1
Successioni

1

Si considerino tutte le successioni tali che

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

1·1 Determinare tutti i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $a_n = \lambda^n$ giustificando brevemente le affermazioni

1·2 Verificare che $a_n = \alpha 2^n + \beta$ giustificando brevemente le affermazioni

1·3 Determinare α, β in modo che $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ giustificando brevemente le affermazioni

1·4 Determinare una regola di ricorrenza per la successione

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

1·5 Calcolare il limite di r_n

2

Si consideri la successione definita per ricorrenza mediante la

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n a_{n-1} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

2·1 Determinare una regola di ricorrenza e i primi due termini di una successione k_n in modo che

$$a_n = 2^{k_n}$$

2·2 Determinare i due valori $t = \lambda$ e $t = \mu$ in corrispondenza dei quali $k_n = t^n$ soddisfa la regola di ricorrenza determinata nel punto precedente per k_n.

2·3 Verificare che $k_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ soddisfano la regola di ricorrenza trovata precedentemente.

2·4 Determinare α e β in modo che

$$k_0 = 0 \qquad\qquad k_1 = 1$$

2·5 Trovare una espressione esplicita di k_n e a_n, in funzione di n

2·6 Calcolare $\lim k_n$ e $\lim a_n$

3

Si consideri la successione

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \qquad a_0 = k^2$$

3·1 Provare che a_n è decrescente

3·2 Provare che a_n ammette limite finito e calcolarlo

4

Si consideri per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \frac{n^2}{n!}$$

4·1 Determinare

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) > f(n+1)\}$$

4·2 Determinare estremo superiore e massimo di

$$\frac{n^2}{n!}$$

5

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(n) + a_n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

dove $f : \mathbb{R} \to [0 + \infty)$ è una funzione continua.

5·1 Dimostrare che $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

5·2 Dimostrare che a_n è crescente

5·3 Dimostrare che se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora $\lim_n f(n) = 0$

5·4 Calcolare $\lim_n a_n$ nel caso in cui $f(x) = x$

5·5 Dimostrare che

$$a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

6

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n(n+1)} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

6·1 Provare che a_n è decrescente.

6·2 Provare che a_n è positiva.

6·3 Stabilire se il limite di a_n esiste ed, in caso affermativo, calcolarlo.

6·4 Provare, se è vero, che

$$a_n = \frac{1}{n!(n-1)!}$$

6·5 Scrivere l'enunciato del criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

7

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

7·1 Disegnare il grafico di f

Si consideri poi la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

7·2 Determinare al variare di a gli eventuali limiti della successione a_n (Non è necessario giustificare con calcoli le affermazioni, ma si richiede un risultato corretto supportato da considerazioni sul grafico di f)

8

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2+n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

8·1 Determinare i maggioranti di A e $\sup A$

8·2 Determinare i minoranti di A e $\inf A$

8·3 Calcolare

$$\lim \frac{(-1)^n}{n^2+n} =$$

9

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n+1}{a_n-1} \\ a_0 = a \end{cases}$$

9·1 Studiare il comportamento della successione per $a = 4$,

9·2 Studiare il comportamento della successione per $a = -4$,

10

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

e si ponga

$$b_n = a_{2n}, \qquad c_n = a_{2n+1}$$

10·1 Determinare b_0 e ricavare b_n in funzione di b_{n-1}.

10·2 Provare che b_n è decrescente e calcolare il limite di b_n

10·3 Rappresentare graficamente la successione ricorrente a_n

10·4 Stabilire per ciascuno dei seguenti fatti se è vero o falso.
c_n è crescente ,
c_n è decrescente ,
c_n è limitata ,
c_n non è limitata ,
c_n ammette limite , ed il suo limite è...........
c_n non ammette limite ,
a_n ammette limite , ed il suo limite è...........
a_n non ammette limite ,

11

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = a \end{cases}$$

11·1 Stabilire per quali valori di a, a_n è crescente

11·2 Stabilire per quali valori di a, a_n è decrescente

11·3 Stabilire per quali valori di a, a_n ammette limite e calcolarlo

12

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{(a_n - a_n^2)}{2} \\ a_0 = a \end{cases}$$

12·1 Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{x-x^2}{2}$ e di $g(x) = x$ precisandone i punti di intersezione

12·2 Per $0 \leq a \leq 1$, provare che $0 \leq a_n \leq 1$.

12·3 Per $0 \leq a \leq 1$, provare che a_n è decrescente.

12·4 Stabilire se a_n ammette limite ed in caso affermativo calcolarlo

12·5 Con l'aiuto del grafico di $f(x)$ e di $g(x)$, determinare, se esiste, il limite di a_n per i valori di $a \leq 0$

13

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1-a_n}{2} \\ a_0 = a \end{cases}$$

13·1 Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{1-x}{2}$ e di $g(x) = x$ precisandone i punti di intersezione

13·2 Stabilire per quali valori di a la successione è convergente e, per tali valori, calcolarne il limite

14

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{4}{4-a_n} \\ a_0 = a \end{cases}$$

14·1 Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{4}{4-x}$ e determinare l'intersezione di f con la bisettrice primo-terzo quadrante $y = x$

14·2 Dimostrare che, se $a \leq 2$, $a_n \leq 2$

14·3 Dimostrare che, se $a \leq 2$, a_n è crescente

14·4 Calcolare, se $a \leq 2$, $\lim a_n$ giustificando le affermazioni

15

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

15·1 Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{3} + 1$ e determinare l'intersezione di f con la bisettrice primo-terzo quadrante $y = x$

15·2 Dimostrare che $a_n \leq 3/2$

15·3 Dimostrare che a_n è crescente

15·4 Calcolare $\lim a_n$ giustificando le affermazioni

16

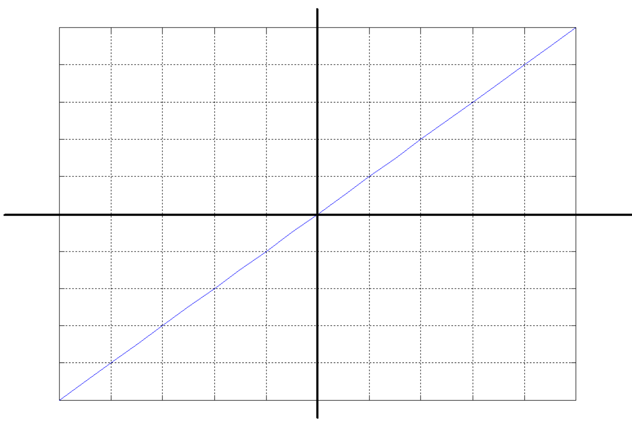
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{6}{5-x}$$

e sia

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

16·1 Disegnare il grafico di f precisando le sue intersezioni con la bisettrice $I - III$ quadrante ($y = x$).



16·2 Per i valori di $\alpha \leq 3$, stabilire, utilizzando il grafico di cui al punto precedente, se a_n è crescente o decrescente.

16·3 Dimostrare che, se $\alpha \leq 2$, allora $a_n \leq 2$.

16·4 Dimostrare che, se $\alpha \leq 2$, allora a_n è crescente.

16·5 Calcolare, se $\alpha \leq 2$, $\lim_n a_n$.

