Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria - Polo di Savona
via Cadorna 7 - 17100 Savona
Tel. +39 019 264555 - Fax +39 019 264558

Analisi Matematica II

Testi d'esame e Prove parziali

ANALISI MATEMATICA II - 7 febbraio 1995 3^h

- **Si consideri, nel piano (x,y), la curva γ di equazioni parametriche**

$$\begin{cases} x(t) = 10(t-t^2) \\ \\ y(t) = \sin(2\pi t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

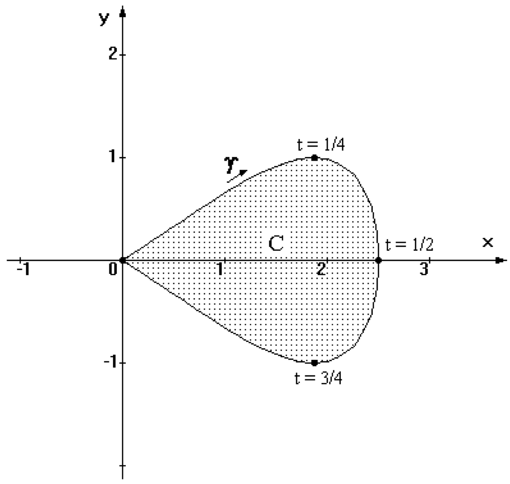
a) Stabilire se γ è chiusa, semplice, regolare.

γ è chiusa perché $\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)$.
È semplice perché $\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s$. Infatti, se fosse $t \neq s$

$$\begin{cases} 10(t-t^2) = 10(s-s^2) \\ \sin(2\pi t) = \sin(2\pi s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-s = t^2-s^2 \\ 2\pi t = \pi - 2\pi s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+s = 1 \\ t+s = 1/2 \end{cases}$$

che è assurdo.
Infine è regolare perché $\gamma \in C^1([0,1])$ e $\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{(10-20t)^2 + 4\pi^2\cos^2(2\pi t)} \neq 0 \quad \forall t$.

b) Disegnare la traccia di γ



c) Calcolare l'area della parte di piano delimitata dalla traccia di γ.

Per le formule di Gauss-Green si ha, poiché γ è orientata in senso orario

$$\text{Area } C = \iint_C 1\, dx\, dy = -\int_{\partial C} y\, dx = \int_\gamma y\, dx$$

da cui

$$\text{Area } C = \int_0^1 (10-20t)\sin(2\pi t)\, dt = 10\int_0^1 \sin(2\pi t)\, dt - 20\int_0^1 t\sin(2\pi t)\, dt =$$
$$= 0 + 20\left| t\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right|_0^1 - 20\int_0^1 \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\, dt = \frac{20}{2\pi}$$

d) Scrivere una parametrizzazione della superficie generata dalla rotazione di un giro completo della traccia di γ attorno all'asse y.

Utilizzando le coordinate cilindriche $(x, y, z) = (\rho\cos\theta, y, \rho\sin\theta)$ (si tenga presente che la rotazione avviene attorno all'asse y) si ottiene

$$\begin{cases} x(t,\theta) = 10(t-t^2)\cos\theta \\ y(t,\theta) = \sin(2\pi t) \\ z(t,\theta) = 10(t-t^2)\sin\theta \end{cases} \qquad (t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

- **Si consideri la funzione**

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + y^2z + z^2x}{x^2+y^2+z^2} & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

e) Determinare il dominio e l'insieme di continuità di f.

Il dominio di f è $\mathbb{R}^3$.

L'insieme di continuità di f è $\mathbb{R}^3$.

Infatti f è sicuramente continua al di fuori dell'origine; per quel che riguarda (0,0,0), utilizzando le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi\cos\theta \\ y = \rho\cos\phi\sin\theta \\ z = \rho\sin\phi \end{cases} \qquad (\rho,\theta,\phi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$$

si ottiene

$$\left| \frac{x^2y + y^2z + z^2x}{x^2+y^2+z^2} \right| = \rho \, |\cos^3\phi\cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\phi\sin\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta\,| \;\leq\; 3\rho$$

che tende a zero quando ρ tende a zero, uniformemente rispetto a θ, per cui f è continua anche nell'origine.

f) Determinare l'insieme di differenziabilità di f.

f è differenziabile in $\mathbb{R}^3 \backslash (0,0,0)$.

Infatti f è di classe C^1, e quindi differenziabile, al di fuori dell'origine. Per quel che riguarda (0,0,0) si noti che

$$f'_x(0,0,0) = f'_y(0,0,0) = f'_z(0,0,0) = 0$$

perché la funzione vale 0 sui tre assi; pertanto f è differenziabile in (0,0,0) se e solo se

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

ed utilizzando ancora le coordinate sferiche si ha

$$\frac{f(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \;=\; \cos^3\phi\cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\phi\sin\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

che non tende a zero quando ρ tende a zero (dipende solo da ϕ e θ), cioè f non è differenziabile nell'origine.

g) Determinare per quali direzioni esiste la derivata direzionale in (0,0,0) e calcolarla.

Sia $q = (\alpha, \beta, \gamma)$, con $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, una direzione assegnata; allora

$$\frac{\partial f}{\partial q}(0,0,0) \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta, t\gamma) - f(0,0,0)}{t} \;=\; \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha \; .$$

h) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y,z\;) \to \infty} f(x,y,z)$$

Il limite non esiste in quanto sugli assi la funzione vale 0 , mentre ad esempio sulla retta $x = y = z$ si ha $f(x,x,x) = x$, che tende a $+\infty$ o $-\infty$ a seconda che x tenda a $+\infty$ o $-\infty$.

ANALISI MATEMATICA II - corso C - Prima prova parziale - 22 febbraio 1996 2^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x,y) = 1 - x^3 + 12\sqrt{x^2+y^2}$$

e gli insiemi

$$A = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 < x < 3\ \} \qquad , \qquad B = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2 \le 9\ \}$$

a) Determinare, se esistono, un maggiorante ed un minorante di f su A.

Poiché, per esempio per $x = 2$, si ha

$$f(2,y) = 12\sqrt{4+y^2} - 7$$

la funzione non è superiormente limitata in A, e quindi *non esistono maggioranti.*

Inoltre, dato che se $x < 3$, risulta

$$12\sqrt{x^2+y^2} > 0 \qquad , \qquad 1 - x^3 > -26$$

si ha,

$$f(x,y) > -26 \qquad \forall (x,y) \in A$$

cioè -26 *è un minorante.*

b) Determinare, se esistono, massimi e minimi relativi ed assoluti di f su A.

Essendo A un insieme aperto ed essendo $f \in C^1(A)$, f risulta differenziabile in A, e pertanto i punti di minimo e massimo relativo e assoluto vanno ricercati ove $\nabla f = 0$.

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -3x^2 + \frac{12x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{12y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{aligned}$$

La seconda equazione equivale ad $y = 0$, per cui la prima diventa

$$-3x^2 + 12\frac{x}{|x|} = 0$$

che, per $x < 0$ non ha soluzioni (essendo il primo membro negativo), mentre se $x > 0$ si ha $-3x^2 + 12 = 0$ ovvero $x = 2$.

Pertanto l'unico punto critico di f in A è il punto $P_1 = (2,0)$.

Calcolata la matrice Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x + \frac{12y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-12xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-12xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{12x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

si ha

$$Hf(2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è negativo e quindi il punto P_1 non è *né punto di minimo né punto di massimo* su A.

Senza utilizzare la matrice Hessiana si può osservare che, sulla retta $y = 0$, con $x \in (1, 3)$ si ha

$$\phi(x) = f(x, 0) = 1 - x^3 + 12x$$

e ϕ ha un massimo relativo per $x = 2$ poiché $\phi'(2) = 0$ e $\phi''(2) = -12$, mentre sulla retta $x = 2$ si ha

$$\psi(y) = f(2, y) = 12\sqrt{4 + y^2} - 7$$

che ha un minimo relativo per $y = 0$ poiché $\psi'(0) = 0$ e $\psi''(2) = 6$. Ne segue, come prima, che *non esistono punti di minimo o massimo relativo o assoluto* di f su A.

c) Determinare, se esistono, massimi e minimi relativi ed assoluti di f su B.

Essendo B un insieme compatto ed f una funzione continua, esisteranno sicuramente i punti di minimo e di massimo assoluto di f su B.

Osservato che $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0))$ e quindi f è ivi differenziabile, mentre non lo è in (0,0) (ad esempio $f(0, y) = 1 + 12|y|$ non è derivabile in $y = 0$), i punti richiesti andranno cercati:

- all'interno di B ove f non è differenziabile, cioè il punto $P_0 = (0, 0)$.
- all'interno di B dove f è differenziabile e $\nabla f = 0$, ed a questo proposito il calcolo fatto al precedente punto **b)** ci ha fornito il solo punto $P_1 = (2, 0)$.
- sulla frontiera di B: essendo $x^2 + y^2 = 9$ si ha, per $(x, y) \in \partial B$,

$$f(x, y) = 1 - x^3 + 36 = 37 - x^3 \qquad x \in [-3, 3]$$

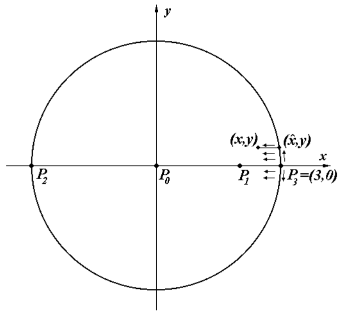
  che ha un punto di massimo per $x = -3$ e di minimo per $x = 3$. I due punti critici sulla frontiera sono pertanto $P_2 = (-3, 0)$, $P_3 = (3, 0)$.

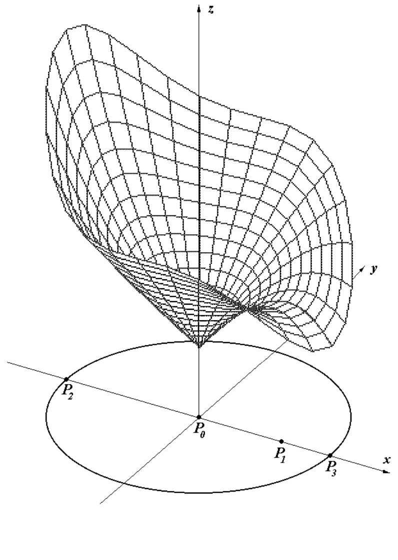
Ricordando che il punto P_1 è un punto sella per f (vedi sempre punto **b)**), calcoliamo ora il valore della funzione nei tre punti P_0, P_2, P_3:

$$f(0, 0) = 1 \qquad , \qquad f(-3, 0) = 64 \qquad , \qquad f(3, 0) = 10$$

Ne segue che $P_0 = (0, 0)$ è sicuramente *punto di minimo assoluto*, mentre $P_2 = (-3, 0)$ è *punto di massimo assoluto.*

Per quel che riguarda il punto $P_3 = (3, 0)$, ricordando che è minimo sulla frontiera, ed osservato che $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 0) = -15$, cioè f è decrescente in x in un intorno di (3,0) (per il teorema della permanenza del segno), esso è necessariamente un *punto di minimo relativo* per f su B (vedi figura, ove le frecce indicano versi di salita: $f(x, y) \geq f(\hat{x}, y) \geq f(3, 0)$ per ogni (x, y) in un opportuno intorno di P_3).





