Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria - Polo di Savona
via Cadorna 7 - 17100 Savona
Tel. +39 019 264555 - Fax +39 019 264558

Analisi Matematica I

Testi d'esame e Prove parziali

ANALISI MATEMATICA I - 6 ottobre 1995 3^h

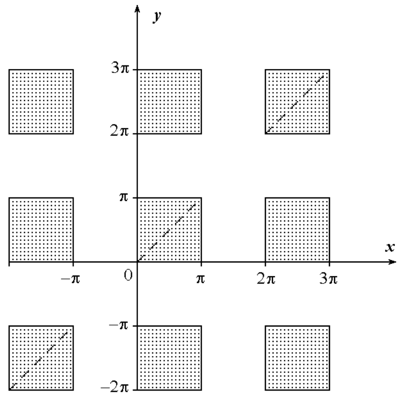
- **Si consideri la funzione**

$$u(x,y) = \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin y}}{x-y}$$

a) Disegnare il dominio di u.

Deve essere $\sin x \geq 0$, $\sin y \geq 0$, $x \neq y$; per cui il dominio di u risulta

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \ , \ 2k\pi \leq y \leq \pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ , \ x \neq y \ \}$$



b) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 2} u(x,2)$.

Risulta

$$\lim_{x\to 2} u(x,2) \ = \ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin 2}}{x-2} \ =$$

applicando ad esempio L'Hopital

$$= \ \lim_{x\to 2} \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \ = \ \frac{\cos 2}{2\sqrt{\sin 2}}$$

c) Calcolare, se esiste, $\nabla u(2,1)$.

Si ha

$$u_x(x,y) = \frac{(x-y)\cos x/(2\sqrt{\sin x}) - (\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin y})}{(x-y)^2}$$

$$u_y(x,y) = \frac{-(x-y)\cos y/(2\sqrt{\sin y}) + (\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin y})}{(x-y)^2}$$

da cui

$$\nabla u(2,1) = (u_x(2,1), u_y(2,1)) = \left(\frac{\cos 2}{2\sqrt{\sin 2}} - (\sqrt{\sin 2} - \sqrt{\sin 1}) \ , \ \frac{-\cos 1}{2\sqrt{\sin 1}} + (\sqrt{\sin 2} - \sqrt{\sin 1}) \right)$$

d) Scrivere, se esiste, l'equazione del piano tangente al grafico di u in $P_0 = (2,1)$.

Poiché il punto $(2,1)$ appartiene all'interno del dominio di u, dove la funzione è di classe C^1, (in quanto composta di funzioni di classe C^1), il piano tangente esiste e la sua equazione è

$$z = u(2,1) + u_x(2,1)(x-2) + u_y(2,1)(y-1) =$$

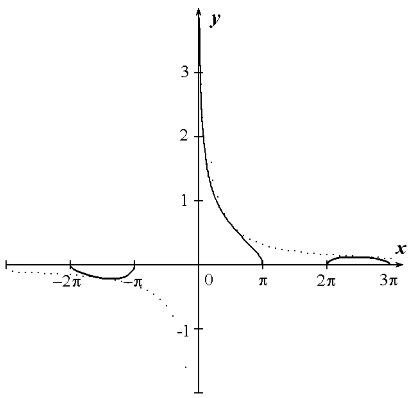
$$= (\sqrt{\sin 2} - \sqrt{\sin 1}) + \left(\frac{\cos 2}{2\sqrt{\sin 2}} - (\sqrt{\sin 2} - \sqrt{\sin 1})\right)(x-2) + \left(\frac{-\cos 1}{2\sqrt{\sin 1}} + (\sqrt{\sin 2} - \sqrt{\sin 1})\right)(y-1)$$

e) Tracciare il grafico di $f(x) = u(x,0)$ in $[-3\pi, 3\pi]$.

