1
Basics

1

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+1}{a_n} \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

itn A Stabilire se a_n è crescente o decrescente e giustificare brevemente l'affermazione.

itn B Stabilire se a_n ammette limite, in caso affermativo determinarlo ed in caso negativo provare che il limite non esiste.

itn C Determinare estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo di a_n.

$\sup a_n = \inf a_n = \max a_n = \min a_n =$

itn D Determinare una formula di ricorrenza per la successione $b_n = a_{2n}$

2

itn Disegnare l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x+1) + x \geq 0\}$

itn Disegnare l'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x+1) + x \geq 0, y \geq x\}$

itn Disegnare l'insieme $C_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ y \in [a, b],\ x \leq y\}$

itn Determinare tutti gli $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $C_{a,b} \subset B$

3

Si consideri $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3x+3}$

itn Disegnare l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, f(x) \geq f(y)\}$

itn Trovare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ $x, y \in [a, b],\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$

itn Trovare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ $x, y \in [a, b],\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

itn Disegnare il grafico di f

itn Determinare $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$

itn Disegnare il grafico di $g(x) = f(x-1)$

itn Determinare $D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq x\}$ e disegnare i grafici di x e $g(x)$ sullo stesso piano cartesiano precisandone le mutue posizioni.

itn Provare che la successione definita da $\begin{cases} a_n = g(a_{n-1}) \\ a_0 = 1 \end{cases}$ è decrescente, inferiormente limitata e trovarne il limite.

- L_{A1} a_n è inferiormente limitata infatti:
- L_{B1} a_n è decrescente infatti:
- L_{C1} $\lim a_n =$ infatti:

4

Si consideri la disequazione

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a$$

itn Determinare tutte le soluzioni della disequazione per $a = 2$.

itn Determinare α, β reali tali che

$$\frac{x+1}{x-1} = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$$

itn Disegnare il grafico di $\frac{x+1}{x-1}$

itn Risolvere la disequazione al variare di a nei reali.

itn Trovare gli a reali, se ne esistono, tali che

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

5

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{x^2+3a}{x^2+a} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

Dove $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

itn Determinare tutti i maggioranti di A.

itn Determinare tutti i minoranti di A.

itn Determinare $\sup A$.

itn Determinare $\inf A$.

itn Stabilire se A ammette massimo o ammette minimo ed in caso affermativo trovarli.

Si consideri l'insieme

$$B = \left\{ \frac{x}{y} \ : \ x, y \in \mathbb{R} \ , \ y \neq 0 \right\}$$

itn Determinare $\sup B$.
itn Determinare $\inf B$.

6

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n-1} \ : \ n \in \mathbb{N}, n > 1 \right\}$$

itn Determinare tutti i maggioranti di A.
itn Determinare tutti i minoranti di A.
itn Determinare $\sup A$.
itn Determinare $\inf A$.

7

Si consideri la disequazione

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a$$

itn Determinare tutte le soluzioni della disequazione per $a = 2$.
itn Determinare α, β reali tali che

$$\frac{x+1}{x-1} = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$$

itn Disegnare il grafico di $\frac{x+1}{x-1}$
itn Risolvere la disequazione al variare di a nei reali.
itn Trovare gli a reali, se ne esistono, tali che

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

8

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2 + x + 1} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A e $\sup A$
itn Determinare i minoranti di A e $\inf A$

itn Stabilire se esistono max A e min A e calcolarli
itn Provare che è vera la seguente affermazione

La funzione x^n è strettamente crescente su $(0, +\infty)$ per ogni $n \in N$

9

Si consideri la disequazione

$$f(x) = ||x-1|-1|$$

itn Disegnare il grafico di f
itn Determinare le soluzioni della disequazione $f(x) \leq 3$
itn Determinare le soluzioni della disequazione $f(x) \leq k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

