1

Equazioni Differenziali

1

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\ln x)(1 + y^2(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1·1 Discutere brevemente esistenza ed unicità della soluzione al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

1·2 Stabilire crescenza e decrescenza della soluzione al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, giustificando brevemente le affermazioni

1·3 Calcolare la soluzione corrispondente ai dati iniziali $x_0 = 1$, $y_0 = \pi$ precisandone il campo di definizione e giustificando brevemente le affermazioni

1·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni della equazione data

2

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

2·1 Determinare l'espressione di tutte le soluzioni al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ giustificando brevemente i calcoli.

2·2 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

2·3 Trovare tutte le soluzioni tali che $y(1) = 1$ giustificando brevemente le affermazioni.

2·4 Precisare per quali valori $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le soluzioni ammettono limite per $x \to +\infty$.

3

Si consideri l'equazione differenziale

$$|y'(x)| = \sqrt{4 - y^2(x)}$$

3·1 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

3·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$ e disegnarne il grafico.

4

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = |x|\sqrt{y(x)}$$

4·1 Determinare, al variare di (x_0, y_0), se esiste soluzione del problema di Cauchy ottenuto associando all'equazione data la condizione $y(x_0) = y_0$.

4·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(1) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

4·3 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(-1) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

4·4 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

4·5 Precisare l'ordine di infinitesimo delle soluzioni trovate ai punti precedenti in x_0.

5

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = 1 + y(x)$$

5·1 Determinare una soluzione della equazione differenziale tale che $y(0) = 1$.

5·2 Determinare una soluzione della equazione differenziale tale che $y(0) = -2$.

5·3 Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = -1$.

5·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni.

5·5 Studiare l'unicità delle soluzioni al variare dei valori iniziali.

6

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) + \cos(y(x)) = \sin x$$

con il dato iniziale $y(0) = 0$

6·1 Stabilire se la soluzione esiste e se è unica.

6·2 Determinare lo sviluppo di McLaurin di y del primo ordine centrato in 0 e tracciare il grafico qualitativo di y in un intorno di 0.

6·3 Scrivere e valutare il resto di Lagrange di ordine 2 (relativo al polinomio di primo grado di y centrato in 0)

6·4 Supponendo la soluzione y definita su tutto $\mathbb{R}$, trovare un polinomio di grado 2 maggiorante y ed uno minorante y; disegnarne il grafico ed indicare la zona di piano da essi delimitata entro cui si trova la soluzione y.

6·5 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e disegnarne il grafico.

6·6 Stabilire per quali valori x_0 ed y_0 esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione assegnata ed al valore iniziale $y(x_0) = y_0$

7

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \sqrt{y^2(x)}$$

7·1 Stabilire per quali (x_0, y_0) c'è esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo all'equazione data ed al dato iniziale $y(x_0) = y_0$

7·2 Determinare la soluzione tale che $y(0) = 0$ precisarne il campo di definizione e disegnarne il grafico.

7·3 Determinare la soluzione tale che $y(0) = 1$ precisarne il campo di definizione e disegnarne il grafico.

7·4 Determinare la soluzione tale che $y(0) = -1$ precisarne il campo di definizione e disegnarne il grafico.

7·5 Disegnare il garfico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

8

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{y^2(x)} \displaystyle\int_0^{y(x)} e^{-t^2} dt \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

8·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema assegnato

8·2 Determinare tutte le soluzioni costanti dell'equazione data

8·3 Trovare tutte le soluzioni corrispondenti a $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

8·4 Disegnare il grafico delle soluzioni di cui al punto precedente

8·5 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema assegnato al variare di x_0 e y_0

9

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|1-x^2|}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

9·1 Determinare i valori $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ per i quali il problema assegnato ammette soluzione e studiarne l'unicità.

9·2 Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai valori $x_0 = y_0 = 0$ precisandone il campo di definizione

9·3 Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai valori $x_0 = 2 \qquad y_0 = 0$ precisandone il campo di definizione

9·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni del problema assegnato.

9·5 Stabilire se le soluzioni del problema sono limitate sul loro campo di definizione

10

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \log y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

10·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione $y(x, y_0)$ del problema di Cauchy assegnato.

10·2 Disegnare il grafico delle soluzioni per $y_0 < 1$

10·3 Disegnare il grafico delle soluzioni per $y_0 > 1$

10·4 Provare che esiste

$$f(y_0) = \lim_{x \to 0} y(x, y_0)$$

10·5 Trovare, se esistono, massimo e minimo di $f(y_0)$.

11

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)} \\ y(0) = a \end{cases}$$

11·1 Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, esistenza ed unicità della soluzione $y(x, a)$ del problema di Cauchy assegnato.

11·2 Disegnare il grafico qualitativo della soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

11·3 Studiare concavità e convessità delle soluzioni nel loro campo di definizione.

11·4 Determinare la soluzione

11·5 Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della soluzione centrato in $x = 0$

12

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^{y(x)} - 1}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

12·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema dato

12·2 Determinare la soluzione per $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

12·3 Determinare la soluzione per $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

12·4 Calcolare $y''(1)$ per $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

12·5 Disegnare il grafico di tutte le soluzionial variare di x_0, y_0.

13

Si consideri il problema

$$y(x) = \pi + \int_0^x \cos^2 y(t)dt$$

13·1 Scrivere un problema di Cauchy equivalente al problema dato.

13·2 Determinare la soluzione del problema dato e disegnarne il grafico.

13·3 Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 della soluzione y del problema dato

13·4 Disegnare il grafico di y^{-1} ove è definita

13·5 Verificare che

$$|y(x)| \leq \pi + |x|$$

14

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2\sqrt{y(x)}}{x^2 - 1}$$

14·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione data.

14·2 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$.

14·3 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 2$.

14·4 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = -2$.

14·5 Disegnare il grafico delle soluzioni di cui ai precedenti punti.

15

15·1 Disegnare il grafico di una funzione derivabile con derivata continua su $\mathbb{R}$ tale che il coefficiente angolare della retta tangente al suo grafico in un punto è uguale al valore della funzione nello stesso punto aumentato di 1.

15·2 Studiare l'unicità della soluzione del problema precedente.

15·3 Determinare, se è possibile una soluzione del problema dato il cui grafico passi per il punto $(0, 1)$

15·4 Detta f la soluzione del problema di cui al punto precedente, calcolare $f'(0)$

16

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = y^2(x) - y(x) \\ y(2) = k \end{cases}$$

16·1 Determinare per quali valori di k il problema ammette una soluzione locale e studiarne l'unicità.

16·2 Determinare la soluzione che corrisponde a $k = 3$, precisandone il campo di definizione.

16·3 Determinare la soluzione che corrisponde a $k = -1$, precisandone il campo di definizione.

17

17·1 Determinare la soluzione che corrisponde a $k = 0.5$, precisandone il campo di definizione.

17·2 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni del problema dato.

17·3 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = y^2(x) - y(x) \\ y(0) = k \end{cases}$$

precisando per quali k la soluzione esiste e studiandone l'unicità.

18

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = \max\{2, y(x)\} \\ y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}$$

18·1 Studiare esistenza ed unicità locale della soluzione.

18·2 Determinare la soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 1$ e $b = 0$ precisandone il campo di definizione.

18·3 Determinare la soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 2$ e $b = 0$ precisandone il campo di definizione.

18·4 Determinare il polinomio di McLaurin di grado 2 della soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 1$ e $b = 1$

18·5 Determinare il polinomio di McLaurin di grado 3 della soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 1$ e $b = 1$

19

Si consideri la funzione $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni:

$$\begin{cases} y'(x) = 2 \arctan y(x) + \int_0^x \cos y(t) dt \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(si suppone che tale funzione esista e sia unica per ogni $\delta > 0$)

19·1 Scrivere il polinomio di McLaurin di y di secondo grado

19·2 Trovare un maggiorante per y' e y'' su $[-\delta, \delta]$

19·3 Determinare δ in modo che la differenza tra y e la sua retta tangente sia inferiore a 0.1 su $[-\delta, \delta]$.

19·4 Calcolare $y^{(4)}(0)$.

19·5 Stabilire se 0 è un punto di minimo o massimo relativo per y.

20

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (xy(x))' = \ln x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

20·1 Stabilire se l'equazione data è lineare e studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema.

20·2 Determinare esplicitamente la soluzione del problema dato, precisandone il campo di definizione.

20·3 Disegnare il grafico della soluzione.

20·4 Determinare il polinomio di Taylor di grado 4 della soluzione del problema dato centrato in $x = 1$

21

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \sqrt{y^2(x) - 1}$$

21·1 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 2$

21·2 Calcolare una primitiva di

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

21·3 Determinare una espressione esplicita della soluzione y del problema di Cauchy associato al dato iniziale $y(0) = 2$

21·4 Determinare una espressione esplicita della soluzione y del problema di Cauchy associato al dato iniziale $y(0) = 1$

21·5 Determinare una espressione esplicita della soluzione y del problema di Cauchy associato al dato iniziale $y(0) = 0$

22

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{\ln y(x)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

22·1 Stabilire se esistono soluzioni costanti del problema

22·2 Trovare la soluzione per $y_0 = e$ precisandone il campo di definizione.

22·3 Trovare la soluzione per $y_0 = 1/e$ precisandone il campo di definizione.

22·4 Disegnare il grafico delle soluzioni al variare di y_0.

22·5 Oservando che l'equazione non dipende esplicitamente da x, disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

23

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-y^4(x)} - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

23·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato.