Poiché $f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{x}$, f risulta definita per $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}, x \neq 0$; inoltre

$$f(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \text{segno } f(x) = \text{segno } x \quad .$$

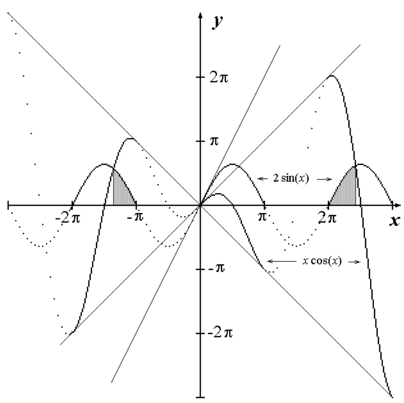
Osservato che $|f(x)| \leq 1/|x|$ e che le due funzioni si toccano per $x = 2k\pi + \pi/2$, il grafico di f è



(Studio della derivata prima:
si ha

$$f'(x) = \frac{x\cos x - 2\sin x}{2x^2\sqrt{\sin x}}$$

da cui f è crescente se $x\cos x \geq 2\sin x$ e ciò si verifica nelle zone punteggiate del seguente grafico:)



- **Sia**

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{|x|}$$

f) Stabilire se f è prolungabile per continuità in 0.

f risulta prolungabile per continuità in 0, essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{|x|} = 0$$

poiché il numeratore è infinitesimo di ordine 2, mentre il denominatore è infinitesimo di ordine 1.

g) Stabilire se l'eventuale prolungamento g di f è derivabile in $\mathbb{R}$.

g è sicuramente derivabile per $x \neq 0$, in quanto composta di funzioni derivabili. Per $x = 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^2} - 1}{h|h|} = 1 \qquad , \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{h^2} - 1}{h|h|} = -1$$

per cui g non è derivabile in 0.

- **Si consideri ora il problema differenziale**

$$\begin{cases} y''(x) = g(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

h) Giustificare esistenza ed unicità di y e determinarne il dominio.

La soluzione esiste ed è unica, definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto si tratta di un problema di Cauchy, lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, con termine noto continuo su tutti i reali.

i) Stabilire se la soluzione $y \in C^3(\mathbb{R})$.

La soluzione non è di classe C^3 in quanto, se lo fosse, si avrebbe $y'''(x) = g'(x)$, e g non è derivabile in 0, come si è visto sopra.

j) Determinare un polinomio p ed un $\delta > 0$ tali che $p(x)$ approssimi $y(x)$ a meno di 10^{-2} se $|x| \leq \delta$.

Utilizzando la formula di Taylor di ordine zero, con il resto di Lagrange, si ottiene

$$e^{x^2} = 1 + e^c x^2 \qquad , \qquad 0 < c < x^2$$

e supponendo $0 < c < x^2 < \delta^2 < 1$ si ha

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \left| \frac{e^{x^2} - 1}{|x|} \right| = e^c |x| \leq e^{\delta^2} \delta \leq 3\delta \\ |y'(x)| &= \left| \int_0^x g(t)dt \right| \leq \left| \int_0^x 3\delta dt \right| \leq 3\delta |x| \leq 3\delta^2 \\ |y(x)| &= \left| \int_0^x y'(t)dt \right| \leq \left| \int_0^x 3\delta^2 dt \right| \leq 3\delta^2 |x| \leq 3\delta^3 \end{aligned}$$

Il polinomio cercato può quindi essere $p(x) = 0$ e $\delta = \sqrt[3]{\frac{1}{300}}$.

ANALISI MATEMATICA I - Corso C - Prima prova parziale - 20 Febbraio 1997 2^h

- **Si consideri la successione definita da**

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sin a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

a) Stabilire se a_n è monotona.

Si ha $0 < a_n \leq 1$ per ogni n; infatti, per induzione $0 < a_1 \leq 1$ e se $0 < a_n \leq 1$ si ha $0 < a_{n+1} = \sin a_n \leq 1$. Pertanto $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$ per cui la successione è decrescente.

b) Determinare, se esistono, $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$, $\max\{a_n\}$, $\min\{a_n\}$**.**

Essendo a_n decrescente e limitata esiste $\lim a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ e da $a_{n+1} = \sin a_n$, passando al limite si ha

$$\alpha = \sin\alpha \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha = 0 \quad .$$

Ne segue che

$$\max\{a_n\} = \sup\{a_n\} = a_1 = 1 \qquad , \qquad \inf\{a_n\} = \lim a_n = 0$$

mentre $\min\{a_n\}$ non esiste, essendo sempre $a_n > 0$.