- **Si consideri**

$$S = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ : \ \ 2y^2 - x \leq 1 \ , \ \ x \leq 1 \ \}$$

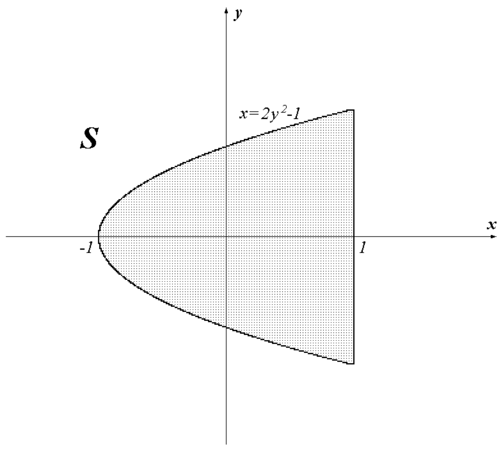
d) Calcolare la massa della lamina S avente densità pari al doppio della distanza dall'asse y.

Si tratta di calcolare

$$\iint_S \delta(x,y)dxdy$$

ove la densità $\delta(x,y)$ del punto $(x,y) \in S$ vale $2|x|$. Quindi

$$\iint_S 2|x|dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{(x+1)/2}}^{\sqrt{(x+1)/2}} 2|x|dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\int_{2y^2-1}^{1} 2|x|dx \right) dy$$



Sviluppando ad esempio il primo integrale si ottiene

$$\int_{-1}^{1} 2|x|2\sqrt{\frac{x+1}{2}}dx \ = \ \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x+1}dx \ = \ \frac{4}{\sqrt{2}} \left[\int_{-1}^{0} -x\sqrt{x+1}dx + \int_{0}^{1} x\sqrt{x+1}dx \right]$$

ed essendo $x\sqrt{x+1} = (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = (x+1)^{3/2} - (x+1)^{1/2}$ una sua primitiva è $\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$ e l'integrale diventa

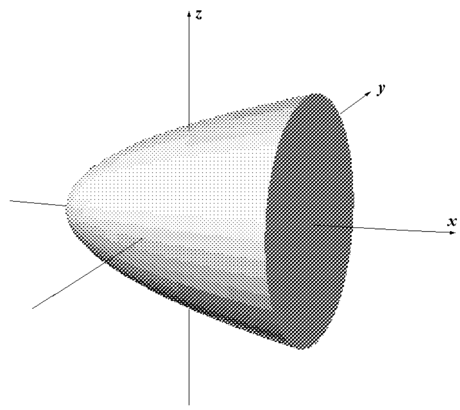
$$\frac{4}{\sqrt{2}} \left[-\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \Big|_{0}^{1} \right] =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}2^{5/2} - \frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{15}(1 + \sqrt{2})$$

e) Calcolare il baricentro del solido omogeneo ottenuto dalla rotazione di S di mezzo giro intorno all'asse x.

Poiché per ragioni di simmetria $y_B = 0$ e $z_B = 0$, resta da calcolare

$$x_B = \frac{\iiint_V x dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}$$



Utilizzando ad esempio le coordinate cilindriche rispetto all'asse x, il solido V è definito da $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$, $2\rho^2 - 1 \le x \le 1$ e

$$\iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{2\rho^2-1}^1 \rho dx \right) d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2\rho - 2\rho^3) d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \right) d\theta = \pi$$

mentre

$$\iiint_V x dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{2\rho^2-1}^1 x\rho dx \right) d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{1-(2\rho^2-1)^2}{2} \rho d\rho \right) d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2\rho^3 - 2\rho^5) d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{\pi}{3}$$

e quindi

$$x_B = \frac{1}{3}$$

Si poteva anche utilizzare

$$\iiint_V dx dy dz = \int_{-1}^1 \left(\iint_{A_x} dy dz \right) dx = \int_{-1}^1 \text{area } A_x dx = \int_{-1}^1 \pi \left(\frac{x+1}{2} \right) dx = \pi$$

dove A_x è la sezione di V con il piano verticale di ascissa x (cerchio di raggio $\sqrt{(x+1)/2}$ e area $\pi(x+1)/2$).

Analogamente per l'altro integrale.

$$\iiint_V x dx dy dz = \int_{-1}^1 \left(\iint_{A_x} x dy dz \right) dx = \int_{-1}^1 x \text{ area } A_x dx = \int_{-1}^1 \pi \left(\frac{x^2+x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{3}$$

ANALISI MATEMATICA II - corso C - Seconda prova parziale - 29 Maggio 1996 2^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = -x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ \mathrm{e}^{x/n} - n - x}{n}$$

a) Determinare il dominio di f.

Si ha, utilizzando la formula di Taylor

$$\frac{n\ \mathrm{e}^{x/n} - n - x}{n} = \mathrm{e}^{x/n} - 1 - \frac{x}{n} = \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^2}{n^2}\,\omega\left(\frac{x}{n}\right) \quad .$$

con ω infinitesima, da cui si deduce che il termine generale della serie è infinitesimo di ordine 2, per cui la serie converge, per ogni x reale.

Quindi il dominio di f è $\mathbb{R}$.

b) Stabilire se, ed in caso affermativo precisare dove, f è derivabile due volte.

Derivando una e due volte i termini della serie si ottengono le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n} - 1}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{n^2}$$

Per quel che riguarda la prima serie, utilizzando ancora la formula di Taylor, si ha, se $|x| \leq a$,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{x/n} - 1}{n}\right| \leq \mathrm{e}^{|x|/n}\frac{|x|}{n^2} \leq \mathrm{e}^{a/n}\frac{a}{n^2}$$

e poiché l'ultimo membro tende a zero di ordine 2, la serie considerata converge totalmente in $[-a, a]$, per ogni a, da cui si conclude che f è derivabile per ogni x reale e

$$f'(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n} - 1}{n} \quad .$$

Analogamente per la seconda serie, poiché

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{n^2}\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{a/n}}{n^2}$$

e quindi f è derivabile due volte per ogni x reale e

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{n^2} \quad .$$

c) Calcolare, se esistono, $f(0)$ e $f'(0)$.

Si ha, utilizzando le formula precedenti

$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(0) = -1$$

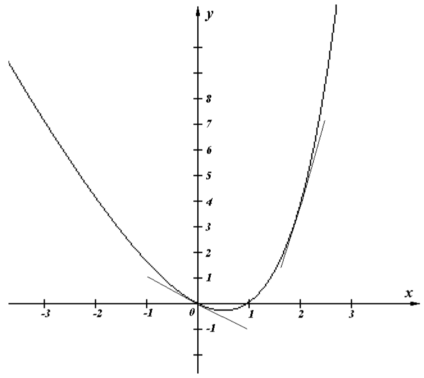
d) Stabilire se $f'(2) > 0$.

Sempre per le formule precedenti, (essendo la serie a termini positivi)

$$f'(2) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2/n} - 1}{n} \geq -1 + (\mathrm{e}^2 - 1) > 0$$

e) Disegnare il grafico di f.

Poichè $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(2) > 0$ e la funzione è convessa per ogni x reale, essendo $f''(x) > 0$, un grafico ragionevole è



N.B. La posizione di $f(2)$ può essere arbitraria: dalle informazioni sopra citate non si deduce che $f(2)$ è positiva, per quanto sia facile vedere che $f(2) = -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ e^{2/n}\ -n-2}{n} \geq -2 + (e^2 - 1 - 2) = e^2 - 5 > 0$. È certo però che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, essendo f convessa e quindi maggiore di ogni retta tangente.

f) Determinare un minorante positivo ed un maggiorante di $f''(0)$.

Risulta

$$f''(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

per cui, essendo la serie a termini positivi,

$$f''(0) = 1 + ... > 1$$

mentre, utilizzando il criterio integrale,

$$f''(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ = = \ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \ 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \ = \ 2$$

- **Sia dato il problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + \sqrt{x}(y(x))^\alpha \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

g) Determinare, per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$, l'insieme delle coppie (x_0, y_0) per cui le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale siano verificate.

L'equazione del problema è $y'(x) = f(x, y(x))$ dove

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + \sqrt{x}y^\alpha$$

Tale funzione è definita e continua per $x > 0$ ed $y \geq 0$ (essendo $\alpha > 0$) e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}\alpha y^{\alpha-1}$$

per cui è derivabile rispetto ad y, con derivata continua: per $y > 0$ se $\alpha < 1$; per $y \geq 0$ se $\alpha \geq 1$.

Comunque le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale sono verificate:

-) per $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, $\forall \alpha \in (0, +\infty)$.

h) Siano $\alpha = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Determinare, se esistono, le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

Si ha

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \sqrt{x}\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

e sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale.

Essendo tale equazione di Bernoulli, dividendo per $\sqrt{y(x)}$ e ponendo $z(x) = \sqrt{y(x)}$ si ottiene

$$\begin{cases} z'(x) = \frac{z(x)}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\ z(1) = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$z(x) = \sqrt{x}\ \frac{x+1}{2} \qquad , \qquad x > 0$$

e quindi

$$y(x) = x\frac{(x+1)^2}{4} \qquad , \qquad x > 0$$

i) Siano $\alpha = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Determinare, se esiste, una soluzione del problema, precisandone il dominio.

Nel caso $y(1) = 0$ non sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale. È comunque immediato verificare che una soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \sqrt{x}\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

è $y(x) = 0$, definita sempre per $x > 0$.

j) Con i dati del punto precedente, stabilire se esistono due soluzioni del problema definite in $(0, +\infty)$.

Poichè l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare in z di cui al punto h) è

$$z(x) = \sqrt{x}\ \frac{x-c}{2} \qquad , \qquad x > 0\ ,\ x > c$$

si ha che tutte le soluzioni dell'equazione, per $y(x) > 0$ sono del tipo

$$y(x) = x\frac{(x-c)^2}{4} \qquad , \qquad x > 0\ ,\ x > c$$

e quindi, scelto $c = 1$, la funzione

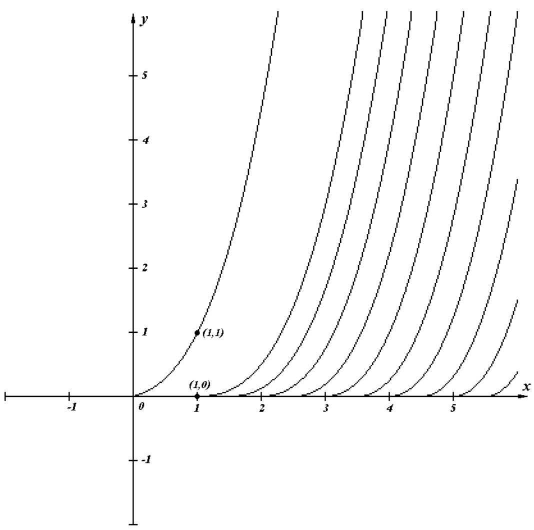
$$y(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x \le 1 \\ x\frac{(x-1)^2}{4} & , x > 1 \end{cases}$$

è un'altra soluzione del problema considerato.

Si noti che ogni funzione del tipo

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x \le c \\ x\frac{(x-c)^2}{4} & , x > c \end{cases}$$

con $c \ge 1$ è ancora soluzione.



ANALISI MATEMATICA II - 20 settembre 1996 3^h

- **Si consideri la funzione**

$$u(x,y) = x \ \mathrm{e}^{-2x^2-y^2}$$

a) Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} u(x,y)$.

Risulta, ad esempio utilizzando le coordinate polari,

$$|u(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| \ = \ |\rho\cos\theta \ \mathrm{e}^{-2\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}| \ \leq \ \rho|\cos\theta| \ \mathrm{e}^{-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta} \ \leq \ \rho \ \mathrm{e}^{-\rho^2}$$

da cui ne segue che, per $\rho\to\infty$, si ha $u(x,y)\to 0$.

b) Stabilire se la curva di livello di u, passante per $P_0 = (1,1)$, è localmente un grafico e disegnarla (vicino a P_0).