17

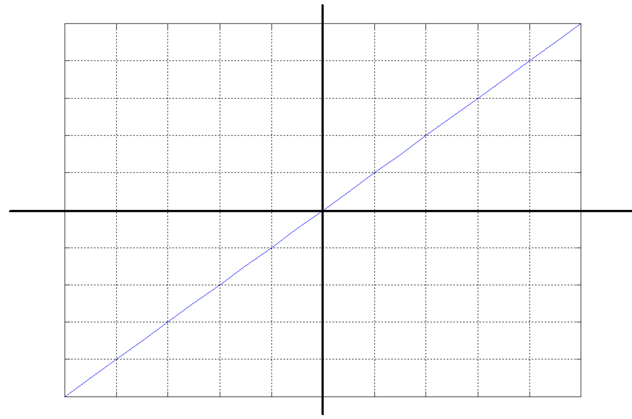
Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x} + x - 1$$

e sia

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

17·1 Disegnare il grafico di f precisando le sue intersezioni con la bisettrice $I - III$ quadrante ($y = x$).



17·2 Al variare di α, stabilire utilizzando il grafico di cui al punto precedente, se a_n è crescente o decrescente.

18

Sia a_n la quantità definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = Ka_n \end{cases}$$

18·1 Provare per induzione che

$$\ln(a_n) = n\ln(K)$$

18·2 Determinare i minoranti di $\frac{1}{2x+1}$ in $[1,3)$

18·3 Determinare l'estremo inferiore di $\frac{1}{2x+1}$ su $[1,3)$

18·4 Determinare, se esiste, il minimo di $\frac{1}{2x+1}$ su $[1,3)$

19

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{2} & x > 0 \\ 1 + 2x & x \leq 0 \end{cases}$$

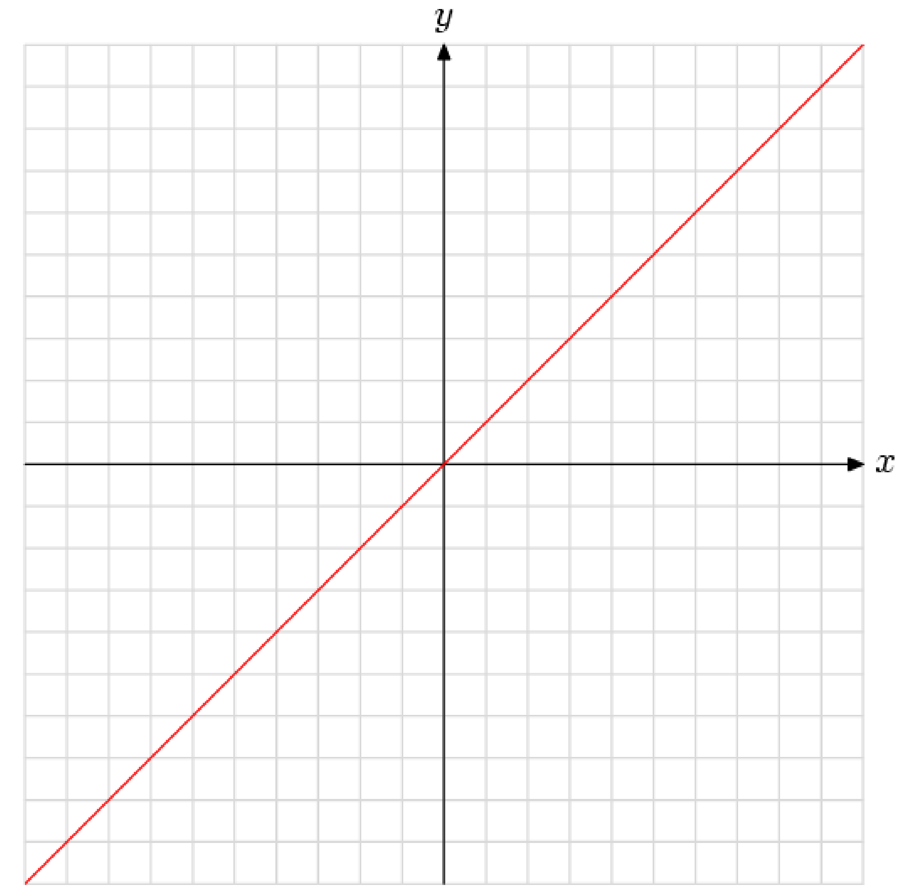
e la successione

$$\begin{cases} a_n = f(a_{n-1}) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

19·1 Studiare graficamente il comportamento della successione per $\alpha = 3$

19·2 Giustificare le conclusioni del punto precedente

19·3 Studiare graficamente il comportamento della successione al variare di α e riassumere brevemente i risultati ottenuti