10

Si consideri la disequazione

$$\sqrt{1-x^2} \leq 1 + ax$$

itn Determinare tutte le soluzioni della disequazione per $a = 1$.
itn Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e di $g(x) = 1 + ax$
itn Determinare le soluzioni della disequazione al variare di $a \in \mathbb{R}$
itn Determinare quante soluzioni ha l'equazione

$$\sqrt{1-x^2} = (1 + ax)$$

al variare di a

11

Si consideri

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

itn Applicare il principio di induzione per verificare che

$$\sigma_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

itn Applicare il principio di induzione per verificare che $2^n \geq n$
itn Trovare un numero naturale n_ϵ tale che

$$\frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$$

itn Verificare che

$$\sigma_n(\frac{1}{2}) \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

itn Verificare che
$$\sup \sigma_n(\frac{1}{2}) = 1$$

12

Si consideri la disequazione
$$\sqrt{1-x^2} \leq x^2$$

itn Determinare tutte le soluzioni della disequazione

itn Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e di $g(x) = x^2$ e risolvere la disequazione graficamente.

13

itn Applicare il principio di induzione per verificare che
$$\sum_{k=1}^{n} 6k = 3n^2 + 3n$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$

itn Applicare il principio di induzione per verificare che
$$2^n < n!$$
per ogni $n \geq 4$

14

Si consideri l'insieme
$$A = \left\{ \frac{x}{x^2 + a^2}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A

itn Calcolare $\sup A$

itn Stabilire se $\max A = \sup A$

itn Provare per induzione che
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$$

15

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A

itn Calcolare $\sup A$

itn Stabilire se $\max A = \sup A$

16

Si consideri la disequazione

$$2|x-2| \leq 3|x-3|$$

itn Risolvere la disequazione data graficamente
itn Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

Si consideri la disequazione

$$\frac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}} > 1$$

itn Determinare le soluzioni della disequazione data

17

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{x+3}{x-1}, \quad x > 1 \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A
itn Calcolare $\sup A$
itn Stabilire se $\max A = \sup A$
itn Determinare i minoranti di A
itn Calcolare $\inf A$
itn Stabilire se $\min A = \inf A$

18

Si consideri la disequazione

$$2|x-2| \geq 3|x-3|$$

itn Risolvere la disequazione data graficamente itn Provare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Si consideri la disequazione

$$\sqrt{x+|x^2-x|} > 1$$

itn Determinare le soluzioni della disequazione data

19

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3}{x-1}, \quad x > 1 \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A
itn Calcolare $\sup A$
itn Stabilire se $\max A = \sup A$
itn Determinare i minoranti di A
itn Calcolare $\inf A$
itn Stabilire se $\min A = \inf A$

20

itn Risolvere la disequazione

$$(x-1)(x^2+3x+6) \leq 0$$

itn Risolvere la disequazione

$$x^2+x+1 < 00$$

itn Risolvere la disequazione

$$(x-1)(x+1)(x^2-1) \leq 0$$

itn Disegnare nel piano cartesiano l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x-1 \leq y \leq x+1 \end{cases}$$

21

Si consideri

$$f(x) = 5x+6$$

itn Determinare i maggioranti ed minoranti di $f(x)$ al variare di $x \in R$

itn Determinare i maggioranti ed minoranti di $f(x)$ al variare di $x \in [2,5]$

itn Determinare

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

itn Determinare

$$\sup_{x \in [2,5]} f(x) \qquad \inf_{x \in [2,5]} f(x)$$

22

Definiamo

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{1} a_i = a_1 \\ \prod_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che

$$\prod_{i=1}^{n} e^i = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

itn La formula è vera per $n = 1$, infatti:

itn Se la formula è vera per n allora la formula è vera per $n+1$, infatti:

23

itn Risolvere la disequazione

$$(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0$$

itn Risolvere la disequazione

$$\frac{x}{x^2+x+1} < 0$$

itn Risolvere la disequazione

$$(x^6 - 1) \leq 0$$

itn Disegnare nel piano cartesiano l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 1 \\ |x| \leq 4 \end{cases}$$