Si ha

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= (1-4x^2)\mathrm{e}^{-2x^2-y^2} \\ u_y(x,y) &= -2xy \ \mathrm{e}^{-2x^2-y^2} \\ u_{xx}(x,y) &= (16x^3-12x)\mathrm{e}^{-2x^2-y^2} \\ u_{xy}(x,y) &= (8x^2y-2y)\mathrm{e}^{-2x^2-y^2} \\ u_{yy}(x,y) &= (4xy^2-2x)\mathrm{e}^{-2x^2-y^2} \end{aligned}$$

per cui, essendo u di classe C^∞ e $u_y(1,1) = -2\mathrm{e}^{-3} \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite tale curva di livello è localmente un grafico $y=\phi(x)$, di classe C^∞.

Inoltre, poiché $u(x,\phi(x)) = u(1,1) = \mathrm{e}^{-3}$, si ha, derivando

$$\begin{aligned} & u_x(x,\phi(x)) + u_y(x,\phi(x))\phi'(x) = 0 \\ & u_{xx}(x,\phi(x)) + 2u_{xy}(x,\phi(x))\phi'(x) + u_{yy}(x,\phi(x))(\phi')^2(x) + u_y(x,\phi(x))\phi''(x) = 0 \end{aligned}$$

e sostituendo $x=1$ (si ricordi che $\phi(1)=1$)

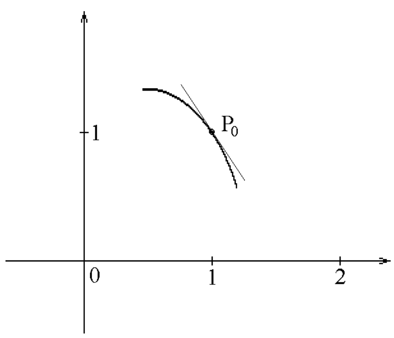
$$u_x(1,1) + u_y(1,1)\phi'(1) = (-3-2\phi'(1))\mathrm{e}^{-3} = 0$$

da cui $\phi'(1) = -3/2$ e

$$u_{xx}(1,1) + 2u_{xy}(1,1)\phi'(1) + u_{yy}(1,1)(\phi')^2(1) + u_y(1,1)\phi''(1) = [4+12(-3/2)+2(9/4)] - 2\phi''(1) = 0$$

da cui $\phi''(1) = -19/4$.

Il grafico locale della curva di livello sarà perciò



Si osservi che si poteva semplicemente esplicitare la y da

$$u(x,y) = x\ \mathrm{e}^{-2x^2-y^2} = \mathrm{e}^{-3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x\ \mathrm{e}^{-2x^2-y^2}) = \ln(\mathrm{e}^{-3}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x\ - 2x^2 - y^2 = -3$$

e ricavare

$$y(x) = \sqrt{3 + \ln x - 2x^2} \quad .$$

c) Determinare i punti critici di u.

Risolvendo il sistema $\nabla u(x,y) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} (1-4x^2)\mathrm{e}^{-2x^2-y^2} = 0 \\ -2xy\ \mathrm{e}^{-2x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

si ottengono i due punti critici

$$P_1 = (1/2, 0) \qquad , \qquad P_2 = (-1/2, 0)$$

d) Stabilire quali punti di minimo locale ha u.

Utilizzando i calcoli precedenti, le matrici Hessiane nei due punti risultano

$$Hu(P_1) = \begin{pmatrix} -4\mathrm{e}^{-1/2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-1/2} \end{pmatrix} \qquad , \qquad Hu(P_2) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/2} \end{pmatrix}$$

per cui, essendo la prima definita negativa e la seconda definita positiva, l'unico punto di minimo locale di u è il punto $P_2 = (-1/2, 0)$.

e) Verificare che u ha massimo globale sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$ e scrivere il corrispondente sistema dei moltiplicatori di Lagrange.

Essendo u una funzione continua ed il vincolo un insieme compatto, per il teorema di Weierstrass esiste sicuramente il massimo globale richiesto.

Applicando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (il gradiente di $x^2 + y^2 - 1$ è sempre diverso da zero sul vincolo) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (1-4x^2)\mathrm{e}^{-2x^2-y^2} + 2\lambda x = 0 \\ -2xy\ \mathrm{e}^{-2x^2-y^2} + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

f) Calcolare i punti di massimo e minimo assoluto vincolato.

Risolvendo la seconda equazione si ottiene $y = 0$ oppure $\lambda = x\mathrm{e}^{-2x^2-y^2}$.

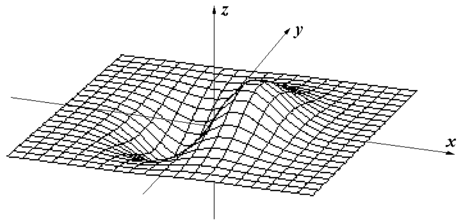
Con $y = 0$ si ha $x = \pm 1$ (e $\lambda = \pm 3\mathrm{e}^{-2}/2$); nel secondo caso si ottiene $(1-2x^2)\mathrm{e}^{-2x^2-y^2} = 0$ cioè $x = \pm\sqrt{2}/2$ e $y = \pm\sqrt{2}/2$.

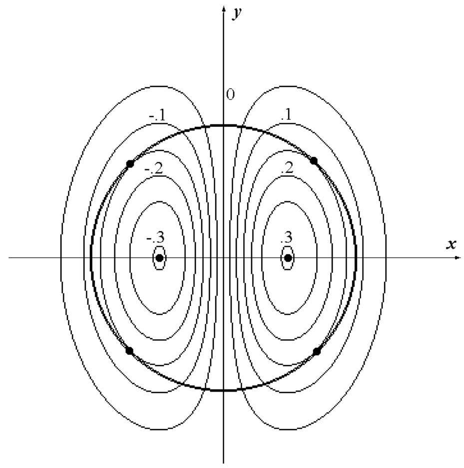
Calcolando la funzione nei sei punti critici trovati si ha

$$\begin{aligned} &u(1,0) = \mathrm{e}^{-2} \qquad , \qquad u(-1,0) = -\mathrm{e}^{-2} \\ &u(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2) = \mathrm{e}^{-3/2}\sqrt{2}/2 \qquad , \qquad u(-\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2) = -\mathrm{e}^{-3/2}\sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

da cui i punti di massimo assoluto sul vincolo sono $(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$ e quelli di minimo assoluto sono $(-\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$.

(La figura mostra la funzione, i livelli ed il vincolo)





In altro modo, ad esempio sostituendo $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, si possono determinare i punti di minimo e di massimo di

$$u(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x\mathrm{e}^{-1-x^2} \qquad , \qquad -1 \leq x \leq 1 \quad .$$

- **Si consideri**

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+2y^2-9} - x \;,\; \frac{ay}{x^2+2y^2-9}\right)$$

g) Verificare per quali $a \in \mathbb{R}$, F è irrotazionale.

F è definito per $x^2+2y^2 \neq 9$ ed è ivi di classe C^∞.
Risulta

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{4xy}{(x^2+2y^2-9)^2} \qquad , \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{2axy}{(x^2+2y^2-9)^2}$$

da cui F è irrotazionale se e solo se $a = 2$.

h) Verificare per quali $a \in \mathbb{R}$, F è conservativo nel suo dominio e calcolarne tutti i potenziali.

Intanto deve essere, per quanto visto sopra, $a = 2$. Inoltre all'interno dell'ellisse di equazione $x^2+2y^2 = 9$ esiste sicuramente potenziale, poiché tale insieme è semplicemente connesso.

Per verificare se il potenziale esiste anche fuori di tale ellisse (insieme non semplicemente connesso) sarà sufficiente verificare che l'integrale su una linea chiusa ivi giacente è nullo.

Si osservi pure che il campo $(-x, 0)$ è sicuramente conservativo, per cui è sufficiente considerare solo la parte

$$G(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+2y^2-9} \;,\; \frac{2y}{x^2+2y^2-9}\right)$$

Scelta una curva opportuna (su cui sia facile fare il calcolo), ad esempio

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 6\cos t \\ y = \frac{6}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

si ha

$$\int_\gamma G = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{36}{27}\cos t \sin t + \frac{36}{27}\cos t \sin t\right)\, dt \;=\; \int_0^{2\pi} 0 \; dt \;=\; 0$$

Ne segue che, per $a = 2$, F è conservativo nel suo dominio.

Per il calcolo di un potenziale (sia esso $\Phi(x,y)$), si osservi che, da

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+2y^2-9} - x$$

si ottiene facilmente

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\log|x^2+2y^2-9| - \frac{x^2}{2} + \psi(y)$$

che derivata rispetto ad y fornisce

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+2y^2-9} + \psi'(y)$$

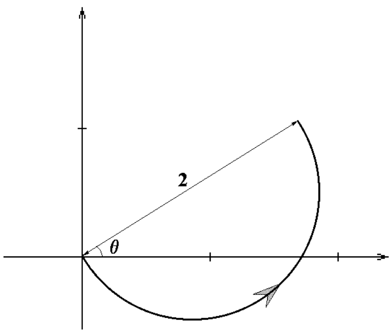
da cui $\psi'(y) = 0$ e quindi, ad esempio, $\psi(y) = 0$.

Essendo il dominio di F unione di due insiemi connessi, tutti i potenziali di F saranno

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|x^2+2y^2-9| - \frac{x^2}{2} + a & , \ x^2+2y^2 < 9 \\ \frac{1}{2}\ln|x^2+2y^2-9| - \frac{x^2}{2} + b & , \ x^2+2y^2 > 9 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Per a tali che F sia irrotazionale, calcolare $\int_C F$ essendo C la semicirconferenza orientata in figura



Si noti intanto che la curva C è tutta interna all'ellisse $x^2+2y^2 = 9$ (i semiassi 3 e $3/\sqrt{2}$ sono entrambi maggiori di 2).

Poichè F è irrotazionale per $a = 2$ ed in tal caso è anche conservativo, l'integrale di linea si può semplicemente calcolare come differenza di potenziale tra i punti finale ed iniziale, ovvero

$$\int_C F = \Phi(2\cos\theta, 2\sin\theta) - \Phi(0,0) = \ln\sqrt{9-4\cos^2\theta-8\sin^2\theta} - 2\cos^2\theta - \ln 3$$

j) Calcolare, se esiste, θ tale che $\int_C F = 0$.

Essendo

$$\int_C F = \ln\sqrt{\frac{9-4\cos^2\theta-8\sin^2\theta}{9}} - 2\cos^2\theta$$

sempre negativo (si noti che la frazione all'interno del logaritmo è sempre minore di 1, per cui i due addendi sono l'uno negativo e l'altro negativo o nullo) non esiste alcun θ che annulli quell'integrale.

ANALISI MATEMATICA II - 17 febbraio 1997 3^h

- **Data l'equazione differenziale**

$$x^2 y''(x) + y(x) = 0$$

a) Verificare che l'insieme di tutte le soluzioni è uno spazio vettoriale.

Se y e z sono due soluzioni dell'equazione, si ha $x^2 y''(x) + y(x) = 0$ e $x^2 z''(x) + z(x) = 0$, da cui sommando membro a membro $x^2(y+z)''(x) + (y+z)(x) = 0$, ovvero $y+z$ è soluzione.

Inoltre, se y è soluzione ed $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $x^2(\alpha y''(x)) + (\alpha y(x)) = 0$, ovvero αy è soluzione.

b) Trovarne esplicitamente tutte le soluzioni in $(0, +\infty)$.