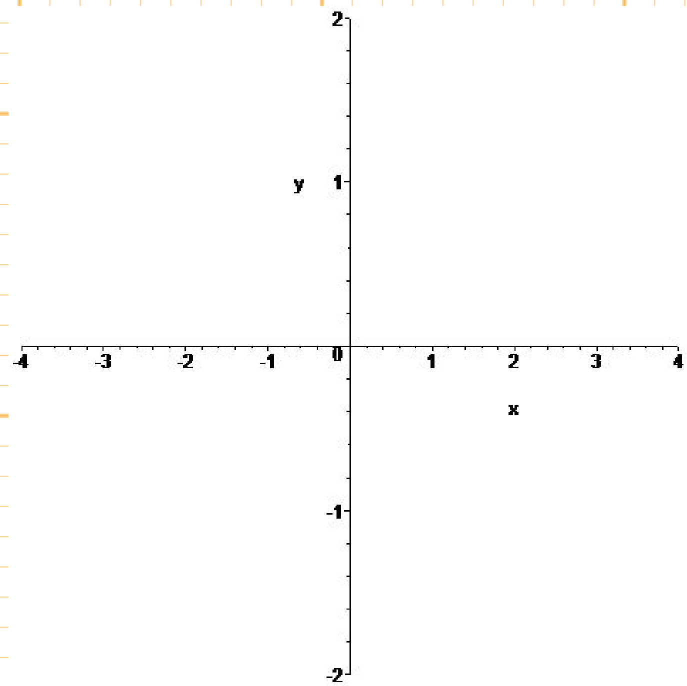


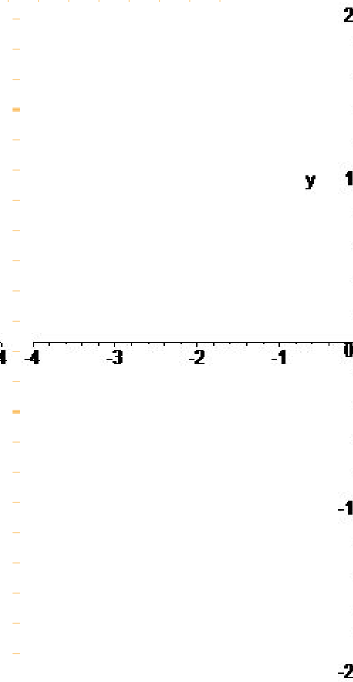
20

Si consideri la funzione

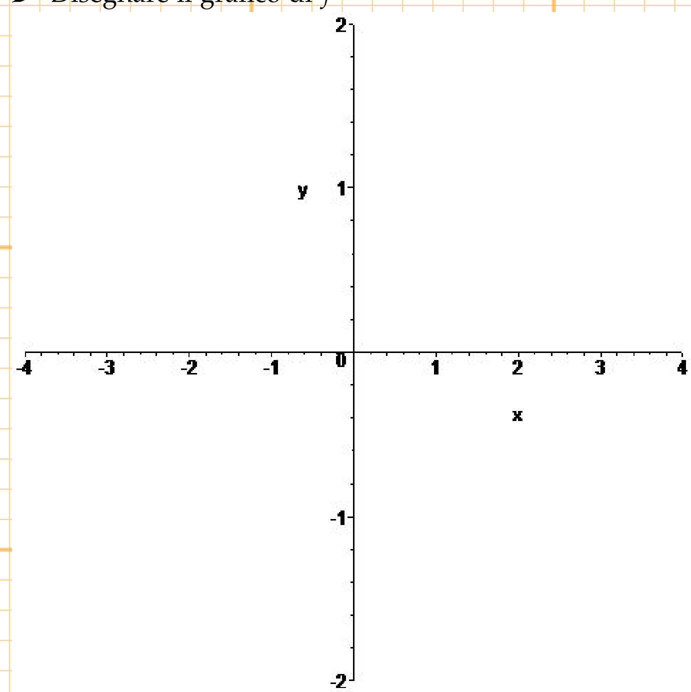
$$f(x) = \arctan(\ln(e^x - e^{2x} + 1))$$

20·1 Disegnare il grafico di $g(x) = y - y^2 + 1$ e di $h(x) = e^x - e^{2x} + 1$





20·2 Disegnare il grafico di f



20·3 Verificare che f è invertibile su $[10, +\infty)$

20·4 Determinare l'inversa di f

20·5 Verificare, usando la definizione di limite che

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

21

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

e la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

21·1 Verificare che a_n è crescente per $\alpha = 0$

21·2 Stabilire per quali valori di α a_n è crescente o decrescente.

21·3 Calcolare, al variare di α, il limite di a_n, se esiste.

22

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = a \end{cases}$$

22·1 Stabilire per quali valori di a la successione si mantiene limitata.

22·2 Stabilire per quali valori di a la successione è decrescente.

22·3 Verificare che per $a = 0.5$ $\lim a_n$ esiste ed è uguale a 0.

22·4 Dimostrare che una successione crescente ammette limite.

23

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = E(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

23·1 Stabilire,al variare di $a \in \mathbb{R}$, se a_n è crescente o decrescente.

23·2 Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se a_n ammette limite.

23·3 Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite di a_n quando esiste.
Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + E(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

23·4 Stabilire,al variare di $a \in \mathbb{R}$, se a_n è crescente o decrescente.

23·5 Stabilire, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se a_n ammette limite.

23·6 Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite di a_n quando esiste.

24

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} \\ a_0 = a \end{cases}$$

24·1 Studiare la successione al variare di $a_0 > 0$

25

Si consideri la successione definita da

$$a_n = f(n)$$

dove

$$f(x) = \arctan(x)$$

25·1 Disegnare il grafico di f

25·2 Determinare il limite di a_n

25·3 Determinare l'estremo superiore di a_n

25·4 Stabilire se a_n ammette massimo ed in caso affermativo calcolarlo.

26

Si consideri la successione definita, per $a_0 = 1$ da

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

dove

$$f(x) = \arctan(x)$$

26·1 Disegnare il grafico di f

26·2 Determinare il limite di a_n, se esiste.

26·3 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di a_n

26·4 Stabilire se a_n ammette massimo e minimo ed in caso affermativo calcolarli.

26·5 Scrivere l'uguaglianza che si ottiene applicando l'enunciato del teorema di integrazione per parti alle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad , \qquad g'(x) = \sin(x)$$

sull'intervallo $[a, b]$

26·6 Studiare l'esistenza di

$$\int_{-10}^{11} f(x)g'(x)dx$$

26·7 Studiare l'esistenza di

$$\int_{3}^{+\infty} f(x)g'(x)dx$$

26·8 Studiare l'esistenza di

$$\int_{-\infty}^{-1} f(x)g'(x)dx$$

26·9 Studiare l'esistenza di

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$$

27

27·1 Studiare le proprietà della successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = E(a_n) \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(E indica la funzione parte intera. È richiesto di enunciare le proprietà che si ritengono significative per descrivere completamente il comportamento della successione e di dimostrare le affermazioni fatte.)

28

Si consideri la successione a_n definita dalle seguenti proprietà

- 1 il primo termine della successione è $a \in \mathbb{R}$
- 2 Ogni termine successivo al primo è direttamente proporzionale al precedente ed il coefficiente di proporzionalità è k.

28·1 Determinare i primi 5 termini della successione.

28·2 Determinare una legge di ricorrenza per ricavare i termini della successione.

28·3 Determinare una espressione esplicita della successione (ricavare il termine $n - esimo$ in funzione soltanto di n oltre che dei dati a e k).

28·4 Studiare il limite della successione al variare di a e di k.

29

Si consideri la successione a_n definita dalle seguenti proprietà

- 1 il primo termine della successione è $\alpha \in \mathbb{R}$
- 2 Ogni termine successivo al primo si ottiene dal precedente sommando $\beta \in \mathbb{R}$.

29·1 Determinare i primi 3 termini della successione.

29·2 Determinare una legge di ricorrenza per ricavare i termini della successione.

29·3 Determinare una espressione esplicita della successione (ricavare il termine $n - esimo$ in funzione soltanto di n oltre che dei dati α e β).

29·4 Studiare il limite della successione al variare di α e di β.

30

Si consideri la successione a_n definita dalle seguenti proprietà

- 1 il primo termine della successione è $a \in \mathbb{R}$
- 2 Ogni termine successivo al primo è inversamente proporzionale al precedente ed il coefficiente di proporzionalità è k.

30·1 Determinare i primi 5 termini della successione.

30·2 Determinare una legge di ricorrenza per ricavare i termini della successione.

30·3 Determinare una espressione esplicita della successione (ricavare il termine $n - esimo$ in funzione soltanto di n oltre che dei dati a e k).

30·4 Studiare il limite della successione al variare di a e di k.

31

Si consideri la successione a_n definita dalle seguenti proprietà

- 1 il primo termine della successione è $\alpha \in \mathbb{R}$
- 3 il secondo termine della successione è $\beta \in \mathbb{R}$
- 2 Ogni termine successivo al secondo si ottiene come prodotto dei due precedenti.

31·1 Determinare i primi 5 termini della successione.

31·2 Verificare che se α e β sono entrambi più grandi di 1 si ha $a_n \to +\infty$.

31·3 Verificare per induzione che

$$a_n = \alpha^{f_{n-2}}\beta^{f_{n-1}} \quad n \geq 3$$

dove f_n è la successione di Fibonacci definita da

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

32

Si consideri la successione a_n definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \ln(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

32·1 Disegnare il grafico di $f(x) = x\ln(x)$

32·2 Studiare la successione per $a = e$

32·3 Per $a > e$ studiare la monotonia di a_n

32·4 Per $a > e$ studiare la successione a_n
Si considerino le funzioni f, g definite da

$$f(x) = |x|^{1-x^2} \qquad , \qquad g(x) = -x\ln(x) + 1 - x$$

32·5 Disegnare il grafico di g

32·6 Disegnare il grafico di f

33

Si consideri la successione a_n definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \\ a_0 = a \\ a_1 = b \end{cases}$$

33·1 Giustificare che per $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$, $a_n = \lambda^n$ soddisfa la regola di ricorrenza assegnata per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

33·2 Giustificare che $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 3^n$ soddisfa la regola di ricorrenza assegnata per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

33·3 Determinare α, β in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte.