•c) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$ di

$$\alpha e^x - \cos(x^2) + 1 - \alpha \quad .$$

Si ha

$$\alpha e^x - \cos(x^2) + 1 - \alpha = \alpha(e^x - 1) + (1 - \cos(x^2))$$

Ricordando le proprietà della somma di infinitesimi, osservato che $e^x - 1$ è infinitesima di ordine 1, mentre $1 - \cos(x^2)$ è infinitesima di ordine 4, si ha che la funzione richiesta è infinitesima:

$$\begin{cases} \text{di ordine } 1 \text{ se } \alpha \neq 0 \\ \text{di ordine } 4 \text{ se } \alpha = 0 \end{cases}$$

- **Si consideri la funzione**

$$h(x) = 2e^x - x$$

d) Verificare che h è invertibile in $[0, +\infty)$.

Essendo h derivabile e $h'(x) = 2e^x - 1 > 0$ per ogni $x \geq 0$, la funzione risulta strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e quindi invertibile.

e) Detta k la sua inversa, calcolare, se esistono, $k(2)$ e $k'(2)$.

Si ha $k(2) = x$ se e solo se $h(x) = 2e^x - x = 2$ ovvero, in $[0, +\infty)$, con $x = 0$; quindi $k(2) = 0$.
Inoltre, dal teorema di derivazione della funzione inversa

$$k'(2) = \frac{1}{h'(0)} = 1$$

- **Sia**

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x^2 - 2x} + \arctan(x^2 - 2x)$$

f) Determinare insieme di definizione, di continuità e di derivabilità di f.

La funzione risulta definita per $x^2 - 2x \neq 0$ ovvero per $x \neq 0$ e $x \neq 2$. In tale dominio f risulta continua e derivabile in quanto composta di funzioni continue e derivabili.

g) Calcolare la derivata di f e disegnare il grafico di f.

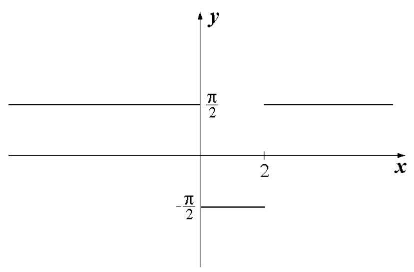
Si ha, per $x \neq 0$ e $x \neq 2$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2-2x}\right)^2} \frac{-1}{(x^2 - 2x)^2}(2x - 2) + \frac{1}{1 + (x^2 - 2x)^2}(2x - 2) = 0$$

per cui la funzione risulta costante nei tre intervalli che formano il dominio

$$(-\infty, 0) \qquad , \qquad (0, 2) \qquad , \qquad (2, +\infty)$$

Essendo $f(1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ il grafico risulta



•h) Verificare, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 1}{x^2 + 1} = +\infty$$

Si tratta di verificare che

$$\forall\epsilon > 0 \;\; \exists\delta_\epsilon > 0 \;\; : \;\; x > \delta_\epsilon \;\; \Rightarrow \;\; \frac{x^5 + 1}{x^2 + 1} > \epsilon$$

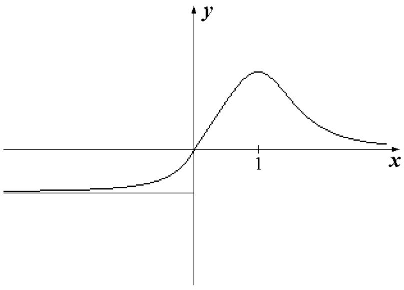
Poiché $x \to +\infty$ è lecito supporre $x > 1$ ovvero $x^2 > 1$ per cui

$$\frac{x^5 + 1}{x^2 + 1} \geq \frac{x^5}{2x^2} = \frac{x^3}{2} \quad .$$

Sarà quindi sufficiente scegliere x in modo che $\frac{x^3}{2} > \epsilon$ ovvero $x > \sqrt[3]{2\epsilon}$ da cui, ricordando che $x > 1$,

$$\delta_\epsilon \;=\; \max\{1, \sqrt[3]{2\epsilon}\} \quad .$$

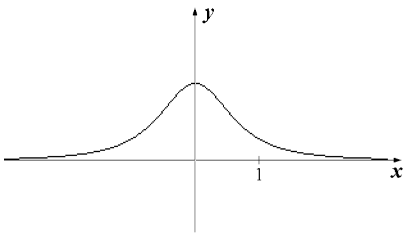
- **Data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui grafico è**