Si tratta di una equazione di Eulero, per cui, utilizzando la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ (essendo $x > 0$) e $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ si ha $z'(t) = \mathrm{e}^t\ y'(\mathrm{e}^t)$, $z''(t) = \mathrm{e}^t\ y'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t}\ y''(\mathrm{e}^t) = z'(t) + \mathrm{e}^{2t}\ y''(\mathrm{e}^t)$; pertanto l'equazione $\mathrm{e}^{2t}\ y''(\mathrm{e}^t) + y(\mathrm{e}^t) = 0$ diventa

$$z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ ovvero $\lambda = (1 \pm i\sqrt{3})/2$ e due soluzioni linearmente indipendenti sono

$$z_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \qquad , \qquad z_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \qquad .$$

Ricordando che $t = \ln x$ tutte le soluzioni cercate in $(0, +\infty)$ sono

$$y(x) = c_1 \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + c_2 \sqrt{x} \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \qquad , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

c) Scrivere un sistema lineare di ordine 1, dimensione 2, equivalente in $(0, +\infty)$ all'equazione data e scriverne una matrice fondamentale, in $(0, +\infty)$.

Posto $z(x) = y'(x)$ si ha $z'(x) = y''(x)$ da cui il sistema richiesto è

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -\frac{1}{x^2} y(x) \end{cases}$$

ed una sua matrice fondamentale risulta, dai calcoli del punto b)

$$\begin{pmatrix} \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} & \sqrt{x} \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) & \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right) \end{pmatrix}$$

d) Trovare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Si ha $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, per cui, ricordando che $\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n / n!$, l'equazione diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

ovvero
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad .$$
Osservato che $n^2-n+1 \neq 0$ per ogni n si ottiene
$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n^2-n+1)n!} \qquad , \qquad n \geq 0 \quad .$$
Si noti che $y(0) = a_0 = 1$ e $y'(0) = a_1 = -1$

e) Trovare tutti gli intervalli in cui la serie del punto d) converge totalmente.

Poiché $n^2-n+1 \geq 1$ per ogni n, si ha, se $|x| \leq M$
$$|a_n x^n| = \left|\frac{(-1)^n x^n}{(n^2-n+1)n!}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^n}{n!}$$
per cui la serie converge totalmente in ogni insieme limitato.

- **Si consideri la funzione**
$$f(x,y,z) = xy + yz + xz$$

f) Stabilire se f è limitata.

Se si considera ad esempio la restrizione alla retta $y = 1\ ,\ z = 0$, si ha $f(x,1,0) = x$, per cui f non è limitata né superiormente, né inferiormente.

g) Determinarne, se esistono, gli estremi locali.

f è una funzione di classe C^2 su $\mathbb{R}^3$ per cui gli estremi locali si troveranno ove $\nabla f(x,y,z) = 0$ ovvero
$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$
che fornisce il punto $(0,0,0)$.

La matrice Hessiana vale
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
che ha autovalori $-1, -1, 2$ per cui è indefinita ed il punto $(0,0,0)$ risulta essere un punto sella.

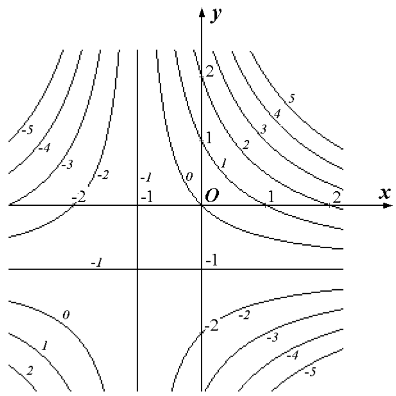
Più semplicemente, considerando le restrizioni, nel piano $z = 0$, alle rette $y = x$ e $y = -x$, si ottiene
$$f(x,x,0) = x^2 \qquad , \qquad f(x,-x,0) = -x^2$$
per cui l'origine risulta essere un minimo sulla prima retta ed un massimo sulla seconda.

h) Disegnare le curve di livello della funzione
$$g(x,y) = f(x,y,1)$$
e determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente in $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ alla curva di livello passante per tale punto.

Le curve di livello hanno equazione $g(x,y) = f(x,y,1) = xy + y + x = c$ e quindi

$$y = \frac{c-x}{x+1} \qquad , \qquad x \neq -1$$

Per $x = -1$ si ha $c = -1$. Tali curve sono iperboli di asintoti $x = -1$ e $y = -1$.



Nel punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ si ha $c = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ e da

$$y(x) = \frac{c-x}{x+1} \qquad \text{si ha} \qquad y'(x) = -\frac{c+1}{(x+1)^2}$$

per cui $y'(\sqrt{2}/2) = -1$.

L'equazione della retta tangente è quindi

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - x \quad .$$

In maniera meno diretta si può ricavare y' utilizzando il teorema delle funzioni implicite: si ha

$$y'(x) = -\frac{g'_x(x,y(x))}{g'_y(x,y(x))} = -\frac{y(x)+1}{x+1}$$

che nel punto considerato vale -1.

i) Trovare, se esiste, il massimo globale di f in

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2 \ , \ 0 \leq z \leq 1 \ \}$$

e disegnare C.

f è continua e C (parte della superficie del cono compresa tra le quote 0 ed 1) è un insieme chiuso e limitato, per cui esistono i punti di minimo e di massimo.

Per trovare tali punti dividiamo C in tre parti: la parte di C con $0 < z < 1$, quella con $z = 0$ e quella con $z = 1$.

- Nel primo caso, posto $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, essendo f ed h di classe C^1 (si noti che il vincolo risulta $h(x,y,z) = 0$, $0 < z < 1$ e $\nabla h(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$ si annulla nell'origine, punto non appartenente al vincolo), applicando i moltiplicatori di Lagrange si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + z + 2\lambda x = 0 \\ x + z + 2\lambda y = 0 \\ x + y - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Sottraendo le prime due equazioni si ottiene $(y-x)(1-2\lambda)=0$ ovvero $\lambda=1/2$ oppure $y=x$.

Con $\lambda=1/2$ si ottiene $x=y=z=0$ che non è accettabile; con $y=x$ si ottiene ancora $x=y=z=0$ che non è accettabile.

- Nel caso $z=0$ si ottiene il solo punto $(0,0,0)$.
- Per $z=1$ si ottiene la circonferenza $x^2+y^2=1$ nel piano $z=1$

Per quanto visto nel punto h), vedi figura sotto, i punti di minimo e massimo vanno cercati ove le curve di livello di $f(x,y,1)$ sono tangenti alla circonferenza, ovvero in

$$P_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad P_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad P_3=(-1,0) \quad , \quad P_4=(0,-1) \quad .$$

In modo più complicato si può parametrizzare la circonferenza con

$$x=\cos\theta \quad , \quad y=\sin\theta \quad , \quad z=1 \quad , \quad \theta\in[0,2\pi]$$

e massimizzare

$$k(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta,1)=\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta \quad , \quad \theta\in[0,2\pi] \ .$$

Si ottiene

$$k'(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta-\sin\theta=(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta+1)=0$$

per $\cos\theta-\sin\theta=0$, cioè $\theta=\pi/4$ e $\theta=5\pi/4$ (ovvero P_1 e P_2) e per $\cos\theta+\sin\theta+1=0$, cioè $\theta=\pi$ e $\theta=3\pi/2$ (ovvero P_3 e P_4).

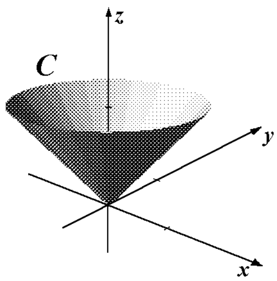
Calcolando la funzione nei cinque punti trovati si ha

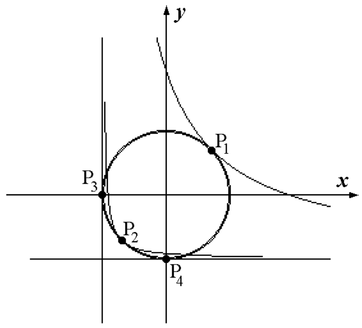
$$f(0,0,0)=0 \quad , \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{2} \quad , \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$$

$$f(-1,0,1)=-1 \quad , \quad f(0,-1,1)=-1$$

Pertanto il massimo di f su C è assunto in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ e vale $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

Ancora in altro modo, utilizzando le coordinate cilindriche, e ricordando che il vincolo è $z=\rho$, $\rho\in[0,1]$, ci si riconduce a trovare il massimo di $\rho^2(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta)$, sempre con $\rho\in[0,1]$; tale massimo è assunto quando ρ^2 è massimo (cioè $\rho=1$) e quando $(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta)$ è massimo (cioè $\theta=\pi/4$ come visto sopra).





ANALISI MATEMATICA II - corso C - Prima prova parziale - 17 Febbraio 1998 2^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan y + \dfrac{|x|^\alpha\ y}{2x^2+y^2} & , \ \textbf{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ \textbf{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Stabilire, al variare di $\alpha > 0$, se f è continua in $(0,0)$.

Si tratta di verificare se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
Notato che $\arctan y$ è sicuramente continua, sarà sufficiente determinare gli α per cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha y}{2x^2+y^2} = 0 \quad .$$

Considerando ad esempio la restrizione alla retta $y = x$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^\alpha x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha-1}}{3} = \begin{cases} 0 & , \alpha > 1 \\ 1/3 & , \alpha = 1 \\ +\infty & , \alpha < 1 \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha \leq 1$ la funzione non risulta continua in $(0,0)$.
Sia ora $\alpha > 1$, allora, utilizzando ad esempio le coordinate polari,

$$\left| \frac{\rho^\alpha \cos^\alpha\theta\ \rho\sin\theta}{\rho^2(2\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \right| \ = \ \rho^{\alpha-1}\frac{|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|}{1+\cos^2\theta} \ \leq \ \rho^{\alpha-1}$$

che tende a zero (essendo $\alpha > 1$).
Pertanto f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 1$.

b) Stabilire, al variare di $\alpha > 0$, se f è differenziabile in $(0,0)$.

Consideriamo soltanto il caso $\alpha > 1$, in cui f è continua.
Come al punto a), essendo $\arctan y$ sicuramente differenziabile, sarà sufficiente studiare la differenziabilità di

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha\ y}{2x^2+y^2} & , \ \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Essendo $g(x,0) = 0$ e $g(0,y) = 0$ si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

per cui si dovrà provare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha\ y}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Poiché sulla restrizione $y = x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^\alpha x}{3x^2\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha-2}}{3\sqrt{2}} = \begin{cases} 0 & , \alpha > 2 \\ 1/(3\sqrt{2}) & , \alpha = 2 \\ +\infty & , \alpha < 2 \end{cases}$$

f non è certamente diffrenziabile in $(0,0)$ se $\alpha \leq 2$.
Se invece $\alpha > 2$, f risulta differenziabile in quanto, come al punto a), utilizzando le coordinate polari

$$\left| \frac{\rho^\alpha \cos^\alpha\theta\ \rho\sin\theta}{\rho^3(2\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \right| \ = \ \rho^{\alpha-2}\frac{|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|}{1+\cos^2\theta} \ \leq \ \rho^{\alpha-2}$$

c) Nel caso $\alpha = 1$, calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

Per $\alpha = 1$, sulla restrizione di f all'asse y si ha $f(0,y) = \arctan y$ e poiché

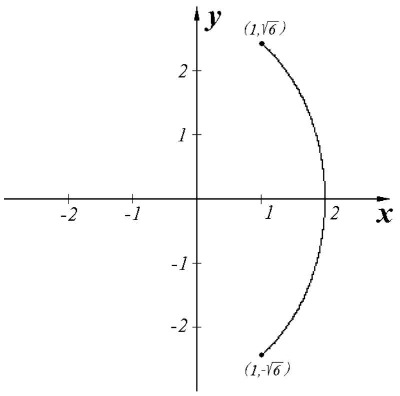
$$\lim_{y\to-\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$$

il limite richiesto non esiste.

d) Nel caso $\alpha = 0$, determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo e assoluto di f sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x^2 + y^2 = 8 \ , \ x \geq 1 \ \}$$

L'insieme A è una parte dell'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi 2 e $\sqrt{8}$ rispettivamente; essendo f continua e A compatto esisteranno certamente il massimo ed il minimo assoluto di f su A.