23·2 Determinare le soluzioni costanti dell'equazione e precisare i dati iniziali in corrispondenza dei quali si hanno soluzioni costanti

23·3 Disegnare il grafico della soluzione relativa al dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

23·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

24

24·1 Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$ tale che

$$f'(x) = \sin(f(x)) \qquad f(0) = \frac{\pi}{2}$$

OPPURE Sia $f(x) = 2\arctan(e^x)$

24·2 **PER IL CASO (1)** Derivare entrambi i membri della (1) e ricavare f'' in funzione di f ed f' ed f''' in funzione di f f' ed f''

PER IL CASO (2) Calcolare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

24·3 Calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ e scrivere il polinomio di Taylor P_2 ed il polinomio di Taylor P_3 di f centrato in 0 di grado 2 e 3, rispettivamente.

24·4 Disegnare il grafico di P_2 e di P_3 per $|x| \leq 1$ **24·5** **SCONSIGLIATA PER IL CASO (2)** Provare che $|f'(x)| \leq 1$ $|f''(x)| \leq 1$ $|f'''(x)| \leq 2$

24·6 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$ stimare il resto di Lagrange relativo al polinomio di Taylor di grado 2 in funzione di x

24·7 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, disegnare un maggiorante ed un minorante di f per $|x| \leq 1$ **24·8** Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, determinare un maggiorante dell'errore commesso sostituendo f con P_2 per $|x| \leq 1/2$.

24·9 Trovare, se possibile, a in modo che $f(x) - ax - \frac{\pi}{2}$ sia infinitesima in 0 di ordine superiore al secondo.

25

Sia

$$y'(x) = \frac{\sin(y(x))}{\sin(x)}$$

25·1 Disegnare il grafico della soluzione y relativa al dato iniziale $y(\pi/4) = \pi/4$. **25·2** Disegnare il grafico della soluzione y relativa al dato iniziale $y(\pi/4) = \pi/2$. **25·3** Disegnare il grafico della soluzione

y relativa al dato iniziale $y(\pi/4) = 5\pi/4$. **25·4**

Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

26

Sia

$$y'(x) = y^2(x) - 1$$

26·1 Disegnare il grafico della soluzione y relativa al dato iniziale $y(0) = 0$, $y(0) = 2$, $y(0) = 1$, $y(0) = -2$.

27

Si consideri l'equazione

$$y(x) = a + \int_0^x \frac{2t}{2y(t) - 1} dt$$

27·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data per $a = 0$

27·2 Determinare le soluzioni dell'equazione data per $a = 4$

27·3 Determinare le soluzioni dell'equazione data per $a = -1$

27·4 Determinare le soluzioni dell'equazione data al variare di a

28

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + \sin(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

28·1 Studiare esistenza ed unicità del problema dato

28·2 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 0$

28·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 2\pi$

28·4 Determinare tutte le primitive di

$$\frac{1}{1 + \sin(t)}$$

29

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = y^4(x) + y(x) \\ y(0) = a \end{cases}$$

29·1 Studiare esistenza ed unicità del problema dato

29·2 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 1$

29·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 0$

29·4 Studiare al variare di a $\lim_{x\to+\infty} y(x)$

30

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^3(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

30·1 Discutere esistenza ed unicità locale della soluzione del problema dato.

30·2 Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 0$, precisandone il campo di definizione

30·3 Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0 per $y_0 = 0$, precisandone il campo di definizione

30·4 Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ al variare di y_0, precisandone il campo di definizione

30·5 Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0, y_0, precisandone il campo di definizione

31

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \sin y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

31·1 Discutere esistenza ed unicità locale della soluzione del problema dato.

31·2 Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione

31·3 Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0 per $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione

31·4 Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ al variare di y_0, precisandone il campo di definizione

31·5 Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0, y_0, precisandone il campo di definizione

32

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-y^4(x)} - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

32·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato.

32·2 Determinare le soluzioni costanti dell'equazione e precisare i dati iniziali in corrispondenza dei quali si hanno soluzioni costanti

32·3 Disegnare il grafico della soluzione relativa al dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

32·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

33

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - y^2(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

33·1 Determinare la soluzione relativa al dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

33·2 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

34

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

34·1 Provare che la soluzione del problema è convessa dove è definita.

34·2 Provare che la soluzione ha un minimo locale in 0

34·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato

34·4 Determinare esplicitamente tutte le soluzioni del'equazione differenziale data

34·5 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

35

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = y^7(x) - 1$$

35·1 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$

35·2 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1$

35·3 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) > 1$

35·4 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) < 1$

35·5 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

36

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{\sin y(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

36·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema assegnato

36·2 Scrivere la retta tangente al grafico della soluzione per $x_0 = y_0 = 1$

36·3 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema per $x_0 = y_0 = 1$

36·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema.

37

Si consideri l'equazione

$$y(x) = 2 + \int_1^x \frac{1}{\sin(y(t))} dt$$

37·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema assegnato

37·2 Determinare la soluzione dell'equazione data

37·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione

37·4 Scrivere il polinomio di McLaurin di grado 2 della soluzione del problema

38

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = y(x)(1 - y^2(x))^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

38·1 Determinare le soluzioni costanti dell'equazione data

38·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $y_0 = 1/2$ e $y_0 = -1/2$ **38·3** Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $y_0 = 2$ e $y_0 = -2$ **38·4** Disegnare il grafico di eventuali soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$

39

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt[3]{y(x) - 1} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

39·1 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $y_0 = 0$ **39·2** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni del problema dato al variare di y_0

40

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = 1 + \ln(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

40·1 Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ **40·2** Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ **40·3** Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 1$, **40·4** Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0, y_0

41

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = (x-1)^2 y^2$$

41·1 Determinare la soluzione tale che $y(0) = 1$ e disegnarne il grafico **41·2** Determinare la soluzione tale che $y(0) = -1$ e disegnarne il grafico **41·3** Determinare la soluzione tale che $y(0) = 0$ e disegnarne il grafico **41·4** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni e disegnarne il grafico

42

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = (y(x) - 1)\sqrt{y(x) + 1} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

42·1 Determinare per quali valori di y_0 il problema ammette soluzioni costanti

42·2 Disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema per $y_0 = 0$ **42·3** Disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema per $y_0 = 2$

42·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema al variare di y_0

43

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = y(x)(y(x)-1)^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

43·1 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 1$
43·2 Disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema

per $y_0 = -1$

44

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 \\ y(0) = a \\ t'(0) = b \end{cases}$$

44·1 Determinare al variare di b, $y'(x)$

44·2 Determinare al variare di a, b, $b \neq 0$, $a \neq 0$. $y(x)$

44·3 Determinare $y(x)$ per $b \neq 0$

44·4 Determinare $y(x)$ per $a \neq 0$

45

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = (x-1)(y^2(x)-1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

45·1 Discutere esistenza ed unicità della soluzione.

45·2 Determinare la soluzione per $x_0 = y_0 = 0$ e disegnarne il grafico

45·3 Determinare la soluzione al variare dei dati iniziali.

45·4 Disegnare il grafico della soluzione al variare dei dati iniziali.

46

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)-2}{\sqrt{x+1}} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

46·1 Determinare per quali valori di y_0 il problema ammette soluzioni costanti

46·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 1$
46·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 3$

46·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema al variare di y_0

47

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = 1 - \sqrt{y(x)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

47·1 Determinare per quali valori di y_0 il problema ammette soluzioni costanti

47·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 1$

47·3 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema al variare di y_0

48

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y^4(x) = 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

48·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

48·2 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 0$ **48·3** Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 1$ **48·4** Disegnare il grafico delle soluzioni al variare di a

49

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

49·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

49·2 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = \pi/2$ **49·3** Determinare una primitiva di

$$\frac{1}{\sin(t)}$$

(per integrare si può usare la sostituzione $s = \tan(t/2)$)

49·4 Determinare la soluzione per $a = \pi/2$ (per integrare si può usare la sostituzione $s = \tan(t/2)$)

50

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x-1)(y^2(x) - y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

50·1 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 0$ **50·2** Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 1$ **50·3** Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 1/2$ **50·4** Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 2$

51

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x(y^2(x) - 1) \\ y(0) = a \end{cases}$$

51·1 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 0$ **51·2** Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 1$

51·3 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 1/2$

51·4 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 2$

52

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\ln(1 + y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

52·1 Disegnare la soluzione del problema per $a = e - 1$

52·2 Disegnare la soluzione del problema per $a = \frac{1}{e} - 1$

52·3 Disegnare la soluzione del problema per $a = 0$

52·4 Disegnare le soluzione del problema al variare di a

53

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{(1 + y^2(x))}{2y(x)} \\ y(0) = a \end{cases}$$

53·1 Disegnare la soluzione del problema per $a = 1$ **53·2** Disegnare la soluzione del problema per $a = -1$

53·3 Disegnare la soluzione del problema al variare di a **53·4** Determinare le soluzione del problema al variare di a

54

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\frac{1}{3}y^3(x) - y(x)}{y^2(x) - 1} \\ y(0) = a \end{cases}$$

54·1 Determinare la soluzione del problema per $a = 2$ precisandone il campo di definizione **54·2** Determinare la soluzione del problema per $a = 1.5$ precisandone il campo di definizione

54·3 Determinare la soluzione del problema per $a = \sqrt{3}$ precisandone il campo di definizione

54·4 Disegnare tutte le soluzioni del problema precisandone il campo di definizione

55

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y(x)y'(x) = (y^2(x) + 1)$$

55·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare del dato iniziale. **55·2** Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$

55·3 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ **55·4** Scrivere il polinomio di McLaurin di grado 2 della soluzione tale che $y(0) = 1$

56

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y'(x) = y^2(x)$$

56·1 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(1) = a$

56·2 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(-1) = a$

56·3 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = a$ **56·4** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

57

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \sqrt{\sin(x)} & 0 < x < \pi \\ \sqrt{x - \pi} & x \geq \pi \end{cases}$$

ed il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

57·1 Discutere esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy assegnato.