24

Si consideri

$$f(x) = 7 - x^2$$

itn Determinare i maggioranti ed minoranti di $f(x)$ al variare di $x \in R$

itn Determinare i maggioranti ed minoranti di $f(x)$ al variare di $x \in [2,5]$

itn Determinare

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

itn Determinare

$$\sup_{x \in [2,5]} f(x) \qquad \inf_{x \in [2,5]} f(x)$$

25

Dimostrare per induzione che

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(i) = \ln(n!)$$

itn La formula è vera per $n = 1$, infatti:

itn Se la formula è vera per n allora la formula è vera per $n + 1$, infatti:

26

Risolvere le seguenti disequazioni

itn

$$2|1 - t| \leq |t|$$

itn

$$\frac{(x-4)(x^2+3x-1)}{x-6} \leq 0$$

itn

$$\frac{x-1}{x} \geq \frac{x+1}{x}$$

itn

$$ax^2 + 3x + a \leq 0$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$

itn

$$\sqrt{1-t} \leq 4 - t^2$$

27

Risolvere le seguenti disequazioni

itn

$$\sqrt{1-t} \leq \sqrt{4-t^2}$$

itn

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x-6)(x+1)} \leq 0$$

itn

$$x^2 + 2x + a \leq 0$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$

28

Sia a_n la quantità definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = K + a_n \end{cases}$$

itn Provare per induzione che

$$a_n = nK$$

29

Si consideri la funzione f e la successione a_n definite da

$$f(x) = \frac{|x|}{3} \qquad , \qquad \begin{cases} a_n = f(a_{n-1}) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

itn Studiare graficamente il comportamento della successione per $\alpha = 3$

includegraphics[height=8cm] 2204.png

itn Giustificare le conclusioni del punto precedente

itn Studiare graficamente il comportamento della successione al variare di α e riassumere brevemente i risultati ottenuti

includegraphics[height=8cm] 2204.png

30

itn Dimostrare per induzione che

$$(1+A)^n \geq 1 + nA \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

itn Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

itn Risolvere la disequazione

$$\sqrt{1 - x^2} \geq x$$

31

itn Supponendo che il numero di ciliege esistenti sia finito e che esista una persona che ha mangiato una ciliegia, dimostrare che non è vero che una ciliegia tira l'altra

itn Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della parte frazionaria di x al variare di $x \in \mathbb{R}$

itn Stabilire se la parte frazionaria di x ammette massimo o minimo su $x \in \mathbb{R}$

32

itn Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di

$$A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x = 1/y \, , \, y \in [2, 3)\}$$

itn Stabilire se l'insieme A ammette massimo o minimo.

itn Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è n^2

33

itn Determinare $m \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\frac{1}{(x+1)^2 + 1} \leq m \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

itn Determinare $m \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\frac{1}{(x+1)^2 + 1} \geq m \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

itn Determinare $m \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\frac{1}{(x+1)^2 + 1} \leq m \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

34

itn Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$(x-a)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

itn Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$\sin(x)=\frac{1}{2}$$

itn Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$x^2-5x+6=0$$

itn Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$x^2=4$$

itn Calcolare $\sqrt{4}$
itn Determinare tutti gli x reali tali che

$$x^2>4$$

itn Determinare tutti gli x reali tali che

$$x^2<4$$

itn Disegnare il luogo dei punti del piano tali che

$$y=3x+3$$

itn Disegnare il luogo dei punti del piano tali che

$$x^2+y^2=3$$

itn Disegnare il luogo dei punti del piano tali che

$$xy=1$$

35

itn Determinare tutte gli $x\in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a-1}{1-2a}\leq x$$

per ogni $a\in\mathbb{R}, a\leq 0$
itn Determinare tutte gli $x\in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a-1}{1-2a}\geq x$$

per ogni $a\in\mathbb{R}, a\leq 0$
itn Determinare tutte gli $x\in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a-1}{1-2a} \leq x$$

per ogni $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$

itn Determinare tutte gli $a \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a-1}{1-2a} \geq x$$

per ogni $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$

36

itn Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sqrt{\frac{x-3}{x-2}} \geq \sqrt{x+4}$$

itn Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$-\sqrt{\frac{x-3}{x-2}} \geq \sqrt{x+4}$$

