1

Studio di Funzioni

1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & x > 1 \end{cases}$$

1·1 Stabilire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ f è continua in $x = 1$

1·2 Stabilire per tali valori dove f è continua

1·3 Stabilire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ f è derivabile in $x = 1$

1·4 Stabilire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ e su quali sottoinsiemi f ammette primitiva

1·5 Determinare tutte le primitive di f

2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(|x^2 - 1| + 1)$$

2·1 Disegnare il grafico di f precisando il suo campo di definizione

2·2 Determinare l'insieme in cui f è continua

2·3 Determinare l'insieme in cui f è derivabile

2·4 Determinare una restrizione di f che sia invertibile e trovarne l'inversa, precisando se è possibile invertire f su tutto $\mathbb{R}$ e perchè.

2·5 Determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to -1$

3

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

3·1 Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$

3·2 Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\}$

3·3 Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = -1\}$

3·4 Calcolare $\nabla f(x,y)$

3·5 Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di f su $\mathbb{R}^2$

4

Si consideri

$$f(x,y) = x^2 + \frac{2}{y^2}$$

4·1 Determinare il campo di definizione di f.

4·2 Stabilire per quali valori dell'argomento f è derivabile.

4·3 Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

4·4 Disegnare le curve di livello di f

4·5 Calcolare

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x \le 2 \ , \ 2 \le y \le 3\}$$

5

Si consideri

$$f(x,y) = x^2 + 3x + 2xy$$

5·1 Determinare il campo di definizione di f e disegnarne le curve di livello.

5·2 Stabilire per quali valori dell'argomento f è derivabile parzialmente.

5·3 Calcolare
$$\nabla f(x,y)$$

5·4 Calcolare
$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

5·5 Calcolare massimi e minimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2 \ , \ 0 \le y \le 3 \ , \ y \le x+1\}$$

6

Si consideri

$$f(x,y) = x + y + x^2$$

6·1 Determinare il campo di definizione di f.

6·2 Disegnarne le curve di livello.

6·3 Calcolare
$$\nabla f(x,y)$$
e determinare tutti i punti in cui il gradiente si annulla precisando se sono di massimo o di minimo relativo.

6·4 Calcolare massimi e minimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \ , \ y \le x^2\}$$

6·5 Calcolare
$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

7

Si consideri

$$f(x) = e^{E(\ln x)}$$

7·1 Disegnare il grafico di f.

7·2 Dimostrare che

$$\frac{x}{e} \leq f(x) < x$$

7·3 Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

7·4 Stabilire se f è integrabile su $[1/10, 1]$ su $[1, +\infty)$ e su $[1/10, +\infty)$

8

Si considerino tutti i rettangoli, i cui lati saranno indicati con x e y, soddisfacenti le seguenti condizioni:

- -a) la differenza tra i due lati è superiore o uguale a 1
- -b) il lato maggiore è minore o uguale a 3 ed il lato minore è compreso tra 1 e 2

8·1 Esprimere area, perimetro e diagonale di un generico rettangolo soddisfacente le condizioni sopra scritte, in funzione di x e di y.

8·2 Trovare, nel piano x, y i punti che corrispondono a rettangoli aventi la stessa area.

8·3 Trovare, nel piano x, y i punti che corrispondono a rettangoli aventi lo stesso perimetro.

8·4 Trovare, nel piano x, y i punti che corrispondono a rettangoli aventi la stessa diagonale.

8·5 Trovare tra tutti i rettangoli considerati, quello di area, perimetro, diagonale massima e minima.

9

Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y) \qquad (x,y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$$

9·1 Indicare nel piano (x, y) le zone in cui f è positiva e quelle in cui f è negativa.

9·2 Disegnare la curva di livello di altezza $1/2$

9·3 Determinare massimi e minimi assoluti di f

9·4 Stabilire per quali valori di α l'equazione $f(x, y) = \alpha$ ammette soluzioni

9·5 Calcolare

$$\int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} f(x, y)dxdy$$

10

Si consideri la funzione definita da

$$f_k(x) = (x^3 - k^2x)e^{-x^2}$$

10·1 Determinare campo di definizione e calcolare i limiti agli estremi del campo di f_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$

10·2 Calcolare $f_k'(0)$, $f_k'(k)$ e $\lim_{x\to+\infty} f_k'(x)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$

10·3 Tenendo conto che f_k' è pari stabilire che f_k' ammette uno zero in $(0, k)$ ed uno zero in $(k, +\infty)$.

10·4 Disegnare il grafico di f_k

10·5 Disegnare il grafico di $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

11

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\sum_{k=0}^{E(x)} k$$

ove con $E(\cdot)$ si è indicate la parte intera ed $\alpha \in \mathbb{R}_+$. **11·1** Determinare il campo di definizione di f e calcolare $f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

11·2 Verificare che se $n \leq x < n + 1$ si ha

$$f(x) \leq \frac{1}{n^\alpha}\frac{n(n+1)}{2}$$

11·3 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}_+$ f è decrescente su $\mathbb{R}_+$

11·4 Disegnare il grafico di f su $[1,4]$

11·5 Per $\alpha = 3$ disegnare il grafico di f su $\mathbb{R}_+$ e calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

12

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^x + 2y^2 x$$

12·1 Determinare l'insieme in cui f è definita, è derivabile, è differenziabile e il rango di f

12·2 Disegnare le curve di livello di f

12·3 Calcolare $g'(t)$ dove $g(t) = f(x(t), y(t))$ e $x, y \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$

12·4 Calcolare

$$\int\int_{[1,2]\times[2,3]} f(x,y)dxdy$$

12·5 Calcolare massimi e minimi assoluti di f su $[1,2] \times [2,3]$

13

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2 + x}$$

13·1 Stabilire dove f è definita, continua, derivabile.

13·2 Determinare il comportamento ai limiti del campo di definizione

13·3 Disegnare il grafico di f

13·4 Determinare un funzione razionale che approssimi f a meno di un infinitesimo di ordine superiore al primo in un intorno di $x_0 = 0$.

13·5 Scrivere la retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$

14

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^y$$

14·1 Determinare il campo di definizione di f

14·2 Stabilire dove f è differenziabile

14·3 Calcolare $\nabla f(x, y)$ e $f'((x, y), (a, b))$

14·4 Determinare massimi e minimi di f sul triangolo di vertici $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 0)$

14·5 Determinare il piano tangente al grafico di $z = f(x, y)$ in $(1, 1)$

15

Si consideri la funzione

$$f(x) = (\sin(x) - 1)^2 + 4$$

15·1 Determinare una funzione g in modo che $f(x) = g(\sin x)$

15·2 Studiare crescenza e decrescenza di g, successivamente disegnarne il grafico e dedurne crescenza e decrescenza di f.

15·3 Disegnare il grafico di f

15·4 Disegnare con cura il grafico di f su $[0, 5]$ Determinando maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di f su $[0, 5]$

15·5 Verificare che f è strettamente crescente in $[\pi/2, \pi]$ e calcolare l'inversa di f ristretta a tale intervallo

Si consideri la successione

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \qquad a_0 = k^2$$

15·6 Provare che a_n è decrescente

15·7 Provare che a_n ammette limite finito e calcolarlo

15·8 Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - \sqrt{x}}{4e^{\sqrt{x}} - 1}$$

15·9 Determinare l'ordine di infinitesimo in 0^+ di $\sin(x^2) - x$

15·10 Stabilire per quali valori di α la funzione
$$\frac{\sin(x^2) - \sqrt{x}}{4(e^{\sqrt{x}} - 1)^{\alpha}}$$
è prolungabile per continuità in 0

16

Si consideri la funzione
$$f(x) = (\sin(x) - 1)^2 + 4$$

16·1 Determinare una funzione g in modo che $f(x) = g(\sin x)$

16·2 Studiare crescenza e decrescenza di g, successivamente disegnarne il grafico e dedurne crescenza e decrescenza di f.

16·3 Disegnare il grafico di f

16·4 Disegnare con cura il grafico di f su $[0,5]$ Determinando maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di f su $[0,5]$

16·5 Verificare che f è strettamente crescente in $[\pi/2, \pi]$ e calcolare l'inversa di f ristretta a tale intervallo

Si consideri la successione
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \qquad a_0 = k^2$$

16·6 Provare che a_n è decrescente

16·7 Provare che a_n ammette limite finito e calcolarlo

16·8 Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - \sqrt{x}}{4e^{\sqrt{x}} - 1}$$

16·9 Determinare l'ordine di infinitesimo in 0^+ di $\sin(x^2) - x$

16·10 Stabilire per quali valori di α la funzione

$$\frac{\sin(x^2) - \sqrt{x}}{4(e^{\sqrt{x}} - 1)^\alpha}$$

è prolungabile per continuità in 0

17

17·1 Disegnare il grafico di una funzione derivabile con derivata continua su $\mathbb{R}$ tale che il coefficiente angolare della retta tangente al suo grafico in un punto è uguale al valore della funzione nello stesso punto aumentato di 1.

17·2 Studiare l'unicità della soluzione del problema precedente.

17·3 Determinare, se è possibile una soluzione del problema dato il cui grafico passi per il punto $(0,1)$

17·4 Detta f la soluzione del problema di cui al punto precedente, calcolare $f'(0)$

18

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

18·1 Studiare la funzione $g(x) = f(x) - x$, disegnandone un grafico approssimativo.

18·2 Studiare crescenza e decrescenza di f, giustificando brevemente i risultati senza far uso di derivate.

(Si possono utilizzare i risultati ottenuti nel punto precedente)

18·3 Disegnare il grafico di f

18·4 Stabilire se f è invertibile su $[0, +\infty)$ e determinare in caso affermativo la sua inversa disegnandone inoltre il grafico.

18·5 Verificare usando la definizione che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Si consideri per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \frac{n^2}{n!}$$

18·6 Determinare

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) > f(n+1)\}$$

18·7 Determinare estremo superiore e massimo di

$$\frac{n^2}{n!}$$

Siano

$$\alpha = 2^{10} \qquad \beta = 10^{10} \qquad f(x) = x^\alpha + 1 \qquad g(x) = \log_\beta x$$

18·8 Disegnare il grafico di f e di g

18·9 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$

18·10 Disegnare il grafico di $g(f(\cdot))$

19

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & x \geq 0 \\ ax + b & x < 0 \end{cases}$$

19·1 Disegnare il grafico di f al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

19·2 Determinare a, b in modo che f sia derivabile in $\mathbb{R}$

19·3 Per i valori di a, b per cui f è continua, determinare il più grande valore di c in modo che f sia invertibile in $(-\infty, c]$

Siano

$$g(x) = e^x \qquad h(x) = \ln x$$

19·4 Per i valori di a, b per cui f è continua, disegnare il grafico di

$$f(g(x)) \qquad f(h(x))$$

19·5 Per i valori di a, b per cui f è continua, disegnare il grafico di

$$g(f(x)) \qquad h(f(x))$$

20

Si consideri il luogo Γ dei punti del piano tali che

$$x^3 + xy + y^3 = 0$$

20·1 Determinare, al variare di m il numero ,delle intersezioni di Γ con la retta $y = mx$

20·2 Esprimere, in funzione di m, l'ascissa dei punti di intersezione di Γ con la retta $y = mx$

20·3 Esprimere, in funzione di m, l'ordinata dei punti di intersezione di Γ con la retta $y = mx$

20·4 Disegnare il grafico delle funzioni trovate nei punti precedenti.

21

Si consideri la funzione

$$f(x) = |x^2 - |x||e^{|x^2 - |x||}$$

21·1 Studiare definizione continuitá e derivabilitá di f.

21·2 Disegnare il grafico di f

21·3 Stabilire se f è invertibile su $\mathbb{R}$, giustificando le affermazioni.

21·4 Determinare, se possibile, l'inversa di f su $[1, +\infty)$

21·5 Calcolare, se esiste $(f^{-1})'(2e^2)$

22

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3} \qquad g : [-4, 4] \to [-1, 1]$$

dove g si suppone strettamente crescente e surgettiva

22·1 Disegnare il grafico di f ed il grafico di una possibile g.

22·2 Disegnare il grafico di $f(g(x))$.

22·3 Disegnare il grafico di $g(f(x))$

22·4 Disegnare il grafico di $(f(x))^2$

22·5 Disegnare il grafico di $f(x^2)$

22·6 Calcolare l'inversa di f precisando dove f è invertibile.

22·7 Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} a = na$$

23

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cos(x) - x^2}{x^a} & x > 0 \\ \dfrac{e^x - b}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

23·1 Al variare di a, calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

e stabilire se f è prolungabile per continuità in $x = 0$ da destra

23·2 Al variare di b, calcolare

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

e stabilire se f è prolungabile per continuità in $x = 0$ da sinistra

23·3 Al variare di a, b, stabilire se f è prolungabile per continuità in $x = 0$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

23·4 Disegnare il grafico di f

Si consideri poi la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

23·5 Determinare al variare di a gli eventuali limiti della successione a_n (Non è necessario giustificare con calcoli le affermazioni, ma si richiede un risultato corretto supportato da considerazioni sul grafico di f)

24

24·1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(|x|) + \frac{1}{x}$ determinando il punto x_m ed il valore $f(x_m)$ di minimo relativo. Provare inoltre che f ammette un solo zero x_0 e studiare il segno di f

24·2 Disegnare il grafico di $g(x) = e^x \ln(|x|)$ precisando il segno di $g(x_0)$

24·3 Disegnare nello stesso piano i grafici di $\ln(x)$ e di $\frac{x-1}{e-1}$ e giustificare il fatto che $\ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1} \quad \forall x \in [-2, -1]$ (interpretare adeguatamente le unità di misura)

24·4 Provare che $x_0 \in [-2, -1]$ (x_0 è lo zero di f)

24·5 Studiare usando la derivata seconda, la convessità di g (Riportare nel riquadro i grafici che si ritengono utili).

25

25·1 Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$ tale che

$$f'(x) = \sin(f(x)) \qquad f(0) = \frac{\pi}{2}$$

OPPURE

25·2 (2) Sia $f(x) = 2\arctan(e^x)$

25·3

- (1) **PER IL CASO (1)** Derivare entrambi i membri della (1) e ricavare f'' in funzione di f ed f' ed f''' in funzione di f f' ed f''
- (2)**PER IL CASO (2)** Calcolare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

25·4 Calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ e scrivere il polinomio di Taylor P_2 ed il polinomio di Taylor P_3 di f centrato in 0 di grado 2 e 3, rispettivamente.

25·5 Disegnare il grafico di P_2 e di P_3 per $|x| \leq 1$

25·6 **SCONSIGLIATA PER IL CASO (2)** Provare che $|f'(x)| \leq 1$ $|f''(x)| \leq 1$ $|f'''(x)| \leq 2$

25·7 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$ stimare il resto di Lagrange relativo al polinomio di Taylor di grado 2 in funzione di x

25·8 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, disegnare un maggiorante ed un minorante di f per $|x| \leq 1$

25·9 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, determinare un maggiorante dell'errore commesso sostituendo f con P_2 per $|x| \leq 1/2$.

25·10 Trovare, se possibile, a in modo che $f(x) - ax - \frac{\pi}{2}$ sia infinitesima in 0 di ordine superiore al secondo.

26

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente decrescente, convessa e continua su $[-1, 1)$, periodica di periodo 2, tale che $f(-1) = 0$

26·1 Disegnare il grafico di f.

26·2 Stabilire se f deve essere o può essere continua in $\mathbb{R}$.

26·3 Stabilire se f è invertibile su $[-1, 3]$.

26·4 Stabilire se f è invertibile su $[2, 3]$.

26·5 Stabilire se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

27

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - b - \cos(x)}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

27·1 Determinare a, b, c, in modo che f sia prolungabile per continuità in 0

27·2 Determinare a, b, c, in modo che f sia derivabile in 0

27·3 Calcolare $f'(x)$

27·4 Scrivere, se esiste, la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(0, c)$

28

Si consideri la funzione $f(x) = \arctan(x) + \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$

28·1 Disegnare il grafico della funzione f

28·2 Stabilire se f è invertibile in $\mathbb{R}_+$, ed i caso affermativo disegnare il grafico dell'inversa

28·3 Scrivere la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(1, \pi/4)$

28·4 Calcolare $(f^{-1})'(\frac{\pi}{4})$

29

Sia $f(x) = x + x^2 + 2x^3 + (2\sin(x^5))^2$

29·1 Scrivere il polinomio di Taylor di f centrato in $x = 0$ di grado 2

29·2 Calcolare $f'(0)$ $f''(0)$, $f^{(7)}(0)$, $f^{(10)}(0)$

29·3 Calcolare $f(0.1)$ a meno di .0001

30

31

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}}$$

31·1 Calcolare per $a > 1$, $b > 0$, $c > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

31·2 Calcolare per $a = 1$, $b > 0$, $c > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

31·3 Calcolare per $b > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$$

31·4 Calcolare per $a > 1$, $b = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$$

32

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^{63} - (x+b)^{63}}{x^c \arctan x^{63}}$$

32·1 Calcolare per $a > 1$, $b > 0$, $c > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

32·2 Calcolare per $a = 1$, $b > 0$, $c > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

32·3 Calcolare per $b > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$$

32·4 Calcolare per $a > 1$, $b = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$$

33

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x^2 + 1)\arctan(x) - 2x$$

33·1 Calcolare f' ed f''

33·2 Disegnare il grafico di f'

33·3 Disegnare il grafico di f

33·4 Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 0$

33·5 Scrivere il resto di Peano ed il resto di Lagrange relativi al polinomio di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 0$

34

34·1 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 + 1 - e^x}{x^3} =$$

34·2 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 + 1 - e^x}{x^\alpha} =$$

35

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 e^x + kx \qquad k \in \mathbb{R}$$

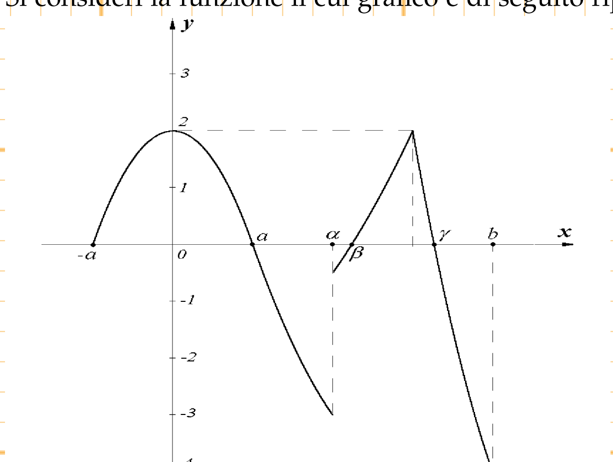
35·1 Disegnare il grafico di f'

35·2 Disegnare il grafico di f

35·3 per $k = 0$ Scrivere il polinomio di McLaurin di ordine 10 di f

36

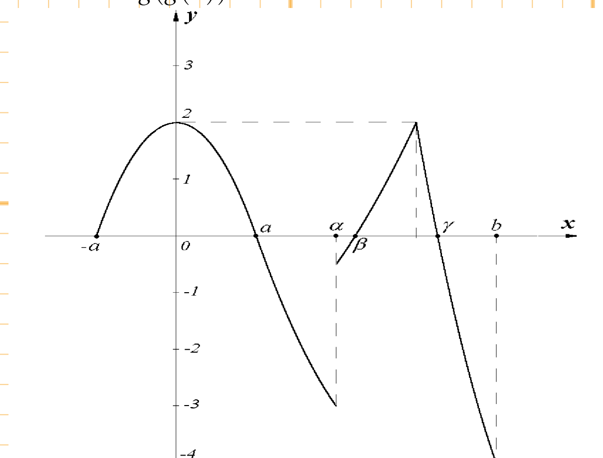
Si consideri la funzione il cui grafico è di seguito riportato



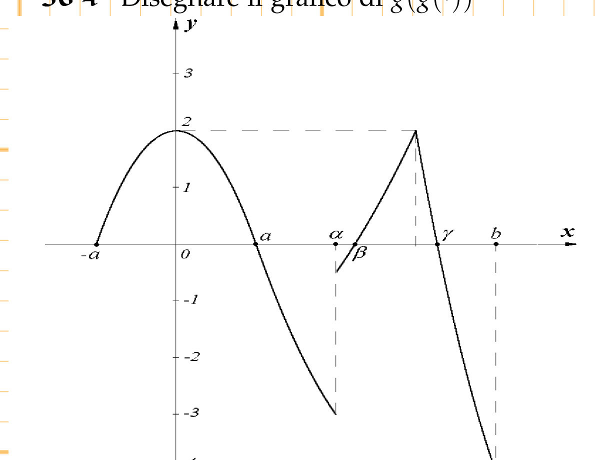
36·1 Disegnare il grafico di $f(|x|)$ e di $|f(x)|$

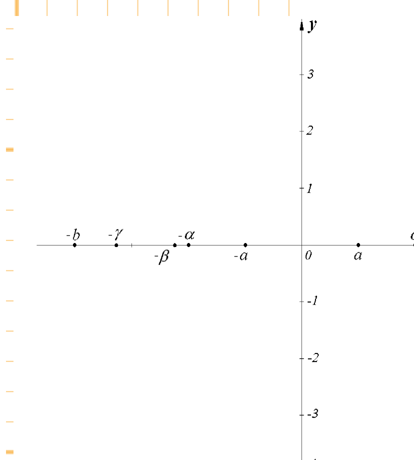
36·2 Disegnare il grafico di $f(x-\alpha)$ e di $f(x)-\alpha$
Sia $a = 1$ ed $\alpha = 2$ e sia $g(x) = f(x)$ per $x \in [-a, \alpha]$;

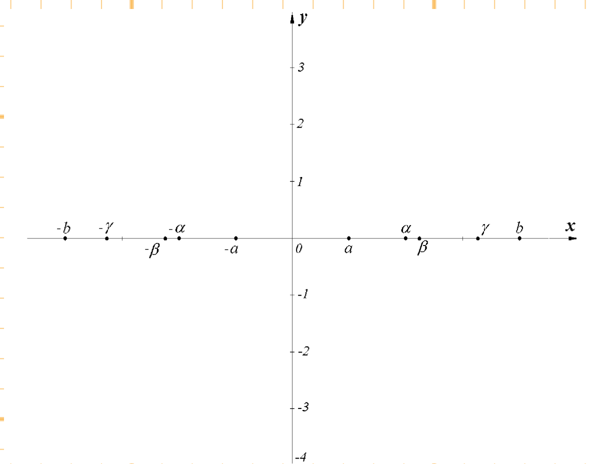
36·3 Determinare, dal grafico di g i valori di x per i quali è possibile calcolare $g(g(x))$

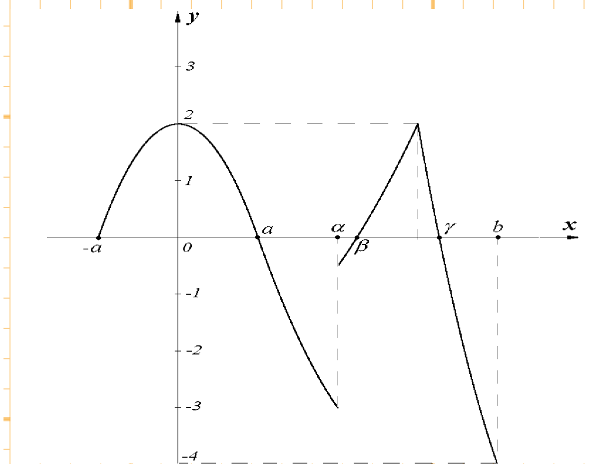


36·4 Disegnare il grafico di $g(g(\cdot))$









37

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \log_2 |x^2 - ax| \qquad g(x) = \arctan(f(x)) \qquad a \in (0, 2)$$

37·1 Disegnare il grafico di f al variare di a

37·2 Disegnare il grafico di g al variare di a

37·3 Disegnare il grafico di g per $a = 2$ ed $a = 0$

37·4 Per $a = 2$ stabilire ee g è invertibile su $(-\infty, 0]$ ed in caso affermativo determinarne l'inversa.

38

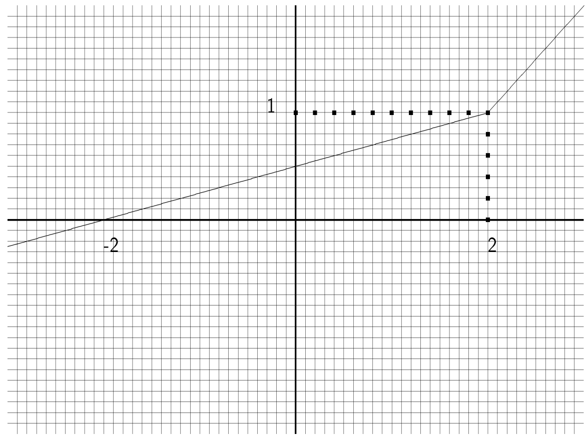
38·1 Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x(x+1))}{x^2} =$$

38·2 Calcolare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x(x+b))}{ax^2 + bx} =$$

Sia f la funzione il cui grafico è riportato in figura



38·3 Determinare, in corrispondenza di $\epsilon = .5$ un intorno bucato I di 2 in modo che sia verificato che $|f(x) - 1| < \epsilon$ per $x \in I$

38·4 In corrispondenza di $\epsilon > 0$ determinare $\delta > 0$ tale che $|f(x) - 1| < \epsilon$ per $|x - 2| < \delta$

39

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

e si ponga

$$b_n = a_{2n}, \qquad c_n = a_{2n+1}$$

39·1 Determinare b_0 e ricavare b_n in funzione di b_{n-1}.