33·4 Determinare una regola di ricorrenza e condizioni iniziali che identifichino in maniera univoca la successione

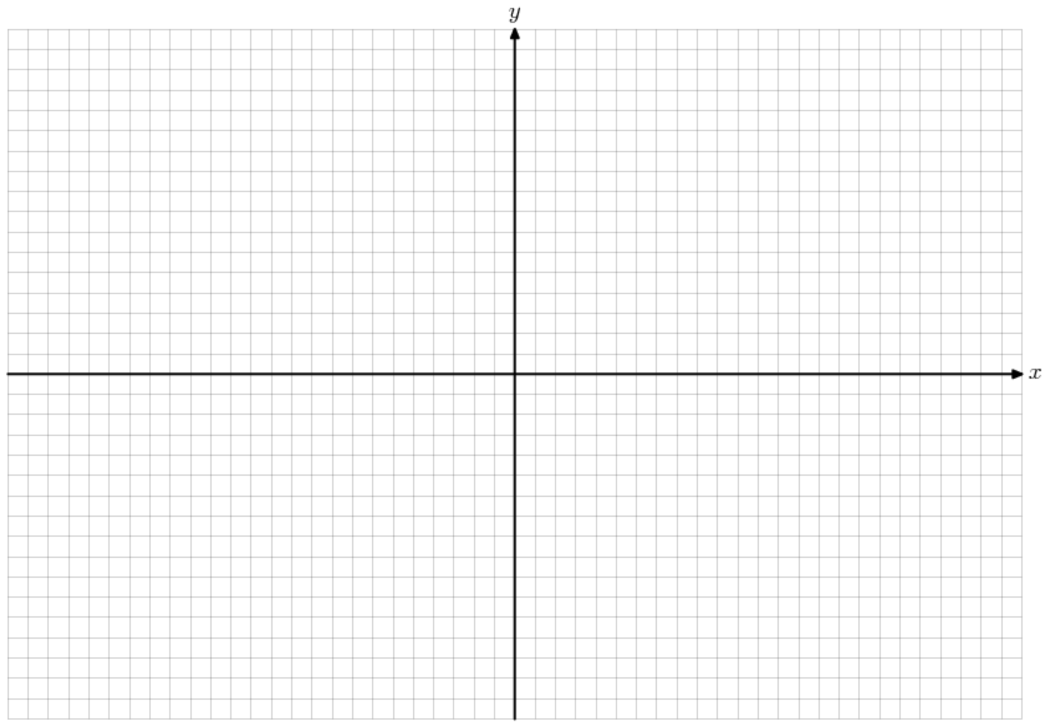
$$r_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

33·5 Disegnare il grafico di $f(x) = x^8 - x^4$

33·6 Disegnare il grafico di $f(x) = x^8 - x^4 - k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

33·7 Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{x^8 - x^4 - k}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando per quali k questo è possibile.

33·8 Disegnare il grafico di $f(x) = \ln(x^8 - x^4 - k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando per quali k questo è possibile.



34

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - E(x))(E(x) + 1)$$

34·1 Sviluppare l'espressione di f per $x \in [0,1)$, $x \in [1,2)$, $x \in [2,3)$, $x \in [-1,0)$, $x \in [-2,-1)$, $x \in [-3,-2)$

34·2 Sviluppare l'espressione di f per $x \in [n, n+1)$

34·3 Disegnare il grafico di f in $[-3,3]$.
Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = a \in [-3,3] \end{cases}$$

34·4 Determinare il limite di a_n

34·5 Descrivere il comportamento di a_n per $a \in \mathbb{R}$

35

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \cos(1) - a_{n-1} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = \sin(1) \end{cases}$$

35·1 Verificare che $a_n = \sin(n)$ soddisfa le condizioni assegnate.

35·2 Giustificare l'unicità della successione che soddisfa le condizioni assegnate e concludere che $a_n = \sin(n)$

35·3 Dimostrare che se $\lim a_n$ esiste allora è 0 o $\pm\infty$

35·4 Dimostrare che $\lim a_n$ non esiste.

36

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

36·1 Determinare α in modo che $a_n = \alpha^n$ soddisfi la regola di ricorrenza assegnata.

36·2 Verificare che una combinazione lineare delle successioni che soddisfano la regola di ricorrenza assegnata verifica a sua volta la regola stessa.

36·3 Determinare a_n

36·4 Determinare una regola di ricorrenza ed il valore iniziale per la successione $\beta_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

36·5 Determinare esplicitamente β_n

37

Si consideri la successione a_n ciascun termine della quale, dal secondo in poi, é la differenza tra il termine che lo precede e quello che lo segue.

37·1 Scrivere una relazione di ricorrenza che caratterizzi la successione.

37·2 Verificare che l'insieme delle successioni che soddisfano la relazione di ricorrenza assegnata è uno spazio vettoriale.

37·3 Determinare λ in modo che $a_n = \lambda^n$ soddisfi la regola di ricorrenza trovata.

37·4 Determinare tutte le successioni che soddisfano la relazione di ricorrenza trovata.

37·5 Determinare una base per lo spazio delle successioni che soddisfano la regola di ricorrenza assegnata.

38

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

38·1 Determinare una relazione di ricorrenza per a_n.

38·2 Determinare una relazione di ricorrenza per $r_n = \frac{a_n}{b_n}$.

38·3 Determinare il limite della successione r_n nel caso in cui il rapporto tra a_0 e b_0 sia 2

38·4 Studiare il limite di r_n al variare di r_0

39

Si consideri la successione a_n che differisce da

$$\frac{n!}{n^n}$$

per un infinitesimo di ordine superiore a 4

39·1 Calcolare $\lim a_n$.

39·2 Verificare che a_n è infinitesima di ordine superiore a 4.

Sia ora

$$a_n = \frac{n!}{n^n} + \frac{1}{n^5}$$

39·3 Verificare che a_n è decrescente.

39·4 Calcolare $\lim a_n$ a meno di 0.01

40

Si consideri la successione $a_n = e^{-2n}n^n$ **40·1** Calcolare $\lim a_n$.

40·2 Verificare che a_n è crescente per $n \geq 4$.

40·3 Calcolare l'estremo superiore di a_n

40·4 Calcolare l'estremo inferiore di a_n

41

Si consideri l'insieme S delle successioni per le quali la differenza di due termini successivi è pari alla media degli stessi termini.