37

Sia a_n definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = na_{(n-1)} \end{cases}$$

itn Dimostrare che $a_n = n!$

itn Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \log(k) = \log(n!)$$

38

itn Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$(x^2-1)(x^2+x+1) = 0$$

itn Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$(x^2+1)(x^2+x+1) = 0$$

itn Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$\tan(2x) = 1$$

itn Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$x^3 = 1$$

itn Calcolare $\sqrt{a^4}$
itn Determinare tutti gli x reali tali che

$$x^4 > 1$$

itn Determinare tutti gli x reali tali che

$$x^4 < 16$$

itn Disegnare il luogo dei punti del piano tali che

$$y = -2x + 3$$

itn Disegnare il luogo dei punti del piano tali che

$$x^2 + y^2 = 3$$

itn Disegnare il luogo dei punti del piano tali che

$$y = \frac{x-5}{2x-4}$$

39

itn Determinare i maggioranti e l'estremo superiore di

$$A = \left\{ \frac{1}{4+2a^2} \;:\; a \in [-2, 4) \right\}$$

itn Determinare i minoranti e l'estremo inferiore di

$$A = \left\{ \frac{1}{4+2a^2} \;:\; a \in [-2, 4) \right\}$$

itn Dimostrare che

$$(2n)! \geq 2n!$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$

40

Le risposte devono essere giustificate brevemente ma esaurientemente.

Si consideri la funzione $y : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definita dalle condizioni $y(0) = a$ e $y(n+1) = y(n) + 2$. Dimostrare che y assume valori solo pari o solo dispari a seconda che a sia pari o dispari..

Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{(4n+1)^2}, n \in \mathbb{N}\}$

Determinare maggioranti, minoranti, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di A

41

Siano $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x > 0\}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; si consideri la seguente affermazione:

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$, $\exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+$ **tale che se** $|x' - x''| \leq \delta_\epsilon$ **si ha** $|f(x') - f(x'')| \leq \epsilon \; \forall x', x'' \in \mathbb{R}$

itn Scrivere la negazione dell'affermazione considerata.

itn Verificare che l'affermazione considerata è vera se $f(x) = 3x$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

itn Verificare che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$$

itn Determinare

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \Big(f(x) + \sin(x) \Big)$$

itn Stabilire se è vero che

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty$$

42

Sia

$$A = \left\{ 2 + \frac{3}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A .

itn Determinare i minoranti di A.

itn Determinare, se esistono $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.

Sia a_n definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 + a_n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

itn Dimostrare che

$$a_n = 2n + 1$$

43

$$A = \{1 + e^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

itn Determinare i maggioranti di A ed il suo estremo superiore.

itn Determinare i minoranti di A ed il suo estremo inferiore.

itn Determinare, se esiste il massimo di A.

itn Determinare, se esiste il minimo di A.

44

Sia
$$A = \left\{ \frac{1}{(x^2+x+1)^4}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A .
itn Determinare i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.
Sia a_n definita da
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

itn Dimostrare che
$$a_n = 3(2^n)$$

45

Sia
$$A = \left\{ \sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}, \ x > 0 \right\}$$

itn Determinare i maggioranti di A .
itn [2] Determinare i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.
Sia a_n definita da
$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 \\ a_0 = 1/2 \end{cases}$$

itn Dimostrare che
$$a_n = \frac{1}{2^{2^n}}$$

itn Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) = e^{(\sqrt{|2-|x||-1})}$$

includegraphics[height=8cm] g75.jpg
itn Determinare l'inversa di f ristretta a $[-1, 0]$