57·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato per $y_0 = \pi/2$, precisandone il campo di definizione.

57·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato per $y_0 = 5$, precisandone il campo di definizione.

57·4 Calcolare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy assegnato per $y_0 = -\pi$, precisandone il campo di definizione e disegnarne il grafico.

58

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}y'(x) + y(x) = 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

58·1 Stabilire se si tratta di un problema lineare ed inoltre stabilire se si tratta di un problema a variabili separabili. **58·2** Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato per $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione.

58·3 Determinare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy assegnato per $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione.
58·4 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato al variare di x_0, y_0 precisandone il campo di definizione.
58·5 Determinare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy assegnato al variare di x_0, y_0 precisandone il campo di definizione.

59

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{\sin y(x)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

59·1 Discutere esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy assegnato.

59·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato per $y_0 = \pi/2$, precisandone il campo di definizione.

59·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato per $y_0 = \pi$, precisandone il campo di definizione.

60

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y^2(x) = 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

60·1 Stabilire se si tratta di un problema lineare ed inoltre stabilire se si tratta di un problema a variabili separabili. **60·2** Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato per $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione.

60·3 Determinare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy assegnato per $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione. **60·4** Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy assegnato per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 0$ precisandone il campo di definizione.

60·5 Determinare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy assegnato per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 0$ precisandone il campo di definizione.

61

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x)\sin(y(x)) = \frac{1}{x^2}$$

61·1 Determinare la soluzione dell'equazione tale che $y(1) = 0$ e disegnarne il grafico.

61·2 Determinare la soluzione dell'equazione tale che $y(-1) = 0$ e disegnarne il grafico. **61·3** Disegnare, al variare di c il grafico di $g(y) = \frac{1}{\cos(y)+c}$.

61·4 Stabilire se c'è relazione tra g ed y, ed in caso affermativo descriverla.

62

Si consideri l'equazione

$$y(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{t^2+1} dt$$

62·1 Calcolare $y(0)$

62·2 Determinare, derivando l'equazione data, un'equazione differenziale equivalente all'equazione data

62·3 Disegnare, al variare di il grafico di $y(x)$.

62·4 Determinare esplicitamente $y(x)$

63

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \ln |y(x)|$$

63·1 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che

$y(0) = 1$ **63·2** Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data

tali che $y(0) = e$

63·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = -e$

63·4 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data

64

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \ln(1 + y^2(x))$$

64·1 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = e - 1$ **64·2** Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione

tali che $y(0) = 1/e - 1$

64·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$ **64·4** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = |x|\sqrt{|y(x)|}$$

64·5 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = 1$

64·6 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che $y(-1) = 1$

64·7 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = -1$

64·8 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che $y(-1) = -1$

64·9 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$

64·10 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

65

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = x^2\sqrt{y(x)^2}$$

65·1 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = 1$

65·2 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

66

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = 1 - y^6(x)$$

ed il dato iniziale $y(x_0) = y_0$

66·1 Disegnare il grafico di $y(x)$ nei casi in cui

- $x_0 = 0$, $y_0 = -2$

- $x_0 = 0, y_0 = -1$
- $x_0 = 0, y_0 = 0$
- $x_0 = 0, y_0 = 1$
- $x_0 = 0, y_0 = 2$

66·2 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data al variare del dato iniziale.

67

Si consideri la funzione g tale che

$$g'(x) = \sin(x)(1 - \cos(g(x))$$

tale che $g(0) = \pi$

67·1 Stabilire se g esiste e se è unica. **67·2** Determinare la retta tangente al grafico di g nell'origine.

67·3 Determinare $\delta > 0$ tale che

$$|g(x) - \pi| < 0.01 \qquad \forall x \in [-\delta, \delta]$$

67·4 Stimare l'errore $E(x)$ che si commette sostituendo $g(x)$ con π in modo da mostrare che $E(x)$ è infinitesimo per $x \to 0$. **67·5** Determinare e disegnare nel piano un insieme che contenga la soluzione nella striscia

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ x \in [-\delta, \delta]\}$$

68

Si consideri la funzione f descritta dalla seguente proprietà

Il grafico di f contiene il punto $(0, 1)$ ed inoltre la derivata di f calcolata in x è il doppio di e^{-x^2}.

68·1 Stabilire se le condizioni assegnate sono in grado di determinare univocamente la funzione f. **68·2** Determinare tutte le funzioni f che soddisfano le condizioni assegnate e disegnarne il grafico. Si consideri poi g definita da

$$g(x) = f(x^2 - 1)$$

68·3 Stabilire se le condizioni assegnate sono in grado di determinare univocamente la funzione g. **68·4** Determinare tutte le funzioni g che soddisfano le condizioni assegnate e disegnarne il grafico.

69

Si consideri la funzione f definita su $\mathbb{R}$ di cui è noto che: $f \in C^\infty$, $f(0) = 0$, f è invertibile, $f'(x) \neq 0$ per ogni x, $\lim_{y\to-\infty} f(y) = -1$, $\lim_{y\to+\infty} f(y) = 4$ **69·1** Disegnare il grafico. di f

69·2 Esprimere in funzione di f e delle sue derivate

$$(f^{-1})'(y)$$

Si consideri poi il problema di cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1})(x)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

69·3 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

69·4 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato

70

Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 - x^2)y'(x) = 1 - y^2(x)$$

ed il dato iniziale $y(x_0) = y_0$

70·1 Disegnare il grafico di $y(x)$ nei casi in cui
$x_0 = 0, y_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 2, y_0 = 2$

70·2 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data al variare del dato iniziale.

71

consideri la funzione g tale che

$$g'(x) = e^{-x^2}(1 - e^{-g^2(x)}) \qquad , \qquad g(0) = 1$$

71·1 Stabilire se g esiste e se è unica. **71·2** Determinare la retta tangente al grafico di g nell'origine.

71·3 Determinare $\delta > 0$ tale che

$$|g(x) - 1| < 0.01 \qquad \forall x \in [-\delta, \delta]$$

71·4 Stimare l'errore $E(x)$ che si commette sostituendo $g(x)$ con 1 in modo da mostrare che $E(x)$ è infinitesimo per $x \to 0$. **71·5** Determinare e disegnare nel piano un insieme che contenga la soluzione nella striscia

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, , \, x \in [-\delta, \delta]\}$$

72

Si consideri l'equazione differenziale

$$\sqrt{|x|}y'(x) = y(x)$$

72·1 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}_+$ **72·2** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}_-$ **72·3** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}$ **72·4** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}$ tali che $y(0) = 0$

73

Si consideri la funzione f descritta dalla seguente proprietà

Il valore di f nell'origine é 1 ed inoltre la pendenza di f in ogni punto del suo campo di definizione è la metà del valore che f ivi assume.

73·1 Stabilire se le condizioni assegnate sono in grado di determinare univocamente la funzione f. **73·2** Determinare tutte le funzioni f che soddisfano le condizioni assegnate e disegnarne il grafico. Si consideri poi g la cui derivata differisce da quella di f per metà dell'argomento.

73·3 Stabilire se le condizioni assegnate sono in grado di determinare univocamente la funzione g. **73·4** Determinare tutte le funzioni g che soddisfano le condizioni assegnate e disegnarne il grafico.

74

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sin(y(x))y'(x) = e^{y(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

74·1 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni con $x_0 = 0, y_0 = \pi/2$

74·2 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni con $x_0 = 3, y_0 = \pi/2$

74·3 Determinare esplicitamente l'inversa della soluzione per $x_0 = 0, y_0 = \pi/2$

74·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni con $x_0 = 0, y_0 = \pi$

75

Si consideri l'equazione

$$y(x) = y_0 + \int_3^x (y^2(t) - 1)dt$$

75·1 Determinare la soluzione per $y_0 = 1$

75·2 Determinare la soluzione per $y_0 = 0$ **75·3** Determinare la soluzione per $y_0 = 2$

75·4 Disegnare il grafico delle soluzioni pr $y_0 = 0$, $y_0 = 1, y_0 = 2$

76

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt[3]{y(x) - 1}(y^2(x) - 4) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

76·1 Verificare esistenza ed unicità locale della soluzione del problema.

76·2 Disegnare il grafico dell'inversa della soluzione, precisandone il campo di definizione. **76·3** Disegnare il grafico della soluzione precisandone il campo di definizione. **76·4** Studiare la prolungabilità della soluzione.

77

Si consideri la funzione y tale che

$$y(x) = y_0 + \int_0^x \sin(y(t))dt$$

77·1 Dimostrare che per $y_0 = 0$ si ha $|y(x)| \leq |x|$.

77·2 Dimostrare che per $y_0 = 0$ si ha $|y(x)| \leq e^x$ **77·3** Disegnare il grafico di y al variare di y_0

77·4 Determinare y al variare di y_0.