Si chiede:

41·1 se S è uno spazio vettoriale

41·2 in caso la risposta al punto precedente sia affermativa, la dimensione di S

41·3 una regola di ricorrenza che caratterizzi le successioni in S

41·4 l'espressione esplicita (una formula che consenta di calcolare il termine $n-$esimo prescindendo da tutti gli altri) delle successioni in S che a $n = 5$ fanno corrispondere 5

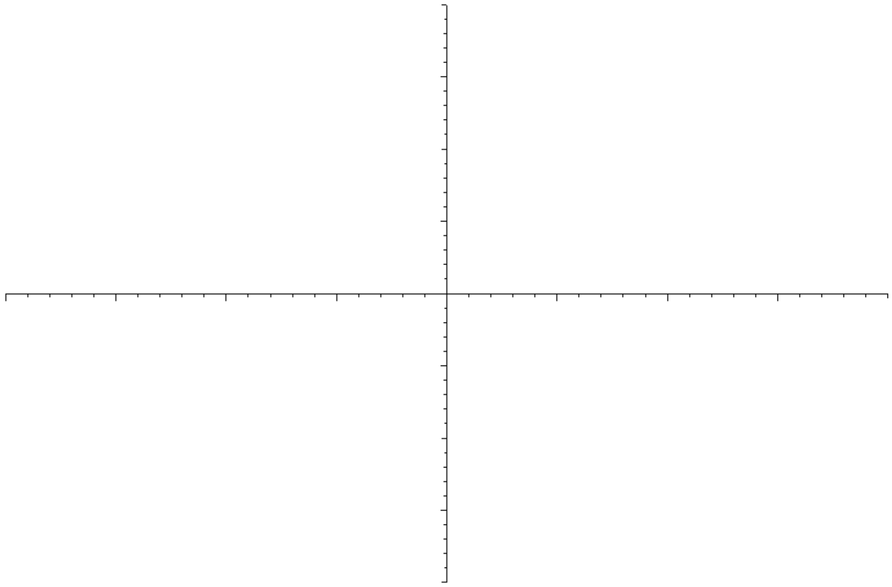
41·5 se la successione di cui al punto precedente è unica.

Si ritiene utile far notare che può essere opportuno rispondere alle domande in ordine diverso da quello con cui sono state formulate.

42

Si consideri la funzione $\arctan(\tan(x))$

42·1 Disegnare il grafico di f



42·2 Studiare la successione a_n definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \pi/4 + k\pi \end{cases}$$

precisando per quali valori di k è monotona e se è crescente o decrescente.

42·3 Studiare l'esistenza del limite al variare di k

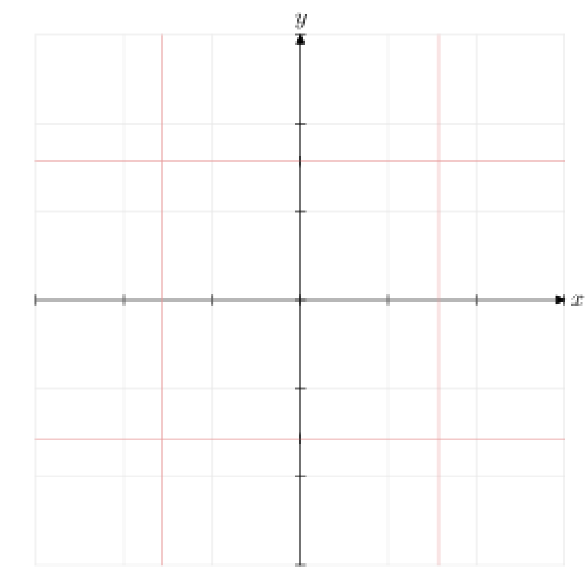
42·4 Calcolare il limite al variare di k.

43

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 - (x^2 - 1)^2)^2$$

43·1 $_3$ Disegnare il grafico di f .



43·2 $_3$ Trovare l'inversa di f ristretta a $[10, +\infty]$

43·3 $_4$ Trovare l'inversa di f ristretta a $[-1, 0]$

43·4 $_3$ Scrivere l'enunciato del criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

43·5 $_4$ Usando l'enunciato precedente, trovare una condizione equivalente al fatto che una successione a_n non ammette limite reale.

44

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(2n)^n}{\alpha^n n!}$$

44·1 Calcolare il limite di a_n al variare di α

45

Si consideri la successione definita da

$$a_{n+1} = k - h a_n \qquad k \in \mathbb{R}, h > 0$$

45·1 Studiare la successione per $h = 1/2$ e $k = 1$

45·2 Dimostrare che

$$a_n = \frac{k}{1+h} + (-1)^n (h)^n a_0$$

46

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + \alpha a_n \\ a_0 = \beta \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 1]$$

46·1 Studiare la successione per $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$

46·2 Studiare la successione per $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

46·3 Studiare la successione per $\alpha = 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

46·4 Calcolare il limite della successione

$$\frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

46·5 Enunciare il criterio del rapporto per le successioni.

47

Si consideri lo spazio S delle successioni a_n definite da:

$$a_{n+2} = -3a_{n+1} - 2a_n$$

47·1 Verificare che S è un sottospazio dello spazio di tutte le successionui.

47·2 Determinare λ in modo che $a_n = \lambda^n \in S$

47·3 Determinare tutte le successioni in S

47·4 Determinare $a_n \in S$ tale che $a_0 = a_1 = 3$

48

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

48·1 -[1] Calcolare $\ell = \lim_{x\to 0} f(x)$.

48·2 - [6] Verificare che $\ell = \lim_{x\to 0} f(x)$ mediante la definizione.

48·3 -[2]Definire f in modo che f sia continua in 0

Sia a_n definita da

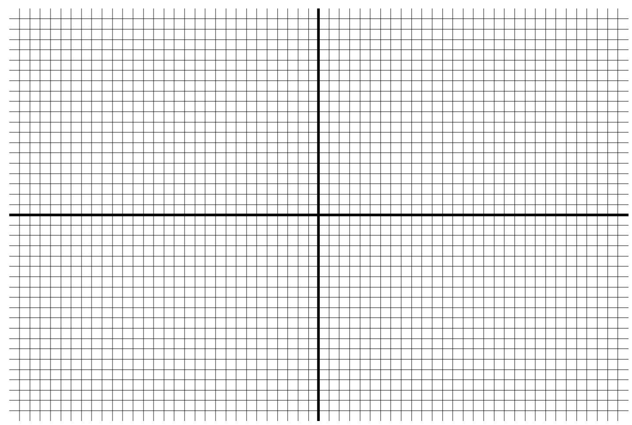
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

48·4 -[2]Dimostrare che a_n è crescente

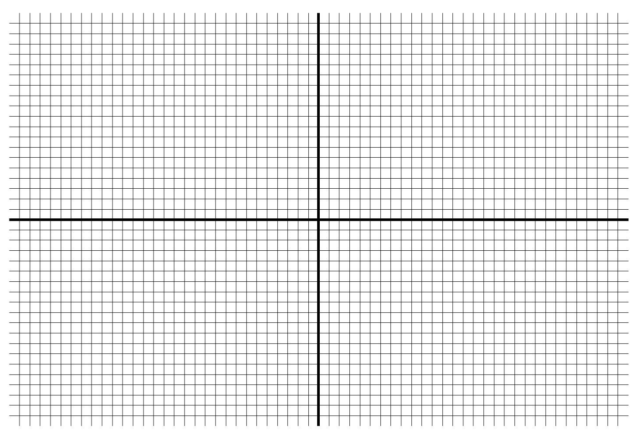
48·5 -[3]Dimostrare che a_n ammette limite e calcolarlo