Poiché sull'insieme A la funzione f vale (essendo $\alpha = 0$ e $2x^2 + y^2 = 8$)

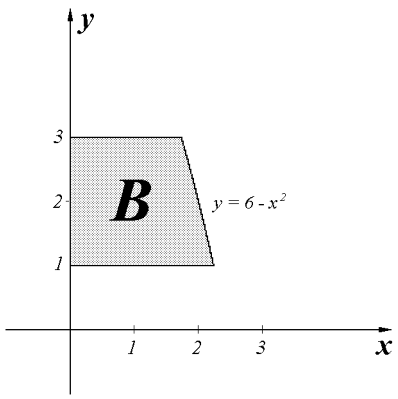
$$\frac{y}{8} + \arctan y$$

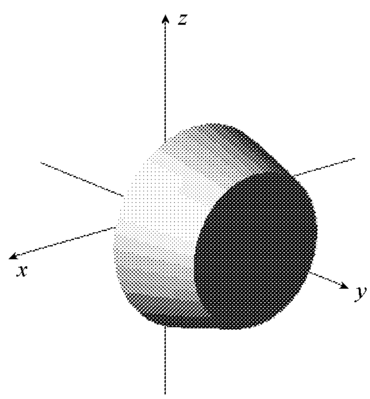
che è una funzione crescente di y, l'unico punto di massimo (assoluto) si ha quando y è massimo, cioè in $(1, \sqrt{6})$, e l'unico punto di minimo (assoluto) si ha quando y è minimo, cioè in $(1, -\sqrt{6})$.

- **Si consideri l'insieme**

$$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x \geq 0 \ , \ 1 \leq y \leq 3 \ , \ y \leq 6 - x^2\}$$

e sia V il solido da esso generato con una rotazione completa attorno all'asse y.





e) Calcolare il volume di V.

Poiché in B si ha $x^2 \leq 6-y$, utilizzando le coordinate cilindriche (rotazione attorno all'asse y), V risulta definito da

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$

con $y \in [1,3]$, $\rho \in [0, \sqrt{6-y}\,]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pertanto

$$\text{vol}\, V = \iiint_V dx\ dy\ dz \ = \int_0^{2\pi}\int_1^3\int_0^{\sqrt{6-y}} \rho\ d\rho\ dy\ d\theta \ = \ 2\pi\int_1^3 \frac{6-y}{2}\ dy \ = \ \pi\left(6y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^3 \ = \ 8\pi$$

f) Determinare il baricentro del solido V (considerato omogeneo).

Per evidenti ragioni di simmetria le coordinate x e z del baricentro sono nulle.

Inoltre

$$y_b = \frac{\iiint_V y\ dx\ dy\ dz}{\iiint_V dx\ dy\ dz}$$

e, come per il punto a)

$$\iiint_V y\ dx\ dy\ dz \ = \int_0^{2\pi}\int_1^3\int_0^{\sqrt{6-y}} y\rho\ d\rho\ dy\ d\theta \ = \ 2\pi\int_1^3 \frac{6y-y^2}{2}\ dy \ = \ \pi\left(3y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^3 \ = \frac{46}{3}\pi$$

da cui

$$y_b = \frac{23}{12}$$

g) Determinare un vettore normale alla superficie laterale di V, nel punto $(0,2,2)$.

Una parametrizzazione della superficie laterale di V è, utilizzando sempre le stesse coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \sqrt{6-y}\ \cos\theta \\ y = y \\ z = \sqrt{6-y}\ \sin\theta \end{cases}$$

con $y \in [1,3]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

Il punto richiesto $(0,2,2)$ è assunto per $y = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La matrice jacobiana risulta

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-\cos\theta}{2\sqrt{6-y}} & 1 & \dfrac{-\sin\theta}{2\sqrt{6-y}} \\ -\sin\theta\sqrt{6-y} & 0 & \cos\theta\sqrt{6-y} \end{pmatrix}$$

che calcolata nel punto $y=2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, fornisce

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto un vettore normale è $\left(0, \frac{1}{2}, 2\right)$.

h) Calcolare l'area della sezione di V con il piano $z = 3x$.

Essendo il piano in questione un piano passante per l'asse di rotazione, l'area richiesta sarà semplicemente il doppio dell'area di B, ovvero

$$2\int_1^3 \sqrt{6-y}\ dy \ = -\frac{4}{3}(6-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{20}{3}\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$$

ANALISI MATEMATICA II - corso C - Seconda prova parziale - 4 Giugno 1998 2^h

- **Si consideri l'equazione differenziale**

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) + 1 = 0$$

a) Supponendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determinare una legge di ricorrenza per i coefficienti a_n.
Si ha

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad , \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad , \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

da cui, sostituendo nell'equazione

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 = 0$$

ovvero

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 = 0$$

e, uguagliando i coefficienti

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 + 1 = 0 & \text{, per } n = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n = 0 & \text{, per } n \geq 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a_0, a_1 \in \mathbb{R} \\ a_2 = -\dfrac{a_0 + 1}{2} \\ a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+2} & \text{, per } n \geq 1 \end{cases}$$

- **Si consideri poi il problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) + 1 = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

b) Determinarne tutte le soluzioni sviluppabili in serie di potenze di centro 0, precisandone il dominio.
Utilizzando i dati iniziale si ottiene

$$y(0) = a_0 = -1 \qquad , \qquad y'(0) = a_1 = 1$$

ed utilizzando le leggi di riccorrenza sopra trovate si ottiene

$$a_0 = -1 \ \ , \ \ a_2 = 0 \qquad \text{da cui} \quad a_n = 0 \quad \text{per ogni } n \text{ pari, } n \geq 2$$

mentre

$$a_1 = 1 \ \ , \ \ a_3 = -\frac{1}{3} \ \ , \ \ a_5 = \frac{1}{3\ 5} \ \ , \ \ a_7 = -\frac{1}{3\ 5\ 7} \ \ ....$$

da cui è facile ottenere per induzione che

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$$

La soluzione richiesta è quindi

$$y(x) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

definita su tutti i reali, in quanto il suo raggio di convergenza è

$$\rho = \lim \frac{(2n+3)!!}{(2n+1)!!} = +\infty$$

c) Determinare un polinomio che approssimi la soluzione del problema di Cauchy a meno di 10^{-2} nell'intervallo $[0, 1]$.

Per $x \in [0, 1]$ la serie risulta a segni alterni, con $\frac{1}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$ decrescente a zero, per cui, posto

$$S_n(x) = -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} x^{2k+1}$$

si ha

$$|y(x) - S_n(x)| \;\le\; \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!!} \;\le\; \frac{1}{(2n+3)!!} \;\le\; \frac{1}{100} \qquad \text{per } n = 2$$

Il polinomio richiesto sarà quindi

$$S_2(x) = -1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}$$

- **Si consideri il problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y''(x) = 6(y'(x))^3 y(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

d) Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ il problema ammette una ed una sola soluzione.

Essendo l'equazione $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$, con $f(x, y, z) = 6z^3 y$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, il problema ammette una ed una sola soluzione per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

e) Determinare, per $a = 1$ e $b = 0$, tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

Essendo $y'(0) = 0$ la funzione costante $y(x) = 1$ è soluzione (ed è anche l'unica per quanto visto prima).

f) Determinare, per $a = 0$ e $b = -1$, tutte le soluzioni del problema (eventualmente in forma implicita), precisandone il dominio.

Essendo $y'(0) = -1 \neq 0$ utilizzando la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ si ottiene il problema

$$\begin{cases} z'(y) z(y) = 6z^3(y) y \\ z(0) = -1 \end{cases}$$

da cui, essendo $z(y) \neq 0$ in un intorno di 0, si ha $\quad z'(y) = 6z^2(y) y$

$$\int_0^y \frac{z'(t)}{z^2(t)} dt \;=\; \int_0^y 6t \; dt$$

e

$$-\frac{1}{z(y)} - 1 = 3y^2 \qquad \text{da cui} \qquad z(y) = -\frac{1}{1+3y^2}$$

Ci si è quindi ricondotti al problema

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{1}{1+3y^2(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

da cui $\quad -(1 + 3y^2(x)) y'(x) = 1 \quad$, ed integrando tra 0 ed x

$$-y(x) - y^3(x) = x$$

che fornisce la soluzione (in forma implicita) ovvero la funzione inversa x in funzione di y.

Essendo la funzione $-y - y^3$ strettamente decrescente su $\mathbb{R}$, con rango uguale ad $\mathbb{R}$, è invertibile e la soluzione è definita su tutti i reali.

ANALISI MATEMATICA II - 18 Settembre 1998 3^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x,y) = y^2 + 9|x-1| - x^2$$

a) Determinare, se esiste, il $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

Si ha, ad esempio sull'asse y, $\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty$, mentre sull'asse x, $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = -\infty$, per cui il limite richiesto non esiste.

b) Determinare, se esistono, i punti di massimo e di minimo assoluto di f **su** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Essendo f continua e l'insieme limitato e chiuso, esistono sicuramente punti di minimo e di massimo assoluto.

Tali punti vanno ricercati, poiché $f \in C^1$ per $x \neq 1$, all'interno dell'insieme (con $x \neq 1$) ove si annulla il gradiente; sul segmento con $x = 1$ e sulla frontiera.

Per quanto riguarda il primo caso, essendo

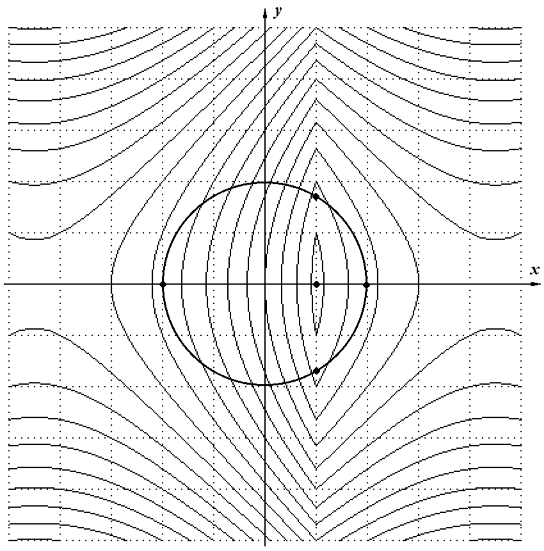
$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} (-9-2x, 2y) & \text{, se } x < 1 \\ (9-2x, 2y) & \text{, se } x > 1 \end{cases}$$

annullando il gradiente si ottiene, per $x < 1$, il punto (-9/2,0), e per $x > 1$ il punto (9/2,0); ma tali punti sono esterni all'insieme considerato.

Sul segmento $x = 1$ con $|y| \leq \sqrt{3}$ risulta $f(1,y) = y^2 - 1$ che ha minimo per $y = 0$ e massimo per $y = \pm\sqrt{3}$.

