzione del problema di Cauchy sarà quello dell'inversa di h, come riportato nel grafico a destra.





d) Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

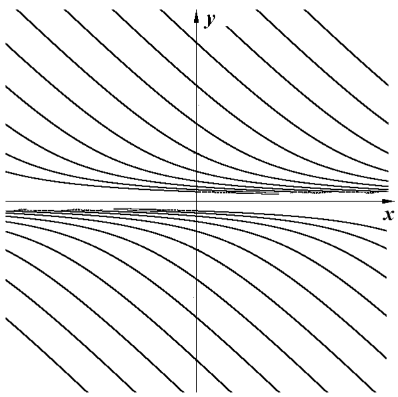
Essendo l'equazione data un'equazione differenziale autonoma, se $y(x)$ è soluzione, anche $y(x + a)$ è soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Pertanto tutte le traslate (in orizzontale) della soluzione trovata sono ancora soluzioni, per $y > 0$.

Per quanto riguarda le soluzioni per $y < 0$, ripetendo i calcoli fatti al punto c), ad esempio con $x_0 = 0$ e $y_0 = -1$, si ha

$$\int_{-1}^{y(x)} \frac{ds}{e^{-s^4} - 1} = x$$

e con considerazioni analoghe si ottengono le seguenti curve



(Si noti che, se $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale, tale è pure $-y(-x)$, ovvero i grafici complessivi delle soluzioni sono simmetrici rispetto all'origine).