48·6 -[4] Determinare φ in modo che $a_n = \varphi(n)$

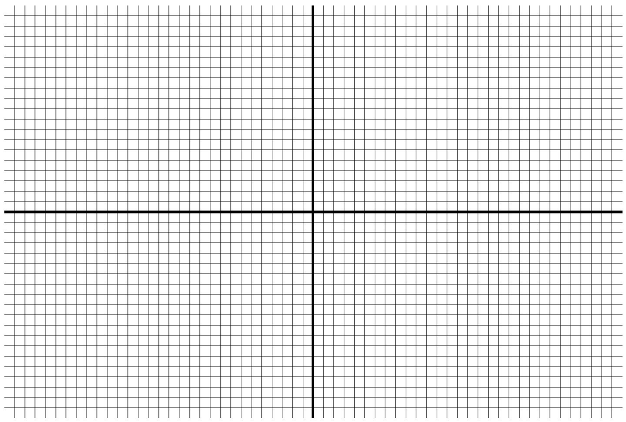
48·7 -[3] Disegnare il grafico di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} = 3$, $\lim_{x\to-\infty} = 3$, $f(0) = 3$



48·8 -[3] Disegnare il grafico di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ strettamente crescente per $x < 0$ e per $x > 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} = 3$, $\lim_{x\to-\infty} = 3$, $f(0) = 3$



48·9 -[3] Disegnare il grafico di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ che non ammetta massimo assoluto tale che $\sup f(x) = 5$, $\min f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} = 3$, $\lim_{x\to-\infty} = 3$, $f(0) = 3$



49

49·1 -[3] Sia

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Determinare esplicitamente a_n in funzione di n. Calcolare $\lim a_n$

50

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+2} = \dfrac{2a_n + 4a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = a_0 \\ a_3 = a_1/3 \end{cases}$$

50·1 Determinare a_{2n+1}

50·2 Verificare che $a_{2n} = \frac{1}{n!}$

50·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) = \frac{x}{2}y'(x) + x^3$$

51

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n^2} \\ a_0 = a \end{cases}$$

51·1 Studiare la successione per $a > 0$

51·2 Studiare la successione per $a < 0$

52

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{a_n} \\ a_0 = a \end{cases}$$

52·1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

52·2 Utilizzando il grafico di f stabilire il comportamento della successione a_n al variare di a

52·3 Dimostrare i risultati ottenuti al punto precedente nel caso $a_0 > 0$

53

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{e^{a_n}(a_n - 1) + 1}{e^{a_n}} \\ a_0 = a \end{cases}$$

53·1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{e^x}$

53·2 Utilizzando il grafico di f stabilire il comportamento della successione a_n al variare di a

53·3 Dimostrare i risultati ottenuti al punto precedente nel caso $a_0 > 0$

54

Sia $a_n = n3^n$

54·1 -[3] Verificare che a_n è crescente.

54·2 -[3] Verificare che a_n non è superiormente limitata.

54·3 -[2] Verificare che a_n è inferiormente limitata

54·4 -[4] Determinare, se esistono $\sup a_n$, $\inf a_n$, $\max a_n$, $\min a_n$

54·5 -[3] Determinare, se esiste $\lim a_n$ e verificare l'affermazione mediante la definizione.

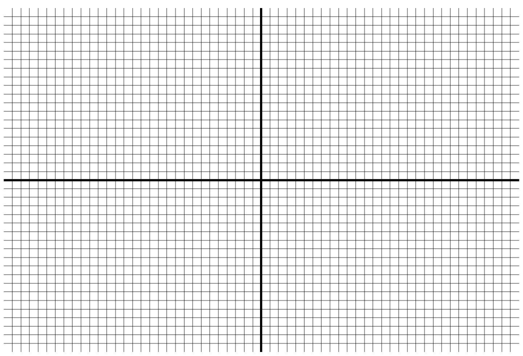
Sia a_n definita da

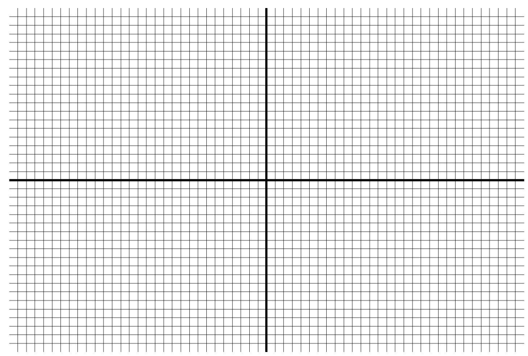
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} a_{n-1} \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

54·6 -[5]Determinare λ ed α tali che $a_n = \alpha\lambda^n$

Si considerino le funzioni $f(x) = \ln(1+x)$ e $g(x) = \frac{1}{x-1}$

54·7 -[4] Disegnare il grafico di f e di g





54·8 -[3] Disegnare il grafico di $f(g(\cdot))$.

54·9 -[3] Disegnare il grafico di $g(f(\cdot))$

itn -[5] Disegnare il grafico di $f(g(\cdot)+3)$.

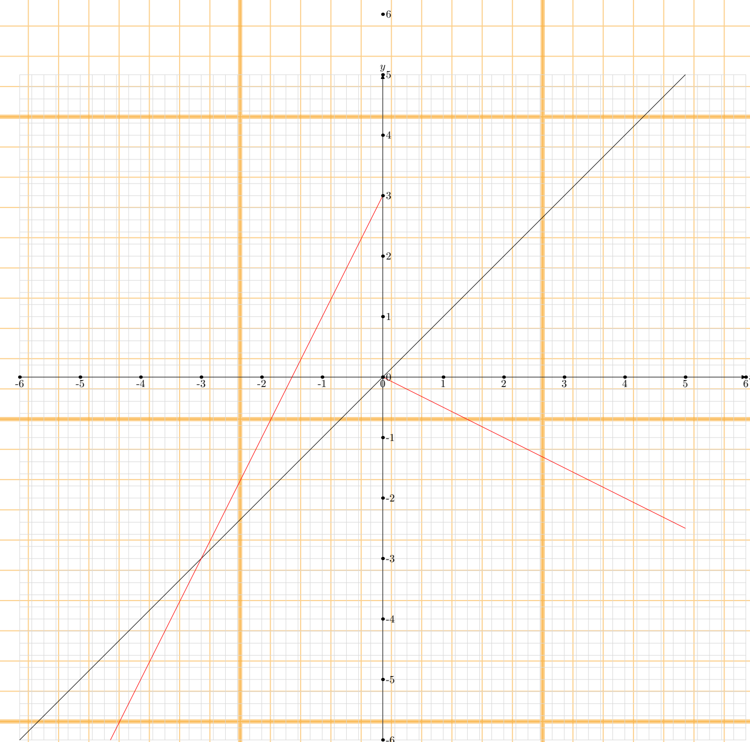
itn -[5] Disegnare il grafico di $g(|\cdot|)$)