39·2 Provare che b_n è decrescente e calcolare il limite di b_n

39·3 Rappresentare graficamente la successione ricorrente a_n

39·4 Stabilire per ciascuno dei seguenti fatti se è vero o falso.
c_n è crescente ◯ c_n è decrescente ◯ c_n è limitata ◯ c_n non è limitata

◯ c_n ammette limite ◯ ed il suo limite è............ c_n non ammette limite

◯

a_n ammette limite ◯ ed il suo limite è............ a_n non ammette limite

○

40

Si consideri la funzione definita da

$$\begin{cases} \dfrac{e^x \sin(x^4)}{x} & x < 0 \\ ax + b & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{(\ln x)^2}{x-1} + x & x > 1 \end{cases}$$

40·1 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in 0.

f **è continua in** 0 **per**

40·2 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in 0 ed in 1.

f **è continua in** 0 **ed in** 1 **per**

40·3 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia derivabile in 0.

f **è derivabile in** 0 **per**

40·4 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia derivabile in 0 ed in 1.

f **è derivabile in** 0 **ed in** 1 **per**

41

41·1 Disegnare il grafico di $f(x) = xe^{-x}$

41·2 Stabilire per quali x si ha

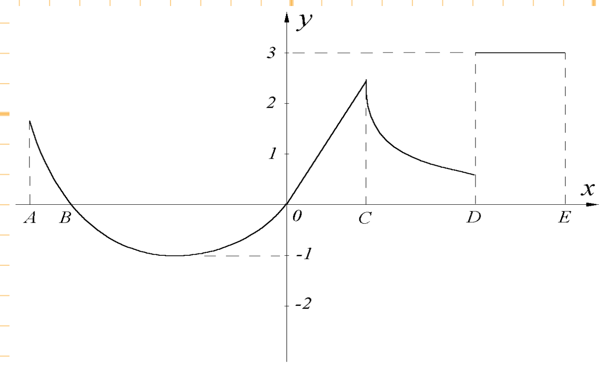
$$e^{-x} < \frac{1}{x}$$

41·3 Disegnare il grafico di $g(x) = \ln|x| + e^{-x}$

41·4 Stabilire quante volte si annulla g ed il segno dei punti in cui g vale 0

42

Sia f una funzione derivabile due volte tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e sia



il grafico della sua derivata seconda

42·1 Disegnare il grafico di f'

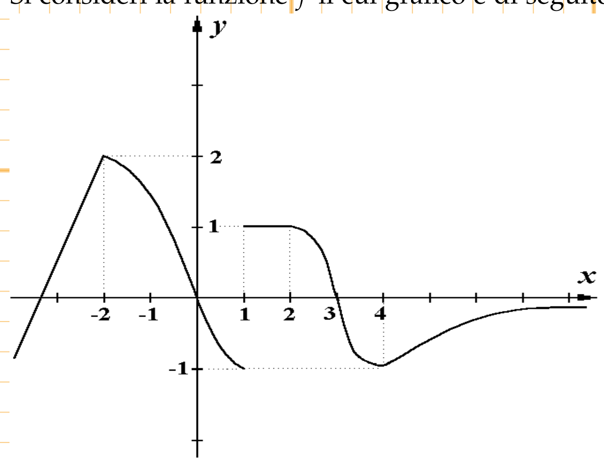
42·2 Disegnare il grafico di f

42·3 Scrivere il suo polinomio di McLaurin di grado 2

42·4 Stabilire con quale errore la retta tangente (Polinomio di McLaurin di grado 1) approssima la funzione data.

43

Si consideri la funzione f il cui grafico è di seguito riportato



43·1 Disegnare il grafico di $f(|x|)$ e di $|f(x)|$

43·2 Disegnare il grafico di $f(x+3)$ e di $\ln(f(x))$

44

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln(\sqrt{x^2-1}))$$

44·1 Disegnare il grafico di f

44·2 Stabilire se f è invertibile su $(-\infty, -1)$ ed in caso affermativo determinarne l'inversa.

45

45·1 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{x} =$$

45·2 Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2-x} - a}{x} =$$

46

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = a \end{cases}$$

46·1 Stabilire per quali valori di a, a_n è crescente

46·2 Stabilire per quali valori di a, a_n è decrescente

46·3 Stabilire per quali valori di a, a_n ammette limite e calcolarlo

47

Si consideri la funzione definita da

$$\begin{cases} \dfrac{e^{2x} - a}{x} & x < 0 \\ x - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ b\dfrac{(\ln x)^2}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

47·1 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in $\mathbb{R}$.

f **è continua in** $\mathbb{R}$ **per**

47·2 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia derivabile in $\mathbb{R}$.

f è derivabile in $\mathbb{R}$ per

48

48·1 Disegnare il grafico di $f(x) = (x^2 - 1)e^x$

48·2 Stabilire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$

49

Sia f una funzione derivabile due volte tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e

$$f''(x) = \begin{cases} x(x+1) & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \\ 1 - 3x & x > 2 \end{cases}$$

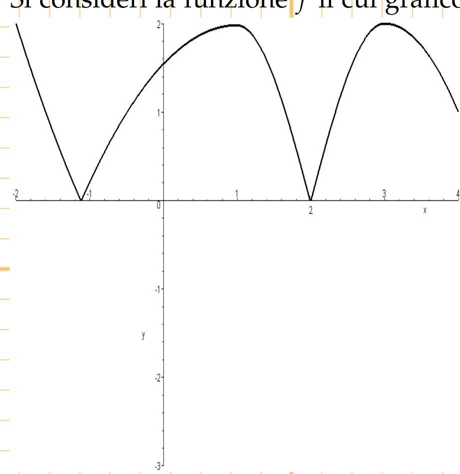
49·1 Disegnare il grafico di f'

49·2 Disegnare il grafico di f

49·3 Scrivere il suo polinomio di McLaurin di grado 4

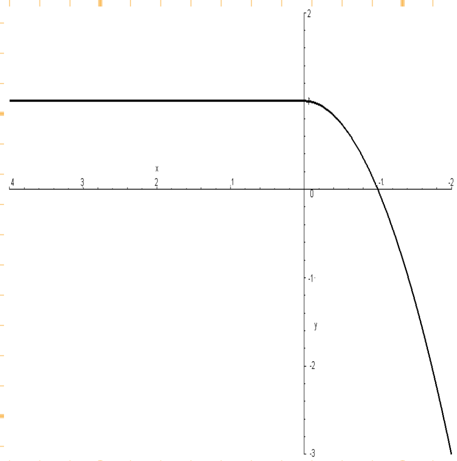
50

Si consideri la funzione f il cui grafico è di seguito riportato



50·1 Disegnare il grafico di $f(|x|)$ e di $|f(x)|$

Sia g la funzione il cui grafico è



50·2 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$

51

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln|x^2 - a|$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$

51·1 Disegnare il grafico di f per $a = 0$ per $a < 0$ e per $a > 0$

51·2 Determinare, per $a = 1$, un intervallo in cui f sia invertibile, calcolare l'inversa di f e disegnare il grafico dell'inversa

52

Si consideri

$$f(x) = \frac{e^{ax} - \cos(bx)}{x}$$

52·1 Calcolare al variare di a, b

$$\lim_{x \to 0} f(x) =$$

53

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & x < 0 \\ ax^3 + bx + 1 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

53·1 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in 0.

f **è continua in** 0 **per**

53·2 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in 0 ed in 1.

f **è continua in** 0 **ed in** 1 **per**

53·3 Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia derivabile in 0.

f **è derivabile in** 0 **per**

54

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = x^2 - \ln(1 + x^2)$$

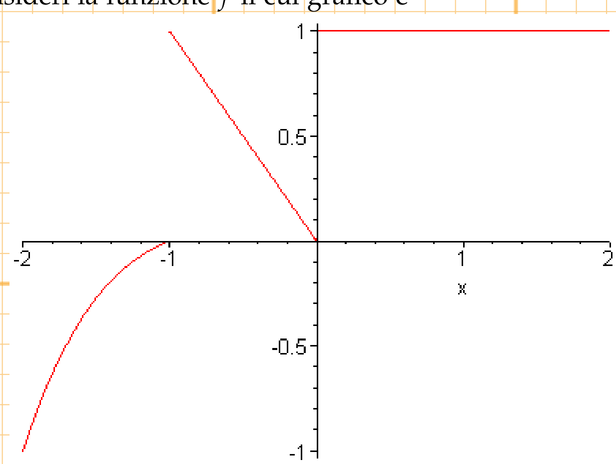
54·1 Disegnare il grafico di f

54·2 Scrivere il polinomio di McLaurin di f di ordine 2 di f (Polinomio di Taylor centrato nel punto $x_0 = 0$)

54·3 Scrivere il resto di Lagrange relativo al polinomio di McLaurin trovato al punto precedente

55

Si consideri la funzione f il cui grafico è



55·1 Disegnare il grafico $e^{f(x)}$

55·2 Disegnare il grafico $f(\ln(x))$

55·3 Disegnare il grafico $g(x) = f(-x)$

55·4 Disegnare il grafico $f(g(x))$

56

Si consideri la funzione

$$f(x) = 100 \ln \left(53 \left(\sqrt{x^2 - x} \right)^3 \right)$$

56·1 Disegnare il grafico di

$$g(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

56·2 Disegnare il grafico di

$$h(x) = 53 \left(\sqrt{x^2 - x} \right)^3$$

56·3 Disegnare il grafico di $f(x)$

56·4 Giustificare l'invertibilità di f su $[2, 3]$ e calcolare l'inversa di f ristretta a $[2, 3]$.

57

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ |2 - x| & x \geq 0 \end{cases}$$

57·1 Disegnare il grafico di f e determinare, anche graficamente, l'insieme dei punti in cui

$$|f(x) - 2| < 1$$

57·2 Determinare, anche graficamente, l'insieme dei punti in cui

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

57·3 Determinare un intorno di 0 in cui

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

57·4 Verificare che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

58

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+2)\ln(2x+5)}{(x+2)} & x < -2 \\ k & -2 \le x \le 2 \\ ax^2 + bx + c + \sin(x-2)^2 & x > 2 \end{cases}$$

58·1 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è continua in $x = 2$

58·2 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è continua in $x = -2$

58·3 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è derivabile in $x = 2$ e calcolare $f'(2)$

58·4 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è derivabile in $x = -2$ e calcolare $f'(-2)$

59

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \ln(-x) - \frac{x^2}{2} + kx$$

al variare di $k \in R$

59·1 Determinare il campo di definizione di f e calcolare f' e f''

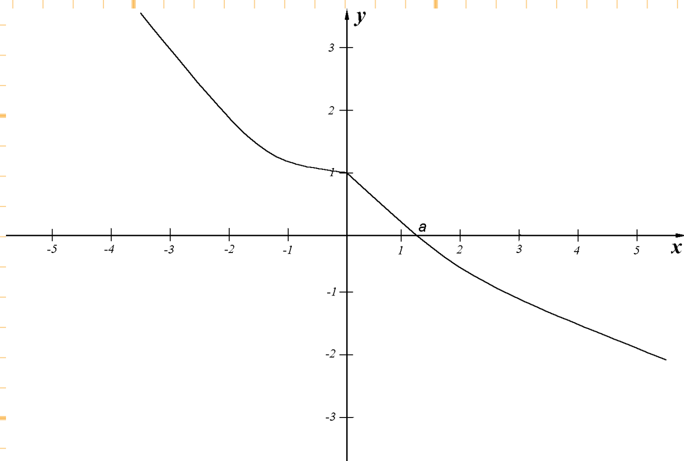
59·2 Disegnare il grafico di f' al variare di $k \in \mathbb{R}$

59·3 Disegnare il grafico di f per $k = -1$ e per $k = 3$

59·4 Disegnare il grafico di f al variare di $k \in \mathbb{R}$

60

Si consideri la funzione φ il cui grafico è indicato in figura



e sia f la funzione derivabile due volte tale che

- * $f''(x) = \varphi(x)$
- * $f'(a) = k \in \mathbb{R}$
- * $f(a) = 0$

60·1 Disegnare il grafico di f' al variare di $k \in \mathbb{R}$

60·2 Disegnare il grafico di f al variare di $k \in \mathbb{R}$

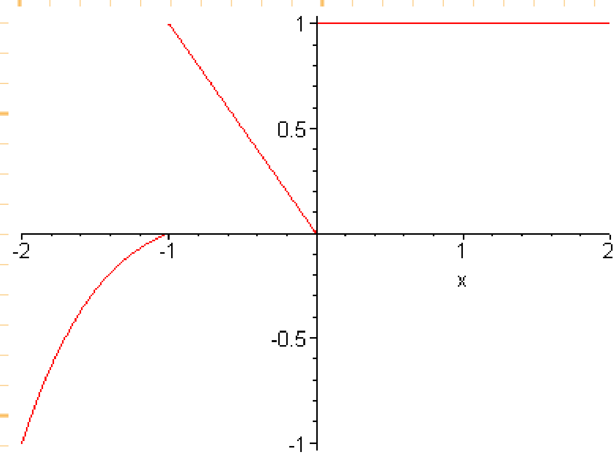
60·3 Scrivere il polinomio di Taylor di f in $x = a$ di secondo ordine ed il resto nella forma di Lagrange relativo al polinomio di primo ordine

60·4 Posto $t(x)$ la retta tangente al grafico di f in $x = a$, stimare l'errore, usando il resto di Lagrange,

$$|f(x) - t(x)| \qquad per \qquad x \in [0, 2]$$

61

Si consideri la funzione f il cui grafico è



61·1 Disegnare il grafico $\arctan(f(x))$

61·2 Disegnare il grafico $f(\arctan(x))$

61·3 Disegnare il grafico $f(|x-1|)$

62

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{x^4 - x^2}$$

62·1 Disegnare il grafico di

$$g(x) = x^4 - x^2$$

62·2 Disegnare il grafico di $f(x)$

62·3 Giustificare l'invertibilità di f su $[\sqrt{2}/2, +\infty]$ e calcolare l'inversa di f ristretta a $[\sqrt{2}/2, +\infty]$.

63

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

63·1 Disegnare il grafico di f e determinare, graficamente, l'insieme dei punti in cui

$$|f(x)| < 1$$

63·2 Determinare, graficamente, l'insieme dei punti in cui

$$|f(x)| < \epsilon$$

63·3 Determinare un intorno di $\sqrt{2}$ in cui

$$|f(x)| < \epsilon$$

63·4 Verificare che

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = 0$$

64

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+2)}{(x+2)} & x < -2 \\ k & -2 \le x \le 2 \\ ax^2 + bx + c & x > 2 \end{cases}$$

64·1 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è continua in $x = 2$

64·2 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è continua in $x = -2$

64·3 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è derivabile in $x = 2$ e calcolare $f'(2)$

64·4 Stabilire, al variare di a, b, c, k, se f è derivabile in $x = -2$ e calcolare $f'(-2)$

65

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \ln|x| + kx$$

al variare di $k \in R$

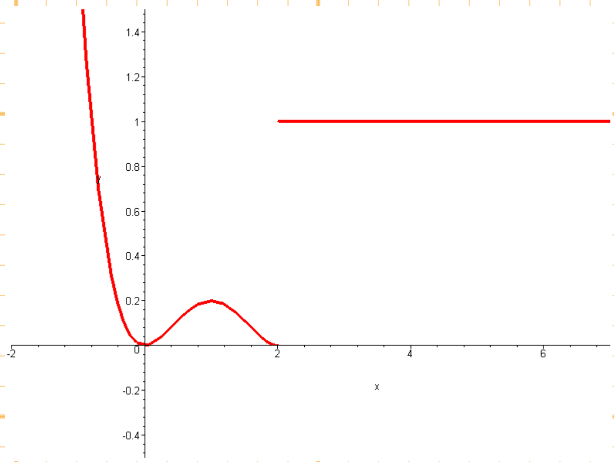
65·1 Disegnare il grafico di f' al variare di $k \in \mathbb{R}$

65·2 Disegnare il grafico di f per $k = -1$ e per $k = 3$

65·3 Disegnare il grafico di f al variare di $k \in \mathbb{R}$

66

Si consideri la funzione φ il cui grafico è indicato in figura



e sia f la funzione deriv

- * $f''(x) = \varphi(x)$
- * $f'(2) = k \in \mathbb{R}$
- * $f(2) = 0$

66·1 Disegnare il grafico di f' al variare di $k \in \mathbb{R}$

66·2 Disegnare il grafico di f al variare di $k \in \mathbb{R}$

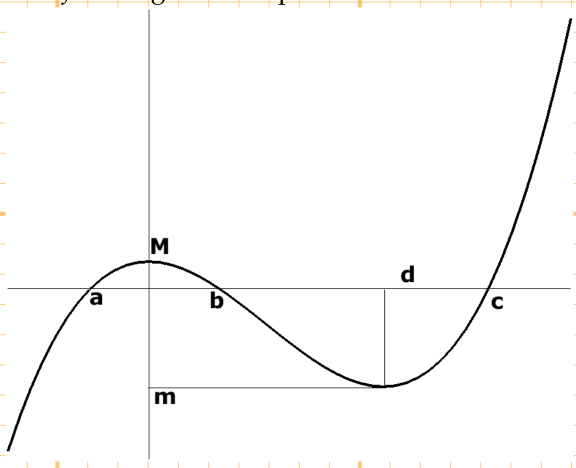
66·3 Scrivere il polinomio di Taylor di f in $x = 2$ di secondo ordine ed il resto nella forma di Lagrange relativo al polinomio di primo ordine

66·4 Posto $t(x)$ la retta tangente al grafico di f in $x = 2$, stimare l'errore, usando il resto di Lagrange,

$$|f(x) - t(x)| \qquad per \qquad x \in [1,3]$$

67

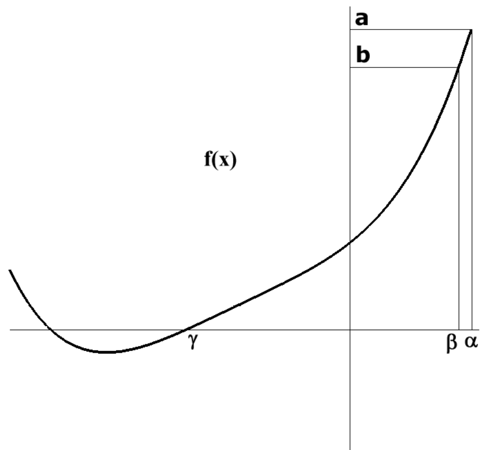
Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato a lato

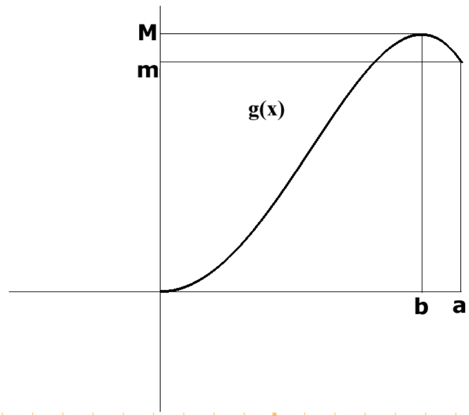


67·1 Disegnare il grafico di $f(x+a)$ e di $f(x)+b$

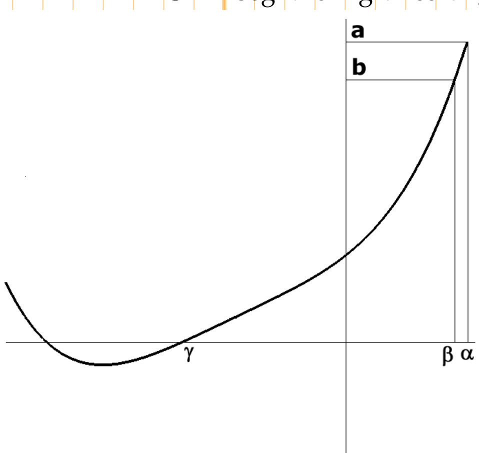
67·2 Disegnare il grafico di $\ln(f(x))$ e di $e^{f(x)}$

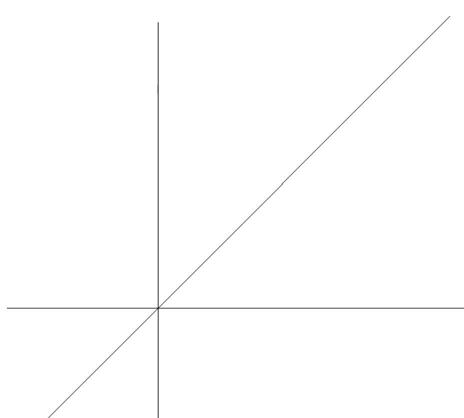
Siano f e g le funzione il cui grafico è riportato di seguito

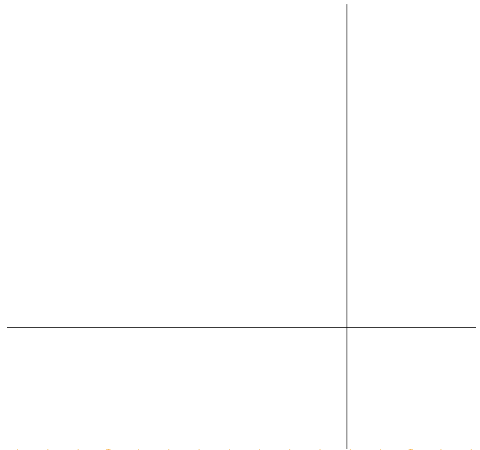


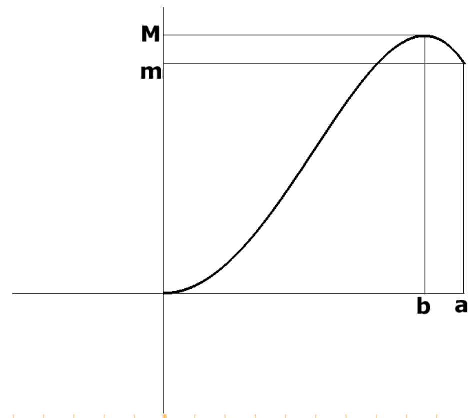


67·3 Disegnare il grafico di $g(f(x))$









68

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 - x & x < 0 \end{cases}$$

68·1 Determinare un intorno destro I di 0 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in I$$

68·2 Determinare un intorno sinistro I di 0 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in I$$

68·3 Determinare un intorno I di 0 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in I$$

68·4 Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 2 - x^3 & x < 0 \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) =$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) =$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) =$$

69

Calcolare i seguenti limiti giustificando brevemente la risposta

69·1

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{2x^2}$$

69·2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$$

69·3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{2x^6}$$

69·4

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x}$$

69·5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{6x}$$

69·6

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2/3}-1}{x^2}$$

69·7

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$$

69·8

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

69·9

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

69·10

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x}$$

69·11

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x+6x^2)}{6x}$$

69·12

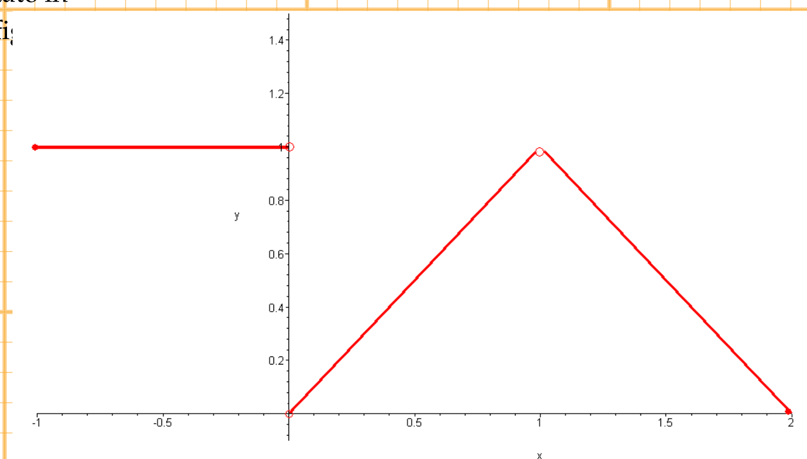
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+e^{x-1})}{x-1}$$

70

Si consideri la funzione

$$f : [-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2] \to [0,1]$$

il cui grafico è riportato in fi



70·1 Stabilire se è possibile prolungare f per continuità su $[-1,2]$ ed, in caso affermativo, determinarne il prolungamento.

70·2 Stabilire se è possibile prolungare f per continuità su $[0,2]$ ed, in caso affermativo, determinarne il prolungamento.

70·3 Stabilire se è possibile prolungare f per derivabilità su $[0,2]$ ed, in caso affermativo, determinarne il prolungamento.