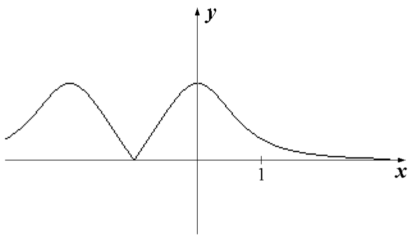


i) Disegnare i grafici di $g(|x| + 1)$ e di $g(|x + 1|)$

Il primo grafico è ricavato mediante una traslazione a sinistra di 1 ($g(x+1)$) e quindi, scartando la parte di ascissa negativa, utilizzando una simmetria rispetto all'asse y.

Il secondo utilizzando prima la suddetta simmetria ($g(|x|)$) e quindi traslando a sinistra di 1.





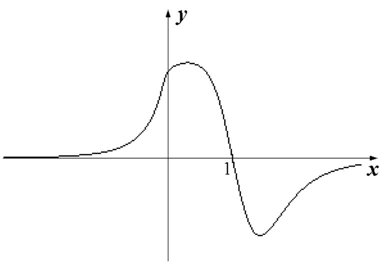
j) Disegnare i grafici di $g'(x)$ e di $g(\ln x)$.

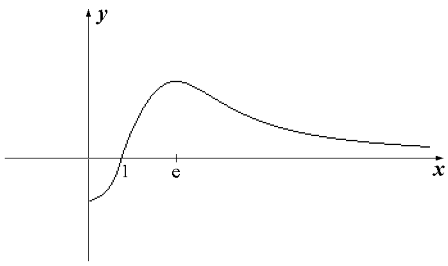
Dal grafico di g si deduce che, per $x < 1$, g è crescente, e quindi $g'(x) > 0$; mentre, per $x > 1$, g è decrescente, ovvero $g'(x) < 0$.

Inoltre $g'(1) = 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

Per quel che riguarda il secondo grafico si ha intanto $x > 0$; inoltre $\lim_{x\to 0} g(\ln x) = \lim_{x\to-\infty} g(x)$ mentre $\lim_{x\to+\infty} g(\ln x) = \lim_{x\to+\infty} g(x)$; essendo poi il logaritmo una funzione crescente la composta sarà crescente per $\ln x < 1$, ovvero $x <$ e e decrescente per $x >$ e.

Infine $g(\ln x) = 0$ se e solo se $\ln x = 0$ ovvero $x = 1$





ANALISI MATEMATICA I - Corso C - Seconda prova parziale - 27 Maggio 1997 2^h

- **Si consideri il problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = 6x^2\sqrt{y(x)} \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione del problema dato.

Si tratta di un problema a variabili separabili con $f(x) = 6x^2$ definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, e $g(y) = \sqrt{y}$ definita e di classe C^1 per $y > 0$; pertanto essendo $y_0 = 1$, per il teorema di esistenza ed unicità, esiste una ed una sola soluzione del problema dato, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) Se $x_0 = 0$ determinare, se esistono, le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

Separando le variabili, per $y(x) > 0$, si ottiene

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 6x^2$$

ed integrando tra 0 ed x

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}}dt \;=\; \int_0^x 6t^2\ dt$$

ovvero

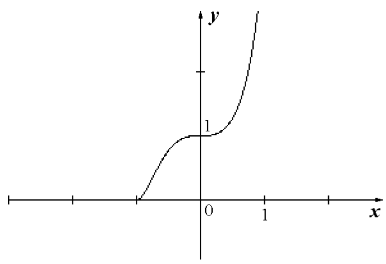
$$2\sqrt{y(x)} - 2\sqrt{y(0)} = 2x^3 \qquad \text{da cui} \qquad \sqrt{y(x)} = 1 + x^3$$