46

itn Siano A, B, C tre proposizioni determinare la negazione della proposizione $((A \text{ and } B) \Rightarrow C)$

itn [1] Determinare maggioranti e minoranti dell'insieme $A = \{E(1/x)\,,\ x \in [1/5, +\infty)\}$

itn Determinare maggioranti e minoranti dell'insieme $A = \{E(1/x)\,,\ x \in (0,1)\}$

itn [1] Determinare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $A = \{\arctan(\ln(x))\ ,\ \ x \in (0, +\infty)\}$

itn [1] Determinare massimo e minimo dell'insieme $A = \{\arctan(\ln(x))\ ,\ \ x \in (0, +\infty)\}$

itn Dimostrare che n è pari se e solo se n^3 è pari

47

Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \quad n \in \mathbb{N}, 1 \le n < 5 \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

itn Determinare i maggioranti e i minoranti di A.

itn Determinare, se esistono $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.

itn Determinare i maggioranti e i minoranti di B.

itn Determinare, se esistono $\sup B$, $\inf B$, $\max B$, $\min B$.

Sia a_n definita da

$$\begin{cases} a_{2n} = 2n a_{2(n-1)} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

itn Dimostrare che

$$a_{2n} = 2^n n!$$

itn Dimostrare che[1] $\prod_{k=1}^{1} 2k = 2$

[1] †

$\prod_{k=1}^{n} 2k = 2n \prod_{k=1}^{n-1} 2k$

$$a_{2n} = \prod_{k=1}^{n} 2k$$

itn Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -\sqrt{\log_{0.5}(||x|-1|)}$$

includegraphics[height=8cm] g75.jpg

itn Determinare l'inversa di f ristretta a $[-1, 0]$

Siano $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 10] \to \mathbb{R}$ tali che

- - f è surgettiva su$[0, 4]$
- - f è crescente in $[0, 1]$ e decrescente in $[1, 3]$
- - $f(0) = 1$
- - g è crescente in $[0, 10]$
- - g è surgettiva su $[1, 2) \cup [3, 5]$
- - $g(7) = 3$

itn -[6] Disegnare il grafico di f e di g
itn -[6] Disegnare il grafico di $g(f(\cdot))$

48

Sia
$$A = \left\{\frac{1}{2n+4}, \quad n \in \mathbb{N}, 10 \leq n < 25\right\}$$
itn Determinare i maggioranti e i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono, $\sup A$, $\inf A$,
itn Determinare, se esistono, $\max A$, $\min A$.
Sia
$$A = \left\{\frac{1}{2n+4}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$$
itn Determinare i maggioranti e i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono, $\sup A$, $\inf A$,
itn Determinare, se esistono, $\max A$, $\min A$.
Sia a_n definita da
$$a_n = \prod_{k=1}^{n} 2k$$
cioè a_n sia il prodotto dei numeri pari inferiori od uguali ad $2n$
itn Dimostrare che
$$a_{2n} = 2^n n!$$
itn Verificare che
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
itn Verificare che
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
itn [7] Calcolare
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{k} k\right)$$

49

Sia
$$A = \left\{\frac{1}{(x-1)(x-2)}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq 2\right\}$$
itn Determinare i maggioranti e i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono, $\sup A$, $\inf A$,
itn Determinare, se esistono, $\max A$, $\min A$.
Sia
$$A = \left\{\frac{n}{n+4}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$$

itn Determinare i maggioranti e i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono, sup A, inf A,
itn Determinare, se esistono, max A, min A.
Sia $a_n = (2n)!!$ definita da

$$\begin{cases} 0!! = 1 \\ (2n)!! = 2n(2(n-1))!! \end{cases}$$

itn Illustrare il significato di $(2n)!!$
itn Stabilire se è vero che

$$(2n)! = 2^n n!$$

itn Stabilire se è vero che

$$(2n)!! = 2^n n!$$

itn [4] Stabilire se è vero che

$$(2n)!! = (2n)!$$

50

Sia

$$A = \left\{ n^2 + 5n \quad n \in \mathbb{Z}, \right\}$$

itn Determinare i maggioranti e i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono, sup A, inf A,
itn Determinare, se esistono, max A, min A.
l
Sia

$$A = \left\{ n^2 + 5n \quad n \in \mathbb{Z}, |n| > 10 \right\}$$

itn Determinare i maggioranti e i minoranti di A.
itn Determinare, se esistono, sup A, inf A,
itn Determinare, se esistono, max A, min A.
l
itn Calcolare, giustificando la risposta,