Sia $f(0) = f(1) = 1$.

70·4 Disegnare il grafico di una funzione g tale che $g'(x) = f(x)$

70·5 Disegnare il grafico di una funzione g tale che $g'(x) = f(x)$ e $g(0) = 0$

71

71·1 Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x}$$

71·2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2}$$

71·3 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$$

71·4 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x}$$

Sia

$$f(x) = x \arctan(x) + x^2$$

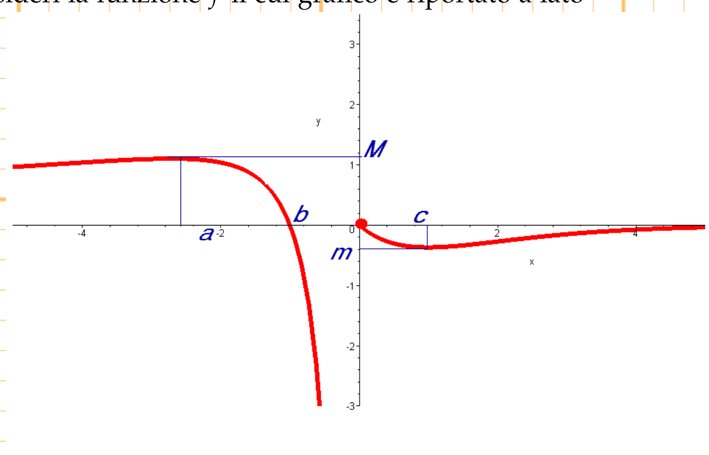
71·5 Disegnare il grafico di f

71·6 Determinare il polinomio di McLaurin di ordine 7 di f

71·7 Calcolare $\sin(0.5)$ a meno di 0.001

72

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato a lato



72·1 Disegnare il grafico di $f(x+a)$ e di $f(x)+m$

72·2 Disegnare il grafico di $(f(x))^2 + f(x)$ e di $f(e^x)$

72·3 Disegnare il grafico di $f(\frac{1}{x})$ e di $f(\frac{1}{x^2})$

73

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 1-x^2 & x < 0 \end{cases}$$

73·1 Determinare un intorno I di 0 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in I$$

73·2 Determinare un intorno I di 0 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in I$$

74

Calcolare i seguenti limiti giustificando brevemente la risposta

74·1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$$

74·2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(1+\sqrt{x}))}{\sin(\sqrt{x})}$$

74·3

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{\sin(4x+2)}{2x+1}$$

74·4

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin(x)}$$

74·5

$$\lim_{x \to 0} (x^e)^{-x}$$

74·6

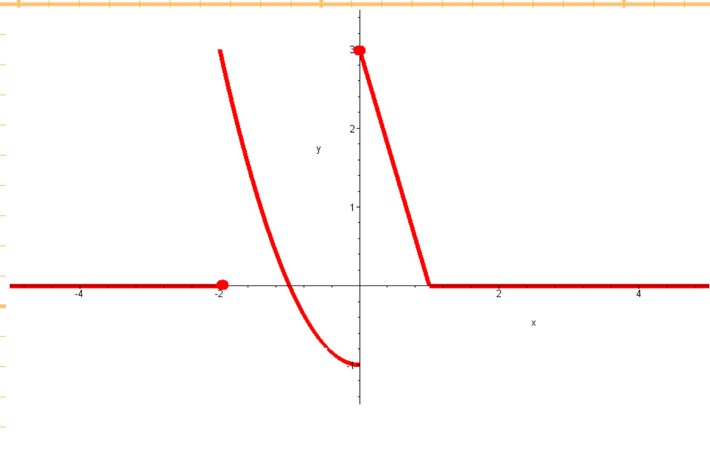
$$\lim_{x \to 0} e^{(x^{-x})}$$

75

Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

il cui grafico è riportato in figura;



75·1 Disegnare il grafico di una funzione g tale che $g'(x) = f(x)$ ove f è continua

75·2 Disegnare il grafico di una funzione g continua tale che $g'(x) = f(x)$ ove f ècontinua

75·3 Disegnare il grafico di una funzione g continua tale che $g'(x) = f(x)$ ove f è continua e $g(0) = 0$

76

76·1 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - \sin(x)}{x}$$

76·2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - \sin(x)}{x^2}$$

76·3 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - \sin(x) - x}{x^2}$$

76·4 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^3+1) - \sin(x)}{x}$$

Sia

$$f(x) = x\ln(x^2+1)$$

76.5 Determinare il polinomio di McLaurin di ordine 7 di f

76.6 Calcolare $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ a meno di 0.1

77

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad , \quad g(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

77.1 Disegnare il grafico di g

77.2 Disegnare il grafico di f

77.3 Determinare i maggioranti di f in $[-5, -1)$

77.4 Determinare l'estremo superiore di f su $[-5, -1)$

77.5 Determinare, se esiste, il massimo di f su $[-5, -1)$

78

Sia a_n la quantità definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = Ka_n \end{cases}$$

78.1 Provare per induzione che

$$\ln(a_n) = n\ln(K)$$

78.2 Determinare i minoranti di $\frac{1}{2x+1}$ in $[1, 3)$

78.3 Determinare l'estremo inferiore di $\frac{1}{2x+1}$ su $[1, 3)$

78.4 Determinare, se esiste, il minimo di $\frac{1}{2x+1}$ su $[1, 3)$

79

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$

79·1 Determinare un intorno destro I^+ di 1 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in I^+$$

79·2 Determinare un intorno sinistro I^- di 1 tale che

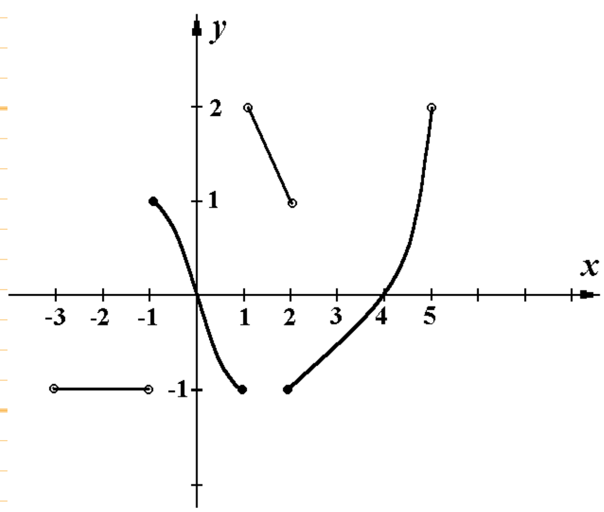
$$|f(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in I^-$$

79·3 Determinare un intorno I di 0 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in I$$

79·4 Disegnare il grafico di $f(x+1)$ e di $f(x)+2$

unzione il cui grafico è riportato a fianco



79·5 Disegnare il grafico di $g(f(x))$ e di $f(g(x))$

80

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 0 \\ cx^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & 0 < x < 1 \\ 2x + d & x > 1 \end{cases}$$

80·1 Stabilire se è possibile prolungare f per continuità in $x_0 = 0$

80·2 Stabilire se è possibile prolungare f per continuità in $x_0 = 1$

80·3 Stabilire se è possibile prolungare f per continuità in $\mathbb{R}$

80·4 Disegnare il grafico di f per $a = b = c = d = 1$

80·5 Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x^2)}{1 - e^x} \frac{1}{\sin(x^\alpha)}$$

81

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln|x| - \frac{k}{x}$$

81·1 Disegnare il grafico di f per $k = \frac{1}{e}$

81·2 Disegnare il grafico di f per $k = -\frac{1}{e}$

81·3 Disegnare il grafico di f al variare di k

81·4 Determinare, al variare di k il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione

$$\ln(|x|) = \frac{k}{x}$$

82

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

82·1 Maggiorare l'errore che si commette sostituendo x ad $f(x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

82·2 Trovare il polinomio di McLaurin di f di grado 2

82·3 Sia P_{10} il polinomio di McLaurin di f di grado 10. Scrivere, nella forma di Peano, il resto

$$f(x) - P_{10}(x)$$

82·4 Determinare il polinomio di McLaurin di f di grado 10.

83

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \frac{2}{1+x}$$

83·1 Disegnare il grafico di gf

83·2 Determinare i maggioranti di f in $[-5, -1)$

83·3 Determinare l'estremo superiore di f su $[-5, -1)$

83·4 Determinare, se esiste, il massimo di f su $[-5, -1)$

84

Sia a_n la quantità definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = K + a_n \end{cases}$$

84·1 Provare per induzione che

$$a_n = nK$$

85

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

85·1 È possibile determinare un intorno bucato I^0 di 1 tale che

$$|f(x) - 1| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in I$$

85·2 Disegnare il grafico di $f(x+1)$ e di $f(x) + 2$

86

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 0 \\ x^2 + x & 0 < x < 1 \\ cx + d & x > 1 \end{cases}$$

86·1 Stabilire se è possibile prolungare f per continuità in $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$.

86·2 Stabilire se il prolungamento ottenuto è derivabile

86·3 Stabilire se è possibile prolungare f per continuità in $\mathbb{R}$

86·4 Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{1 - e^{x^2}}$$

87

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln\left|\frac{1}{x}\right| - kx$$

87·1 Disegnare il grafico di f per $k = e$

87·2 Disegnare il grafico di f per $k = -e$

87·3 Disegnare il grafico di f al variare di k

88

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin(x^2)$$

88·1 Maggiorare l'errore che si commette sostituendo x^2 ad $f(x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

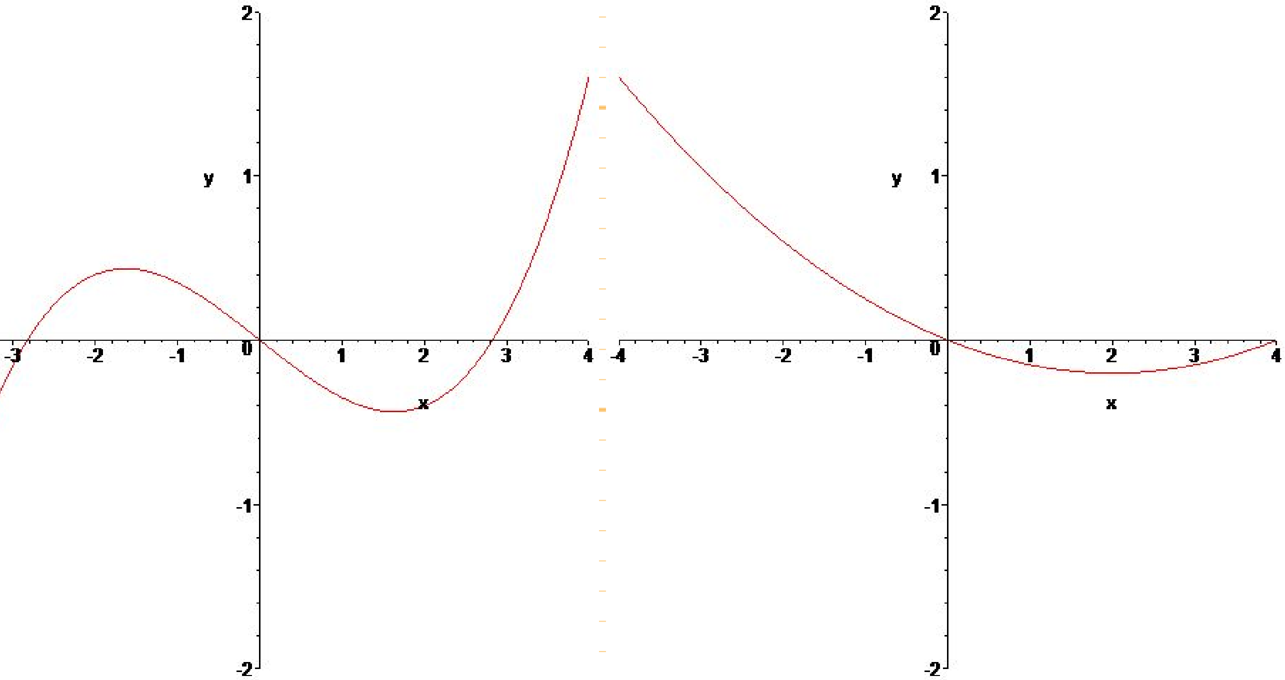
88·2 Trovare il polinomio di McLaurin di f di grado 5

88·3 Sia P_{10} il polinomio di McLaurin di f di grado 10. Scrivere, nella forma di Peano, il resto

$$f(x) - P_{10}(x)$$

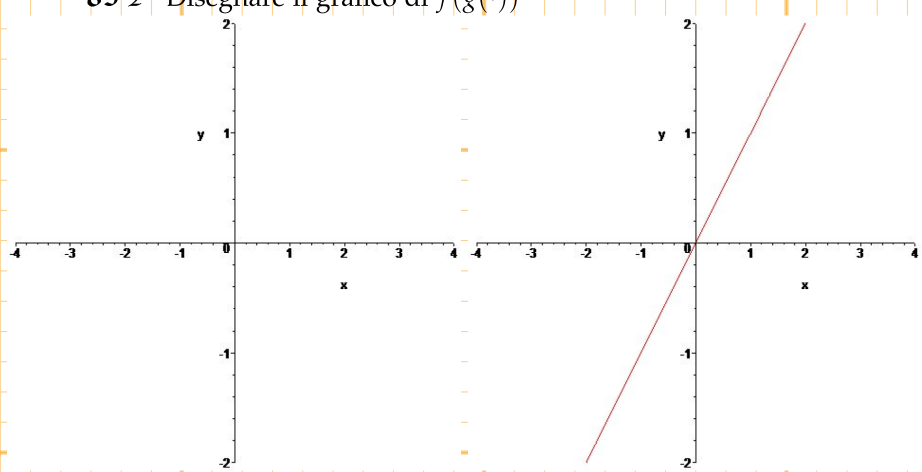
89

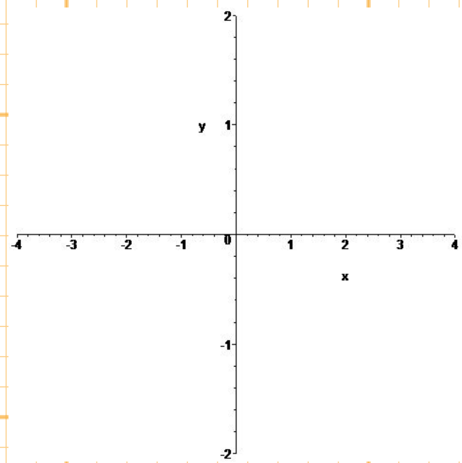
Si considerino le funzioni f e g il cui grafico è riportato di seguito

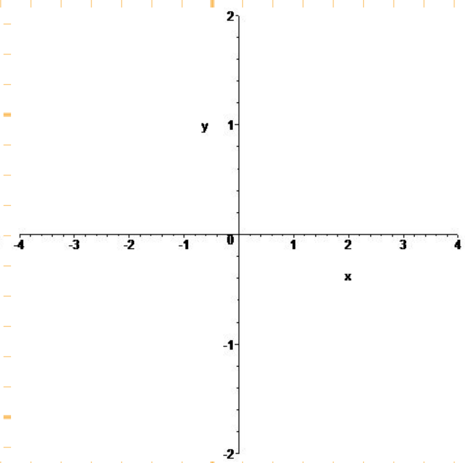


89·1 Disegnare il grafico di $f(x-1)$ e di $g(|x|-1)$

89·2 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$







89·3 Disegnare il grafico di $|f(g(\cdot))|$

90

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln(e^x - e^{2x} + 1))$$

90·1 Disegnare il grafico di $g(x) = y - y^2 + 1$ e di $h(x) = e^x - e^{2x} + 1$

90·2 Disegnare il grafico di f

90·3 Verificare che f è invertibile su $[10, +\infty)$

90·4 Determinare l'inversa di f

90·5 Verificare, usando la definizione di limite che

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

91

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{a(x-1)} - e^{x-1}}{(x-1)^n} & x < 1 \\ \alpha & x = 1 \\ \ln(1 + b^2(x-1)) & x > 1 \end{cases} \qquad a, b, \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

91·1 Per $a = 1$, $b = 3$, calcolare

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

91·2 y Per $a = 1$, $b = 4$, calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

91·3 Stabilire, al variare di a, b, α, n, se

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

esiste, ed in caso affermativo, calcolarlo.

91·4 Stabilire, al variare di a, b, α, n, se f è continua in 1 da destra.

91·5 Stabilire, al variare di a, b, α, n, se f è continua in 1 da sinistra.

91·6 Stabilire, al variare di a, b, α, n, se f è continua in 1.

92

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(3x^2) - e^{4x^3}}{x^n} & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \\ \sin(x^2) & x > 0 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$$

92·1 Determinare n, α in modo che f sia continua in 0 da destra

92·2 y Determinare n, α in modo che f sia continua in 0 da sinistra

92·3 Determinare n, α in modo che f sia continua in 0

92·4 Determinare n, α in modo che f sia derivabile in 0 da destra

92·5 Determinare n, α in modo che f sia derivabile in 0 da sinistra

92·6 Determinare n, α in modo che f sia derivabile in 0

93

Si consideri la funzione definita su $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = -1 - 2bx^3 e^{-x^2}$$

93·1 Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f.

93·2 Calcolare f'.

93·3 Determinare il valore massimo ed il valore minimo assunto da f.

93·4 y Determinare b in modo che f sia sempre negativa.

93·5 Disegnare il grafico di f per $b = 10$

94

Si considerino

$$f(x) = xe^{-x^2} \quad , \quad g(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$$

94·1 Disegnare il grafico di g

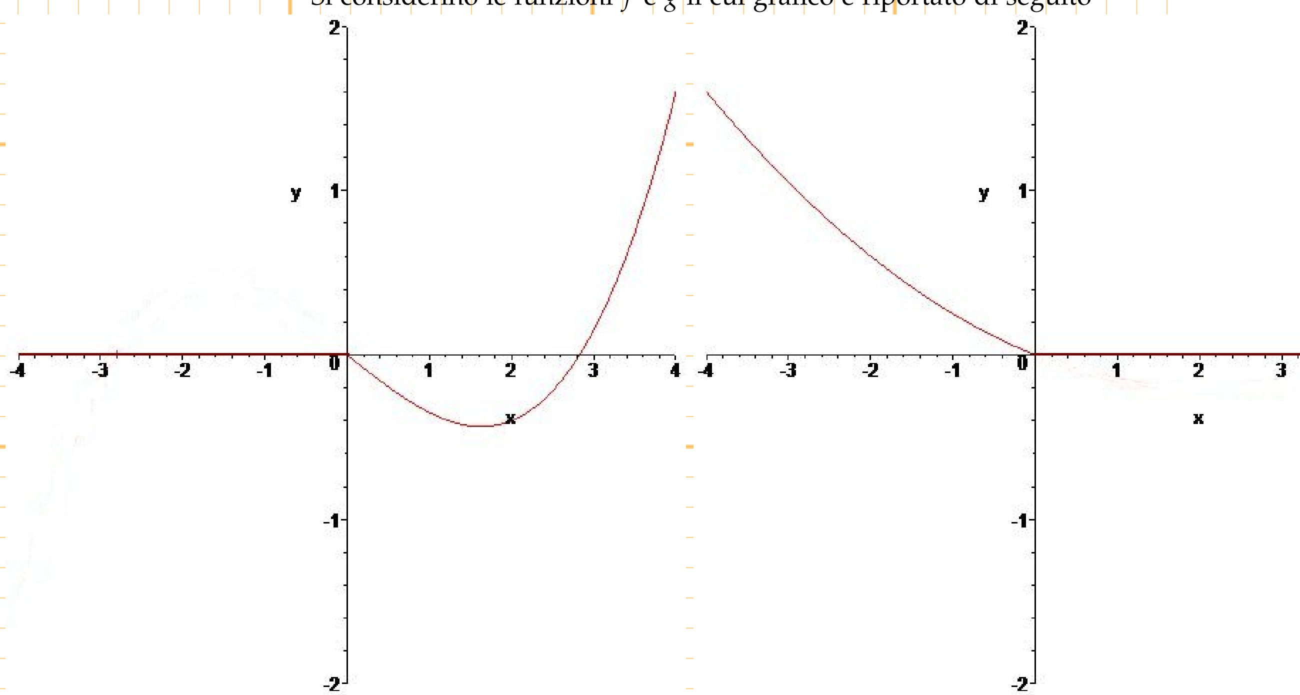
94·2 Disegnare il grafico di f

94·3 Disegnare il grafico di $\int_0^x f(t)dt$

94·4 Calcolare $\int_0^4 f(t)dt$

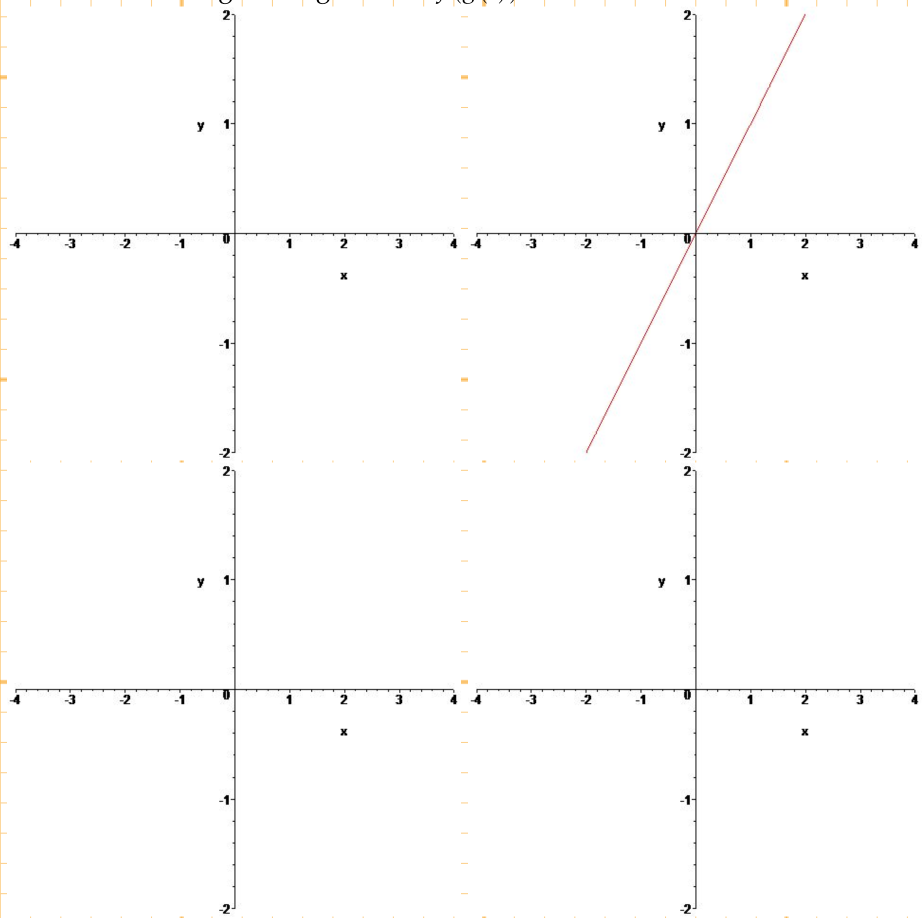
95

Si considerino le funzioni f e g il cui grafico è riportato di seguito



95·1 Disegnare il grafico di $f(x-1)$ e di $g(|x|-1)$

95·2 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$



95·3 Disegnare il grafico di $|f(g(\cdot))|$

96

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(\arctan(e^{2x} - 1))$$

96·1 Disegnare il grafico di $g(x) = x^2 - 1$ e di $h(x) = e^{2x} - 1$

96·2 Disegnare il grafico di f

96·3 Verificare che f è invertibile su $[1, +\infty)$

96·4 Determinare l'inversa di f

97

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \\ \ln(1+bx) & x > 0 \end{cases} \qquad a, b, \alpha \in \mathbb{R}$$

97·1 Stabilire, al variare di a, b, α, se f è continua in 0 da destra.

97·2 Stabilire, al variare di a, b, α, se f è continua in 0 da sinistra.

97·3 Stabilire, al variare di a, b, α, se f è continua in 0.

98

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2) - \ln(1+4x^3)}{x^n} & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \\ x^4 & x > 0 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$$

98·1 Determinare n, α in modo che f sia derivabile in 0 da destra

98·2 Determinare n, α in modo che f sia derivabile in 0 da sinistra

98·3 Determinare n, α in modo che f sia derivabile in 0

99

Si consideri la funzione definita su $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = Ax^3 e^{-x^2}$$

99·1 y Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f.

99·2 Calcolare f'.

99·3 Determinare il valore massimo ed il valore minimo assunto da f.

99·4 Determinare A in modo che f sia sempre negativa.