55

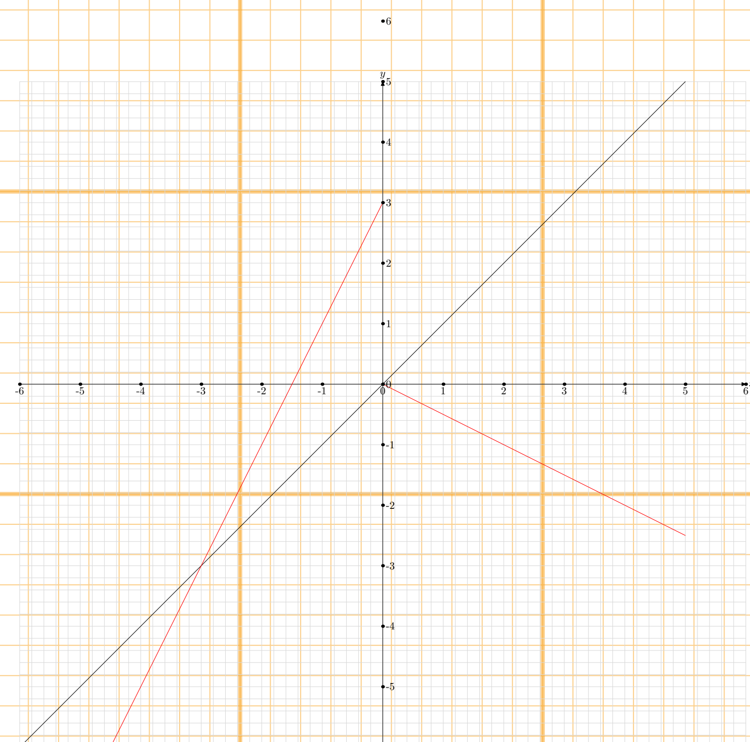
Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \leq 0 \\ -\dfrac{x}{2} & x \geq 0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

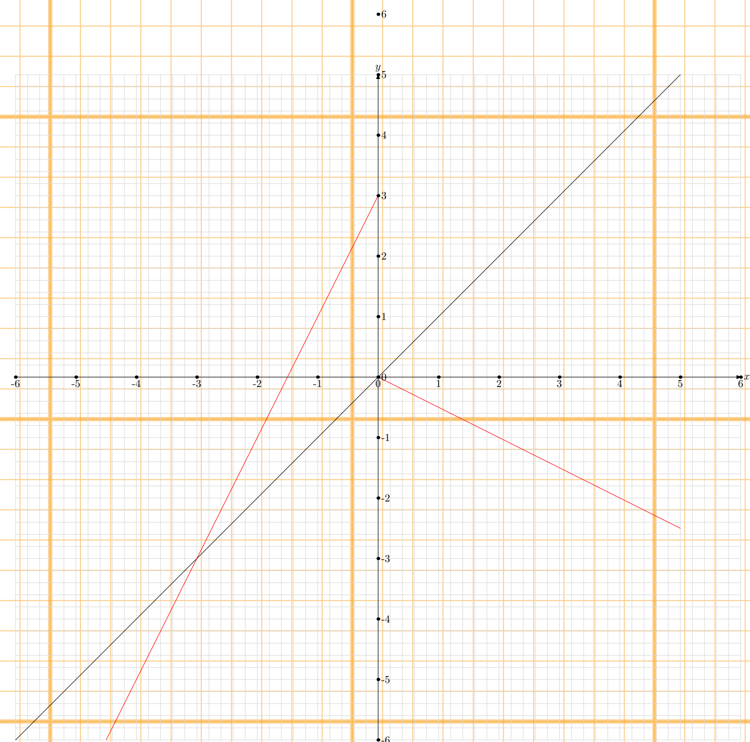
55·1 -[4] Studiare il comportamento della successione se $a_0 = 1$



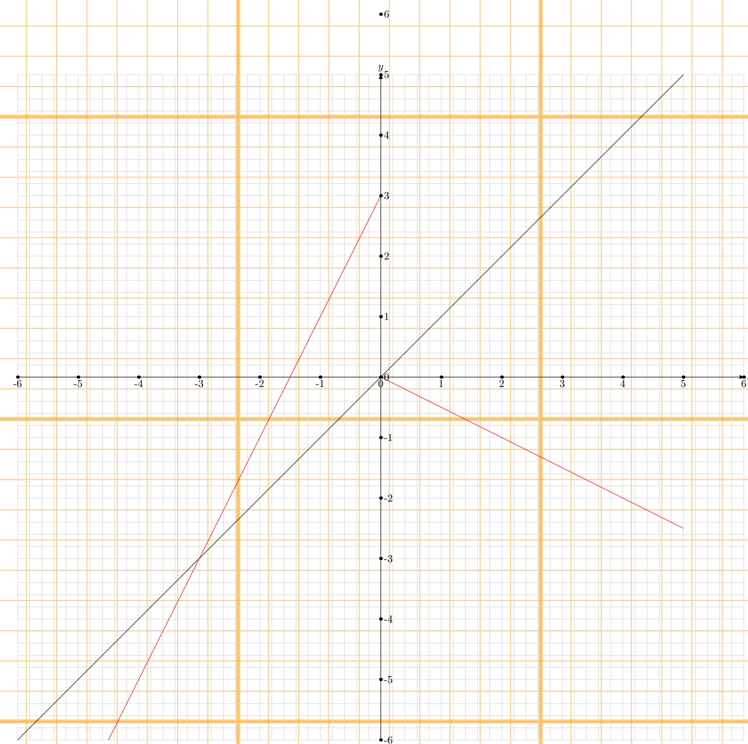
55·2 -[7] Studiare il comportamento della successione se $a_0 = a < -3$



55·3 -[4] Studiare il comportamento della successione se $a_0 = 6$



55·4 -[9] Studiare il comportamento della successione se $a_0 > 6$



56

Si consideri la successione, per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{(\alpha n)^{\beta n}}{(\gamma n)!}$$

56·1 -[] Studiare la successione per $\alpha = 3$ e $\beta = \gamma = 5$

56·2 -[] Studiare la successione per $\alpha = 1$ e $\beta = 2, \gamma = 3$

56·3 -[] Studiare la successione per $\alpha = 4$ e $\beta = 2, \gamma = 1$

56·4 -[] Studiare la successione al variare di α, β, γ

57

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3a_n^4 + 16}{4a_n} \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

57·1 -[4] Studiare la successione per $\alpha = 3$

57·2 -[2] Studiare la successione per $\alpha = 2$

57·3 -[4] Studiare la successione per $\alpha = 1$

57·4 -[5] Studiare la successione al variare di α

58

58·1 -[3] Calcolare

$$\lim \frac{n!}{n^4}$$

58·2 -[4] Calcolare

$$\lim \frac{(4n)!}{n^{4n}}$$

58·3 -[3] Calcolare

$$\lim \sqrt[n]{\ln(1+1/n)}$$

58·4 -[2] Determinare α in modo che risulti finito

$$\lim \frac{n^\alpha}{n^4 - 1}$$

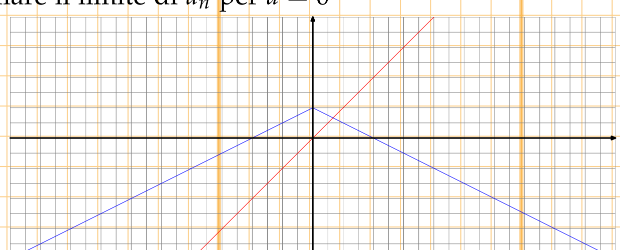
58·5 -[3] Dimostrare che non esiste

$$\lim_{x\to 0} \tan(1/x)$$

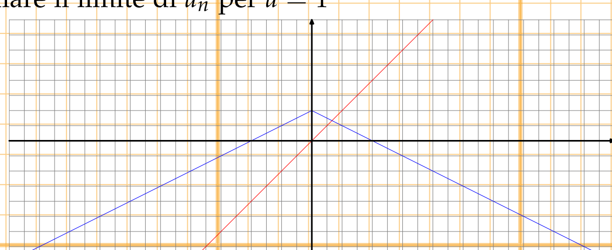
Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = (1 - |a_n|)/2 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