78

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x)f(y(x)) = g(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

dove g e f sono le funzioni il cui grafico è di seguito riportato.

e si assume che g è infinita in -1 ed infinitesima all'infinito di ordine 2 **78·1** Disegnare il grafico di una primitiva di f e di una primitiva di g

78·2 Disegnare il grafico di tutte le primitive di f e di tutte le primitive di g

78·3 Disegnare il grafico di una primitiva di f che passa per $(1, 0)$ e di una primitiva di g che passa per $(0, 0)$

78·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy assegnato.

79

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

79·1 Determinare il campo di definizione D di f e disegnarne il grafico **79·2** Disegnare il grafico di $\int_0^x f(t)dt$ **79·3** Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

80

Sia f una funzione derivabile 5 volte tale che

$$f(x) = \sin(x) + x^5\omega(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

con ω funzione infinitesima per $x \to 0$ e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = \ln\left(1 + x^2\right) y'(x) + f(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

80·1 Studiare l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema dato.

80·2 Verificare che se $g(\cdot)$ soddisfa l'equazione differenziale, allora anche $g(\cdot) + \pi$ soddisfa l'equazione differenziale **80·3** Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 4 di una soluzione del problema di Cauchy. **80·4** Supponendo che ω e tutte le sue derivate fino al quinto ordine sono in modulo inferiori a 0.1 per $|x| \leq 0.1$ reale, verificare che f differisce dalla sua retta tangente nell'origine a meno di 0.1

81

Si consideri il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale

$$y'(x) = y(x)\sqrt{1 - y(x)}$$

ed ai dati iniziali $y(0) = y_0$ Studiare esistenza ed unicità e disegnare il grafico delle soluzioni del problema dato nel caso in cui: **81·1** $y_0 = -1/2$

81·2 $y_0 = 0$

81·3 $y_0 = 1/2$

81·4 $y_0 = 1$

81·5 $y_0 = 3/2$

82

Si consideri il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale

$$y^2(x) + y(x) = y'(x)y(x)$$

ed ai dati iniziali $y(0) = y_0$

82·1 Studiare esistenza ed unicità e disegnare il grafico delle soluzioni del problema dato nel caso in cui: $y_0 = 0$ **82·2** Determinare le soluzioni

del problema dato nel caso in cui: $y_0 = 0$

83

Si consideri il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^3$$

ed ai dati iniziali $y(x_0) = y_0$

83·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema dato. **83·2** Determinare le soluzioni del problema dato per $x > 0$,

precisando il campo di definizione

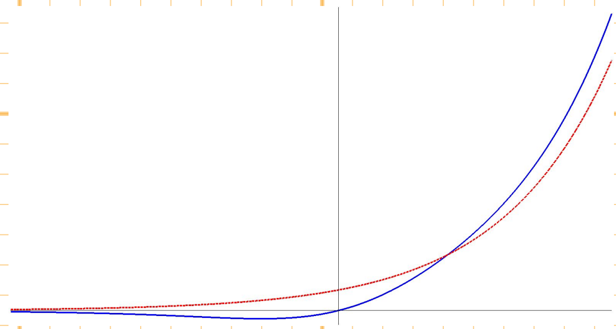
83·3 Determinare le soluzioni del problema dato per $x < 0$, precisando il campo di definizione **83·4** Determinare, se esistono le soluzioni

del problema dato per $x \in \mathbb{R}$.

83·5 Calcolare la soluzione che corrisponde ad $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

84

Sia $g(x) = e^x \int_0^1 e^{-t^2} dt$. In figura sono riportati, con linea continua blu , il grafico di f e, con linea tratteggiata rossa, il grafico di g.



e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

84·1 Disegnare il grafico della soluzione y del problema assegnato per $a = 1$ **84·2** Disegnare il grafico della soluzione y del problema assegnato per $a = 0$

Sia

$$g(y) = e^y \int_0^y e^{-t^2} dt$$

84·3 Dimostrare che il grafico di g è del tipo di quello di f.

85

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x(e^{y(x)} - e^{-y(x)}) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

85·1 Disegnare il grafico di y al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_+$ **85·2** Disegnare il grafico di y per $\alpha = 0$ **85·3** Disegnare il grafico di y al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_-$

85·4 Determinare una espressione esplicita di y al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

86

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{x(1 + y^2(x))}$$

86·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(-1) = 0$

86·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(-1) = 2$

86·3 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data.

87

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \tan(y(x))y'(x) = \tan(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

87·1 $_2$ Discutere esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy. **87·2** $_3$ Determinare una espressione della soluzione in termini di funzioni elementari per $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione.

87·3 $_3$ Determinare una espressione della soluzione in termini di funzioni elementari al variare di x_0 e y_0, precisandone il campo di definizione. **87·4** $_5$ Detta $y(x, a)$ la soluzione del problema di Cauchy per $x_=0$ e $y_0 = a > 0$ provare che, per ogni x fissato in $(-\pi/2, \pi/2$ si ha

$$\lim_{a \to \pi/2} y(x, a) = \pi/2$$

87·5 $_4$ Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = \pi/4$ e $y_0 = \pi/3$, precisandone il campo di definizione.

87·6 $_5$ Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = \pi/4$ e $y_0 = \pi/6$, precisandone il campo di definizione. **87·7** $_3$ Verificare che se $y(x)$ risolve l'equazione differenziale assegnata allora anche $z(x) = y(-x)$ risolve l'equazione differenziale assegnata. **87·8** $_3$ Verificare che se $y(x)$ risolve l'equazione differenziale assegnata allora anche $z(x) = -y(-x)$ risolve l'equazione differenziale assegnata. **87·9** $_3$ Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = -\pi/4$ e $y_0 = \pi/3$, precisandone il campo di definizione.

87·10 $_3$ Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = \pi/4$ e $y_0 = -\pi/6$, precisandone il campo di definizione.

87·11 $_5$ Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale assegnata al variare di x_0, y_0.

88

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}y'(x) = \dfrac{1}{e^{y(x)} - 1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

88·1 Disegnare la soluzione del problema per $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.
88·2 Disegnare la soluzione del problema per $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

88·3 Disegnare tutte le soluzioni del problema.

89

90

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = \sqrt[7]{y(x) - 1} \\ y(0) = a \end{cases}$$

90·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni al variare di $a \in \mathbb{R}$

90·2 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 0$

90·3 Disegnare il grafico delle soluzioni per $a = 1$

90·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

91

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = y(x)^2 - 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

91·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni al variare di $a \in \mathbb{R}$

91·2 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni per $a = 1$ **91·3** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni per $a = 0$ **91·4** Determinare tutte le soluzioni per $a = 0$ **91·5** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

92

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = (e^{y(x)} - 1)\ln(x)$$

con il dato iniziale $y(x_0) = y_0$

92·1 Studiare al variare del dato iniziale esistenza ed unicità della soluzione **92·2** Determinare tutte le soluzioni per $x_0 = 1$ ed $y_0 = 0$

92·3 Determinare tutte le soluzioni per $x_0 = 1$ ed $y_0 = -1$

92·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni per $x_0 = 1$ al variare di y_0

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = (y(x) - 1)\sqrt{y(x) + 1}$$

con il dato iniziale $y(x_0) = y_0$ **92·5** Studiare al variare del dato iniziale esistenza ed unicità della soluzione **92·6** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 0$

92·7 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 2$

92·8 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni al variare di x_0 ed y_0

93

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{y(x)}$$

con il dato iniziale $y(1) = 1$

93·1 Discutere esistenza ed unicità della soluzione **93·2** Trovare z tale che $y(x) = xz(x)$ sia soluzione **93·3** Disegnare il grafico della soluzione

94

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = y^2(x)$$

94·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni tali che $y(x_0) = y_0$

94·2 Determinare le soluzioni tali che $y(0) = 1$ **94·3** Determinare le soluzioni tali che $y(0) = -1$

94·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

94·5 Determinare tutte le soluzioni.

95

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = 4 - y^2(x)$$

95·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni tali che $y(x_0) = y_0$

95·2 Determinare le soluzioni tali che $y(0) = 1$ **95·3** Determinare le soluzioni tali che $y(0) = -1$

95·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

95·5 Determinare tutte le soluzioni.

96

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = 2 - y(x)$$

96·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni tali che $y(x_0) = y_0$

96·2 Determinare le soluzioni tali che $y(0) = 1$ **96·3** Determinare le soluzioni tali che $y(0) = -1$ **96·4** Determinare tutte le soluzioni.

97

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = (e^{y(x)} - 1)\ln(|x|)$$

97·1 Disegnare il grafico di della soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(1) = -1$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = (e^{y(x)} - 1)\ln(|x|)$$

97·2 Determinare esplicitamente la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(1) = -1$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = e^{y(x)}\ln(|x|)$$

97·3 Disegnare il grafico di della soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(1) = -1$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = x\sqrt{|y(x)|}$$

97·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzione dell'equazione differenziale data

98

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x)(y(x) - y^2(x)) = \ln|x|$$

98·1 Disegnare, se ne esistono, il grafico delle soluzioni dell'equazione

differenziale tali che $y(1) = 2$

98·2 Disegnare, se ne esistono, il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(1) = 1$

99

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(y(x) - 1)^3}{x^2 - 1}$$

99·1 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 0$, precisandone il campo di definizione.

99·2 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 2$, precisandone il campo di definizione.

99·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $y(2) = 0$, precisandone il campo di definizione.

99·4 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $y(2) = 2$, precisandone il campo di definizione.

99·5 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $y(-2) = 0$, precisandone il campo di definizione.