99·5 Disegnare il grafico di f per $A = 1$

100

Si considerino

$$f(x) = xe^{-x} \quad , \quad g(x) = e^{-x}(1-x)$$

100·1 Disegnare il grafico di g

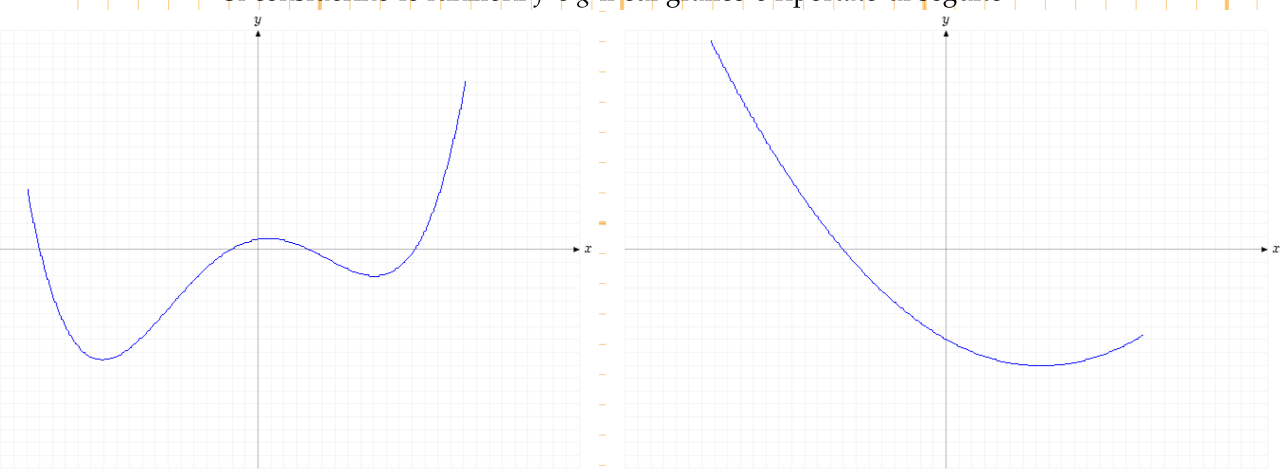
100·2 Disegnare il grafico di f

100·3 Disegnare il grafico di $\int_0^x f(t)dt$

100·4 Calcolare $\int_0^4 f(t)dt$

101

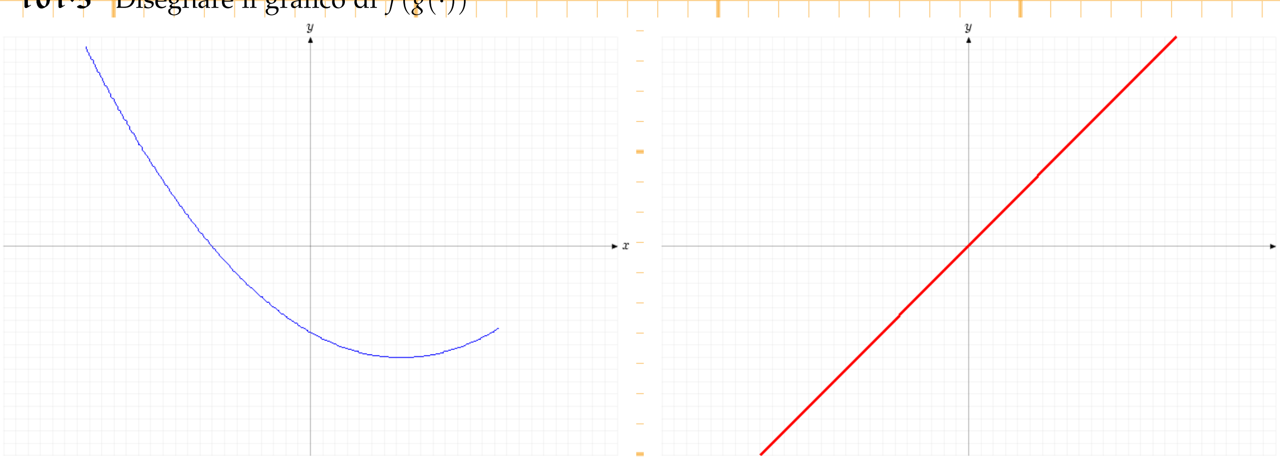
Si considerino le funzioni f e g il cui grafico è riportato di seguito

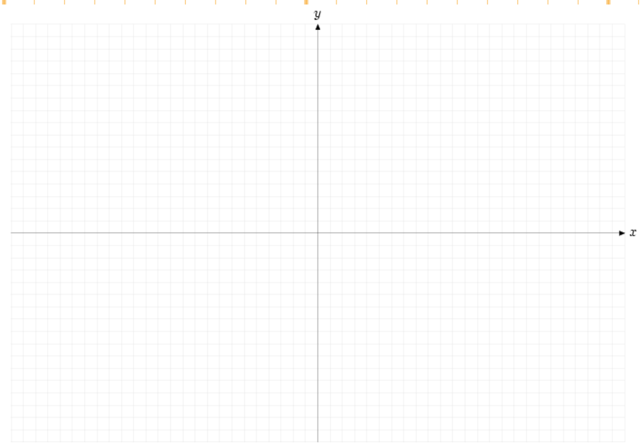


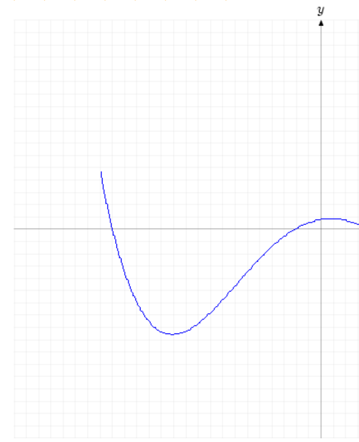
101·1 Disegnare il grafico di $f(x-1)$ e di $g(|x-1|)$

101·2 Disegnare il grafico di $|f(x)|$ e di $g(|x|)$

101·3 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$

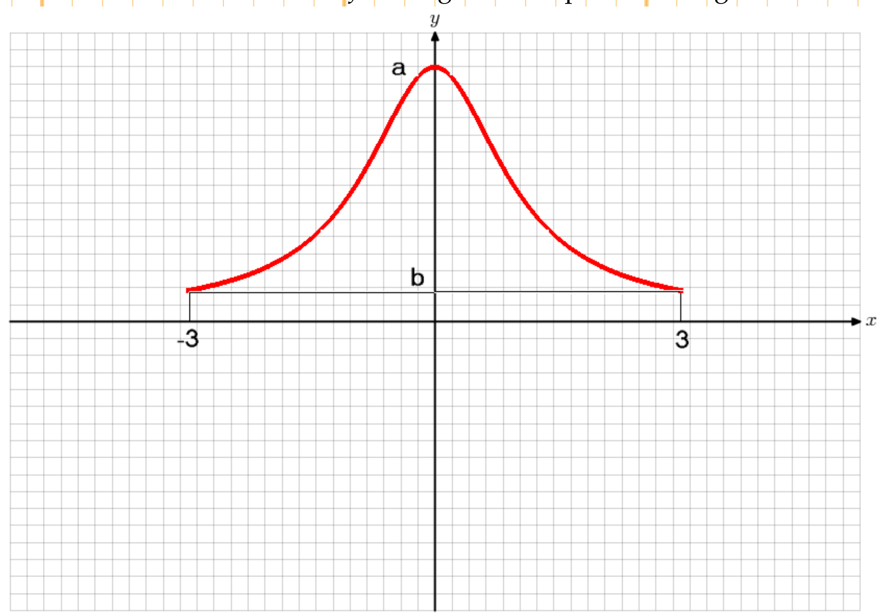






102

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato di seguito



e la funzione g definita da

$$g(x) = 2^{f(\log_2(x))}$$

102·1 Determinare il campo di definizione di g

102·2 Disegnare il grafico di g

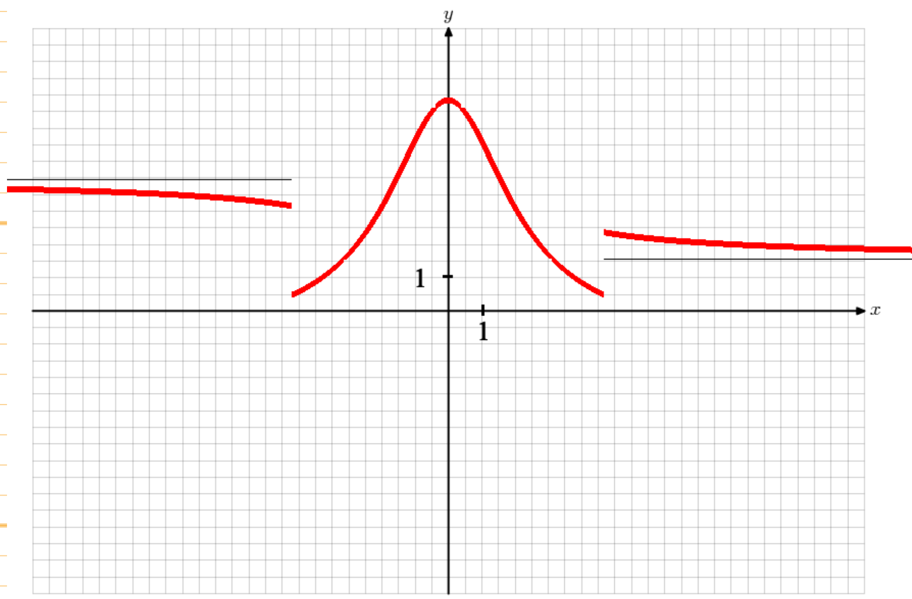
102·3 Verificare che g è invertibile in $(0,3)$ ma non in $(-3,3)$

102·4 Disegnare il grafico dell'inversa di g ristretta a $(0,3)$

102·5 Determinare l'inversa di g ristretta a $(0,3)$

103

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato di seguito



e la funzione g definita da

$$g(x) = f\left(3\cos\left(\frac{1}{3x}\right)\right)$$

103·1 Calcolare

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) =$$

103·2 Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) =$$

103·3 Calcolare

$$\lim_{x\to 3^+} (x-3)^3 g(x) =$$

103·4 Verificare, usando la definizione di limite l'affermazione contenuta al punto precedente

104

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - e^{2x} + 1}{x^{\alpha}} & x > 0 \\ \dfrac{1 - \cos(2x)}{4x} & x < 0 \end{cases}$$

104·1 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia continua da sinistra.

104·2 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia continua da destra per qualche valore di α.

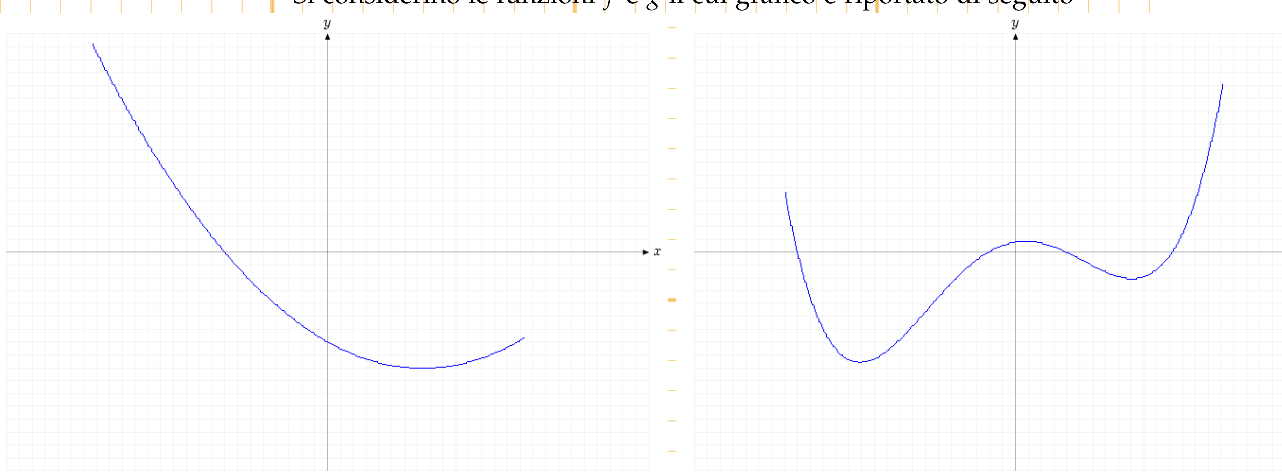
104·3 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia continua.

104·4 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia derivabile da sinistra.

104·5 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia derivabile per qualche valore di α.

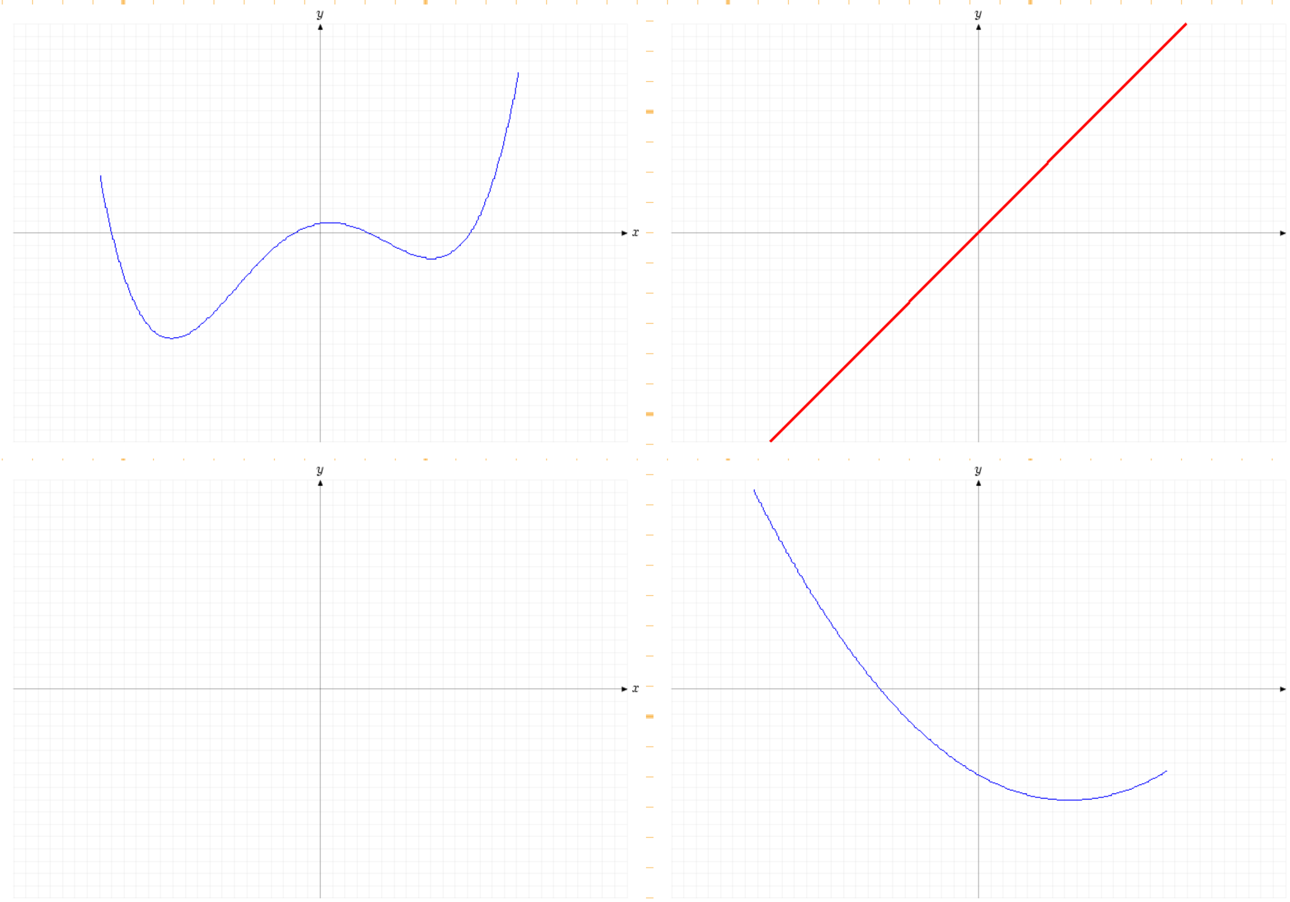
105

Si considerino le funzioni f e g il cui grafico è riportato di seguito



105·1 Disegnare il grafico di $f(x-2)$ e di $g(|x|)$

105·2 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$



106

Si consideri la funzione f definita da

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

106·1 Verificare che f è invertibile

106·2 Calcolare l'inversa di f

107

Si consideri la funzione f

$$x^2 \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2$$

107·1 Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

107·2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} f(x) =$$

107·3 Verificare, usando la definizione di limite l'affermazione contenuta al punto precedente

108

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln(x))^2}{x-1} & x > 1 \\ \dfrac{\arctan(1-x)}{(1-x)^\alpha} & x < 1 \end{cases}$$

108·1 Stabilire se è possibile definire $f(1)$ in modo che f sia continua da destra.

108·2 Stabilire se è possibile definire $f(1)$ in modo che f sia continua da sinistra per qualche valore di α.

108·3 Stabilire se è possibile definire $f(1)$ in modo che f sia continua.

108·4 Stabilire se è possibile definire $f(1)$ in modo che f sia derivabile da destra.

108·5 Stabilire se è possibile definire $f(1)$ in modo che f sia derivabile per qualche valore di α.

109

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = x^7 + x^{11} - 1$$

109·1 Studiare la crescenza della funzione f.

109·2 Disegnare il grafico della funzione f.

109·3 Studiare l'invertibilità di f e calcolare $f(0)$ e $f^{-1}(-1)$.

109·4 Calcolare, se esiste

$$(f^{-1})'(-1)$$

109·5 Sia
$$g(x) = \arctan(e^{\ln(x^7+1)^2} - 1).$$
Calcolare $g(0)$, $g^{-1}(0)$ e $(g^{-1})'(0)$

110

Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = x^2 + 6x^3 + x - 3 + x^6 \sin(\sqrt{x^4})$$

110·1 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nell'origine.

110·2 Trovare il polinomio di McLaurin di f di ordine 3.

110·3 Trovare il polinomio di McLaurin di f di ordine 7.

110·4 Calcolare $f'''(0)$.

110·5 Stabilire se è vero che f ammette un punto di minimo relativo in $x = 0$

111

Si consideri la funzione
$$f(t) = \frac{1}{t}$$
e la partizione
$$P_n = \left\{ x^{\frac{k}{n}} \quad : \quad k = 0..n \right\}$$

111·1 Disegnare il grafico di f

111·2 Calcolare le somme superiori $U(f, P_n)$ di f rispetto alla partizione P_n

$U(f, P_n) =$

Si consideri la partizione
$$Q_n = \left\{ x^{\frac{k}{2^n}} \quad : \quad k = 0..2^n \right\}$$

111·3 Dimostrare che $U(f, Q_n)$ è una estratta decrescente di $U(f, P_n)$

111·4 calcolare
$$\int_1^x f(t)dt =$$

112

Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{\sin^2(t)}{\sqrt[3]{|t^3+1|}\; t^2\; \sqrt{1-t}}$$

e la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

112·1 Determinare il campo di definizione di F

112·2 Calcolare i limiti di F agli estremi del suo campo di definizione

112·3 Disegnare il grafico di F

Si consideri poi

$$G(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$$

112·4

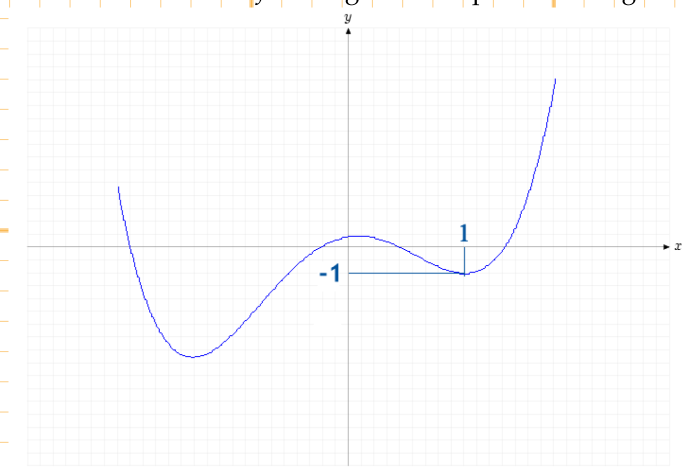
112·5 Determinare il campo di definizione di G

112·6 Calcolare i limiti di G agli estremi del suo campo di definizione

112·7 Disegnare il grafico di G

113

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato di seguito



113·1 Disegnare il grafico di $|f(|x-1|)|$

113.2 Disegnare il grafico di $f(|1-|x||)$

114

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato di seguito
e la funzione g definita da

$$g(x) = \arctan(\tan(f(x)))$$

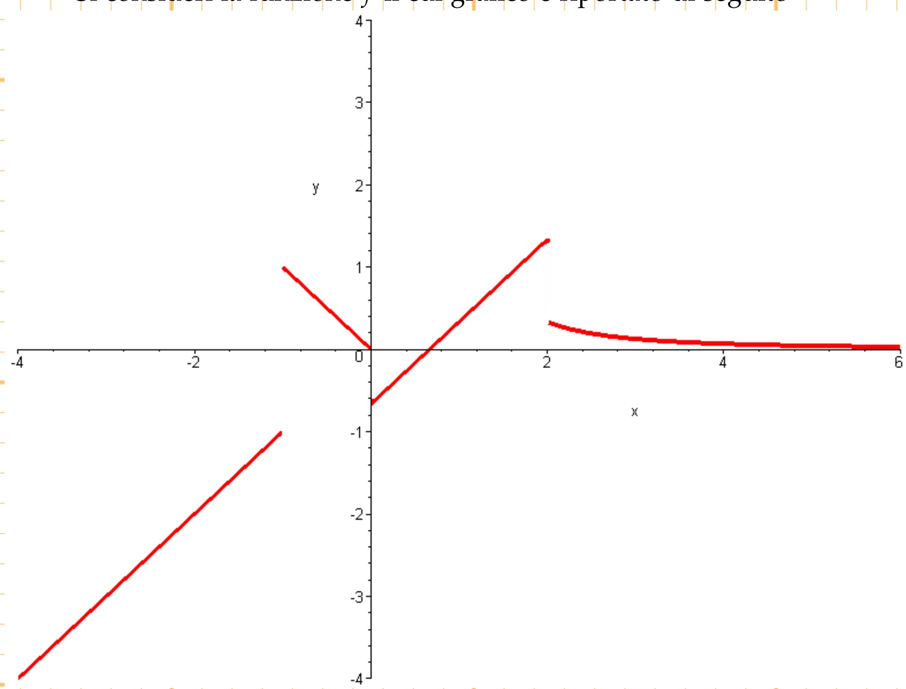
114.1 Per $a = 1.5$ determinare il campo di definizione di g

114.2 Per $a = 1.5$ disegnare il grafico di g

114.3 y Per $a = 5$ disegnare il grafico di g

115

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato di seguito



e la funzione g definita da

$$g(x) = f\left(\frac{6\sin(x)}{3x}\right)$$

115.1 Calcolare

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) =$$

115·2 Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) =$$
$$\lim_{x\to -\infty} g(x) =$$
$$\lim_{x\to 0} g(x) =$$

116

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x>0 \\ cx^2+dx & x<0 \end{cases}$$

116·1 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia continua e derivabile da sinistra. per qualche valore di a, b, c, d

116·2 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia continua e derivabile da destra per per qualche valore di a, b, c, d

116·3 Stabilire se è possibile definire $f(0)$ in modo che f sia continua e derivabile per qualche valore di a, b, c, d

117

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = x^2 e^x$$

117·1 Disegnare il grafico della funzione f.

117·2 Studiare l'invertibilità di f in un intorno di $x = 1$.

117·3 Calcolare, se esiste

$$(f^{-1})'(e)$$

118

118·1 Calcolare $\sqrt[5]{e}$ a meno di 0.00001

119

Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-t^4}\sqrt{|t-1|}}$$

e la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

119·1 Determinare il campo di definizione di F e calcolare i limiti di F agli estremi del suo campo di definizione

119·2 Disegnare il grafico di F

120

120·1 Dimostrare che una funzione costante ammette limite in ogni punto.

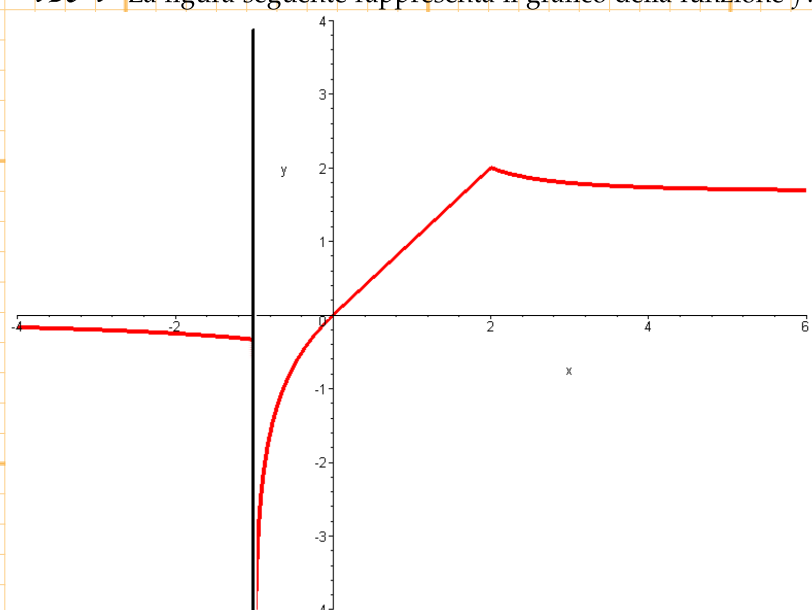
120·2 Dimostrare che il limite per $x \to 4$ di $f(x) = x$ non è π

120·3 Stabilire se esiste

$$\lim_{t \to 0} f(x)$$

dove $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$

120·4 La figura seguente rappresenta il grafico della funzione f.