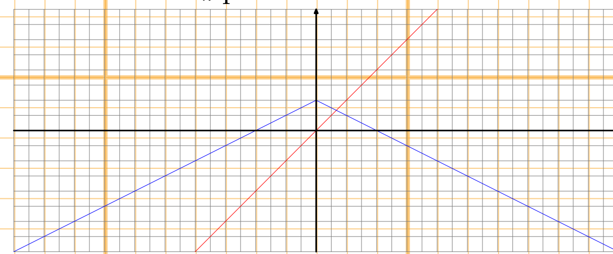
58·6 -[2] Studiare il limite di a_n per $a = 0$



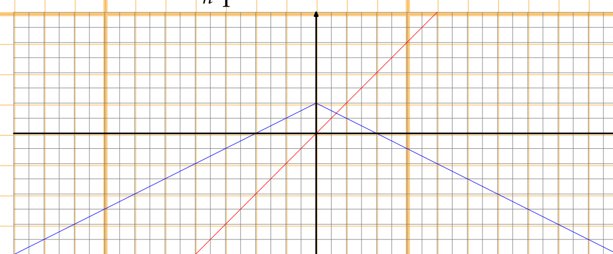
58·7 -[3] Studiare il limite di a_n per $a = 1$



58·8 -[2] Studiare il limite di a_n per $a = 5$



58·9 -[3] Studiare il limite di a_n per $a = -1$



59

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

59·1 -[] Calcolare

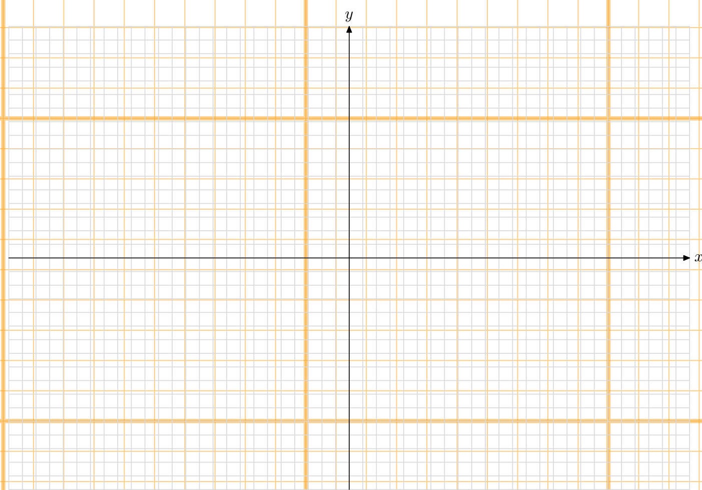
$$\lim_n a_n = \ell$$

59·2 -[] Verificare che

$$\lim_n a_n = \ell$$

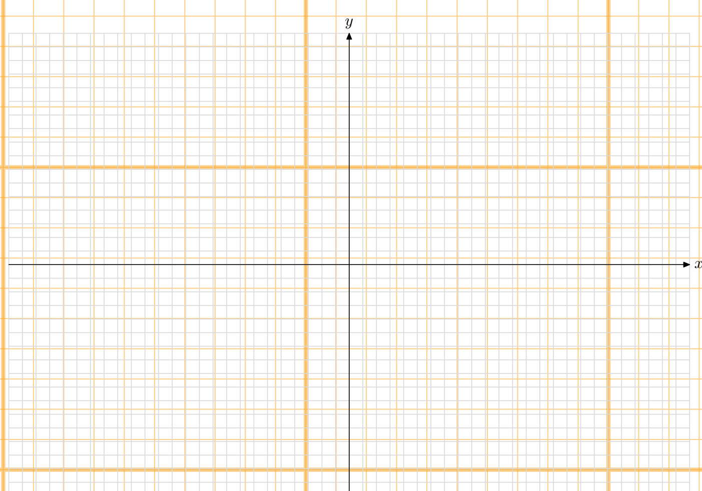
59·3 -[] Disegnare il grafico di

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



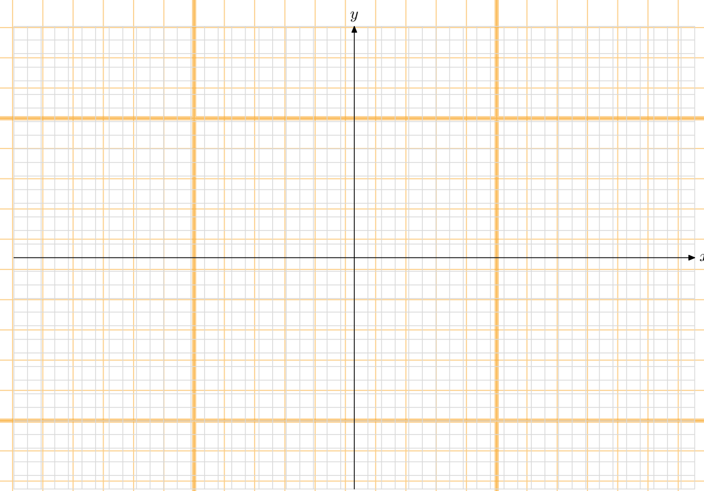
59·4 -[] Disegnare il grafico di

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$



59·5 -[] Disegnare il grafico di

$$f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$



60

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-2}}{n} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

60·1 -[] Trovare una regola di ricorrenza per $b_n = a_{2n}$ e per $c_n = a_{2n+1}$

60·2 -[] Trovare una espressione esplicita per b_n, c_n, a_n

60·3 -[] Calcolare il limite di a_n

60·4 -[] Determinare estremo superiore ed inferiore , massimo e minimo di $\{c_n : n > 4\}$

61

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3 + \dfrac{a_n}{2} \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

61·1 Verificare che a_n è crescente ed superiormente limitata.

61·2 Calcolare il limite di a_n

61·3 Determinare la regola di ricorrenza che soddisfa la successione $b_n = a_{2n}$ e calcolare b_0 ed il limite di b_n.

62

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^3 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

62·1 Verificare che $a_n \geq 3$.

62·2 Verificare che a_n è crescente.

62·3 Calcolare il limite di a_n.

63

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{6}{5 - a_n} \\ a_0 = k \end{cases}$$

63·1 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{6}{5 - x}$$

63·2 Verificare che se $k \in [2, 3]$, $a_n \in [2, 3]$

63·3 Verificare che se $k \in [2, 3]$, a_n è decrescente

63·4 Stabilire se a_n ammette limite ed, in caso affermativo, calcolarlo

63·5 Determinare al variare di k il comportamento della successione (non è richiesto dimostrare le affermazioni e si può procedere graficamente

63·6 Calcolare al variare di α

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x^\alpha}$$

64

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

64·1 Dimostrare che la successione è positiva

64·2 Dimostrare che la successione è strettamente crescente

64·3 Calcolare il limite della successione

64·4 Determinare una espressione esplicita di a_n dimostrando poi, mediante il principio di induzione la sua validità.

65