99·6 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $y(-2) = 2$, precisandone il campo di definizione.

99·7 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data

100

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{(x-1)^3}{y(x)-1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

100·1 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $(x_0, y_0) = (0, 0)$, precisandone il campo di definizione.

100·2 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $(x_0, y_0) = (2, 0)$, precisandone il campo di definizione.

100·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $(x_0, y_0) = (0, 2)$, precisandone il campo di definizione.

100·4 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data tale che $(x_0, y_0) = (2, 2)$, precisandone il campo di definizione.

101

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

101·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione.

101·2 Determinare la soluzione per $x_0 = y_0 = 0$

101·3 Determinare la soluzione per $x_0 = 0, y_0 = 4$

101·4 Disegnare il grafico delle soluzioni al variare di x_0, y_0

102

Si consideri l'equazione differenziale

$$\sin(y(x))y'(x) = \sin(x)$$

102·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy ad essa associato relativo al dato iniziale $y(x_0) = y_0$

102·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy ad essa associato relativo al dato iniziale $y(\pi) = \pi$

102·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy ad essa associato relativo al dato iniziale $y(\pi/2) = (5/6)\pi$

102·4 Verificare che le soluzioni che le soluzioni dell'equazione differenziale il cui grafico è contenuto nell'insieme

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2k\pi \leq x - y \leq \pi + 2k\pi\}$$

103

Si consideri il problema di cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \cos^2(x(t)) \\ x(0) = 9 \end{cases}$$

103·1 Determinare la soluzione del problema , disegnarne il grafico

e studiarne campo di definizione e prolungabilità

104

Si consideri la funzione definita da

$$F(x) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\ln|y|}$$

104·1 Disegnare il grafico di F per $y_0 = 1/2$ **104·2** Disegnare il

grafico di F per $y_0 = 2$

104·3 Disegnare il grafico di F per $y_0 = -2$

104·4 Disegnare il grafico di F per $y_0 = 1$

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = x \ln |y(x)| \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

104·5 Per $y_0 = 1/2$, disegnare il grafico della soluzione precisandone il campo di definizione

104·6 Per $y_0 = 2$, disegnare il grafico della soluzione precisandone il campo di definizione Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -x \ln |y(x)| \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

104·7 Per $y_0 = -1/2$, disegnare il grafico della soluzione precisandone il campo di definizione **104·8** Per $y_0 = -2$, disegnare il grafico della soluzione precisandone il campo di definizione

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = |x| \ln |y(x)| \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

104·9 Per $y_0 = -1/2$, disegnare il grafico della soluzione precisandone il campo di definizione **104·10** Per $y_0 = 2$, disegnare il grafico della soluzione precisandone il campo di definizione

105

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = y(x) - \sqrt{y(x)}$$

105·1 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = \pm 1/2$ e determinarla esplicitamente.

105·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = \pm 2$ e determinarla esplicitamente. **105·3** Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = \pm 1$ e determinarla esplicitamente.

105·4 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione

106

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 - y^2(x)$$

106·1 Discutere brevemente esistenza ed unicità delle soluzioni al variare dei dati iniziali **106·2** Determinare eventuali soluzioni costanti

106·3 Trovare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$ precisandone il campo di definizione. **106·4** Stabilire se tale soluzione è limitata e calcolarne eventuali massimi e minimi assoluti e relativi

106·5 Determinare, se esistono, un maggiorante ed un minorante del campo di definizione della soluzione.

107

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y''(x))^2 = 4y'(x)y(x)$$

107·1 Determinare le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = k$, $y'(0) = 0$ e disegnarne il grafico. **107·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ e disegnarne il grafico.

107·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ e disegnarne il grafico.

107·4 Studiare l'unicità della soluzione al variare dei valori iniziali.

108

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) + 2y(x)y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

108·1 Discutere esistenza ed unicità delle soluzione, al variare di

$a, b \in \mathbb{R}$ **108·2** Determinare tutte le soluzioni del problema quando $b = 0$.

108·3 Determinare la soluzione del problema per $b = -4$ e $a = 1$.
108·4 Determinare la soluzione del problema per $b = 13$ e $a = 1$.

108·5 Precisare il campo di definizione delle soluzioni trovate discutendone la prolungabilità.

109

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ y(0) = k \end{cases}$$

109·1 Stabilire per quali k esiste un'unica soluzione e giustificare brevemente le affermazioni

109·2 Precisare l'insieme di definizione della soluzione del problema di Cauchy al variare di k.

109·3 Calcolare $y''(x)$

109·4 Disegnare il grafico locale della soluzione y del problema per $k = 1$ **109·5** Scrivere i primi due vertici della poligonale di Eulero, (escluso il punto iniziale)

109·6 Scrivere il polinomio di McLaurin di secondo grado della soluzione y per $k = 1$

110

Si consideri la funzione

$$\begin{cases} \dfrac{x\arctan(y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

110·1 Stabilire se f è continua in $(0,0)$ **110·2** determinare l'insieme in cui f è differenziabile, giustificando brevemente la risposta

Si consideri poi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

110·3 Stabilire per quali (x_0, y_0) esiste una ed una sola soluzione dell'equazione data, giustificando brevemente la risposta. **110·4** Calcolare $y''(x)$

110·5 Disegnare il grafico locale della soluzione per $x_0 = 1$ $y_0 = 1$.

111

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + \sin y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

111·1 Studiare esistenza ed unicità in grande della soluzione del problema di Cauchy assegnato **111·2** Disegnare il grafico della soluzione del problema assegnato.

111·3 Studiare il problema della prolungabilità della soluzione a tutto $\mathbb{R}$ **111·4** Determinare la soluzione z del problema

$$\begin{cases} z''(x) + z(x) = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

111·5 Determinare il polinomio di Taylor di $y(x) - z(x)$ del terzo ordine centrato in $x = 0$ e stimare la differenza $y(x) - z(x)$ vicino a 0.

112

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{y'(x)}{1 + y(x)} \\ y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

112·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione determinando eventuali soluzioni costanti

112·2 Scrivere un problema del primo ordine equivalente al problema dato. **112·3** Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $y_1 > 0$, $y_0 > -1$.

112·4 Provare che se y è soluzione dell'equazione data, anche $z(x) = -2 - y(-x)$ risolve la stessa equazione **112·5** Disegnare tutte le soluzioni dell'equazione data

113

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)\sin y(x) \\ y(2) = \dfrac{5\pi}{2} \\ y'(2) = 1 \end{cases}$$

113·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

113·2 Trovare la soluzione del problema dato precisandone il campo di definizione. **113·3** Disegnare il grafico della soluzione del problema dato.

113·4 Scrivere un sistema differenziale del primo ordine equivalente a problema dato

113·5 Trovare il polinomio di Taylor di ordine 3 della soluzione del problema dato centrato in $x_0 = 0$.

114

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} (y''(x))^2 = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

114·1 Studiare esistenza ed unicitá locale della soluzione di un problema di Cauchy. **114·2** Studiare esistenza ed unicitá globale della soluzione di un problema di Cauchy. **114·3** Determinare l'inversa delle soluzioni convesse dell'equazione che corrispondono ad $y_0 > 0$.

114.4 Determinare l'inversa delle soluzioni concave dell'equazione che corrispondono ad $y_0 > 0$. **114.5** Determinare l'inversa delle soluzioni convesse dell'equazione che corrispondono ad $y_0 < 0$.

114.6 Determinare l'inversa delle soluzioni concave dell'equazione che corrispondono ad $y_0 < 0$. **114.7** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data. **114.8** Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della soluzione convessa dell'equazione data che passa per il punto $(0,0)$ con pendenza 1

115

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) + g(x)y^3(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

essendo g continua su $\mathbb{R}$. **115.1** Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato. **115.2** Risolvere il problema dato in corrispondenza dei dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. **115.3** Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $g(x) = 0$ in corrispondenza dei dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. **115.4** Risolvere il problema dato in corrispondenza dei dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = a$. **115.5** Se $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$, scrivere lo sviluppo di McLaurin di grado 3 della soluzione y del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ con il resto nella forma di Peano.

116

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = e^{y(x)}$$

116.1 Stabilire esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = a$ $y'(0) = b$

116.2 Trovare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$ **116.3** Trovare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = -1$ **116·4** Trovare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$

116·5 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$

117

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = 2(y'(x))^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

117·1 Studiarne l'esistenza e l'unicità della soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

117·2 Nel caso $a = 0$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

117·3 Nel caso $a = 1$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{xy(x) + y^2(x) + x^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

117·4 Determinarne tutte le soluzioni, precisandone il dominio.