Elevando al quadrato i due membri, dopo aver osservato che $1 + x^3 > 0$ cioè $x > -1$, si ottiene

$$y(x) = (1 + x^3)^2 \qquad , \qquad x > -1 \qquad .$$

(Si noti che la soluzione è prolungabile, in modo unico, con $y(x) = 0$ per $x \leq -1$).

c) Disegnare il grafico delle soluzioni relative al punto b).



•) Determinare un numero razionale che approssimi $\ln(1.2)$ **a meno di** $\frac{1}{1000}$**.**

Dalla formula di Taylor, con resto di Lagrange, si ha

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

con $c \in [0, x]$. Pertanto

$$\ln 1.2 \; = .2 - \frac{(.2)^2}{2} + \frac{(.2)^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{(.2)^n}{n} + (-1)^{n+2}\frac{(.2)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

con $0 < c < .2$. Poiché

$$\left|(-1)^{n+2}\frac{(.2)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\right| \leq \left|\frac{(.2)^{n+1}}{n+1}\right|$$

sarà sufficiente scegliere n in modo che

$$\left|\frac{(.2)^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{1000}$$

ovvero $n = 3$.

Il valore razionale richiesto è quindi

$$\frac{2}{10} - \frac{1}{2}\frac{4}{100} + \frac{1}{3}\frac{8}{1000} = \frac{548}{3000} = \frac{137}{750}$$

- **Data la funzione**

$$f(x) = \int_x^{4-x} \frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}}dt$$

a) Determinarne il dominio,

La funzione integranda è definita e continua (e quindi integrabile) in $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Inoltre

$$\lim_{t\to 1}\left|\frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}}\right| = +\infty \qquad \text{di ordine } \frac{1}{3}$$

mentre

$$\lim_{t\to 4}\left|\frac{3+\cos(t)}{(t-4)\sqrt[3]{t^5-1}}\right| = +\infty \qquad \text{di ordine } 1$$

Pertanto l'integranda risulta integrabile (anche in senso improprio) in $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

Dovrà allora essere

$$\begin{cases} x < 4 \\ 4-x < 4 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x > 4 \\ 4-x > 4 \end{cases}$$

ovvero $0 < x < 4$.

b) Stabilire l'insieme di continuità e di derivabilità.

Essendo gli estremi di integrazione due funzioni continue e derivabili, f risulta continua in tutto il suo dominio (perché l'integranda è integrabile) e derivabile per $x \neq 1$ e $4 - x \neq 1$ essendo l'integranda continua per $t \neq 1$ (per $t = 1$ l'integranda è infinita).

Pertanto l'insieme di continuità è $(0, 4)$ e l'insieme di derivabilità è $(0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 4)$.

c) Calcolare, se esiste $f'(x)$.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dalla formula di derivazione delle funzioni composte si ha, se $x \in (0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 4)$

$$f'(x) = -\frac{3+\cos(4-x)}{(-x)\sqrt[3]{(4-x)^5-1}} - \frac{3+\cos(x)}{(x-4)\sqrt[3]{x^5-1}}$$

- **Stabilire per quali h e k reali l'insieme delle soluzioni del problema**

$$\begin{cases} y''(x) + ky'(x) + y(x) = k - 2 \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = h \end{cases}$$

è uno spazio vettoriale.

Affinché l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare sia uno spazio vettoriale è necessario e sufficiente che l'equazione stessa sia omogenea, cioè che sia $k = 2$.

E' pure immediato verificare, utilizzando la stessa definizione di spazio vettoriale, che affinché sia soddisfatta pure la seconda condizione, deve essere $h = 0$. (Se $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} z(x) = 0$, anche $\lim_{x\to+\infty} y(x) + z(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \alpha y(x) = 0 \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$).