Servendosi delle informazioni in esso contenute calcolare quanto valgono

$$\lim_{x \to -1} f(x) \quad , \quad \lim_{y \to 1} f(y) \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{t \to -\infty} f(t)$$

121

Studiare la continuità della funzione f in ognuno dei casi seguenti.

121·1

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ a & |x| \geq 1 \end{cases}$$

121·2

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

121·3

$$f(x) = E(\arctan(x))$$

121·4

$$D = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in D \\ a & x = 0 \end{cases}$$

121·5 $f(x) = g(h(x))$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \ln(1 + x^6)$$

122

Si consideri

$$f_k(x) = e^{-k^2x^2} + k^2e^x \qquad k \in \mathbb{R}$$

122·1 Disegnare il grafico di $g(x) = \frac{e^x}{x}$

122·2 Disegnare il grafico di $h_k(x) = 2e^{-k^2x^2}$

122·3 Confrontare i grafici di g ed h_k e determinare i punti per cui

$$-2xe^{-k^2x^2} + e^x > 0$$

122·4 Disegnare il grafico di f_k

123

Si consideri

$$f(x) = x + e^x$$

123·1 Disegnare il grafico di $f(x)$

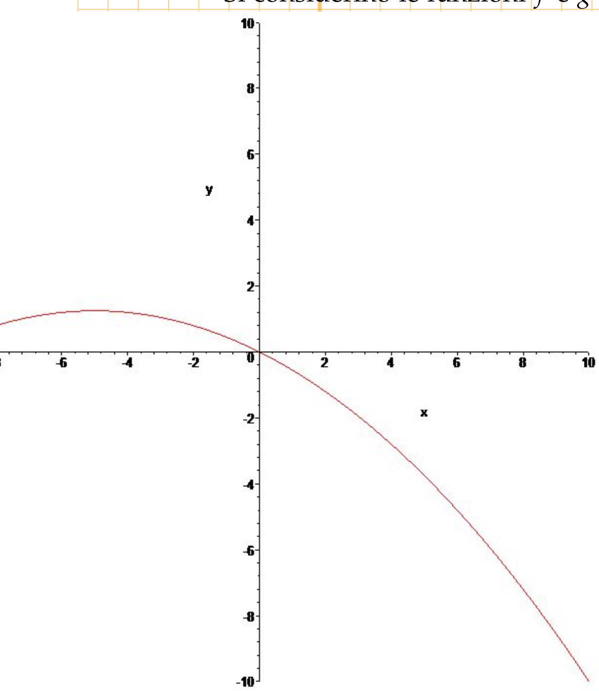
123·2 Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$

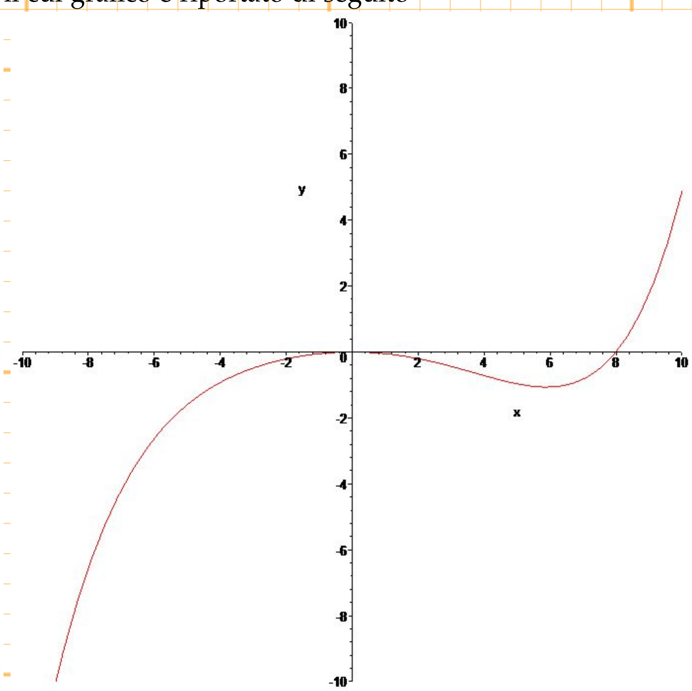
123·3 Verificare che $f(0) = 1$ e scrivere il polinomio di Taylor di f^{-1} di ordine 2 centrato in 1.

123·4 Stimare l'errore che si commette, quando $y \in [\frac{1}{e} - 1, 2 + e^2]$, sostituendo ad f^{-1} la retta tangente al suo grafico nel punto $(1, 0)$.

124

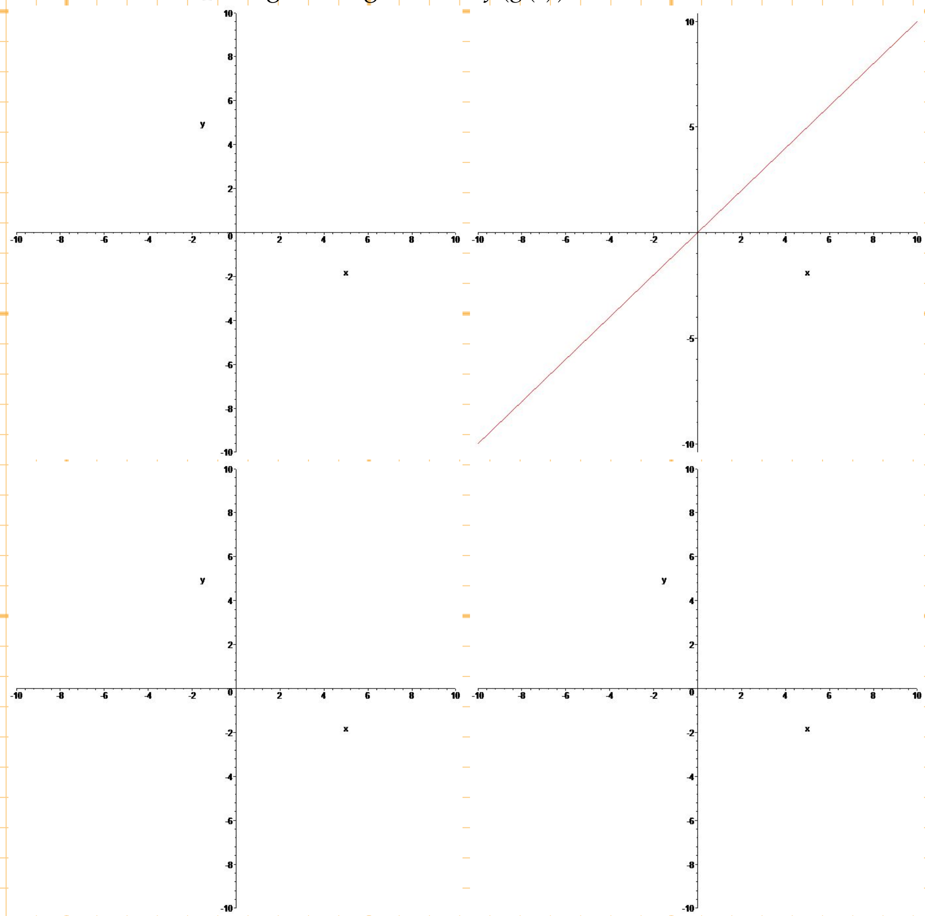
Si considerino le funzioni f e g il cui grafico è riportato di seguito





124·1 Disegnare il grafico di $f(x+1)$ e di $g(|x|+1)$

124·2 C_2Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$



124·3 D_2Disegnare il grafico di $|f(g(\cdot))|$

125

Si consideri una retta r su cui é fissata un'origine O ed una unità di misura u_ℓ. Sia u_t l'unità di tempo. Si consideri su r un punto P che si muove sulla retta con velocià $2\frac{u_\ell}{u_t}$ per $2u_t$, poi con velocià $1\frac{u_\ell}{u_t}$ per altre $5u_t$ ed infine con velocità $-\frac{u_\ell}{u_t}$ per $3u_t$.

125·1 Determinare la funzione s del tempo t che descrive la posizione del punto P rispetto ad O.

125·2 Determinare la funzione v del tempo t che descrive la velocità del punto P.

125·3 Determinare la funzione a del tempo t che descrive la variazione della velocità negli intervalli di tempo $[k, k+1]$ per $k = 0..9$ del punto P

125·4 Disegnare i grafico delle funzioni s, v a.

126

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ x & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0, x = 1 \end{cases}$$

126·1 Determinare

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = b \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = c$$

126·2 Determinare δ_ϵ in modo che $f(x) \in I(a,\epsilon)$ per ogni $x \in I^o(0,\delta_\epsilon)$

126·3 Determinare δ_ϵ in modo che $f(x) \in I(b,\epsilon)$ per ogni $x \in I^o(1,\delta_\epsilon)$

126·4 Determinare δ_ϵ in modo che $f(x) \in I(c,\epsilon)$ per ogni $x \in I^o(+\infty,\delta_\epsilon)$

126·5 per $g(x) = \arctan(x)$ calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} f(g(x))$$

127

Si consideri la funzione

$$f(s) = x \ln((\sin(s))^2 + |\sin(s)|) \qquad x \in \mathbb{R}$$

127·1 Determinare g tale che

$$g(\sin(t)) = f(t)$$

127·2 Disegnare il grafico di g e di f

127·3 Determinare il rango di g e di f

127·4 Determinare estremo superiore ed inferiore di f e precisare se f ammette massimo o minimo assoluto

127·5 Determinare un intervallo in cui f è invertibile, calcolarne l'inversa e disegnarne il grafico.

128

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln|x|) + \arctan\left(\frac{1}{\ln|x|}\right)$$

128·1 Studiare campo di definizione , continuità e derivabilità di f.

128·2 Calcolare la derivata di f.

128·3 Disegnare il grafico di f.

129

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x - (x^2 - 3x + 4)$$

129·1 y Studiare continuità e derivabilità di f e calcolare f' ed f''.

129·2 Disegnare il grafico di f''.

129·3 Disegnare il grafico di f'.

129·4 Disegnare il grafico di f

130

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x^3}}$$

130·1 Disegnare il grafico di f.

130·2 Disegnare il grafico di

$$\int_{0.1}^{x} f(t)dt$$

.

131

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2y + y^3$$

131·1 Calcolare il gradiente di f, se esiste.

131·2 Calcolare la derivata direzionale di f in $(1,2)$ lungo una direzione arbitraria (a,b).

131·3 Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di f sul triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

131·4 Calcolare l'integrale doppio di f su T.

132

132·1 Verificare, mediante la definizione, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e}{\ln(x+3)} = 0$$

132·2 Disegnare il grafico di

$$f(x) = \tan(\cos(x))$$

e determinarne l'inversa per $x \in (\pi, 2\pi)$ dopo aver verificato che f ristretta a $x \in (\pi, 2\pi)$ è invertibile.

132·3 Verificare, mediante la definizione, che

$$\lim_{x\to 2} e\ln(x-1) + \pi = \pi$$

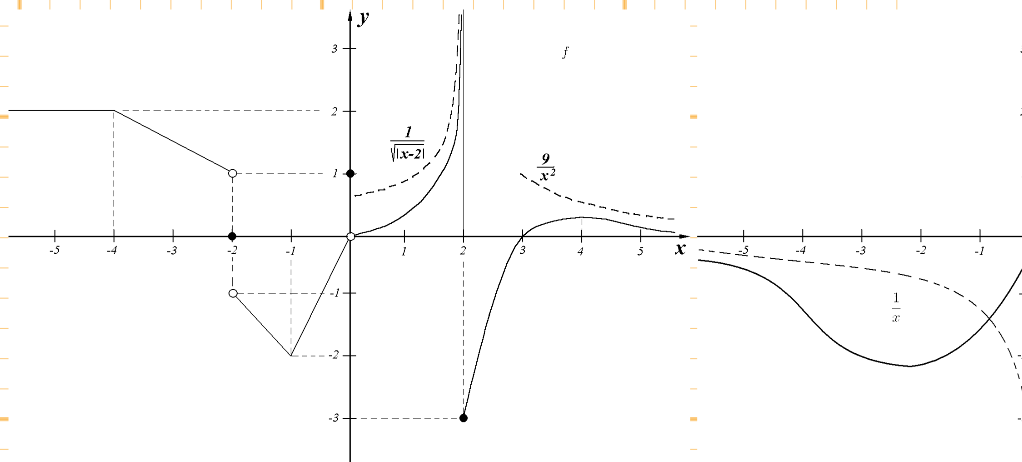
132·4 Disegnare il grafico di

$$f(x) = \cos(\tan(x))$$

e determinarne l'inversa per $x \in (0, \pi/4)$ dopo aver verificato che f ristretta a $x \in (0, \pi/4)$ è invertibile.

133

Siano f e g le funzioni i cui grafici sono rappresentati rispettivamente in figura.



133·1 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))$$

133·2 verificare mediante la definizione di limite che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

133·3 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$ per x positivo

133·4 yDisegnare il grafico dell'inversa di $f(g(\cdot))$ in $[3, +\infty)$

134

134·1 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x+x^2} - 1)}{\ln(1+2x^2)}$$

134·2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} (e^x - 1)^{-1} \ln(1+x)$$

134·3 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{\ln(1+x)}$$

134·4 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x^2)}$$

134·5 Calcolare al variare di a

$$\lim_{x\to 0} x(e^a x - 1)^{-1}$$

134·6 Calcolare al variare di b

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(bx)}$$

134·7 Calcolare al variare di a e b

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + x}{\sin(bx)}$$

134·8 Calcolare al variare di a, c e α, γ nei reali

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{ax^2 + c}{\alpha x^2 + \gamma}$$

135

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - E(x))(E(x) + 1)$$

135·1 Sviluppare l'espressione di f per $x \in [0,1)$, $x \in [1,2)$, $x \in [2,3)$, $x \in [-1,0)$, $x \in [-2,-1)$, $x \in [-3,-2)$

135·2 Sviluppare l'espressione di f per $x \in [n, n+1)$

135·3 Disegnare il grafico di f in $[-3,3]$.
Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = a \in [-3,3] \end{cases}$$

135·4 Determinare il limite di a_n

135·5 Descrivere il comportamento di a_n per $a \in \mathbb{R}$

136

136·1 Determinare una approssimazione razionale di $e^{0.2}$ a meno di $1/100$

136·2 Determinare un polinomio che approssimi e^x su $[0,1/2]$ a meno di $1/100$

137

Consideriamo un punto materiale P sospeso sulla superficie dell'acqua ad altezza h e definiamo

- - $x(t)$ l'altezza sull'acqua del punto P all'istante t.
- - $v(t) = \dot{x}(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}$ la velocità del punto P all'istante t.
- - $a(t) = \ddot{x}(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\dot{x}(t+\delta)-\dot{x}(t)}{\delta}$ l'accelerazione del punto P all'istante t.

Il punto P cade con accelerazione costante ed uguale a k_1 fino a che P è nell'aria, e con accelerazione costante ed uguale a k_2 quando P è nell'acqua.

137·1 y Disegnare il grafico di a in funzione del tempo

137·2 Disegnare il grafico di v in funzione del tempo supponendo che $v(t_0) = 0$

137·3 Disegnare il grafico di x in funzione del tempo supponendo che $v(t_0) = 0$ e $x(t_0) = h$

137·4 Disegnare il grafico di v in funzione del tempo supponendo che $v(t_0) = v_0 < 0$ e $x(t_0) = h$

137·5 Disegnare il grafico di x in funzione del tempo supponendo che $v(t_0) = v_0 > 0$ e $x(t_0) = h$

138

Si consideri

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ |z| \leq x\}$$

138·1 Determinare il volume di V

138·2 Determinare massimi e minimi assoluti di

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2$$

su V

139

139·1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \tan(x - 4)$

139·2 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \tan(|x| - 4)$

139·3 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \tan|x - 4|$

139·4 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arctan(\tan(|x| - 4))$

140

Si consideri un punto che si muove lungo la retta reale partendo dall'origine secondo le seguenti modalità:

- 1 inizialmente il punto si muove con velocità costante e positiva ed impiega 3 unità di tempo per raggiungere il punto a distanza 5 dall'origine.
- 2 per le successive 2 unità di tempo il punto resta fermo.
- 3 il punto si muove poi per 2 unità di tempo con velocità costante uguale a 0.5.
- 4 successivamente il punto impiega altre 3 unità di tempo per tornare nell'origine.
- 5 infine riparte con velocità costante uguale ad -1 .

140·1 Disegnare il grafico della funzione $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni istante t la posizione $x(t)$ del punto in quell'istante

140·2 Determinare quante volte il punto passa per il punto a distanza 2 dall'origine.

140·3 Determinare gli istanti in cui il punto passa a distanza 2 dall'origine.

Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ tale che

- 1$f(0) = -3$
- 2$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -3$
- 3$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

- 4$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -3$
- 5$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$
- 6 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$
- 7 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$

140·4 Disegnare il grafico di f

140·5 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è limitata?

140·6 yÈ sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 si annulla almeno una volta?

140·7 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è crescente?

140·8 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è decrescente?

140·9 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è invertibile?

141

Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita da:

- 1 $f(x) = x^2 + x$ per tutti gli x per i quali esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = 1/n$.
- 2 $f(x) = ax$ altrove.

141·1 Studiare la continuità di f in $x = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$

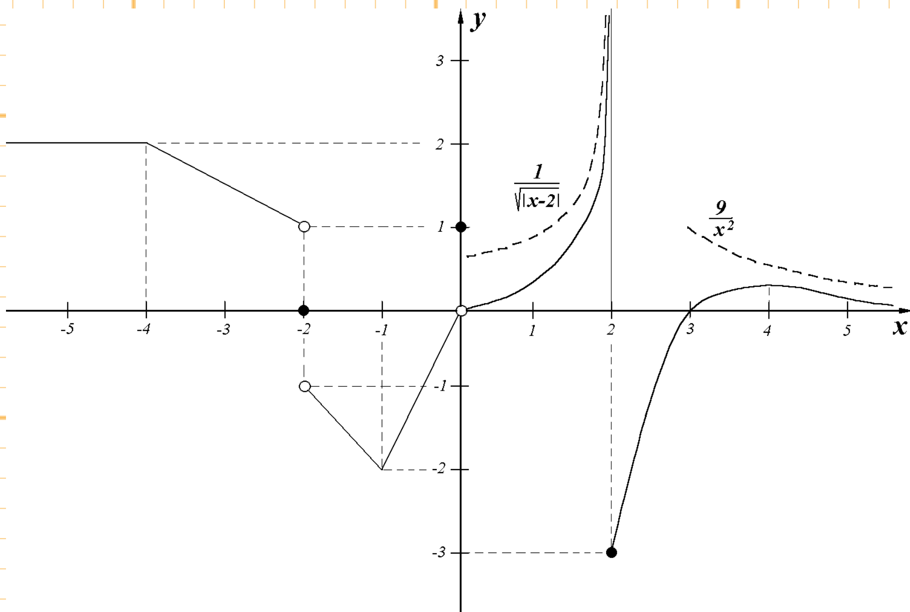
141·2 Studiare la derivabilità di f in $x = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$
Per il valore di a trovato al punto precedente

141·3 Studiare la continuità di f

141·4 yStudiare la derivabilità di f

142

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui grafico è di seguito riportato



142·1 Disegnare il grafico di $\ln(f(x))$

143

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0 \\ a & x = 0 \\ x+1 & 0 < x < 1 \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x \geq 1 \end{cases}$$

143·1 Studiare la continuità di f

143·2 Disegnare il grafico di f

143·3 Prolungare per continuità la funzione $f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^4}$, ove possibile.

Si consideri la funzione

$$e^{\frac{1}{1+x^3}}$$

143·4 Studiare l'invertibilità di f e determinarne l'inversa.

143·5 Calcolare $(f^{-1})'(e)$

144

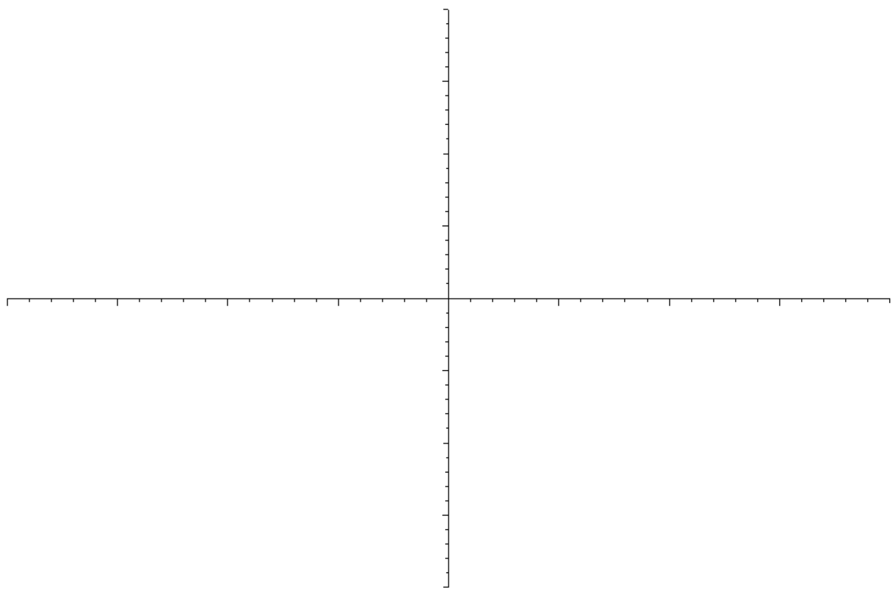
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in (0, \pi/2] \\ x\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) & x \in [-\pi/2, 0] \end{cases}$$

144·1 Studiare la continuità e la derivabilità di f

144·2 Studiare il segno di f'

144·3 Disegnare il grafico di f



144·4 Determinare il polinomio di Mclaurin di f di ordine 3

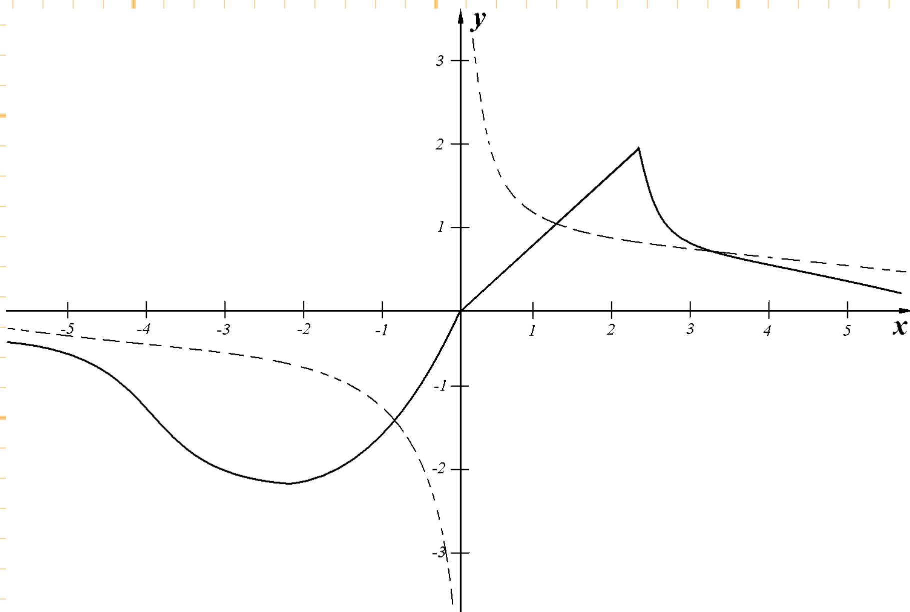
144·5 Stabilire il più grande valore di $n \in \mathbb{N}$ in corrispondenza del quale è possibile considerare il polinomio di McLaurin di f

145

145·1 Disegnare il grafico di $f(\sin(x))$

145·2 Disegnare il grafico di $\arctan(f(x))$

Si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui grafico è di seguito riportato



145·3 Disegnare il grafico della funzione $h(f(x))$ essendo h la funzione ottenuta restringendo g all'insieme $\mathbb{R}_-$

145·4 Disegnare il grafico dell'inversa di f ristretta all'insieme $\mathbb{R} \setminus \{[-2,3]\}$

145·5 Disegnare il grafico dell'inversa di $\frac{1}{f}$ ristretta all'insieme $\mathbb{R} \setminus \{[-2,3]\}$

146

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0 \\ a & x = 0 \\ x+1 & 0 < x < 1 \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x \geq 1 \end{cases}$$

146·1 yStudiare la continuità di f

146·2 Disegnare il grafico di f

146·3 Prolungare per continuità la funzione $f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^4}$, ove possibile.