Infine, sulla frontiera, per $y^2 = 4 - x^2$, la funzione vale $4 - 2x^2 + 9|x-1|$ che risulta decrescente per $-2 \leq x \leq 1$ e crescente per $1 \leq x \leq 2$ e quindi ha minimo per $x = 1$ e massimo per $x = \pm 2$.

Riassumendo, i probabili punti di minimo o massimo sono



$$(1,0)\ ,\ (1,\sqrt{3})\ ,\ (1,-\sqrt{3})\ ,\ (-2,0)\ ,\ (2,0)$$

Inoltre

$$f(1,0) = -1\ ,\ f(-2,0) = 23$$

$$f(2,0) = 5\ ,\ f(1,\pm\sqrt{3}) = 2$$

per cui $(1,0)$ è punto di minimo assoluto, mentre $(-2,0)$ è punto di massimo assoluto per f sull'insieme considerato.

(Osserviamo che i punti $(1,\pm\sqrt{3})$ sarebbero subito da eliminare, essendo risultati minimi sulla frontiera e massimi sul segmento con $x = 1$).

(Osserviamo pure che, qualora fossero stati richiesti anche i punti di minimo o massimo relativo, resterebbe da verificare se $(2,0)$ sia effettivamente un punto di massimo relativo per l'insieme, così come lo è per la sua frontiera. L'esame del gradiente nel punto in questione ($\nabla f(2,0) = (5,0)$) ci conferma che tale punto è di massimo relativo, essendo il gradiente continuo la funzione cresce verso destra, non solo nel punto, ma in tutto un intorno)

c) Determinare, se esistono, i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto di f su $\mathbb{R}^2$.

Per quanto visto al punto a), f non è limitata né inferiormente, né superiormente, per cui non ha minimi o massimi assoluti.

Per quanto riguarda i relativi, osserviamo ancora che $f \in C^2$ per $x \neq 1$, e quindi, come già visto al punto precedente, annullando il gradiente si ottiene, per $x < 1$, il punto (-9/2,0), e per $x > 1$ il punto (9/2,0).

Poichè la matrice Hessiana

$$Hf(-9/2,0) = Hf(9/2,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è indefinita, tali punti risultano essere punti sella.

Ad analogo risultato si poteva pervenire semplicemente osservando il comportamento della funzione lungo le direzioni degli assi.

Restano da esaminare i punti sulla retta $x = 1$. Risulta $f(1,y) = y^2 - 1$ che ha un punto di minimo per $y = 0$ e tale punto, come si è già visto al punto b) è di minimo relativo per f su $\mathbb{R}^2$ (essendo, per quanto visto prima, minore di tutti i punti del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2).

d) Calcolare l'area della superficie $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x \ , \ 0 \leq z \leq f(x,y) \ , \ 0 \leq x \leq 1\}$.

La superficie in questione può essere facilmente parametrizzata da

$$\begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = z \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq f(x,x) \end{cases}$$

per cui, essendo la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la normale risulta $(1,-1,0)$ e l'area richiesta vale

$$\int_0^1 \int_0^{9-9x} \sqrt{2}\ dy\ dx \ = \ 9\sqrt{2} \int_0^1 (1-x)\ dx \ = \ 9\sqrt{2}/2$$

In altro modo si poteva calcolare l'area come $\int_\gamma f\ ds$ ove la curva γ è definita da

$$x = x \qquad , \qquad y = x \qquad , \text{con} \qquad 0 \leq x \leq 1\ .$$

- **Sia**

$$f(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t+x} dt$$

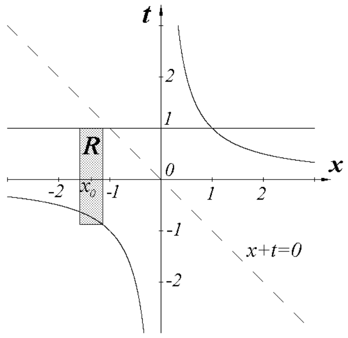
e) Trovare, motivando, il dominio di f.

La funzione integranda è definita per $t \neq -x$ ed in tale punto il limite risulta infinito di ordine 1, per cui affinché f risulti definita dovrà essere $x \neq 0$ e

$$\begin{cases} 1 < -x \\ \frac{1}{x} < -x \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 1 > -x \\ \frac{1}{x} > -x \end{cases}$$

da cui $x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$.

f) In quali punti risulta f derivabile?



Se $x_0 < -1$ esiste un rettangolo $R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [1/(x_0 + \delta), 1]$ in cui la funzione integranda è di classe C^1 e $1/x \in [1/(x_0 + \delta), 1]$ è derivabile. Analogamente se $x_0 > 0$; pertanto f risulta derivabile nel suo dominio.

g) Scrivere una formula per $f'(x)$.

Si ha

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x + 1/x}\,\frac{1}{x^2} - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{(t+x)^2}dt$$

h) (Utilizzando il teorema della media e/o una opportuna maggiorazione) verificare che $f(x) \to 0$ se $x \to +\infty$.

Per il teorema della media esiste c tra 1 ed $1/x$ tale che

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{e^c}{c+x}$$

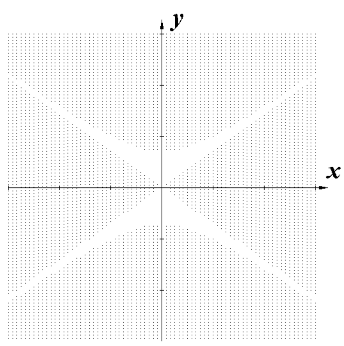
Pertanto, se $x \to +\infty$, risulta $0 \le c \le 1$ e quindi

$$|f(x)| \;=\; \left|\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{e^c}{c+x}\right| \;\le\; \left|\frac{1}{x} - 1\right|\frac{e}{|x|}$$

Passando al limite per $x \to +\infty$, poichè l'ultimo membro tende a 0, si conclude; (In maniera simile si poteva prima maggiorare l'integranda e quindi concludere).

i) Disegnare il dominio di $g(x,y) = f(x^2 - 2y^2)$

Per quanto visto precedentemente, essendo il dominio di f uguale a $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$, g è definita se $x^2 - 2y^2 \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ ovvero



$$|y| < \frac{|x|}{\sqrt{2}} \qquad \text{oppure} \qquad |y| < \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}}$$

ANALISI MATEMATICA II (Sv) - 18 Marzo 1998 - (1^a prova parziale) $1^h 30^m$

- **Si consideri la funzione**

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{|x|y^6}{x^6+y^6} & , (x,y) \neq (0,0) \\ k & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di continuità di f.

Per $(x,y) \neq (0,0)$, f risulta continua, in quanto composta di funzioni continue.

Esaminiamo la continuità nell'origine: sugli assi la funzione vale 1, pertanto f può essere continua solo per $k = 1$; scelto pertanto tale valore si ha

$$\left| 1 + \frac{|x|y^6}{x^6+y^6} - 1 \right| \le \frac{|x|y^6}{y^6} = |x|$$

con $|x| \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$.

Ne segue che f è continua in $(0,0)$ se e solo se $k = 1$.

b) Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di differenziabilità di f.

È intanto chiaro che esamineremo solo il caso $k = 1$ in cui f è continua.

Se $x \neq 0$ la funzione risulta di classe C^1, in quanto composta di funzioni di classe C^1, e quindi è differenziabile.

Per quel che riguarda i punti sull'asse y, del tipo $(0,b)$, con $b \neq 0$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,b) - f(0,b)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|b^6}{x(x^6+b^6)}$$

ma tale limite non esiste, essendo -1 da sinistra ed 1 da destra. Ne segue che f non è differenziabile sui punti dell'asse y diversi dall'origine.

Infine, nell'origine, essendo come già notato la funzione uguale ad 1 sugli assi, risulta $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^6}{(x^6+y^6)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$$

(ad esempio sulla retta $y = x$ tale limite risulta $\frac{1}{2\sqrt{2}}$), e quindi f non è differenziabile neppure in $(0,0)$.

c) Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

Sugli assi la funzione vale 1, mentre sulla retta $y = x$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{|x|}{2} = +\infty$$

per cui il limite richiesto non esiste.

d) Determinare, per $k = 1$, se esistono, i punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti, di f, sul suo dominio.

Dal punto precedente risulta che f non è limitata superiormente, per cui non esistono punti di massimo assoluto.

Osservato inoltre che $f(x,y) \ge 1$ e che sugli assi vale 1, i punti degli assi risultano essere punti di minimo assoluto.

Per quel che riguarda eventuali massimi o minimi relativi, essendo, per $x \neq 0$,

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^6(y^6 - 5x^6)}{(x^6+y^6)^2}\operatorname{sgn}(x), \frac{6|x|x^6y^5}{(x^6+y^6)^2} \right)$$

il gradiente si annulla solo per $y = 0$ (asse x) che come già osservato è luogo di minimo assoluto.

Non esistono quindi punti di massimo e minimo relativo fuori degli assi.

ANALISI MATEMATICA II (Sv) - 22 Aprile 1998 - (2^a prova parziale) $1^h 30^m$

- **Si consideri, nel piano (x,z), la circonferenza di centro $(2,3)$ e raggio 1, e sia S la superficie ottenuta ruotando tale circonferenza di un giro completo attorno all'asse z.**

a) **Determinare una parametrizzazione di S.**
Una parametrizzazione della circonferenza nel piano (x,z) è

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \cos t \\ z(t) = 3 + \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

per cui, essendo la rotazione attorno all'asse z, una parametrizzazione di S è

$$\begin{cases} x(t) = (2 + \cos t)\cos\theta \\ y(t) = (2 + \cos t)\sin\theta \\ z(t) = 3 + \sin t \end{cases} \qquad (t,\theta) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$$

b) **Calcolare la massa di S, supponendo la sua densità superficiale proporzionale alla distanza dal piano $z = 0$.**
Essendo la densità di S del tipo $k|z|$, (tenuto conto che sulla superficie si ha $z > 0$), risulta

$$\text{massa di } S = \int_S kz \; d\sigma$$

La matrice jacobiana di S è

$$\begin{pmatrix} -\sin t \cos\theta & -\sin t \sin\theta & \cos t \\ -(2+\cos t)\sin\theta & (2+\cos t)\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

da cui il vettore normale è

$$(-(2+\cos t)\cos t \cos\theta, -(2+\cos t)\cos t\sin\theta, -(2+\cos t)\sin t)$$

la cui norma vale $2 + \cos t$.
Pertanto

$$\int_S z \; d\sigma \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (3+\sin t)(2+\cos t)\; d\theta\; dt \;= 2\pi \int_0^{2\pi} (6 + 3\cos t + 2\sin t + \sin t\cos t) dt \;=\; 24\pi^2$$

e la massa richiesta vale $24k\pi^2$.