ANALISI MATEMATICA I - 4 Luglio 1997 3^h

- **Si considerino le funzioni**

$$h(x) = x^4 + 8x + k \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{h(x)}$$

a) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$, la funzione h ha punti di massimo o di minimo globale.

Si ha, per ogni $k \in \mathbb{R}$,

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{continua} \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$$

per cui h non è limitata superiormente (e quindi non ammette massimo globale), mentre, per il teorema di Weierstrass generalizzato, ammette minimo assoluto, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

b) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$, g ha primitive in $\mathbb{R}$.

g ha primitive in $\mathbb{R}$ se risulta continua in $\mathbb{R}$ (e solo se, essendo in caso contrario infinita), ovvero se e solo se $h(x) = x^4 + 8x + k \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Poiché come visto nel punto precedente h ha minimo assoluto, e tale valore è assunto nel punto $x = -\sqrt[3]{2}$ (ove si annulla $h'(x) = 4x^3 + 8$) e si ha $h(-\sqrt[3]{2}) = k - 6\sqrt[3]{2}$, si conclude che g ha primitive in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$k - 6\sqrt[3]{2} > 0 \qquad \text{ovvero} \qquad k > 6\sqrt[3]{2}$$

c) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$, g ha primitive in $[-1, +\infty)$.

Analogamente al punto precedente g ha primitive in $[-1, +\infty)$ se e solo se risulta continua in tale intervallo ovvero se e solo se $h(x) = x^4 + 8x + k \neq 0$ per ogni $x \geq -1$.

Essendo h crescente per $x \geq -\sqrt[3]{2}$, e quindi per $x \geq -1$, g ha primitive in $[-1, +\infty)$ se e solo se $h(-1) = k - 7 > 0$ ovvero

$$k > 7 \quad .$$

d) Trovare esplicitamente tutte le primitive di g nel caso $k = 0$.

Posto $k = 0$ si ha $g(x) = \frac{1}{x^4+8x}$, che è definita e continua in $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Utilizzando la decomposizione in fratti semplici si ha

$$\frac{1}{x^4 + 8x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2 - 2x + 4} = \frac{(a+b+c)x^3 + (2c - 2b + d)x^2 + (4b + 2d)x + 8a}{x^4 + 8x}$$

da cui

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2c - 2b + d = 0 \\ 4b + 2d = 0 \\ 8a = 1 \end{cases}$$

che risolto fornisce $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{24}$, $c = -\frac{1}{12}$, $d = \frac{1}{12}$; pertanto

$$\frac{1}{x^4 + 8x} = \frac{1}{24}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 4}\right) \quad .$$

Una primitiva di g è quindi

$$\frac{1}{24} \ln\left|\frac{x^3}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}\right| = \frac{1}{24} \ln\left|\frac{x^3}{x^3 + 8}\right|$$

Tutte le primitive di g in $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ sono pertanto

$$\begin{cases} \frac{1}{24}\ln\frac{x^3}{x^3+8}+c_1 & \text{, se } x<-2 \\ \frac{1}{24}\ln\frac{-x^3}{x^3+8}+c_2 & \text{, se } -2<x<0 \\ \frac{1}{24}\ln\frac{x^3}{x^3+8}+c_3 & \text{, se } x>0 \end{cases}$$

- **Si consideri ora il problema**

$$\begin{cases} y''(x)=g(x) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

e) Stabilire per quali $k\in\mathbb{R}$ il problema ha soluzioni in tutto R, e quante.

Il problema ha soluzioni in $\mathbb{R}$ se e solo se g ha primitive in $\mathbb{R}$, poiché y' è la primitiva di g che soddisfa $y'(0)=0$ e di conseguenza y è la primitiva di $\int_0^x g(t)dt$ che soddisfa $y(0)=0$ cioè

$$y(x)=\int_0^x\left(\int_0^s g(t)dt\right)ds$$

Pertanto il problema dato ha una ed una sola soluzione per $k>6\sqrt[3]{2}$ (vedi punto b)).