147

Si consideri la funzione

$$e^{\frac{1}{1+x^3}}$$

147·1 Disegnare il grafico di f

147·2 Studiare l'invertibilità di f e determinarne l'inversa.

147·3 Calcolare $(f^{-1})'(e)$

148

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in (0, \pi/2] \\ x\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) & x \in [-\pi/2, 0] \end{cases}$$

148·1 Studiare la continuità e la derivabilità di f

148·2 Studiare il segno di f'

148·3 Disegnare il grafico di f

148·4 Determinare il polinomio di Mclaurin di f di ordine 3

148·5 Stabilire il più grande valore di $n \in \mathbb{N}$ in corrispondenza del quale è possibile considerare il polinomio di McLaurin di f

149

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\arctan(x)}$$

149·1 Disegnare il grafico di f.

149·2 stabilire se e dove f è crescente.

149·3 stabilire se e dove f è invertibile.

149·4 disegnare dove è possibile il grafico della o delle inverse.

149·5 Calcolare, se esiste, la derivata dell'inversa locale in $\frac{4}{e\pi}$

150

Siano

$$f(x) = 3x - x^2 + R_1 \qquad g(x) = x - 2x^2 + R_2$$

essendo R_1 ed R_2 infinitesimi di ordine superiore al secondo

150·1 Verificare che

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

è prolungabile per continuità in 0.

150·2 Verificare che

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

così prolungata, è derivabile in 0

150·3 Determinare un polinomio di primo grado p tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + R_3$$

150·4 Verificare che R_3 è infinitesimo di ordine superiore al primo.

151

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 - (x^2 - 1)^2)^2$$

151·1 Disegnare il grafico di f .

151·2 Trovare l'inversa di f ristretta a $[10, +\infty]$

151·3 Trovare l'inversa di f ristretta a $[-1, 0]$

151·4 Scrivere l'enunciato del criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

151·5 Usando l'enunciato precedente, trovare una condizione equivalente al fatto che una successione a_n non ammette limite reale.

152

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x^\alpha}$$

152·1 stabilire se f può essere prolungata per continuità nell'origine.

152·2 stabilire se f, così prolungata, è derivabile nell'origine.

Si consideri la funzione $f(x) = x^2$

152·3 Determinare $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

152·4 Si consideri la parabola di equazione $y = x^2 + 2x$ e l'intervallo $[a, b]$ Determinare in quale punto c dell'intervallo $[a, b]$ la retta tangente al grafico della parabola nel punto $(c, f(c))$ è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a)), (b, f(b))$.

153

153·1 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + x$$

153·2 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^6} + (1+x)^6$$

153·3 Verificare che $f(x) = x^5 + x$ è invertibile in $[1, +\infty)$ e disegnare il grafico dell'inversa.

153·4 Calcolare $(f^{-1})'(2)$

153·5 Calcolare il limite della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n!}$

154

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x(1 + \ln|1 + x|)$$

154·1 Calcolare $f'(x)$

154·2 Calcolare $f''(x)$

154·3 Studiare il segno di $f''(x)$ confrontando i grafici delle funzioni $\frac{2x+1}{(1+x)^2}$ e $-1 - \ln(|1 + x|$

154·4 Disegnare il grafico di f'

154.5 Disegnare il grafico di f.

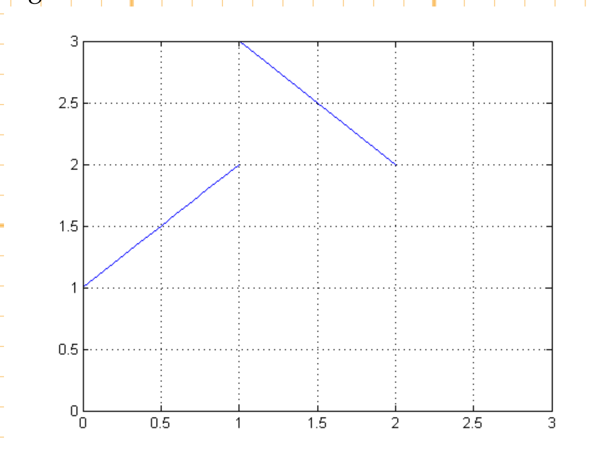
154.6 Determinare il polinomio di McLaurin di f di ordine 2.

154.7 Determinare il resto relativo al polinomio di McLaurin di f di ordine 2 sia nella forma di Peano che nella forma di Lagrange.

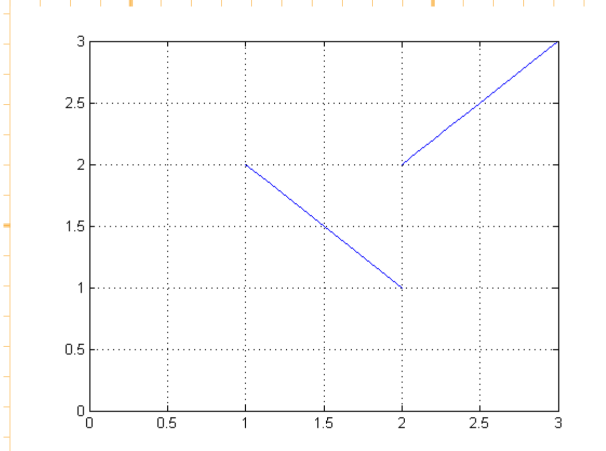
154.8 Stimare il resto di Lagrange di ordine 2 sull'intervallo $[-1/2, 1/2]$
.

155

Si considerino le funzioni f e g i cui grafici sono, rispettivamente, i seguenti:



f



g

155.1 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$ e di $g(f(\cdot))$.

155.2 Determinare, una espressione esplicita per f; stabilire se è invertibile e determinarne esplicitamente l'inversa.

155.3 Stabilire se è vero che g è invertibile e, in caso affermativo, disegnare il grafico di $(g^{-1}(\cdot))$.

155.4 Determinare il luogo dei punti del piano tali che

$$f(x) = g(y)$$

156

Si consideri la funzione

$$f(x) = E(x)\Big(2x - E(x) - 1\Big)$$

(Dove E indica la funzione parte intera).

156·1 Disegnare il grafico di f

156·2 Studiare la continuità di f in $x_0 = 3$

156·3 Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}$

156·4 Determinare, per $\epsilon \in (0, 1)$ un intorno di 2 in cui $|f(x) - f(2)| \leq \epsilon$

156·5 Determinare, per $\epsilon = 1.5$ un intorno di 2 in cui $|f(x) - f(2)| \leq \epsilon$

156·6 Determinare, per $\epsilon = 1.5$ il più grande intorno di 1 in cui $|f(x) - f(1)| \leq \epsilon$

156·7 $_3$ Studiare la derivabilità di f in $x_0 = 3$

156·8 Studiare la derivabilità di f in $\mathbb{R}$

157

Si considerino le funzioni

$$h(x) = \ln\left(\frac{|x|}{1+x^2}\right) \qquad , \qquad f(x) = \arctan\left(e + h(x)\right)$$

157·1 Disegnare il grafico di f

157·2 Prolungare per continuià f ove possibile

157·3 Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di f

157·4 Determinare una semiretta, restringendo f alla quale si ottenga una funzione, che chiameremo g, che sia invertibile.

157·5 Calcolare g^{-1} precisandone campo di definizione e rango.

157·6 Tenendo conto che $h(2) = \ln(2/5)$, calcolare, se esiste, $(h^{-1})'(\ln(2/5))$

157·7 $_4$ Sia ϕ una funzione tale che $\phi'(x) = f(x)$ con $\phi(1) = 3$ e $\phi(-1) = -1$. Disegnare il grafico di ϕ

158

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\arctan(x)}$$

158·1 Calcolare f' e studiarne il segno

158·2 Disegnare il grafico di f

158·3 Sia $x(k)$ la soluzione dell' equazione

$$f(x) = k$$

Disegnare il grafico di $x(k)$.

158·4 Dopo averla prolungata per continuità, determinare il polinomio di McLaurin di ordine 4 di

$$f(x) = e^{1+2\ln|x|}$$

159

159·1 Determinare l'ordine di infinitesimo in 0 di

$$f(x) = \ln(1+x^4) - ae^{x^3} + be^{x^2}$$

159·2 Determinare un numero razionale che approssimi e a meno di 10^{-5}

159·3 Sia

$$e_n = \sum_0^n \frac{1}{k!}$$

Usando la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange

- -Determinare una espressione di

$$R_n = e - e_n$$

- - Determinare un minorante ed un maggiorante di R_n
- - Verificare che e_4 approssima e con una cifra decimale esatta.

160

160·1 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{(\sqrt{|2-|x||-1})}$$

160·2 Determinare l'inversa di f ristretta a $[-1, 0]$

161

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

161·1 Calcolare $\ell = \lim_{x\to 0} f(x)$.

161·2 Verificare che $\ell = \lim_{x\to 0} f(x)$ mediante la definizione.

161·3 Definire f in modo che f sia continua in 0

161·4 Disegnare il grafico di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} = 3$, $\lim_{x\to-\infty} = 3$, $f(0) = 3$

161·5 Disegnare il grafico di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ strettamente crescente per $x < 0$ e per $x > 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} = 3$, $\lim_{x\to-\infty} = 3$, $f(0) = 3$

161·6 Disegnare il grafico di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ che non ammetta massimo assoluto tale che $\sup f(x) = 5$, $\min f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} = 3$, $\lim_{x\to-\infty} = 3$, $f(0) = 3$

162

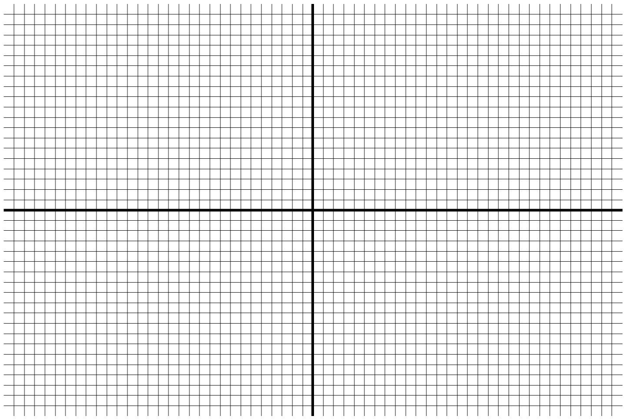
162·1 Disegnare il grafico della funzione $f(y) = |1 - |1 - |y - 1|||$

162·2 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |1 - |1 - |y - 1|||$

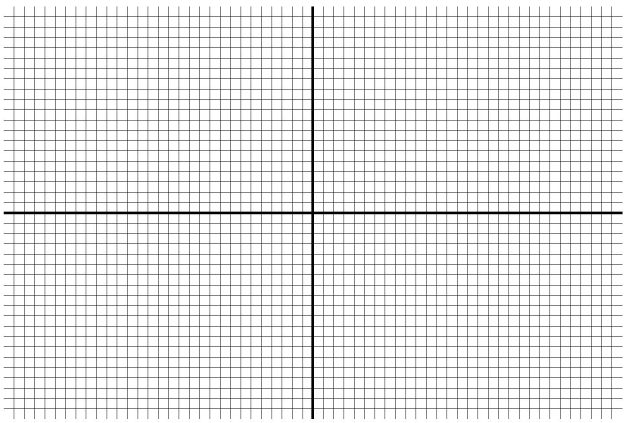
162·3 Determinare l'inversa della funzione $f(y) = |1 - |1 - |y - 1|||$ ristretta a $[0, 1]$ e disegnarne il grafico

162·4 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(\arctan(e^{-x^2}))$

162·5 Disegnare il grafico della funzione $f(y) = |1 - |1 - |y - 1|||$



162·6 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |1 - |1 - |y - 1|||$



162·7 Determinare l'inversa della funzione $f(y) = |1 - |1 - |y - 1|||$ ristretta a $[0,1]$ e disegnarne il grafico

162·8 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(\arctan(e^{-x^2}))$

162·9 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arctan(\tan(x^2))$

162·10 Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$ e verificare il risultato mediante la definizione di limite.

162·11 Calcolare $\lim \frac{2^n}{n!}$

---

④

162·12 Sia $f(x) = \arctan(\ln(x))$, definire f in modo che f sia continua in 0

162·13 Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 1$ di $\sqrt[4]{x^3 - 1}$

162·14 Prolungare per continuità $|\arctan(\frac{1}{x^2-x})|$ in tutti i punti ove questo è possibile.

---

⑤

162·15 Calcolare la derivata di $f(x) = x^x$.

162·16 Calcolare la derivata di $f(x) = \log_x e$.

162·17 Calcolare la derivata di $f(x) = \log_x x$.

162·18 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arctan(\tan(x^2))$

162·19 Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$ e verificare il risultato mediante la definizione di limite.

162·20 Calcolare $\lim \frac{2^n}{n!}$

162·21 Sia $f(x) = \arctan(\ln(x))$, definire f in modo che f sia continua in 0

162·22 Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 1$ di $\sqrt[4]{x^3 - 1}$

162·23 Prolungare per continuità $|\arctan(\frac{1}{x^2-x})|$ in tutti i punti ove questo è possibile.

162·24 Calcolare la derivata di $f(x) = x^x$.

162·25 Calcolare la derivata di $f(x) = \log_x e$.

162·26 Calcolare la derivata di $f(x) = \log_x x$.

163

163·1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Formalizzare la negazione della proposizione

$$\forall \delta < 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad f(x) - 3 < \delta \quad \forall x > \varepsilon$$

163·2 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin\Big(\sin\big(1 + \arcsin(x)\big)\Big)$$

163·3 Calcolare giustificando il risultato.

$$\lim_{x\to+\infty} x - E(x)$$

163·4 Sia

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Determinare esplicitamente a_n in funzione di n. Calcolare $\lim a_n$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \cos(\sqrt{x})}{x} & x > 0 \\ a\dfrac{\sin(\sin(x))}{x^\alpha} & x < 0 \end{cases}$$

163·5 Determinare per quali valori di a e di α è possibile prolungare f per continuità e stabilire se la funzione così prolungata è derivabile.

164

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\sin(x))$$

e siano $P_1(x)$ e $P_2(x)$ i polinomi di McLaurin di f di ordine 1 e 2, rispettivamente.

164·1 Calcolare la derivata prima e seconda di f

164·2 Determinare $P_1(x)$ e $P_2(x)$

164·3 Determinare $\delta > 0$ in modo che si possa approssimare f con la sua retta tangente in $[-\delta, \delta]$ a meno di 0.01

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x}(x^4 - x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = e^x f'(x)$$

164·4 Determinare $g(x)$,$g'(x)$, $g''(x)$

164·5 Disegnare i grafici di g', g ed f riportandoli sullo stesso sistema di riferimento.

165

165·1 Disegnare il grafico di

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2 - 5x + 6}$$

165·2 Disegnare il grafico di

$$f(x) = x^x$$

165·3 Disegnare il grafico di

$$f(x) = \arctan(\ln|x|) + \arctan\left(\frac{1}{\ln|x|}\right)$$

165·4 Disegnare il grafico di

$$f(x) = \log_x 3$$

166

166·1 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -\sqrt{\log_{0.5}(||x| - 1|)}$$

166·2 Determinare l'inversa di f ristretta a $[-1, 0]$
Siano $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 10] \to \mathbb{R}$ tali che

- - f è surgettiva su $[0, 4]$
- - f è crescente in $[0, 1]$ e decrescente in $[1, 3]$
- - $f(0) = 1$
- - g è crescente in $[0, 10]$
- - g è surgettiva su $[1, 2) \cup [3, 5]$
- - $g(7) = 3$

166·3 Disegnare il grafico di f e di g

166·4 Disegnare il grafico di $g(f(\cdot))$

167

Si considerino le funzioni $f(x) = \ln(1 + x)$ e $g(x) = \frac{1}{x-1}$

167·1 Disegnare il grafico di f e di g

167·2 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$.

167·3 Disegnare il grafico di $g(f(\cdot))$

itn -[5] Disegnare il grafico di $f(g(\cdot)+3)$.

itn -[5] Disegnare il grafico di $g(|\cdot|))$

168

168·1 Calcolare $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ e dimostrare il risultato mediante la definizione di limite.

168·2 Disegnare il grafico di $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

168·3 Disegnare il grafico di $f^{-1}(x)$, se esiste, precisando dove è definita.

168·4 Disegnare il grafico di $f(f^{-1}(\cdot))$, se esiste, precisando dove è definita.

168·5 Disegnare il grafico di $(f^{-1}(f(\cdot)))$, se esiste, precisando dove è definita.

168·6 È noto che $x = 3+\epsilon_1$ con $\epsilon_1 \in [-1/10, 1/10]$ e che. $y = 2+\epsilon_1$ con $\epsilon_1 2 \in [-1/100, 1/100]$ Determinare il minimo valore che xy può assumere.

Determinare il massimo valore che xy può assumere.

Determinare con quale errore è noto xy

168·7 Siano $\varphi(x) = 1+x+x^2\omega(x)$ e $\psi(x) = 3+2x+x^3\omega(x)$ con ω infinitesima per $x\to 0$. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-1/3\psi(x)}{x}$$

168·8 Siano $\varphi(x) = x+x^2\omega(x)$ e $\psi(x) = x+x^3\omega(x)$ con ω infinitesima per $x\to 0$. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{x^2}$$

168·9 Siano $\varphi(x) = x^2\omega(x)$ e $\psi(x) = x^3\omega(x)$ con ω infinitesima per $x\to 0$. Mostrare che $f+g$ è infinitesima di ordine superiore a 2.

168·10 Mostrare che il prodotto di una funzione infinitesima per $x\to 0$ per una funzione limitata, è infinitesimo.

169

Sia

$$f(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{e^{(x^a)}-b}{(e^x)^c-d}$$

169·1 Stabilire per quali valori di a, b, c, d f è continua su tutto $\mathbb{R}$.

169·2 Stabilire per quali valori di a, b, c, d f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

169·3 Calcolare α'

169·4 Calcolare β'

169·5 -[3]Calcolare f'

169·6 Definire cosa si intende dicendo che f è uniformemente continua su $[0, 1]$

169·7 Verificare che $f(x) = 5x + 1$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$

169·8 Verificare che $f(x) = \ln(x)$ è uniformemente continua su $[1, +\infty)$

169·9 Verificare che $f(x) = \ln(x)$ nonè uniformemente continua su $(0, 1])$

169·10 Verificare che

$$\lim_{t\to+\infty} \sin(t)$$

non esiste

169·11 Verificare che

$$\lim_{t\to 0} \sin(1/t)$$

non esiste

169·12 Calcolare

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}$$

170

Sia

$$x(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad , \quad y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

170·1 Disegnare il grafico di x

170·2 Disegnare il grafico di y

Sia $p(t) = (x(t), y(t))$ la posizione nel piano di un punto all'istante t

170·3 Stimare la distanza di $x(t)$ dall'origine per $t = 1/2$

170·4 Stimare la distanza di $y(t)$ dall'origine per $t = 1/2$

170·5 Stimare la distanza di $p(t)$ dall'origine per $t = 1/2$
Sia $f(x) = \tan(x)$

170·6 Determinare f' in funzione di f

170·7 Determinare f'' in funzione di f

170·8 Determinare f''' in funzione di f

170·9 Determinare f'''' in funzione di f

170·10 Determinare $f'(0)$ in funzione di f

170·11 Determinare $f''(0)$ in funzione di f

170·12 Determinare $f'''(0)$ in funzione di f

170·13 Determinare $f''''(0)$ in funzione di f

170·14 Determinare Il polinomio di Mc Laurin di f di ordine 3

170·15 Approssimare $\tan(1/2)$ mediante Il polinomio di Mc Laurin di f di ordine 3

170·16 Stimare l'errore che si commette approssimando $\tan(1/2)$ mediante Il polinomio di Mc Laurin di f di ordine 3

170·17 Determinare l'ordine di infinitesimo di $\ln(\ln(e(1+x^4))$

170·18 Confrontare l'ordine di infinitesimo di $x^x - 1$ con 1

170·19 Confrontare l'ordine di infinitesimo di $x^x - 1$ con $1/2$

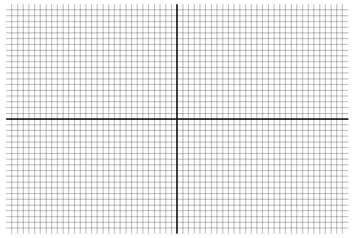
170·20 Determinare l'ordine di infinitesimo di $\sin^2(x) - \tan^2(x)$

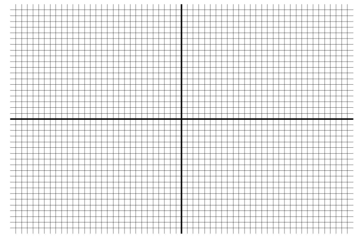
171

Sia

$$f_k(x) = \ln(x) + k(4\sqrt{x} + x) \qquad f_k'(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{k}{\sqrt{x}} + k \qquad f_k''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{k}{x\sqrt{x}}$$

171·1 Disegnare il grafico di f_k'' per $k > 0$ e per $k = 0$,





171·2 Per $k < 0$, determinare i limiti agli estremi del campo di definizione e gli zeri di f_k''

171·3 Per $k < 0$, calcolare f_k''' e determinarne i punti ed i valori di massimo relativi di f_k''

171·4 Per $k < 0$, disegnare il luogo dei punti del piano in cui f_k'' assume massimo relativo

171·5 Disegnare il grafico di f_k'' per $k = -10$,

171·6 Disegnare il grafico di f_k'' per $k = -1$,

171·7 Disegnare il grafico di f_k'' al variare di k

171·8 Disegnare il grafico di f_k' per $k = -10$,

171·9 Disegnare il grafico di f_k' per $k = -1$,

171·10 Disegnare il grafico di f_k' al variare di k

171·11 Disegnare il grafico di f_k per $k = -10$,

171·12 Disegnare il grafico di f_k per $k = -1$,

171·13 Disegnare il grafico di f_k al variare di k

172

Si consideri la funzione

$$f(t) = e^{-t}\sin(t^2)$$

172·1 Determinare il polinomio di McLaurin di f di ordine 2 e scrivere il relativo resto nella forma di Peano.

172·2 Calcolare, usando il polinomio di McLaurin di ordine 2,

$$\int_0^{1/2} f(t)dt$$

e stimare l'errore commesso.