118

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) - 1 + \frac{1}{2\sqrt{y(x)}} = 0$$

118·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ **118·2** Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ **118·3** Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

118·4 Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

119

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)\left(\frac{y^2(x) - 1}{y^2(x)}\right)$$

119·1 Trovare, al variare di a la soluzione dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = 0$

119·2 Trovare la soluzione dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

120

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y^4(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

120·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema

120·2 Disegnare il grafico della soluzione per $k = 0$

120·3 Disegnare il grafico della soluzione per $k = 1$ **120·4** Disegnare il grafico della soluzione al variare di k

120·5 Verificare che se y risolve il problema dato, allora $z(x) = y(x+3)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} z''(x) = z^4(x) \\ z(-3) = 1 \\ z'(-3) = k \end{cases}$$

121

Si consideri l'equazione

$$y''' + (y'')^2 = 0$$

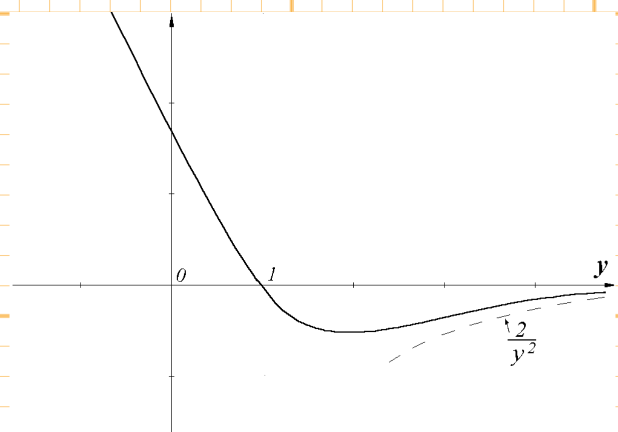
Stabilire esistenza ed unicita' per le soluzioni di un problema di Cauchy associato all'equazione data

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione Trovare le soluzioni tali che $y(0) = 0$ ed $y'(0) = 1$ Trovare le soluzioni tali che $y(0) = 0$ ed $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

122

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y''(x) = g(y(x)) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$



dove g è la funzione il cui grafico è indicato in figura.

e l'area $\int_0^{+\infty} g(s)ds > 0$

122·1 Disegnare il grafico di $G(y) = \sqrt{\int_0^y g(t)dt}$, **122·2** Disegnare il grafico di $F(y) = \int_0^y \frac{1}{G(t)}dt$, **122·3** Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = G(y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

122·4 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato

123

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y''(x) = 3y^2(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

123·1 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato

124

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + y^4(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

124·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema

124·2 Disegnare il grafico della soluzione per $k = 0$

124·3 Disegnare il grafico della soluzione per $k = 1$ **124·4** Disegnare il grafico della soluzione al variare di k

125

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) = (y'(x))^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

125·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

125·2 Disegnare il grafico di y'

125·3 Disegnare il grafico della soluzione y

126

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) + y^2(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

126·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

126·2 Trovare la soluzione al variare di x_0, y_0

126·3 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1$

126·4 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$

127

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x)\cos y(x) = (y'(x))^2 \sin y(x)$$

127·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

127·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

127·3 Disegnare il grafico di una soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = y_0$, $y_1 = 0$ **127·4** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$.

128

Si consideri l'equazione differenziale

$$\ln(y(x))y''(x) - \frac{1}{x}y^2(x) = 0$$

128·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

128·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = -1$

128·3 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$.

129

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - \frac{3}{2}y^2(x) = 0$$

129·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

129·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = -1$

129·3 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$ **129·4** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$.

130

Si consider il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^3 \ln(y(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

130·1 Stabilire per quali a, b il problema ammette soluzioni e studiarne l'unicità

130·2 Disegnare il grafico della soluzione per $a = 0$, $b = 1$

130·3 Disegnare il grafico della soluzione per, $b = 1$

131

Si consideri l'equazione differenziale

$$\sqrt{y(x)}y''(x) - \frac{1}{2\sqrt{y(x)}x}(y'(x))^2 = 0$$

131·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

131·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$

131·3 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$.

132

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - y^2(x) = 0$$

132·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

132·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

132·3 Scrivere il Polinomio di Taylor di ordine 3 della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

133

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - x^2 y(x) = 0$$

133·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

133·2 Determinare una serie di potenze centrata in $x = 0$ che soddisfi l'equazione data e sia tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

133·3 Determinare la serie di Taylor della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **133·4** Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4 della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

134

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 1 + y^3(x) = 0$$

134·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. **134·2** Disegnare il grafico delle soluzioni tali che $y'(0) = 0$. **134·3** Disegnare il grafico delle soluzioni tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

134·4 Disegnare il grafico delle soluzioni tali che $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$.

135

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + (y'(x))^2 + (y(x)+1)y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

135·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

135·2 Determinare la soluzione per $a = 0$

135·3 Disegnare il grafico della soluzione per $a = \frac{1}{e} - 1$

136

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + (y(x))^4 + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

136·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

136·2 Disegnare il grafico della soluzione per $a = 1$

136·3 Disegnare il grafico della soluzione per $a = -1$

137

Sia

$$\begin{cases} 2y''(x) = 4y^3(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

137·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

137·2 Sia z è tale che $z(y(x)) = y'(x)$; determinare le condizioni che z deve soddisfare affinchè y risolva il problema dato. **137·3** Disegnare il grafico di z

137·4 Disegnare il grafico di y

138

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 - y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

138·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

138·2 Determinare le soluzioni costanti $y(x) = c$ e le soluzioni del tipo $y(x) = ax + b$ della sola equazione differenziale

138·3 Per $a = 0$ e $b = 2$, determinare una funzione $z(y)$ tale che $z(y(x)) = y'(x)$ per le soluzioni della sola equazione differenziale. **138·4** Per $a = 0$ e $b = 2$, disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema di Cauchy, ed il grafico della soluzione del problema di Cauchy.

138·5 Per $a = 0$ e $b = 2$, determinare una espressione esplicita di y (può essere utile integrare per sostituzione ponendo $e^s = u$)

138·6 Per $a = 0$ e $b = -2$, Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy.

139

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)e^{-y'(x)} \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

139·1 Studiare esistemza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

139·2 Determinare le soluzioni costanti $y(x) = c$.

139·3 Per $a > 0$ e $b = \ln(a)$, determinare una funzione $z(y)$ tale che $z(y(x)) = y'(x)$ per le soluzioni della sola equazione differenziale. **139·4** Per $a = 2$ e $b = \ln(a)$, disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema di Cauchy, ed il grafico della soluzione del problema di Cauchy.

140

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = y(x)(2 - 3y(x))$$

140·1 Studiare esistenza ed unicità locale della soluzione dell'equazione corrispondente ai dati iniziali. $y(0) = a$ e $y'(0) = b$ **140·2** Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ **140·3** Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -2$

140·4 Stabilire se la soluzione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ può essere prolungata e, in caso affermativo, disegnare il grafico del suo prolungamento.

141

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + \frac{3}{2}y^2(x) = 0$$

141·1 Determinare la soluzione dell'equazione $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

141·2 Determinare la soluzione dell'equazione $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

141·3 Determinare la soluzione dell'equazione $y(0) = 0$, $y'(0) = a$.

141·4 Determinare la soluzione dell'equazione $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = a$.

142

Si consideri l'equazione differenziale autonoma

$$y''(x)\sin(y'(x)) = \frac{y'(x)}{y^2(x)}$$

Sia z tale che

$$z(y(x)) = y'(x)$$

142·1 Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

142·2 Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

142·3 Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

142·4 Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

143

Si consideri l'equazione differenziale autonoma

$$y''(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

Sia z tale che
$$z(y(x)) = y'(x)$$

143·1 Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

143·2 Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

143·3 Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.

143·4 Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.

144

Si consideri l'equazione differenziale autonoma
$$y''(x) = y'(x)y(x)$$
Sia z tale che
$$z(y(x)) = y'(x)$$

144·1 Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

144·2 Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

144·3 Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.

144·4 Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.

145

Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(x) = -\frac{y^2(x)}{\sqrt[3]{1 - y^3(x)}}$$

145·1 Disegnare il grafico della soluzione y dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$

145·2 Disegnare il grafico della soluzione y dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1/2$.

146

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-t^2} \sin(xt+2)$$

146·1 Verificare che f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$ **146·2** Calcolare la derivata prima di f **146·3** Integrare per parti f' e dalla relazione ottenuta ricavare f

147

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = a + \int_0^{y(x)} e^{-t^2} dt$$

tale che $y(0) = 0$

147·1 Per a=3 Disegnare il grafico di y **147·2** Per a=1 Disegnare il grafico di y

148

Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ t+1 & t > 0 \end{cases}$$

e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + f(y(x)) = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

148·1 Determinarne la soluzione per $a = -1$ e $b = 0$

148·1 Determinarne la soluzione per $a = 1$ e $b = 0$ **148·2** Determinarne tutte le soluzioni

149

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

149·1 Determinare la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

149·2 Determinare la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. **149·3** Determinare a in modo che la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = a$ e $y'(0) = 0$ sia costante.

149·4 Determinare il polinomio di McLaurin di terzo ordine delle soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ ed $y'(0) = 1$

150

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-t^2} \cos(xt + \pi)$$

150·1 Verificare che f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$ **150·2** Calcolare la derivata prima di f **150·3** Integrare per parti f' e dalla relazione ottenuta ricavare f

151

Si consideri il problema di trovare una funzione y tale che

$$y'(x) = 3 + \int_0^{y(x)} \ln(1+t^2)dt \qquad , \qquad y(0) = 0$$

151·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato. **151·2** Disegnare il grafico di

$$3 + \int_0^{y} \ln(1+t^2)dt$$

. **151·3** Disegnare il grafico delle soluzioni y del problema dato.

152

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^3 \\ x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b \end{cases}$$

152·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

152·2 Determinare le soluzioni del problema dato per $a = 2$ e $b = 0$.

152·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $a = 0$ e $b = 2$. **152·4** Disegnare il grafico delle soluzioni del problema dato.

153

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \int_0^t \dot{x}(s)^3 ds + a \\ x(0) = b \end{cases}$$

153·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

153·2 Determinare le soluzioni del problema dato per $a = 2$ e $b = -2$. **153·3** Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $a = 0$ e $b = 2$. **153·4** Disegnare il grafico delle soluzioni del problema dato.