- **Si consideri l'equazione differenziale**

$$y''(x)+\alpha y(x)=f(x)$$

dove α è un parametro reale e

$$f(x)=\begin{cases} 6e^{-x}-\alpha & \textbf{, se } x\le 0 \\ 10+15\sin x & \textbf{, se } x>0 \end{cases}$$

a) Nel caso $\alpha=1$, trovarne tutte le soluzioni in $(-\infty,0)$ ed in $(0,+\infty)$.

Con $\alpha=1$ l'equazione omogenea $y''(x)+y(x)=0$ ha soluzioni

$$y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x \qquad , \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Per $x<0$ una soluzione particolare va cercata del tipo $Ae^{-x}+B$ e sostituendo nell'equazione si ottiene $A=3$, $B=-1$.

Per $x>0$, essendo $\pm i$ una soluzione del polinomio caratteristico, una soluzione particolare sarà del tipo $C+x(D\sin x+E\cos x)$ e sostituendo si ottiene $C=10$, $D=0$, $E=-\frac{15}{2}$.

Pertanto le soluzioni richieste sono, per $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x+3e^{-x}-1 & \text{, se } x<0 \\ y(x)=c_3\sin x+c_4\cos x-\frac{15}{2}x\cos x+10 & \text{, se } x>0 \end{cases}$$

b) Nel caso $\alpha=1$, trovare le funzioni derivabili in tutto $(-\infty,+\infty)$, che sono soluzioni in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Ricordando che, per essere derivabili, devono essere anche continue in 0, dovrà essere

$$\lim_{x\to0^-}y(x)=c_2+2=\lim_{x\to0^+}y(x)=c_4+10 \qquad , \qquad \lim_{x\to0^-}y'(x)=c_1-3=\lim_{x\to0^+}y'(x)=c_3-\frac{15}{2}$$

da cui, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \begin{cases} c_1 \sin x + c_2 \cos x + 3\mathrm{e}^{-x} - 1 & , \text{se } x < 0 \\ (c_1 + \frac{9}{2}) \sin x + (c_2 - 8) \cos x - \frac{15}{2} x \cos x + 10 & , \text{se } x > 0 \end{cases}$$

c) Nel caso $\alpha = 1$, stabilire se esistono funzioni derivabili due volte in tutto $(-\infty, +\infty)$, che sono soluzioni in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Poiché $y''(x) = f(x) - y(x)$, si ha, (dovendo essere y continua)

$$\lim_{x \to 0^-} y''(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) - y(x) = 5 - y(0)$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} y''(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) - y(x) = 10 - y(0)$$

per cui, essendo tali limiti sempre diversi, y non può mai essere derivabile due volte in 0.

d) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è applicabile il teorema di esistenza ed unicità al problema con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$.

Trattandosi di un problema di Cauchy lineare, per poter applicare il teorema di esistenza ed unicità si deve avere f continua in $\mathbb{R}$. Poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 6 - \alpha \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 10$$

dovrà essere

$$\alpha = -4$$

e) Per i valori di α risultanti dal punto precedente, trovare esplicitamente la soluzione.

Con $\alpha = -4$ l'omogenea associata diventa

$$y'' - 4y(x) = 0$$

che ha soluzioni

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{2x}$$

mentre per le soluzioni particolari, in modo simile a quanto visto al punto a) si ha, per $x < 0$, $y(x) = -2\mathrm{e}^{-x} - 1$, e per $x > 0$, $y(x) = -3 \sin x - \frac{5}{2}$. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono, con $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \begin{cases} c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 1 & , \text{se } x < 0 \\ c_3 \mathrm{e}^{-2x} + c_4 \mathrm{e}^{2x} - 3 \sin x - \frac{5}{2} & , \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} y(x) = c_1 + c_2 - 3 = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} y'(x) = -2c_1 + 2c_2 + 2 = -4 \\ \lim_{x \to 0^+} y(x) = c_3 + c_4 - \frac{5}{2} = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} y'(x) = -2c_3 + 2c_4 - 3 = -4 \end{cases}$$

che risolto fornisce $c_1 = 3$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{3}{2}$, $c_4 = 1$ e quindi la soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 1 & , \text{se } x \leq 0 \\ \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x} - 3 \sin x - \frac{5}{2} & , \text{se } x > 0 \end{cases}$$