173

Si consideri la funzione

$$f(x) = |\ln(|x^2 - 1||$$

173.1 Disegnare il grafico di f

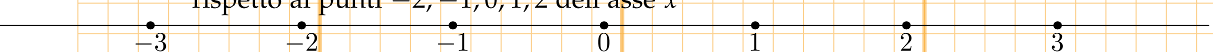
173.2 Determinare i punti x_i tali che $f(x_i) = 2$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$x_1 =$, $x_2 =$, $x_3 =$, $x_4 =$, $x_5 =$, $x_6 =$

173.3 Determinare i punti y_i tali che $f(y_i) = 3$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$y_1 =$, $y_2 =$, $y_3 =$, $y_4 =$, $y_5 =$, $y_6 =$

173.4 Determinare la posizione dei punti x_1, x_2, x_3, x_4 , x_5, x_6 rispetto ai punti $-2, -1, 0, 1, 2$ dell'asse x



173.5 Determinare la posizione dei punti y_1, y_2, y_3, y_4 , y_5, y_6 rispetto ai punti $-2, -1, 0, .1, 2$ dell'asse x

Siano $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ I punti, tra quelli trovati al punto precedente, che appartengono all'intervallo $[0, 1]$ e si consideri la funzione

$$g = f\Big|_{[\bar{x}, \bar{y}]}$$

173.6 Disegnare il grafico della funzione

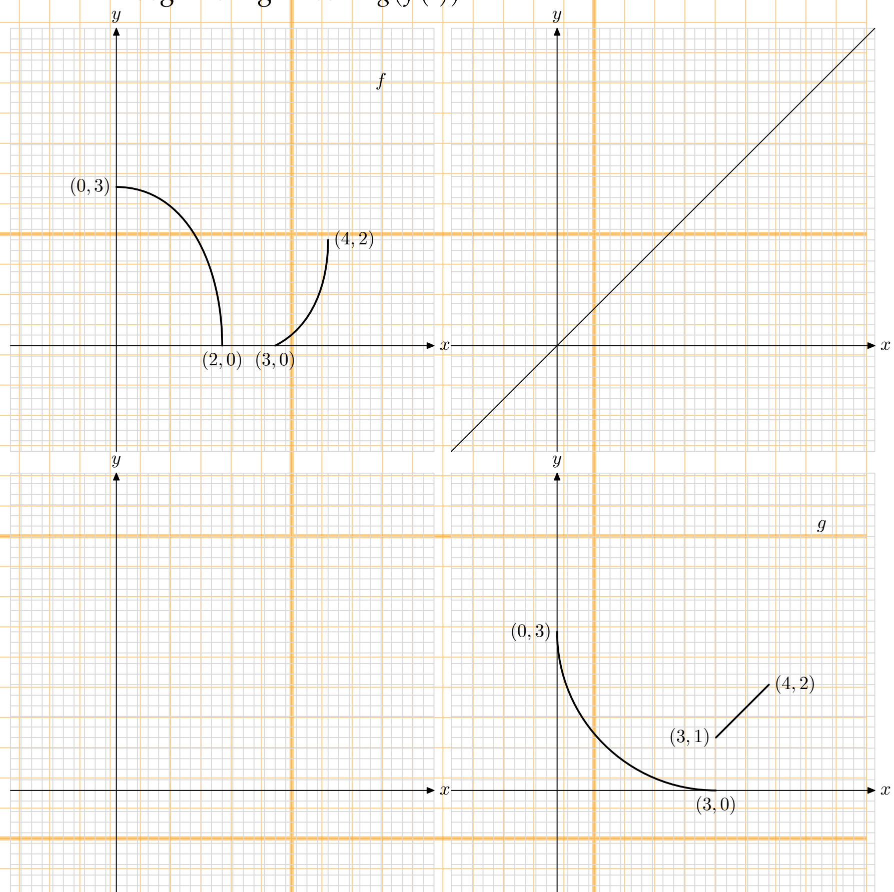
$$\tan(g(\cdot))$$

173.7 Verificare che g è invertibile e disegnare il grafico di g^{-1}

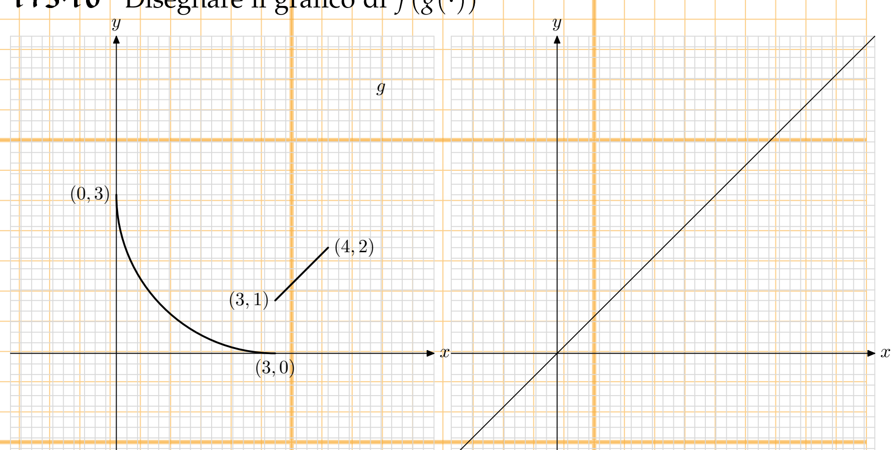
173.8 Determinare una espressione di g^{-1} (in termini di funzioni elementari)

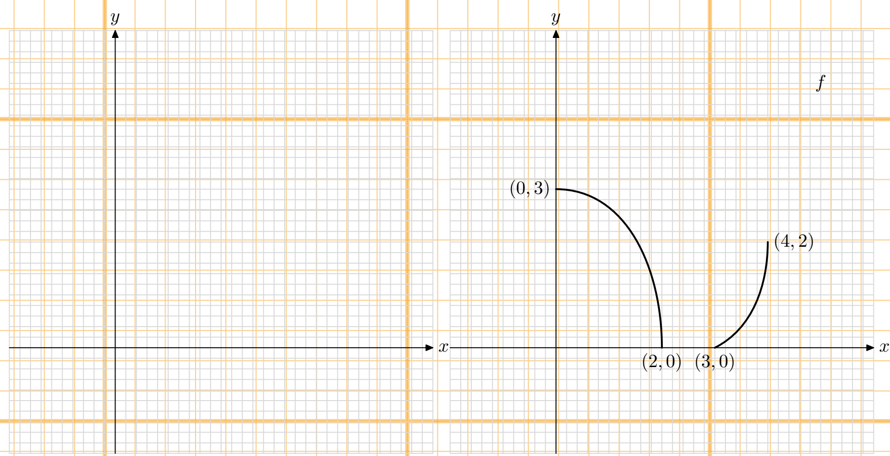
Si considerino le funzioni f e g i cui grafici sono riportati nelle figure seguenti

173.9 Disegnare il grafico di $g(f(\cdot))$

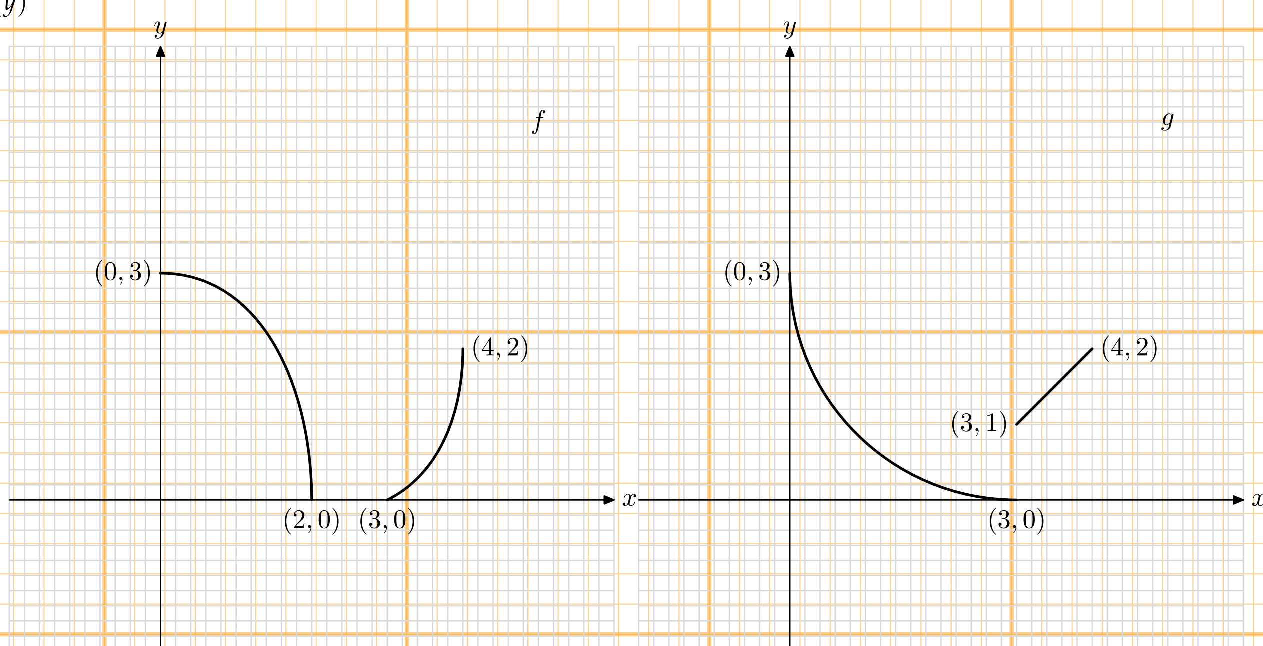


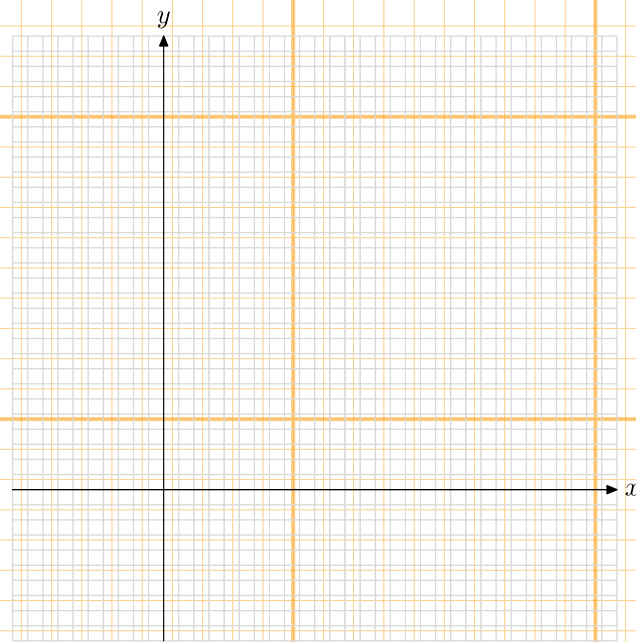
173.10 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$

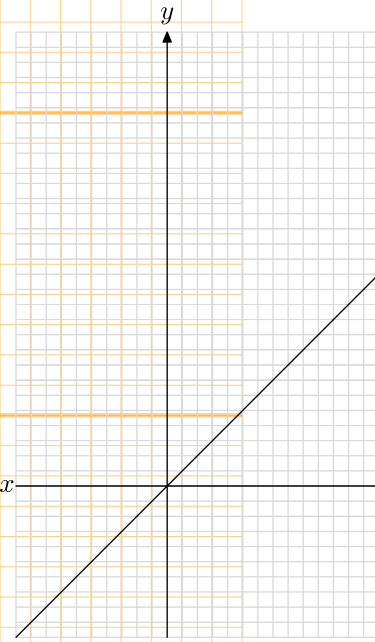




173·11 Disegnare il luogo dei punti del piano (x, y) tali che $f(x) = g(y)$







174

174·1 Calcolare

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin^2((x-a)/3)}{(x-a)^2}$$

174·2 Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\ln(1+x))}{x}$$

174·3 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - e^{-x^2}}{x^\alpha}$$

174·4 Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\sin(x) - 1}$$

174·5 Calcolare

$$\lim_{x \to -\pi/2} \sqrt{\sin(x) - 1}$$

174·6 Calcolare e verificare mediante la definizione

$$\lim_{x \to +\infty} E(x)$$

174·7 Calcolare e verificare mediante la definizione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x^2}$$

174·8 Calcolare e verificare mediante la definizione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{\sqrt{x}}$$

174·9 Calcolare e verificare mediante la definizione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x}$$

175

175·1 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x - E(x)$$

175·2 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} E(x - E(x))$$

175·3 Calcolare al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\sin(x))^\alpha}{(e^x - \cos(x))^\beta}$$

175·4 Calcolare e verificare mediante la definizione

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(\ln(1+x^2))$$

175·5 Calcolare e verificare mediante la definizione, precisando se si tratta di un massimo

$$\sup\{\arctan(\ln(1+x^2))\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$$

175·6 Calcolare e verificare mediante la definizione, precisando se si tratta di un minimo

$$\inf\{\arctan(\ln(1+x^2))\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$$

176

176·1 Calcolare, al variare di $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(x)}{x^n}$$

176·2 Sia

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2} - \cos(x)}{x^n}$$

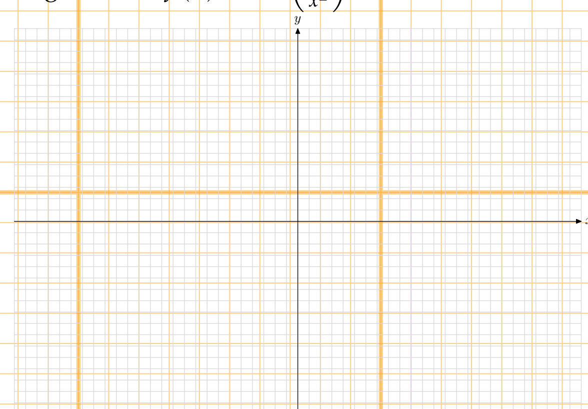
Stabilire per quali $n \in \mathbb{Z}$ è possibile prolungare f per continuità.

176·3 Sia g_n il prolungamento per continuità di f_n
Calcolare, se esistono, $g_n'(0)$, $g_n''(0)$, $g_n'''(0)$,

176·4 Calcolare ,al variare di $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

176·5 Disegnare il grafico di $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$



176·6 Dimostrare per induzione che, per $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

176·7 Calcolare, per $x = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k$$

e giustificare il risultato

176·8 Determinare, giustificando le affermazioni, il polinomio di McLaurin di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ di ordine $n \in \mathbb{N}$

176·9 Calcolare, precisando dove esistono, le derivate delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \arctan(\ln(x))$$

$$f(x) = \arctan(\tan(x))$$

$$f(x) = x^{\sin(x)}$$

$$f(x) = \sin(\sqrt{x-2})$$

$$f(x) = \sqrt{\sin(x) - 2}$$

$$f(x) = E(x)$$

177

Si consideri la funzione g definita da

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x^3 + x + 4} & -1 < x < 1 \\ x - 2 & 1 \leq 4 \\ -1 & 4 < x \end{cases}$$

177·1 Disegnare il grafico di h

177·2 Disegnare il grafico della funzione continua g di cui h è la derivata prima tale che$g(0) = 0$

177·3 Disegnare il grafico della funzione continua f di cui h è la derivata seconda tale che$f(0) = f'(0) = 0$

177·4 Disegnare il grafico di $f(x) = \arctan(\cot x))$

177·5 Determinare, utilizzando la formula di Taylor un numero razionale che approssimi $\ln(0.5)$ con un errore inferiore a 0.01

177·6 Approssimare a meno di $1/100$ $\ln(\sin(2 \arctan(1)/3))$

177·7 Esprimere $\tan(x)$ utilizzando il polinomio di MacLaurin di ordine 2 ed il relativo Resto nella forma di Peano

177·8 Esprimere $\sin(x)$ utilizzando il polinomio di MacLaurin di ordine 6 ed il relativo Resto nella forma di Peano

177·9 Esprimere $\cos(x)$ utilizzando il polinomio di MacLaurin di ordine 5 ed il relativo Resto nella forma di Peano

177·10 Calcolare $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ utilizzando l'algoritmo della divisione di polinomi, avendo ordinato dividendo e divisore secondo potenze crescenti.

177·11 Utilizzando il risultato precedente Esprimere $\tan(x)$ utilizzando il polinomio di MacLaurin di ordine 5 ed il relativo Resto nella forma di Peano

178

178·1 Disegnare il grafico di $f_1(x) = |x^2 - 1|$

178·2 Disegnare il grafico di $f_2(x) = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$ precisandone il campo di definizione

178·3 Disegnare il grafico di $f_3(x) = \min\{f_2(x), f_1(x)\}$ precisandone il campo di definizione

178·4 Disegnare il luogo dei punti delpiano per cui $|y| \leq f_3(x)$

178·5 Determinare il più grande intervallo contenente 2 in cui f_3 è invertibile. e sia f_4 la funzione f_3 ristretta a tale intervallo.

178·6 Disegnare il grafico di $f_5 = f_4^{-1}$ precisandone il campo di definizione

178·7 Determinare f_5
itn -[3] Disegnare il grafico di $f_6(x) = (x^2 - 1)^2$ precisandone il campo di definizione
itn -[3] Disegnare il grafico di $f_7(x) = |\log_2(|x|)|$ precisandone il campo di definizione
itn -[5] Disegnare il grafico di $f_8 = f_7(f_6(\cdot))$ precisandone il campo di definizione
itn -[5] Disegnare il grafico di $f_9 = f_6 f_7(\cdot))$ precisandone il campo di definizione

179

179·1 Verificare mediante la definizione di limite che

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$$

179·2 Dimostrare che

$$\lim_{x \to 2} x^2 \neq 1$$

Sia $f(x) = x^2 - 8$ per $x > 3$ e $f(x) = x - 2$ per $x < 3$

179·3 Determinare $\delta > 0$ tale che $|f(x) - 1| < \epsilon$ se $|x - 3| < \delta$

179·4 Determinare $\delta > 0$ tale che $|f(x) + 7| < \epsilon$ se $|x - 1| < \delta$

179·5 Definire f nel punto 3 in modo che risulti continua.

179·6 Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^3)}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2} =$$

179·7 Calcolare

$$\lim_{x \to 0} E(x)$$

179·8 Studiare la continuità di $E(x)$

179·9 Determinare $\delta > 0$ in modo che

$$\frac{x^4 + x + 1}{x^3 + 1} > \epsilon$$

se $x > \delta$

179·10 determinare $\delta > 0$ in modo che

$$\frac{\sin(\arctan(x))}{x^3 + 1} < \epsilon$$

se $x > \delta$

180

Si consideri, per $k \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x - kx^2$$

180·1 Disegnare il grafico di f per $k = -1, k = 0$

180·2 Disegnare il grafico di f per $k = 1/2$

180·3 Disegnare il grafico di f per $k = e/2$

180·4 Disegnare il grafico di f per $1/2 < k < e/2$

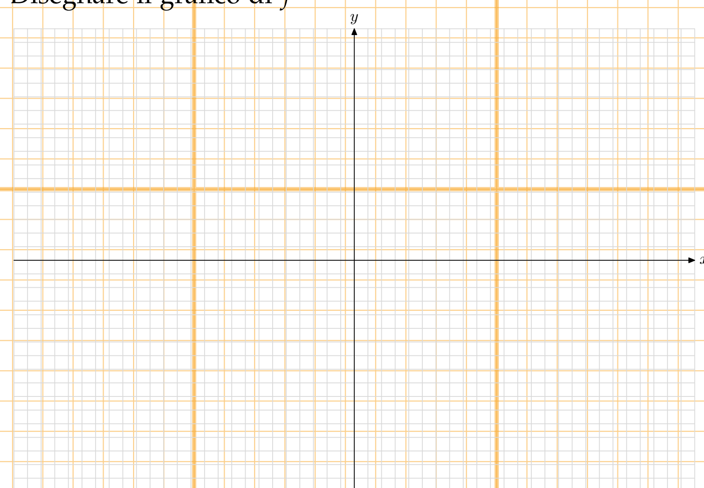
180·5 Disegnare il grafico di f al variare di k

181

Si consideri,

$$f(x) = x \ln(|x|)$$

181·1 Disegnare il grafico di f



181·2 Determinare il polinomio diTaylor di grado 9 di f centrato in $x_0 = 1$

Si consideri, per

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln(|x^2 - 1|)$$

181·3 Disegnare il grafico di f

Si consideri, per

$$f(x) = \frac{\ln(|x^2 - 1|)}{x}$$

181·4 Disegnare il grafico di f giustificando accuratamente le risposte.

182

Sia

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad , \quad x \in (0,1)$$

182·1 -[6]Determinare il polinomio di Taylor di grado 50 di f centrato in $x_0 = 0$.

182·2 Determinare
$$f^{(10)}(0)$$

183

Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = \sqrt{x}$$
e sia $x_0 > 0$

183·1 Determinare una espressione esplicita per $f^{(n)}(x)$

183·2 Determinare una espressione esplicita per $f^{(n)}(x_0^2)$

183·3 Determinare lo sviluppo di Taylor centrato in x_0^2 di f di ordine n

183·4 Determinare il resto di Lagrange di ordine n

183·5 Determinare il resto di Peano di ordine n

183·6 -[6]Determinare una frazione che approssimi $\sqrt{37}$ con errore inferiore a $1/100$.

183·7 -[6]Determinare un polinomio che approssimi $\sqrt{x}$ con errore inferiore a $1/100$ nell'intervallo $[25, 49]$

183·8 Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \sin(x^2) - \cos(x)}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

183·9 Studiare la prolinabilità per continuità di
$$f(x) = \frac{e^{-x^2} - \sin(x^2) - \cos(x)}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

184

Si considerino le funzioni $f(x) = \arctan\left(1 - \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\right)$ e $g(x) = x + 1$

184·1 Disegnare il grafico di f

184·2 Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$.

184·3 Disegnare il grafico di $g(f(\cdot))$
itn -[5] Disegnare il grafico di $f(\cdot+1)$.
itn -[2] Disegnare il grafico di $f(|\cdot|)$)
itn -[2] Disegnare il grafico di $|f(\cdot)|$.
itn -[3] Disegnare il grafico di $\sin(f(\cdot))$
itn -[10] Determinare un insieme su cui f è invertibile e trovarne l'inversa
itn -[3] Determinare un insieme su cui g è invertibile e trovarne l'inversa

185

185·1 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x-2)}{x-2} =$$

185·2 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) =$$

185·3 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{\ln(1+x)} =$$

185·4 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln(x^5) =$$

185·5 Determinare $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^\alpha} =$$

sia reale

185·6 Determinare $\alpha \in]\mathbb{R}_+$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^\alpha} =$$

sia reale

185·7 Determinare l'ordine di infinitesimo di $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ per $x\to 0$

185·8 Determinare l'ordine di infinito di $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ per $x\to+\infty$
1

185.9 Verificare mediante la definizione di limite che

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{3x^3-1}=$$

185.10 Verificare mediante la definizione di limite che

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+x}{3x^3-1}=$$

Sia a_n la successione definita da

$$a_n = a_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad , a_1 = 1$$

itn -[5] Dimostrare che

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

itn -[5]Dimostrare che $a_n \geq \sqrt{n}$ e calcolare

$$\lim_n a_n$$

185.11 Calcolare

$$\lim_n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=$$

185.12 Calcolare

$$\lim_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-3}=$$

185.13 Calcolare

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=$$

185.14 Calcolare

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=$$

186

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x}}{2x+1} & x>0\\ \sin(x)+a & x<0\end{cases}$$

186.1 Determinare il campo di definizione di f e studiarne la continuità

186·2 Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se f è prolungabile per continuità. (cioè stabilire se è possibile definire f nei punti in cui non è definita in modo che la funzione prolungata risulti continua)

l

186·3 Calcolare f'

186·4 Qualora f sia prolungabile per continuità, studiare la derivabilità del suo prolungamento.

l

itn -[5] Disegnare il grafico di f.

itn -[5] Studiare l'invertibilità di f

l

186·5 Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(x \ln(x))$ precisando dove f è derivabile.

186·6 Calcolare la derivata di $f(x) = e^x \sin(x^2)$ precisando dove f è derivabile.

186·7 Calcolare la derivata di $f(x) = e^x(\sin(x))^2$ precisando dove f è derivabile.

186·8 Calcolare la derivata di $f(x) = (\sin(x))^{e^x}$ precisando dove f è derivabile.

187

Studiare continuità derivabilitá e prolungabilità delle seguenti funzioni

187·1 -[3]

$$f(x) = \begin{cases} |1 - x^2| & x > 0 \\ \sqrt{x + a} & x < 0 \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$

187·2 -[3]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > c \\ ax + b & x \leq c \end{cases}$$

al variare di $a\,b, cin\mathbb{R}$

187·3 -[4]

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

al variare di $a\,b, c \in \mathbb{R}$

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

187.4

$$e^x(x^2-1)$$

187.5

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

187.6

$$e^x - x^2 + 5x - 6$$

l

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni precisando dove esistono

187.7

$$F(x) = x^{(x^x)}$$

187.8

$$F(x) = (x^x)^x$$

187.9

$$F(x) = \log_x \pi$$

187.10

$$F(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$$

187.11

$$F(x) = \log_{v(x)} u(x)$$

187.12

$$F(x) = \det\begin{pmatrix} x^2 & x \\ \sin(x) & \ln(x) \end{pmatrix}$$

Determinare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni in x_0

187.13

$$F(x) = e^{x^4} - \cos(x^2) + \sin(x^4), \qquad x_0 = 0$$

187.14

$$F(x) = \ln(1+\sin(x^3)), \qquad x_0 = 0$$

187·15

$$F(x) = \ln(1 + (\sin(x))^3), \qquad x_0 = 0$$

187·16

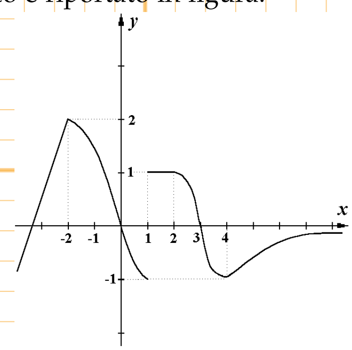
$$F(x) = (\ln(1 + \sin(x)))^3, \qquad x_0 = 0$$

187·17

$$F(x) = x \ln(x), \qquad x_0 = 0, \quad x_0 = 1$$

188

Si consideri la funzione f il cui grafico è riportato in figura.



188·1 Disegnare il grafico della funzione g definita su $(-3, 6)$ la cui derivata prima è f e tale che $g(0) = 0$

188·2 Disegnare il grafico della funzione h definita su $(-3, 6)$ la cui derivata seconda è f e tale che $h(0) = 0$ $h'(0) = 1$

Determinare gli sviluppi di McLaurin di ordine 4 delle seguenti funzioni precisandone il resto nella forma di Peano.

188·3

$$f(x) = \sin(x^3 + x)$$

188·4

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

188·5

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^4}$$

188·6 Utilizzando la formula di Taylor, approssimare $\arctan(1/2)$ con un numero razionale a meno di 10^{-3}

188·7 Utilizzando la formula di Taylor, approssimare $\ln(1+\sin(\pi/6))$ con un numero razionale a meno di 10^{-3}

Determinare l'ordine di infinitesimo in 0 delle seguenti funzioni.