154

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = y(x)(y'(x))^2 + y(x)y'(x)$$

154·1 Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

154·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = \pi$ e $b = 0$.

154·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 0$ e $b = 1$.

155

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = y(x)y'(x)$$

155·1 Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

155·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 4$ e $b = 0$.

155·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 0$ e $b = -1$.

156

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = -y^2(x)$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1$

156·1 Studiare esistenza ed unicità locale del problema dato.

156·2 Determinare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che rappresenti la soluzione del problema dato in un intorno di $x_0 = 0$, precisandone il raggio di convergenza. **156·3** Determinare lo sviluppo di McLaurin di y centrato nell'origine. **156·4** Determinare l'errore che si commette sostituendo alla soluzione del problema il suo polinomio di McLaurin di ordine 10.

157

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

157·1 Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy associato all'equazione data relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

157·2 Studiare esistenza ed unicità in grande del problema di Cauchy associato all'equazione data relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$. **157·3** Disegnare il grafico della soluzione per $a = 0$, $b = 1$.

158

Si considerino il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)(y(x) + y'(x)) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = z_0 \end{cases}$$

158·1 Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 0$ e $z_0 = 3$ **158·2** Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 0$ e $z_0 = -3$

158·3 Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 1$ e $z_0 = 0$

159

Si consideri il problema

$$y''(x) = b + \int_a^x y'(t)dt$$

159·1 Determinare tutte le soluzioni del problema per $a = 3$, $b = 0$.

159·2 Determinare tutte le soluzioni del problema al variare di a e b. **159·3** Detta $y(x, a, b)$ la soluzione del problema; verificare che y è una funzione lineare nelle variabili (a, b)

160

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) \\ \dot{y}(t) = y(t)x(t) \end{cases}$$

160·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del sistema dato

160·2 Sia $x(t)$ ed $y(t)$ la soluzione del sistema dato tali che $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$; verificare che se x_0 ed y_0 non sono nulli allora x ed y sono localmente invertibili. **160·3** Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che definisce y in funzione di x, cioè sia

$$y = \varphi(x)$$

in modo che si abbia

$$y(t) = \varphi(x(t))$$

Usando la regola di derivazione della funzione composta, calcolare $\dot{y}(t)$ in funzione di $\varphi'(x)$ e di $\dot{x}(t)$ **160·4** Usando il risultato precedente e le equazioni del sistema dato determinare un problema di Cauchy per φ e risolverlo.

161

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

con i dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

161·1 Studiare esistenza ed unicità locale e globale dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati.

161·2 Verificare che se f è soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati allora g definita da $g(x) = f(x) + 2\pi$ è soluzione della stessa equazione ma con i dati iniziali $y(0) = 2\pi$, $y'(0) = 1$

161·3 Verificare che se f è soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati allora g definita da $g(x) = f(x - \pi)$ è soluzione della stessa equazione ma con i dati iniziali $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$

161·4 Trovare il polinomio di McLaurin di ordine 4 della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati.

161·5 Stimare l'errore che si commette usando il polinomio di McLaurin di ordine 3 in luogo della soluzione nell'intervallo $[-0.5, 0.5]$

162

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x)^2 = y'(x)^2 - y'(x)^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

162·1 Determinare le soluzioni del problema dato
sia poi

$$\begin{cases} y(x)y''(x)^2 = y'(x)^2 - y'(x)^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

162·2 Determinare una soluzione del problema dato.

163

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)(y(x) + y'(x))$$

163·1 Determinare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = a$

163·2 Determinare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = 0$

164

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|} + xy(x)$$

164·1 Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 1$, studiando in particolare l'unicità.

164·2 Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = -1$, studiando in particolare l'unicità.

164·3 Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 0$, studiando in particolare l'unicità.

165

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 + y(x)y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

165·1 Ridurre l'equazione ad un sistema differenziale del primo ordine e studiarne esistenza ed unicità . **165·2** Determinare la soluzione del problema per $a = 3$ e $b = 0$

165·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $a = 0$ e $b = 1$

166

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) - 4xy(x) + 6\sqrt{y(x)} = 0$$

166·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data

166·2 Determinare il polinomio di Taylor di y centrato in $x_0 = 1$ di ordine 3

167

Si consideri il [problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

167·1 Disegnare il grafico di y' **167·2** Disegnare il grafico di y

168

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x)(1 + y^2(x)) = 1$$

168·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione per il problema di Cauchy associato ai dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ **168·2** Disegnare il grafico di y per $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1$ Disegnare il grafico di y per $x_0 = y_0 = 0, z_0 = -1$

168·3 Disegnare il grafico di y per $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 0$

169

Si consideri

$$\begin{cases} (y''(x))^2 = \dfrac{1}{y(x)} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

169·1 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema

170

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = 2(y'(x))^2 + y'(x)$$

170·1 Studiare esistenza ed unicità del problema di Cauchy associato all'equazione differenziale data e al dato iniziale $y(x_0) = a$.

170·2 Determinare, se esistono, le soluzioni relative al dato iniziale $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ **170·3** Determinare, il polinomio di McLaurin di ordine 3 della soluzione . relativa al dato iniziale $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

171

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^2 + y(x)^2}{xy(x)}$$

con il dato iniziale $y(1) = 1$,

171·1 Determinare $z(x)$ in modo che $y(x) = xz(x)$ sia soluzione del problema dato.

171·2 Studiare le soluzioni dell'equazione data in un intorno dell'origine.

172

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)(y'(x) + y^2(x))$$

172·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali. **172·2** Scrivere il Polinomio di McLaurin di ordine 3 della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. **172·3** Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

172·4 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

172·5 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

173

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 + (y(x))^3$$

173·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$,

$y'(0) = 1$.

173·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$. **173·3** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

173·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione.

174

174·1 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 + \sqrt{(y(x)}$$

relative ai dati iniziali $[y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{5/3}]$, $[y(0) = 1, y'(0) = -\sqrt{5/3}]$, $[y(0) = 1, y'(0) = 1]$, $[y(0) = 1, y'(0) = 2]$. (Può essere utile svolgere questo punto dopo aver risposto alle domande successive.)

174·2 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x + 2/3x\sqrt{x} - a - 2/3a\sqrt{a} + b$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}_+$

174·3 Disegnare il grafico della funzione $F(x) = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt$

174·4 Calcolare $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{t}}} dt$ e disegnarne il grafico

175

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)\cos^2(y'(x))$$

ed i dati iniziali
$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

175·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo e determinare eventuali soluzioni costanti. **175·2** Verificare che se y è soluzione dell'equazione data allora anche $z(x) = y(x + \bar{x})$ è soluzione. **175·3** Verificare che se y è soluzione dell'equazione data allora anche $z(x) = y(x) + \bar{y}$ è soluzione.

175·4 Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = \pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo

175·5 Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = -\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo **175·6** Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = 3\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo

175·7 Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = -3\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo **175·8** Siano $x_0 = 0, y_0 = 0$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo al variare di y_1

175·9 Siano $y_1 = \pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo al variare di x_0, y_0

176

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = \cos(y(x))$$

176·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali. **176·2** Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = \pi/4$

176·3 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0, y'(0) = -\pi/4$ **176·4** Disegnare il grafico della soluzione al variare dei dati iniziali.

177

Si consideri l'equazione differenziale

$$4\sqrt{|y(x)|}y''(x) = 1$$

177·1 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1, y'(0) = 1$

177·2 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1, y'(0) = -1$ **177·3** Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

177·4 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$

178

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} 4\sqrt{|y(x)|}y''(x) = 1 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

178·1 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = 1$, $y_1 = 1$ e calcolarla. **178·2** Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = 1$, $y_1 = -1$ e calcolarla. **178·3** Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = -1$, $y_1 = 1$ e calcolarla.

178·4 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = -1$, $y_1 = -1$ e calcolarla.

179

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y'' = 1 + (y'(x))^2$$

179·1 Disegnare il grafico della soluzione relativa ai dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

179·2 Disegnare il grafico della soluzione relativa ai dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ **179·3** Disegnare il grafico della soluzione relativa ai dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ **179·4** Disegnare il grafico della soluzione relativa ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **179·5** Determinare tutte le funzioni armoniche ($\Delta u = 0$) nel piano che dipendono solo dalla distanza dall'origine. **179·6** Determinare tutte le funzioni definite sul cerchio di centro l'origine e raggio 3 , che dipendono solo dalla distanza dall'origine tali che

$$\Delta u = 0$$

che assumano valore 1 sulla frontiera del cerchio.

180

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} 2\sqrt{|y(x)|}y''(x) = 5y(x)^2 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

180·1 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = 1$, $y_1 = 1$

180·2 Determinare la soluzione tale che $y_0 = 1$, $y_1 = 1$ **180·3** Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = 1$, $y_1 = 0$ **180·4** Determinare la soluzione tale che $y_0 = 1$, $y_1 = 0$ Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = 2y(t) - x(t) + 1 \end{cases}$$

180·5 Determinare tutte le soluzioni del sistema. **180·6** Determinare la soluzione tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

180·7 Trovare tutte le soluzioni tali che $x(0) = 0$ del sistema omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 2y(t) - x(t) \end{cases}$$

giustificando brevemente le affermazioni

180·8 Stabilire se l'insieme delle soluzioni del punto C formano uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione.