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$
itn Verificare che, giustificando la risposta,

$$\sum_{k=n}^{m} k = \frac{(m-n+1)(m+n)}{2}$$

è vera per ogni $m.n \in \mathbb{N}$

l
itn -[10]
Siano $f_2 = f_1 = 1$ e

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad \forall n \geq 2$$

Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

51

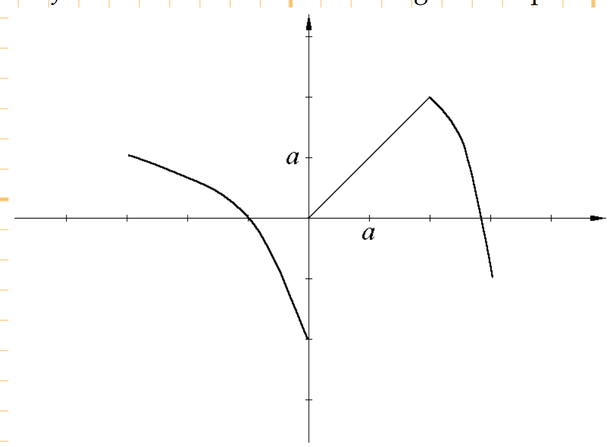
Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+9} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

itn Determinare $\sup A$ e $\inf A$.
itn Determinare $\max A$ e $\min A$.
Dimostrare, usando il principio di induzione, che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3k = \frac{(5+n)n(n+1)}{3}$$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico è quello in figura:



itn Disegnare il grafico di $f_1(x) = |f(x)|$
itn Disegnare il grafico di $f_2(x) = f(|x|)$
itn Disegnare il grafico di $f_3(x) = f(x+a)$
itn Disegnare il grafico di $f_4(x) = f(x) + a$

52

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{x}{x^2+x+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

itn Determinare i maggioranti di A itn Determinare $\sup A$ itn Determinare i minoranti di A itn Determinare $\inf A$ itn Stabilire se A ammette massimo o minimo e calcolarlo

itn Dimostrare, usando il principio di induzione, che

$$3(n)! > 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

53

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{x+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \, , \, x \geq 1 \right\}.$$

itn Determinare i maggioranti di A
itn Determinare $\sup A$
itn Determinare i minoranti di A
itn Determinare $\inf A$
itn Stabilire se A ammette massimo o minimo e calcolarlo
itn Dimostrare, usando il principio di induzione, che

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - 2^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

54

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

itn Determinare maggioranti e minoranti di A.
itn Determinare estremo superiore ed inferiore di A
itn Determinare massimi e minimi di A, nel caso che esistano.
itn Si consideri il seguente teorema e la sua dimostrazione.

Teorema *La somma di un qualunque numero k di interi $n_1, n_2, \ldots, n_k$ al quadrato è un quadrato. In altre parole*

$$\sum_{j=1}^{k} n_j^2 = m^2 \text{ con } m \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione *Per $n = 1$ si ha che n_1^2 è un quadrato*
Supponiamo il teorema vero per k e verifichiamo che è vero per $k+1$.
Consideriamo

$$\sum_{j=1}^{k+1} n_j^2 = n_1^2 + \sum_{j=2}^{k+1} n_j^2$$

Per l'ipotesi induttiva,

$$\sum_{j=2}^{k+1} n_j^2 = m_1^2 \text{ con } m_1 \in \mathbb{N}$$

quindi

$$n_1^2 + m_1^2 = m_2^2 \text{ con } m_2 \in \mathbb{N}$$

e si conclude.

Si chiede
Il teorema è vero?
La dimostrazione è corretta?
Nel caso la dimostrazione non sia corretta, perchè non è corretta?

55

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2}} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

itn Determinare maggioranti e minoranti di A.
itn Determinare estremo superiore ed inferiore di A
itn Determinare massimi e minimi di A, nel caso che esistano.

itn Dimostrare per induzione che

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k^2$$

56