188·8

$$f(x) = (\ln(1+x))^2 - \sin(x^2)$$

188·9

$$f(x) = e^{-\ln(x^3)}$$

188·10

$$f(x) = (x^3 - x)\cos(x^2)$$

189

189·1 D_2 Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1) + (1-\cos(x-1))}{\tan(2x-2)}$$

189·2 Stabilire se $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ è invertibile su $[-9,-3]$ ed in caso affermativo calcolarne l'inversa.

190

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = e^x - \ln x$$

190·1 Calcolare $f'(x)$ e provare che f' si annulla in un solo punto x_0, provare inoltre che risulta $x_0 < 1$

190·2 Stabilire il segno di $f(x_0)$ e disegnare il grafico di f

Si consideri la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x > x_0 \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c & x \leq x_0 \end{cases}$$

190·3 Stabilire per quali valori di a, b, c g è continua

190·4 Stabilire per quali valori di a, b, c g è derivabile

191

tmD_2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos^2(x))}{x^2}$$

191·1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$$

191·2 Disegnare il grafico di f

191·3 Calcolare l'inversa di f ristretta all'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

192

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}$$

192·1 Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

192·2 Disegnare il grafico di $\frac{x}{1+x}$

192·3 Disegnare il grafico di $f(x)$

192·4 Determinare un insieme su cui f è invertibile e calcolare l'inversa di f nell'insieme scelto

192·5 Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{1-(\cos(x))^4}$$

192·6 Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x^3-1}$$

193

Sia

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x^2-1} \qquad , \qquad g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

193·1 Disegnare il grafico di g

1

193·2 Disegnare il grafico di f

193.3 Determinare

$$\sup\{f(x) : x \in [1, +\infty)\}$$

193.4 Determinare

$$\inf\{f(x) : x \in [1, +\infty)\}$$

193.5 Determinare, se esistono,

$$\max\{f(x) : x \in [1, +\infty)\}$$

$$\min\{f(x) : x \in [1, +\infty)\}$$

194

194.1 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^3)}{\ln(1+x^3)}$$

194.2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$$

194.3 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x) - x}{5x}$$

194.4 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2 + x^4}$$

194.5 Calcolare al variare di α e di β

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^\alpha} - 1}{(\ln(1+x))^\beta}$$

195

195.1 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

195·2 Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^6)}{x^2 \ln(1+2x^4)}$$

195·3 Calcolare
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)}{5x}$$

195·4 Calcolare
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4+2x+1}{x^2+3x^4}$$

195·5 Verificare mediante la definizione di limite che
$$\lim_{x\to 2^-} E(x) = 1$$
($E(x)$ è la parte intera di x).

196

Si consideri la funzione
$$f(x) = 1 + be^{-\frac{x^2}{2}}$$

196·1 Disegnare il grafico di f

196·2 Per $b=-2$ disegnare il grafico di una funzione g continua e derivabile su $\mathbb{R}$ tale che $g'(x) = f(x)$

196·3 Per $b=-2$ disegnare il grafico di una funzione ϕ continua e derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, non continua in $x=0$, tale che $\phi'(x) = f(x)$ per $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

196·4 Per $b=1$; disegnare il grafico di una funzione h continua e derivabile su $\mathbb{R}$ tale che $h'(x) = f(x)$ ed $h(0) = 1$

196·5 Per $b=1$; calcolare $(h^{-1})'(1)$

197

Si consideri la funzione
$$f(x) = a\frac{x}{x^2-5x+6}$$

197·1 Disegnare il grafico di f al variare di a

197·2 Determinare, se possibile, x_0 in modo che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in x_0 valga 1

197·3 Per $a = 2$ disegnare il grafico di una funzione ϕ continua e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, tale che $\phi'(x) = f(x)$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

197·4 Determinare, se possibile, l'inversa di f ristretta a $[0, 1]$

198

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \sin x^3 \qquad g(x) = e^{x^2}$$

198·1 Scrivere gli sviluppi di McLaurin di $\sin x$ e e^x di ordine n con il resto nella forma di Peano.

198·2 Scrivere gli sviluppi di McLaurin di f e g di ordine 6 con il resto nella forma di Peano.

198·3 Scrivere gli sviluppi di McLaurin di $f(x)g(x)$ di ordine 6 con il resto nella forma di Peano.

198·4 Calcolare, al variare di α reale

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin x^3}{x^\alpha}$$

198·5 Determinare l'ordine di infinitesimo di $(e^{x^2} - 1) \sin x^3$ nell'origine.

199

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \ln(1 + x) \qquad g(x) = (\sin x)^2 \qquad h(x) = \ln\left(1 + \frac{(\sin x)^2}{10}\right)$$

199·1 Determinare il polinomio di McLaurin di f che approssima f a meno di $\frac{1}{200}$ sull'intervallo $[0, \frac{1}{10}]$.

199·2 Determinare l'errore che si commette sostituendo ad $h(x)$ il valore $\frac{(\sin x)^2}{10}$ per $x \in \mathbb{R}$

199·3 Trovare lo sviluppo di McLaurin di g di ordine 2 e stimare il resto di Lagrange corrispondente per $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

199·4 Stimare l'errore che si commette sostituendo $h(x)$ con $\frac{x^2}{10}$ per $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

200

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 + x) \arctan x$$

200·1 Calcolare la derivata prima di f
$f'(x) =$

200·2 Calcolare la derivata seconda di f
$f''(x) =$

200·3 Disegnare il grafico di f'

200·4 Disegnare il grafico di f

200·5 Precisare dove f è convessa e dove f è concava

200·6 Determinare la retta tangente al grafico di f nei punti in cui f'' si annulla e stabilire la posizione di tale retta rispetto al grafico.

201

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \log(1 + x^4) \qquad g(x) = \cos(x)$$

201·1 Scrivere gli sviluppi di McLaurin di f e g di ordine 5

201·2 Calcolare,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(g(x) - 1)^2 - f(x)}{x^4}$$

202

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan x$$

202·1 Determinare il polinomio $p(x)$ di McLaurin di f del primo ordine

202·2 Scrivere il resto di Lagrange relativo al polinomio $p(x)$ di McLaurin di f del primo ordine

202·3 Determinare δ in modo che

$$|f(x) - p(x)| \leq 10^{-3}$$

su $[-\delta, \delta]$

203

Si consideri la funzione

$$f(x) = x \log(1 + x)$$

203·1 Disegnare il grafico di f' 1

203·2 Disegnare il grafico di f

204

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 + x$$

204·1 Scrivere le somme superiori $U(f, P_n)$ della funzione f sull'intervallo $[0, 1]$ rispetto alla partizione

$$P_n = \left\{ \frac{k}{n} : k = 0, 1, 2, ..., n \right\}$$

$U(f, P_n) =$

204·2 Calcolare $\int_0^1 f(x)dx$ mediante il limite di $U(f, P_n)$ per n che tende ad infinito, precisando le ragioni per cui tale limite fornisce l'integrale richiesto.

205

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x > 0 \\ \log(1 + x) & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

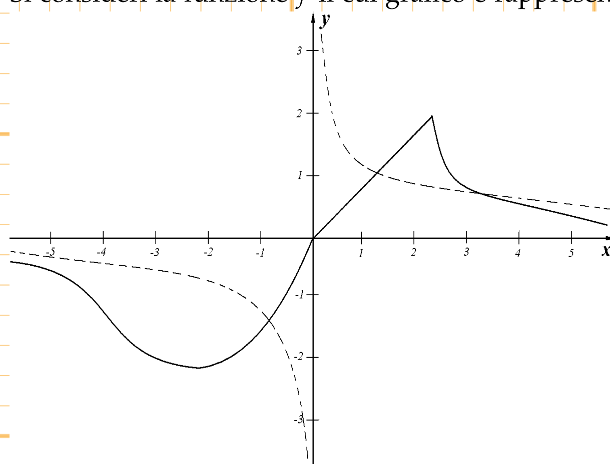
205·1 Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che f ammetta primitiva su $(-1, +\infty)$

205·2 Determinare una primitiva di f su $(-1, +\infty)$.

205·3 Per i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali f ammette primitiva su $(-1, +\infty)$ determinare tutte le primitive di f

206

Si consideri la funzione f il cui grafico è rappresentato di seguito



206·1 Disegnare il grafico della funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ precisando crescenza convessità ed asintoti

207

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(k(x^3 - x))$$

207·1 Disegnare il grafico di f

207·2 Disegnare il grafico di f'

207·3 Disegnare il grafico di $\int_0^x f(t)dt$

207·4 Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ al variare di k

208

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln|1 - \frac{x^2}{k^2}|$$

$$g(x) = \arctan(x)$$

208·1 Disegnare il grafico di f

208·2 Disegnare il grafico di g

208·3 Disegnare il grafico di $g(f(x))$

208·4 Disegnare il grafico di $f(g(x))$

209

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1+x)e^x$$

209·1 Disegnare il grafico di f

209·2 Scrivere lo sviluppo di McLaurin di f di grado 1, e l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0)0$

209·3 Scrivere lo sviluppo di McLaurin di $f(x)$ di ordine 3 con il resto nella forma di Lagrange

209·4 Scrivere lo sviluppo di McLaurin di $f(x)$ di ordine 5 con il resto nella forma di Peano

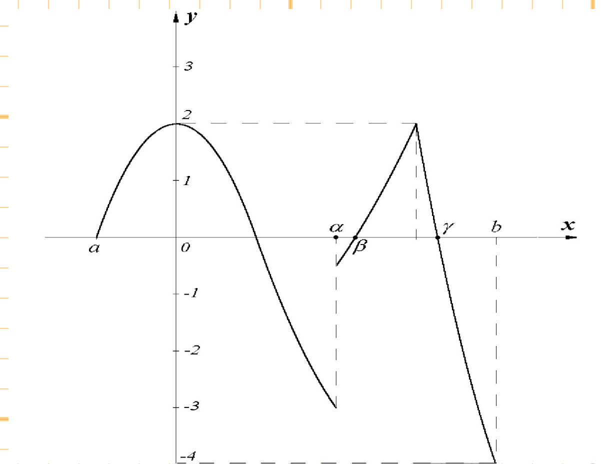
209·5 Determinare l'ordine di infinitesimo a di $(1+x)e^x - 1 - 2x$ nell'origine e calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)e^x - 1 - 2x}{x^a}$$

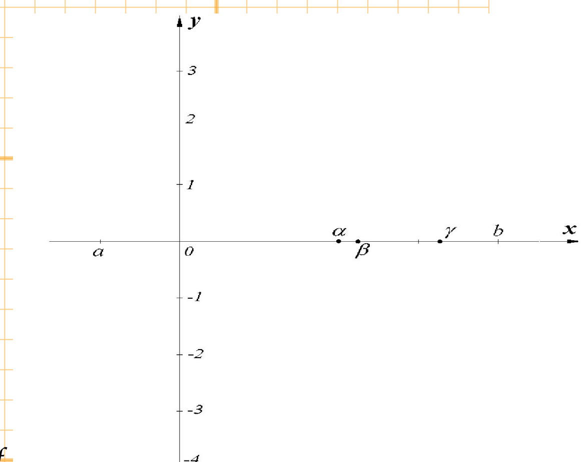
210

Si consideri la funzione f sull'intervallo $[a, b]$ di cui è noto

- * il grafico della derivata prima



- * i valori $f(0) = 0$, $f(\alpha) = -1$, $f(\beta) = -2$. $f(\gamma) = 1$



210·1 Disegnare il grafico di f

210·2 Precisare gli intervalli in cui f è convessa o concava e trovare eventuali punti di flesso.

210·3 Determinare i valori massimi e minimi assoluti di f'

210·4 Stimare, usando il teorema di Lagrange, $f(a)$.

211

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 + x)\ln(x + 1)$$

211·1 Disegnare il grafico di f

211·2 Scrivere lo sviluppo di McLaurin di f di grado 1, e l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$

211·3 Scrivere lo sviluppo di McLaurin di $f(x)$ di ordine 5 con il resto nella forma di Peano

212

Si consideri la funzione f sull'intervallo $[a,b]$ di cui è noto che $f(0) = 0$ e che

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x \leq 3 \\ 12 - x & x > 3 \end{cases}$$

212·1 Disegnare il grafico di f

212·2 Precisare gli intervalli in cui f è convessa o concava e trovare eventuali punti di flesso.

212·3 Determinare i valori massimi e minimi assoluti di f'

213

Si consideri la funzione

$$f(x) = x\cos(\sqrt{x}) - \sin(x)$$

213·1 Scrivere il polinomio di McLaurin $Q_2(x)$ di $\sin(x)$ di grado 2,

213·2 Scrivere il polinomio di McLaurin $R_2(x)$ di $x\cos(\sqrt{x})$ di grado 2,

213·3 Scrivere il polinomio di McLaurin $P_2(x)$ di $f(x)$ di grado 2,

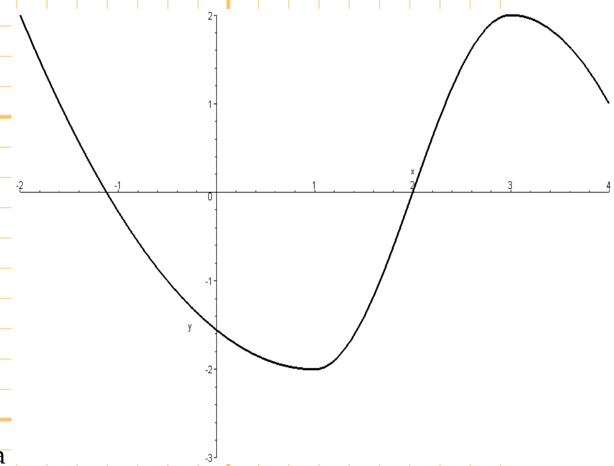
213·4 Calcolare al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$$

213·5 Maggiorare l'errore che si commette sostituendo $P_2(x)$ ad $f(x)$ in $[0, 1/10]$

214

Si consideri la funzione f sull'intervallo $[a,b]$ di cui è noto



- * il grafico della derivata prima
- * i valori $f(0) = 0$.

214·1 Disegnare il grafico di f

214·2 Precisare gli intervalli in cui f è convessa o concava e trovare eventuali punti di flesso.

214·3 Determinare i valori massimi e minimi assoluti di f'

214·4 Stimare, usando il teorema di Lagrange, $f(1)$.

215

Si consideri la funzione

$$f(x) = xe^{-x^6+ax^2}$$

215·1 Determinare il campo D di definizione di f ed i limiti di f agli estremi del campo

215·2 Calcolare f' e disegnare il grafico di

$$g(x) = \frac{f'(x)}{e^{-x^6+ax^2}}$$

215·3 Disegnare il grafico di f

215·4 Determinare il polinomio di Mc Laurin di f di grado 3

216

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x - \sin(x^2)$$

216·1 Scrivere il polinomio di McLaurin $P_2(x)$ di $f(x)$ di grado 2,

216·2 Calcolare al variare di $n \in \mathbb{N}$

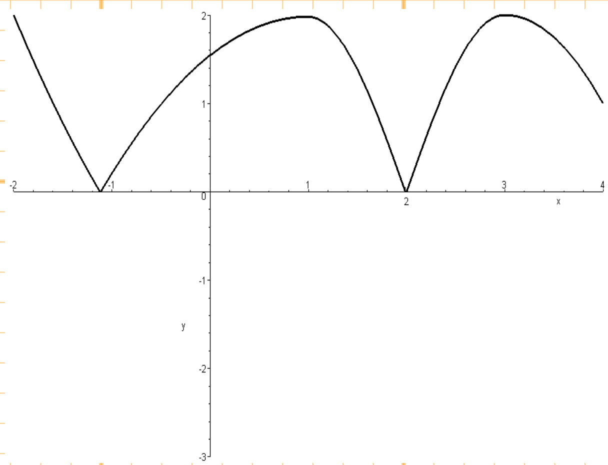
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}$$

216·3 Maggiorare l'errore che si commette sostituendo $P_2(x)$ ad $f(x)$ in $[0, 1/10]$

217

Si consideri la funzione f sull'intervallo $[a, b]$ di cui è noto

- * il grafico della derivata prima



- * i valori $f(0) = 0$.

217·1 Disegnare il grafico di f

217·2 Precisare gli intervalli in cui f è convessa o concava e trovare eventuali punti di flesso.

217·3 Determinare i valori massimi e minimi assoluti di f'

218

Si consideri la funzione

$$f(x) = x + e^{-x^2}$$

218·1 Calcolare f' e disegnare il grafico di $g(x) = f'(x)$

218·2 Disegnare il grafico di f

218·3 Determinare il polinomio di Mc Laurin di f di grado 3

219

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ |x| + 1 & -1 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

219·1 Disegnare il grafico di f

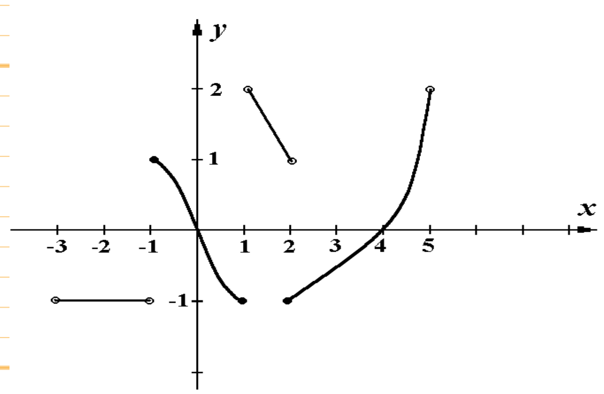
219·2 Calcolare,usando la geometria elementare, l'area $A(x)$ della parte di piano delimitata

dall'asse delle x, dall'asse delle y, dalla retta parallela all'asse delle y di ascissa generica x e dal grafico di f.

219·3 Disegnare il grafico di A

220

Si consideri la funzione g il cui grafico è quello indicato nella figura seguente

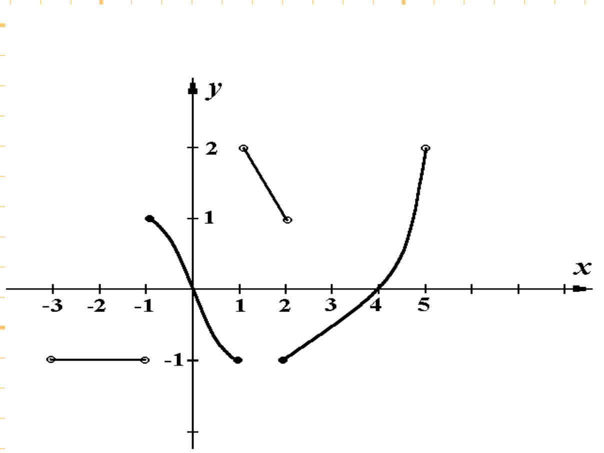


220·1 Disegnare il grafico della funzione f tale che $f(0) = 0$ e $f'(x) = g(x)$ per tutti gli $x \neq -1, 1, 2$, f continua

220·2 Stabilire se f è derivabile in $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ed in caso affermativo determinare $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

220·3 Determinare sul grafico un punto $c \in (2, 5)$ tale che

$$f'(5) - f'(2) = f''(c)(5-2)$$



220·4 Usando le informazioni contenute nel grafico di f' maggiorare

$$|f(5) - f(2)| = |f'(c)(5-2)|$$

221

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \ln(1+2x) \quad , \quad g(x) = e^{x^2} - 1$$

221·1 Scrivere il polinomio di McLaurin $P_4(x)$ di $f(x)$ di grado 4,

221·2 Scrivere il polinomio di McLaurin $Q_4(x)$ di $g(x)$ di grado 4,

221·3 Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + g(x) - 2x}{x^2}$$

221·4 Maggiorare l'errore che si commette sostituendo $P_2(x)$ (Polinomio di McLaurin di grado 2) ad $f(x)$ in $[0, 1/10]$

222

Si considerino la funzione

$$f(x) = x \arctan(x) + ax^2$$

222·1 Calcolare derivata prima e derivata seconda

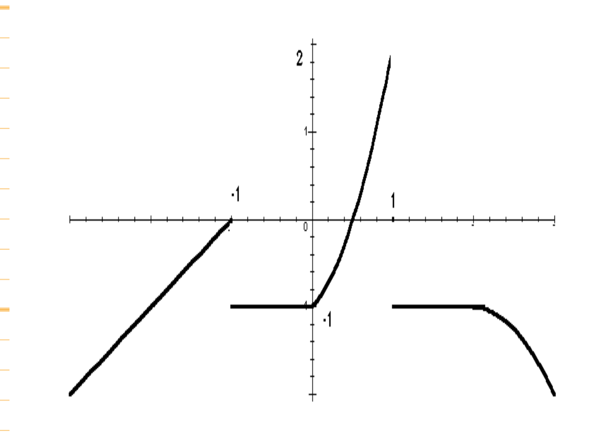
222·2 Disegnare il grafico di f'' precisando al variare di a quanti zeri ammette.

222·3 Disegnare il grafico di f', al variare di a

222·4 Disegnare il grafico di f, al variare di a

223

Si consideri la funzione g il cui grafico è quello indicato nella figura seguente



223·1 Disegnare il grafico della funzione f tale che $f(0) = 0$ e $f'(x) = g(x)$ per tutti gli $x \neq -1, 1$, f continua

223·2 Stabilire se f è derivabile in $x = 0$, $x = 1$ ed in caso affermativo determinare $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

223·3 Usando le informazioni contenute nel grafico di f' maggiorare

$$|f(5) - f(2)| = |f'(c)(5-2)|$$

224

i considerino le funzioni

$$f(x) = \sin(2x^2) \quad , \quad g(x) = \arctan(x^3)$$

224·1 Scrivere il polinomio di McLaurin $P_4(x)$ di $f(x)$ di grado 4,

224·2 Scrivere il polinomio di McLaurin $Q_4(x)$ di $g(x)$ di grado 4,

224·3 Determinare l'ordine di infinitesimo di $f+g$ per $x \to 0$

225

Si considerino la funzione

$$f(x) = x\ln(x) + ax^2$$

225·1 Calcolare derivata prima e derivata seconda

225·2 Disegnare il grafico di f'' precisando al variare di a quanti zeri ammette.

225·3 Disegnare il grafico di f', al variare di a

225·4 Disegnare il grafico di f, al variare di a

226

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \sin(2x^2) \quad , \quad g(x) = \arctan(x^3)$$

226·1 Scrivere il polinomio di McLaurin $P_4(x)$ di $f(x)$ di grado 4,

226·2 Scrivere il polinomio di McLaurin $Q_4(x)$ di $g(x)$ di grado 4,

226·3 Determinare l'ordine di infinitesimo di $f+g$ per $x \to 0$

227

Si considerino la funzione

$$f(x) = x\ln(x) + ax^2$$

227·1 Calcolare derivata prima e derivata seconda

227·2 Disegnare il grafico di f'' precisando al variare di a quanti zeri ammette.

227·3 Disegnare il grafico di f', al variare di a

227·4 Disegnare il grafico di f, al variare di a

228

Si consideri

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}/3)$$

228·1 Determinare il polinomio di Taylor di f, di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$

228·2 Determinare un maggiorante per il resto della formula di Taylor relativa al polinomio di cui al punto precedente.

228·3 Determinare un numero razionale che approssimi $f(9\pi^2)$ e maggiorare l'errore commesso sostituendo a $f(9\pi^2)$ tale espressione

229

Si consideri

$$f(x) = \arctan((e^{2x} - 1)^5)$$

229·1 Disegnare il grafico di f

229·2 Disegnare il grafico di una funzione g tale che $g' = f$

229·3 Disegnare il grafico della funzione h tale che $h' = g$ e $h(0) = 1$ e $h'(0) = 1$

229·4 Scrivere il polinomio di Mclaurin di h di ordine 2

230

Si consideri

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

230·1 Calcolare esplicitamente $f^{(n)}(x)$

230·2 Scrivere il polinomio di Taylor di f centrato in $x_0 = 0$

230·3 Stimare l'errore che si commette sostituendo ad $\frac{1}{1-x}$ il polinomio $1 + x + x^2 + x^3$ per $x \in [0, 1/2]$.

230·4 Determinare n in modo che $\frac{1}{1-x}$ si possa approssimare con $\sum_0^n x^k$ a meno di 10^{-5} per $x \in [0, 1/2]$.

231

Si consideri

$$f(x) = \sqrt{x}$$

231·1 Calcolare esplicitamente $f^{(n)}(x)$

231·2 Scrivere il polinomio di Taylor di f centrato in $x_0 = 1$

231·3 Calcolare $\sqrt{1.5}$ a meno di 0.001

232

Si consideri
$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

232·1 Studiare crescenza e decrescenza di f

232·2 Studiare la convessità di f

232·3 Studiare l'invertibilità di f

232·4 Disegnare il grafico di f

232·5 determinare l'inversa di f ristretta agli $x > 4$

233

Si consideri la funzione
$$f(x) = \arctan(\ln|x|) + \arctan\left(\frac{1}{\ln|x|}\right)$$

233·1 Studiare campo di definizione , continuità e derivabilità di f.

233·2 Calcolare la derivata di f.

233·3 Disegnare il grafico di f.

233·4 Determinare il polinomio di Taylor di $\arctan(\ln|x|)$ di ordine 2 centrato in $x_0 = 1$