- **Si consideri il campo vettoriale**

$$F(x,y) = \left(\frac{ax}{x^2+2y^2-1}, \frac{2y+b}{x^2+2y^2-1} \right)$$

c) **Stabilire per quali $a, b \in \mathbf{R}$ il campo è chiuso.**
Il campo è definito per $x^2 + 2y^2 \neq 1$ e risulta ivi di classe C^∞.
Chiamate f e g rispettivamente la prima e la seconda componente del campo F, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4axy}{(x^2+2y^2-1)^2} \qquad , \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-4xy - 2bx}{(x^2+2y^2-1)^2}$$

per cui il campo è chiuso se e solo se $-4axy = -4xy - 2bx$ ovvero se e solo se

$$a = 1 \qquad , \qquad b = 0 \quad .$$

d) Calcolare, per gli a e b determinati al punto c), il lavoro fatto dal campo F lungo la curva di equazione

$$\begin{cases} x(t) = 10 + t\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

La curva in oggetto è una spirale la cui traccia è tutta contenuta nel semipiano $x > 1$, che è un insieme semplicemente connesso in cui il campo è definito e di classe C^1, per cui sarà sufficiente calcolare il lavoro su di una qualunque curva avente gli stessi estremi della curva data, ovvero $(10, 0)$ e $(10 + 2\pi, 0)$; per esempio sul segmento γ orizzontale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [10, 10 + 2\pi]$$

Ne segue

$$\int_\gamma f\ dx + g\ dy \ = \ \int_{10}^{10+2\ \pi} \frac{t}{t^2-1} dt \ = \ \frac{1}{2}\ln((10+2\pi)^2 - 1) - \frac{1}{2}\ln 99$$

e) Sempre con gli a e b trovati al punto c), determinare, se esistono, tutti i potenziali di F.

Il campo F è chiuso (punto c)), ma il suo dominio non è semplicemente connesso.

All'interno dell'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ il campo ammette sicuramente potenziale (essendo tale insieme semplicemente connesso); consideriamo pertanto una curva chiusa la cui traccia stia fuori dell'ellisse in oggetto, ad esempio

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad \in [0, 2\pi]$$

Si ha

$$\int_\gamma f\ dx + g\ dy \ = \ \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2\cos t}{3} 2\sin t + \frac{2\sqrt{2}\sin t}{3}\sqrt{2}\cos t \right) dt \ = \ 0$$

pertanto il campo ammette potenziale.

Detto ϕ tale potenziale, dovrà risultare

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2y^2 - 1}$$

da cui

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2y^2 - 1| + c(y)$$

e quindi

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + 2y^2 - 1} + c'(y) = \frac{2y}{x^2 + 2y^2 - 1}$$

ovvero $c'(y) = 0$ e quindi, ad esempio $c = 0$.

Un potenziale di F è quindi $\phi(x, y) = \ln\sqrt{|x^2 + 2y^2 - 1|}$ (una banale verifica prova che $\nabla\phi = F$ in tutto il dominio); pertanto, essendo il dominio non connesso, ma costituito da due parti connesse (dentro e fuori dell'ellisse) tutti i potenziali di F saranno

$$\begin{cases} \ln\sqrt{x^2 + 2y^2 - 1} + c_1 & , \text{ se } \ x^2 + 2y^2 > 1 \\ \ln\sqrt{1 - x^2 - 2y^2} + c_2 & , \text{ se } \ x^2 + 2y^2 < 1 \end{cases}$$

Osservazione: naturalmente, una volta determinato il potenziale, la risposta al punto d) può essere data calcolando la differenza di potenziale tra i punti finale ed iniziale della curva considerata.

ANALISI MATEMATICA II (Sv) - 18 Maggio 1998 - (3^a prova parziale) $1^h 30^m$

- **Si consideri il problema**

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x) + \mathrm{e}^x - 1 \\ y(0) = \gamma \\ y'(0) = \delta \end{cases}$$

a) Determinare, al variare di γ e δ le soluzioni sviluppabili in serie di potenze di centro 0, precisandone il dominio.

Sia

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad , \quad |x| < \rho$$

allora

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad , \quad |x| < \rho$$

e quindi, ricordando lo sviluppo di e^x,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

da cui, estraendo l'addendo corrispondente ad $n = 0$ ed uguagliando poi i coefficienti della serie,

$$a_0 = 0 \qquad , \qquad n a_n = a_n + \frac{1}{n!} \qquad \forall n \geq 1$$

ovvero

$$a_0 = 0 \qquad , \qquad (n-1) a_n = \frac{1}{n!} \qquad \forall n \geq 1$$

da cui

$$a_0 = 0 \qquad , \qquad a_n = \frac{1}{n!(n-1)} \qquad \forall n > 1$$

ma per $n = 1$ risulta $0 = 1$ (impossibile).

Pertanto non esistono soluzioni sviluppabili in serie di potenze, di centro 0, del problema richiesto.

- **Si consideri la funzione**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{2 + \sqrt{n}}$$

b) Determinare il dominio di f.

Posto ad esempio $t = (x-2)^3$ si ha che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2+\sqrt{n}}$ ha raggio di convergenza

$$\rho = \lim \frac{2 + \sqrt{n+1}}{2 + \sqrt{n}} = 1$$

per cui dovrà essere $|x-2|^3 < 1$ ovvero $x \in (1, 3)$.

Inoltre, per $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{2+\sqrt{n}}$ che è una serie a segni alterni, con termine decrescente a zero, e quindi convergente, mentre per $x = 3$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ che è una serie a termini positivi, con termine generale infinitesimo di ordine 1/2, e quindi divergente.

Pertanto il dominio di f è $[1, 3)$.

c) Determinare un numero razionale che approssimi $f(2.1)$ a meno di 10^{-6}.

Si ha

$$f(2.1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{10^{3n}}}{2+\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{10^{3k}}}{2+\sqrt{k}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{10^{3k}}}{2+\sqrt{k}}$$

ed essendo

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{10^{3k}}}{2+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{3k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1000^k} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{1000^{\,n+1}}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{999}\,\frac{1}{1000^n}$$

sarà sufficiente scegliere $n = 1$.

Pertanto l'approssimazione richiesta è

$$\frac{1}{3000}$$

ANALISI MATEMATICA II (Sv) - 5 Giugno 1998 - (4^a prova parziale) $1^h 30^m$

- **Si consideri il problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = 2(y'(x))^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

a) Studiarne l'esistenza e l'unicità della soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Essendo l'equazione della forma $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ con $f(x, y, z) = \frac{2z^2}{y}$, poiché, per $y \neq 0$, f risulta di classe C^∞, si avrà esistenza ed unicità della soluzione per $y(0) \neq 0$ e per qualunque $y'(0)$.

Pertanto, essendo $y(0) = 1$, ci sarà esistenza ed unicità (locale) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

b) Nel caso $a = 0$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

Poiché la funzione costante $y(x) = 1$ (su $\mathbb{R}$) soddisfa il problema, essa sarà l'unica soluzione cercata.

c) Nel caso $a = 1$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

Essendo $y'(0) \neq 0$, consideriamo la sostituzione $y'(x) = z(y(x))$ ed otteniamo il problema

$$\begin{cases} yz'(y)z(y) = 2z^2(y) \\ z(1) = 1 \end{cases}$$

e, semplificando per $z(y)$ che è certamente diverso da 0 in un intorno di 1, separando le variabili (per $y > 0$) ed integrando si ottiene

$$\int_1^y \frac{z'(t)}{z(t)} dt = \int_1^y \frac{2}{t} dt \qquad \text{da cui} \qquad \ln z(y) = \ln y^2 \quad (y > 0)$$

Risolvendo quindi il problema (tenendo conto che $z(y) = y^2,\ y > 0$)

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si ottiene, separando le variabili ed integrando

$$\int_0^x \frac{y'(x)}{y^2(t)} dt = \int_0^x dt \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{y(x)} + 1 = x$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{con} \qquad 1 - x > 0 \qquad \text{ovvero} \qquad x < 1$$

- **Si consideri il problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{xy(x) + y^2(x) + x^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

d) Determinarne tutte le soluzioni, precisandone il dominio.

Si tratta di un problema che, per $x > 0$ (essendo l'ascissa del dato iniziale positiva) ammette una ed una sola soluzione, per il teorema di esistenza ed unicità.

Utilizzando (è un'equazione omogenea) la sostituzione $y(x) = xz(x)$, sempre con $x > 0$ si ottiene il problema

$$\begin{cases} xz'(x) + z(x) = \frac{x^2 z(x) + x^2 z^2(x) + x^2}{x^2} = z(x) + z^2(x) + 1 \\ z(1) = \frac{y(1)}{1} = 1 \end{cases}$$

Semplificando, l'equazione diventa $xz'(x) = z^2(x) + 1$; separando le variabili ed integrando, sempre con $x > 0$

$$\int_1^x \frac{z'(t)}{z^2(t) + 1} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad \text{da cui} \qquad \arctan z(x) - \frac{\pi}{4} = \ln x$$

Pertanto

$$z(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) \qquad \text{con} \qquad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \ln x < \frac{\pi}{2}$$

e

$$y(x) = x \tan\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) \qquad \text{con} \qquad e^{-3\pi/4} < x < e^{\pi/4}$$

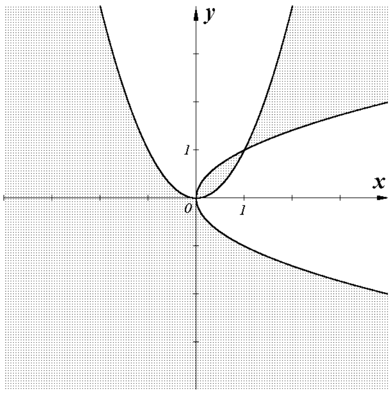
ANALISI MATEMATICA II (Sv) - 2 Febbraio 2000 - (1^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri la funzione**

$$f(x,y) = \max\{(y-x^2)(x-y^2), 0\}$$

a) Determinare i punti del piano in cui f è continua

f è definita su tutto il piano e vale $(y-x^2)(x-y^2)$ dove questa è positiva, mentre vale 0 altrove. Poiché $(y-x^2)(x-y^2)$ si annulla sulle due parabole $y=x^2$ e $x=y^2$, controllando il segno della funzione in ognuna delle cinque parti connesse in cui resta diviso il piano, si ottiene che f è uguale a $(y-x^2)(x-y^2)$ nella zona ombreggiata, mentre è nulla nella restante parte del piano.



Essendo certamente continua all'interno di ogni parte connessa (sia $(y-x^2)(x-y^2)$ che 0 sono funzioni continue), resta da verificare la continuità sui punti delle due parabole. È comunque immediato ottenere che, per ogni punto (x_0,y_0) appartenente ad una delle due parabole, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (y-x^2)(x-y^2) = 0 = f(x_0,y_0)$$

per cui f è continua su tutto il piano.

b) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

La restrizione di f agli assi delle ascisse e delle ordinate risulta

$$f(x,0) = \begin{cases} -x^3 & \text{, se } x<0 \\ 0 & \text{, se } x \geq 0 \end{cases} \qquad f(0,y) = \begin{cases} -y^3 & \text{, se } y<0 \\ 0 & \text{, se } y \geq 0 \end{cases}$$

Si ha perciò

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

e quindi f risulterà differenziabile in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Ciò è immediato se (x,y) appartiene alla parte del dominio in cui f è nulla; nella restante parte si deve verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-x^2)(x-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ed utilizzando ad esempio le coordinate polari si ottiene

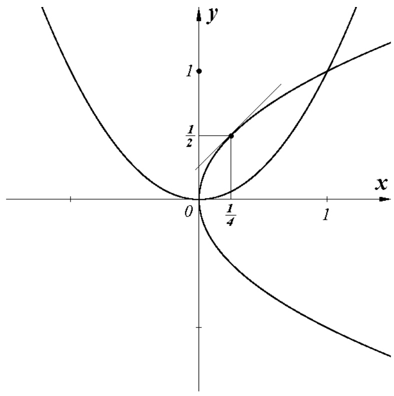
$$\frac{|\rho^2(\sin\theta - \rho\cos^2\theta)(\cos\theta - \rho\sin^2\theta)|}{\rho} \leq \rho(|\sin\theta| + \rho\cos^2\theta)(|\cos\theta| + \rho\sin^2\theta) \leq \rho(1+\rho)(1+\rho)$$

e quindi ciò che si voleva. Pertanto f è differenziabile in (0,0).

c) Calcolare, se esistono, le derivate di f secondo i vettori in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ e $(0,1)$.

Sia $q = (\alpha, \beta)$ un vettore (unitario); nel primo punto si deve calcolare

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{4}+t\alpha, \frac{1}{2}+t\beta) - f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})}{t}$$



Poiché il punto in questione si trova su $y = \sqrt{x}$ e la retta tangente in quel punto ha pendenza 1 (derivata di $\sqrt{x}$ calcolata in $\frac{1}{4}$) si nota che

$$f\left(\frac{1}{4}+t\alpha, \frac{1}{2}+t\beta\right) = \begin{cases} (\frac{1}{2}+t\beta-(\frac{1}{4}+t\alpha)^2)(\frac{1}{4}+t\alpha-(\frac{1}{2}+t\beta)^2) & \text{, se } \beta < \alpha \\ 0 & \text{, se } \beta \geq \alpha \end{cases}$$

Essendo

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0^+} \frac{(\frac{1}{2}+t\beta-(\frac{1}{4}+t\alpha)^2)(\frac{1}{4}+t\alpha-(\frac{1}{2}+t\beta)^2)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{(\frac{1}{2}+t\beta-\frac{1}{16}-t^2\alpha^2-\frac{1}{2}t\alpha)(\frac{1}{4}+t\alpha-\frac{1}{4}-t^2\beta^2-t\beta)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{7}{16}+t\beta-t^2\alpha^2-\frac{1}{2}t\alpha\right)(\alpha-t\beta^2-\beta) = \frac{7}{16}(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

la derivata secondo il vettore q in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ vale

$$\begin{cases} \frac{7}{16}(\alpha-\beta) & \text{, se } \beta < \alpha \\ 0 & \text{, se } \beta \geq \alpha \end{cases}$$

Per quel che riguarda il punto (0,1) non vi sono problemi in quanto f è nulla in tutto un intorno del punto e quindi la derivata secondo il vettore q è nulla per ogni q .

d) Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

La restrizione di f all'asse x (per $y = 0$) vale, come già osservato

$$f(x,0) = \begin{cases} -x^3 & \text{, se } x < 0 \\ 0 & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$$

che tende a 0 per $x \to +\infty$, mentre tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$.

Ne segue che il limite richiesto non esiste.

ANALISI MATEMATICA II (Sv) - 17 Febbraio 2000 - (2^a prova parziale) 1^h

- **Si considerino le funzioni**

$$f(x,y) = x^4 + y^2 \qquad , \qquad g(x,y) = y^2 + x^6 - 16$$

a) Determinare i punti di massimo o minimo relativo o assoluto per f.

f non ha massimo assoluto su $\mathbb{R}^2$ poiché non è superiormente limitata (ad esempio per $x = 0$ vale y^2).
Essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, annullando $\nabla f(x,y) = (4x^3, 2y)$, si ottiene il solo punto $(0,0)$ che è un punto di minimo assoluto, essendo

$$f(0,0) \;=\; 0 \;\leq\; x^4 + y^2 \;=\; f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; .$$

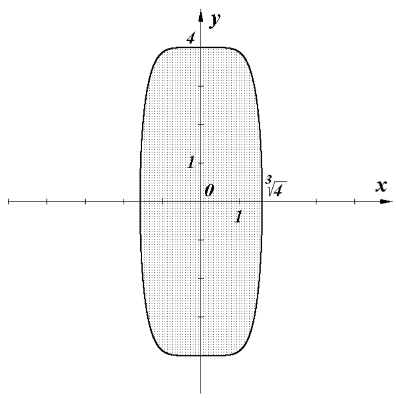
Si noti che l'utilizzo dell'Hessiano in (0,0) avrebbe condotto ad una matrice semidefinita positiva e non si sarebbe quindi potuto concludere.

b) Disegnare l'insieme $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; : \;\; g(x,y) \geq 0 \;\}$**.**

Da $y^2 + x^6 - 16 \leq 0$, ricavando y, si ha

$$-\sqrt{16 - x^6} \leq y \leq \sqrt{16 - x^6}$$

con $-\sqrt[3]{4} \leq x \leq \sqrt[3]{4}$ e l'insieme è la parte interna alle due curve.



c) Determinare i punti di minimo o massimo relativo o assoluto per f su

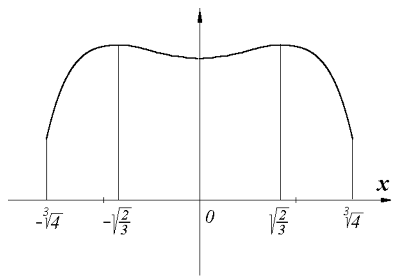
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; : \;\; g(x,y) = 0 \;\}$$

Ricavando $\quad y^2 = 16 - x^6 \quad$ da $g(x,y) = 0$ e sostituendo nella funzione f si ottiene la funzione

$$h(x) = x^4 + 16 - x^6$$

da considerare per $x \in [-\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}]$.

Dalla studio di tale funzione risulta che per $x = 0$ si ha un minimo relativo, per $x = \pm\sqrt[3]{4}$ si ha un minimo assoluto, e per $x = \pm\sqrt{2/3}$ si ha un massimo assoluto.
Pertanto si avrà:
in (0,$\pm$4) : minimo relativo
in $(\pm\sqrt[3]{4}, 0)$: minimo assoluto
in $(\pm\sqrt{2/3}, \pm\sqrt{424/27})$: massimo assoluto.



L'utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero le soluzioni del sistema $\nabla(f + \lambda g) = 0$:

$$\begin{cases} 4x^3 + 6\lambda x^5 = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ y^2 + x^6 - 16 = 0 \end{cases}$$

avrebbe ugualmente fornito i punti critici, con qualche difficoltà in più per stabilire la natura di minimo o massimo dei punti (0,±4); per gli altri è sufficiente notare che, per il teorema di Weierstrass, devono esistere punti di minimo e massimo, e quindi calcolando la funzione nei vari punti è facile determinare i minimi ed i massimi assoluti.

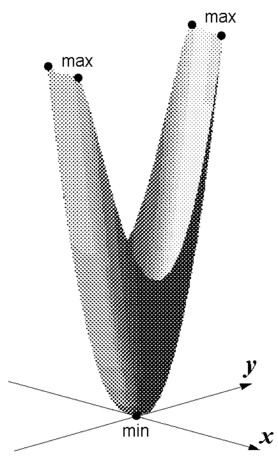
d) Determinare i punti di minimo o massimo relativo o assoluto per f su

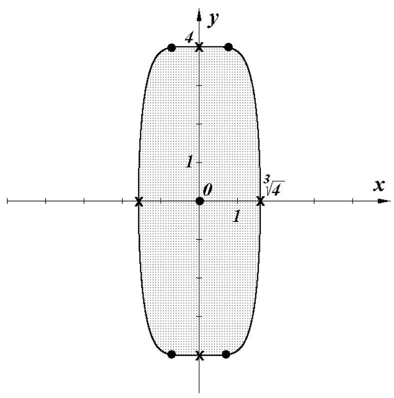
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) \leq 0 \ \}$$

I punti critici di f sulla frontiera sono già stati trovati al punto precedente, mentre all'interno vi è il solo punto (0,0), come visto alla prima domanda.

Ne segue che, sempre utilizzando il teorema di Weierstrass, (0,0) è necessariamente il punto di minimo assoluto, mentre i punti $(\pm\sqrt{2/3}, \pm\sqrt{424/27})$ sono di massimo assoluto.

Per quel che riguarda gli altri punti alla frontiera, (indicati con $\times$ sulla figura di destra) si vede subito con sezioni sugli assi che essi sono di massimo per tali restrizioni, mentre erano di minimo per la frontiera (e quindi non sono nulla).





ANALISI MATEMATICA II (Sv) - 2 Marzo 2000 - (3^a prova parziale) 1^h

- **Si consideri l'insieme**

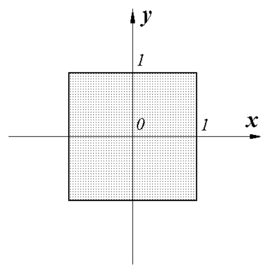
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - x^2 \ , \ z \le 1 - |y|\}$$

a) Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\}$

Se $(x,y,z) \in A$ deve essere

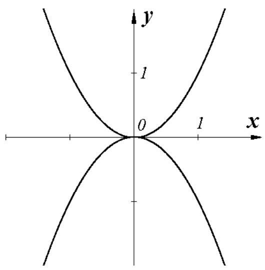
$0 \le 1 - x^2$ e $0 \le 1 - |y|$ ovvero

$-1 \le x \le 1$ e $-1 \le y \le 1$



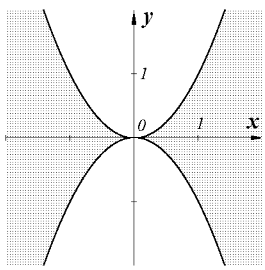
b) Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 = 1 - |y|\}$

Si ha $|y| = x^2$ ovvero $y = \pm x^2$.



c) Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \le 1 - |y|\}$

Si ha $|y| \le x^2$ ovvero $-x^2 \le y \le x^2$.



d) Calcolare il volume di A**.**

Per ragioni di simmetria il volume può essere calcolato solo per $x \ge 0$ ed $y \ge 0$, e poi moltiplicato per 4. Per quanto visto al punto precedente si ha

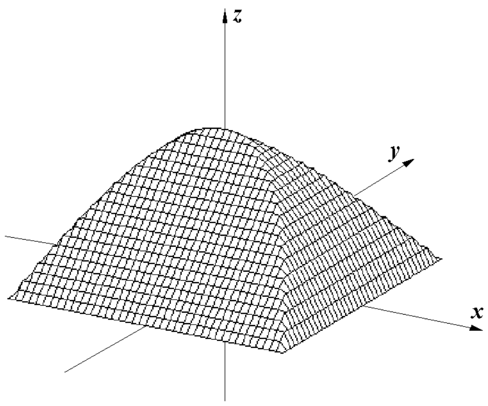
$$0 \le z \le 1 - x^2 \qquad \text{nella zona ombreggiata chiara}$$

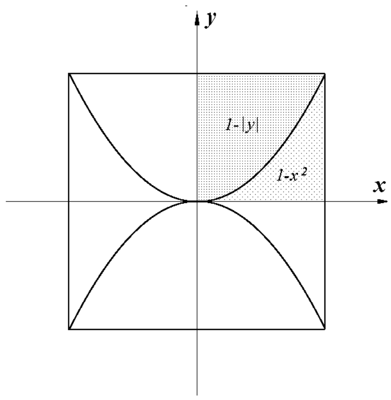
mentre

$$0 \le z \le 1 - |y| \qquad \text{nella zona ombreggiata scura}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\text{Vol } A \;&=\; 4\left[\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} 1 - x^2 \; dy\right) \; dx \;+\; \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 1 - y \; dy\right) \; dx\right] \;= \\ &= 4\left[\int_0^1 x^2 - x^4 \; dx \;+\; \int_0^1 \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \; dx\right] \;= ... = \frac{8}{5}\end{aligned}$$





Si noti che il volume può essere facilmente calcolato anche per sezioni, in quanto la sezione a quota z è un rettangolo di lati $2\sqrt{1-z}$ e $2(1-z)$ (da $z = 1 - x^2$ e $z = 1 - |y|$) ; integrando con z tra 0 e 1 l'area del rettangolo, si ha

$$\text{Vol } A \;=\; \int_0^1 4(1-z)^{3/2} dz \;=\; \frac{8}{5} \qquad .$$