181

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) = 2x$$

181·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

181·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

181·3 Trovare tutte le soluzioni della equazione data tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, precisando se tali soluzioni formano uno spazio vettoriale. Si consideri poi l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) = 2|x|$$

181·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

181·5 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

182

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 2z(x) \\ z'(x) = y(x) + w(x) \\ w'(x) = w(x) + x \end{cases}$$

182·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema

182·2 Scrivere il sistema omogeneo associato

182·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

182·4 Scrivere la matrice fondamentale del sistema omogeneo associato **182·5** Trovare le soluzioni del sistema omogeneo associato

soddisfacente la condizione $w(0) = 1$, precisando se formano uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinandone la dimensione.

183

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) = x$$

183·1 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

183·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione **183·3** Esistono

soluzioni limitate dell'equazione omogenea? **183·4** Esistono soluzioni

limitate dell'equazione non omogenea?

183·5 Le soluzioni limitate della equazione omogenea formano uno spazio vettoriale? In caso affermativo trovarne la dimensione.

184

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$

184·1 Trovare tutte le soluzioni di f

184·2 Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

184·3 Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$. **184·4** Trovare

tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

184·5 Trovare a tale che esista almeno una soluzione non nulla dell'equazione data tale che $y(0) = y(a) = 0$.

185

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = x \sin y(x)$$

185·1 Stabilire per quali valori x_0 ed y_0 esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione assegnata ed al valore iniziale $y(x_0) = y_0$

185·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e disegnarne il grafico. **185·3** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

tali che $y(0) = 2$ e disegnarne il grafico.

185·4 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$ e disegnarne il grafico.

185·5 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e disegnarne il grafico.

186

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + |y(x)| = 0$$

186·1 Stabilire se l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale data costituisce uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinarne la dimensione.

186·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, precisando il loro campo di definizione **186·3** Trovare, se possibile,

tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, che assumano anche valori negativi, precisando il loro campo di definizione **186·4** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e

$y'(0) = -1$ precisando il loro campo di definizione

187

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) + \cos(y(x)) = \sin x$$

con il dato iniziale $y(0) = 0$

187·1 Stabilire se la soluzione esiste e se è unica. **187·2** Deter-

minare lo sviluppo di McLaurin di y del primo ordine centrato in 0 e tracciare il grafico qualitativo di y in un intorno di 0.

187·3 Scrivere e valutare il resto di Lagrange di ordine 2 (relativo al polinomio di primo grado di y centrato in 0)

187·4 Supponendo la soluzione y definita su tutto $\mathbb{R}$, trovare un polinomio di grado 2 maggiorante y ed uno minorante y; disegnarne il grafico ed indicare la zona di piano da essi delimitata entro cui si trova la soluzione y.

188

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) = |x^2 - 1|$$

188·1 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata **188·2** Determinare le soluzioni dell'equazione completa definite per $|x| > 1$

188·3 Determinare le soluzioni dell'equazione completa definite per $|x| < 1$

188·4 Determinare le soluzioni, se esistono, dell'equazione completa definite su tutto $\mathbb{R}$.

189

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2\dot{x}(t) = -x(t) + 2y(t) \\ \dot{y}(t) = y(t) + z(t) \\ 2\dot{z}(t) = 2z(t) + x(t) \end{cases}$$

189·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema dato

189·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema **189·3** Scrivere una matrice fondamentale del sistema **189·4** Trovare tutte le soluzioni del sistema non omogeneo ottenuto in corrispondenza del termine noto

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

189·5 Trovare le soluzioni del sistema omogeneo tali che $x(0) = y(0)$ e precisare la dimensione dello spazio vettoriale da esse generato.

190

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$$

190·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione data.

190·2 Scrivere un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine equivalente alla equazione data. **190·3** Scrivere l'integrale generale del sistema e dell'equazione

190·4 Scrivere una matrice fondamentale del sistema **190·5** Determinare tutte le soluzioni del sistema che sono limitate, precisando se formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinare la dimensione di tale spazio

191

Si consideri il problema

$$y(x) = \pi + \int_0^x \cos^2 y(t) dt$$

191·1 Scrivere un problema di Cauchy equivalente al problema dato.

191·2 Determinare la soluzione del problema dato e disegnarne il grafico.

191·3 Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 della soluzione y del problema dato **191·4** Disegnare il grafico di y^{-1} ove è definita

191·5 Verificare che

$$|y(x)| \leq \pi + |x|$$

192

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + x^2 y'(x) = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

192·1 Determinare la soluzione del problema, precisandone il campo di definizione **192·2** Disegnare il grafico della soluzione, precisando dove è convessa. **192·3** Stabilire se l'insieme delle soluzioni della sola equazione costituisce uno spazio vettoriale o uno spazio lineare affine ed, in caso affermativo, determinarne la dimensione

192·4 Determinare, se possibile, l'ordine di infinito della soluzione per $x \to +\infty$ **192·5** Determinare, se possibile, l'ordine di infinito della soluzione per $x \to -\infty$

193

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = \max\{2, y(x)\} \\ y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}$$

193·1 Studiare esistenza ed unicità locale della soluzione.

193·2 Determinare la soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 1$ e $b = 0$ precisandone il campo di definizione. **193·3** Determinare la soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 2$ e $b = 0$ precisandone il campo di definizione. **193·4** Determinare il polinomio di McLaurin di grado 2 della soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 1$ e $b = 1$ **193·5** Determinare il polinomio di McLaurin di grado 3 della soluzione che corrisponde a $x_0 = 0$, $a = 1$ e $b = 1$

194

Si consideri la funzione $y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni:

$$\begin{cases} y'(x) = 2 \arctan y(x) + \int_0^x \cos y(t) dt \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(si suppone che tale funzione esista e sia unica per ogni $\delta > 0$) **194·1** Scrivere il polinomio di McLaurin di y di secondo grado

194·2 Trovare un maggiorante per y' e y'' su $[-\delta, \delta]$ **194·3** Determinare δ in modo che la differenza tra y e la sua retta tangente sia inferiore a 0.1 su $[-\delta, \delta]$.

194·4 Calcolare $y^{(4)}(0)$.

194·5 Stabilire se 0 è un punto di minimo o massimo relativo per y.

195

Si consideri

$$y''(x) - y(x) = f(x)$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

195·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data su $\mathbb{R}_-$
195·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data su $\mathbb{R}_-$

195·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data su $\mathbb{R}$
195·4 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = y'(0) = 0$

196

Si consideri l'equazione

$$x^3 y'(x) = y(x)$$

196·1 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(1) = 1$

196·2 Stabilire, per quali $a \in \mathbb{R}$ esistono soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = a$, e determinarle.

196·3 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.
Si consideri l'equazione

$$y''(x) + 4y'(x) + 2y(x) = e^{2|x|}$$

196·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata. **196·5** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa su $\mathbb{R}_+$. **196·6** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa su $\mathbb{R}$.

197

Si consideri l'equazione

$$2\sqrt{|x|}\, y'(x) = y(x)$$

197·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}_+$

197·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$
Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + y(x) = e^x$$

197·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata. **197·4** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa.

198

Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + 27y(x) = 2e^{-3x} + 1$$

198·1 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata

198·2 Determinare le soluzioni dell'equazione completa **198·3** Scrivere un sistema del primo ordine equivalente all'equazione data.

198·4 Determinare le soluzioni del sistema trovato precisando la matrice fondamentale del sistema omogeneo ad esso associato.

199

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) - 2z(x) + e^x \\ z'(x) = 2y(x) - z(x) + x \end{cases}$$

199·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato **199·2** Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

199·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che $y(0) = 0$ **199·4** Determinare tutte le soluzioni del sistema completo tali che $y(0) = 0$

199·5 Precisare se le soluzioni ottenute in ciascuno dei punti precedenti è uno spazio vettoriale e, in caso affermativo trovarne la dimensione

200

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y(x) = x$$

200·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea **200·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa **200·3** Stabilire se le soluzioni del problema completo costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinarne la dimensione.

200·4 Trovare tutte le soluzioni del problema completo tale che y(0)=0

201

Si consideri l'equazione

$$xy''(x) - y'(x) = |x|$$

201·1 Risolvere l'equazione omogenea associata all'equazione data **201·2** Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}_+$ **201·3** Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}_-$

201·4 Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}$

202

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = z(x) + 1 \end{cases}$$

202·1 Risolvere il sistema omogeneo associato

202·2 Risolvere il sistema **202·3** Trovare la soluzione del sistema omogeneo associato tale che $y(0) = z(0) = 0$

202·4 Trovare la soluzione del sistema tale che $y(0) = z(0) = 0$

203

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = z(x) \\ z'(x) + z(x) = x \end{cases}$$

203·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato **203·2** Determinare tutte le soluzioni del sistema dato **203·3** Scrivere un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine equivalente al sistema dato **203·4** Trovare una matrice fondamentale del sistema del primo ordine trovato al punto precedente.

204

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$y'''(x) + k^3 y(x) = 0$$

204·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data **204·2** Determinare tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}_+$ dell'equazione data **204·3** Determinare tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}_-$ dell'equazione data **204·4** Determinare tutte le soluzioni di

$$y'''(x) + k^3 y(x) = e^{-kx} + x$$

205

Si consideri l'equazione

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{3x} + \cos(x)$$

205·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata. **205·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

205·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$ **205·4** Scrivere un sistema differenziale lineare di primo ordine equivalente all'equazione data:

205·5 Risolvere il sistema trovato al punto precedente

206

Si consideri l'equazione

$$y''(x) - 3y'(x) = 1 + \sin(x)$$

206·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata. **206·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa **206·3** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

207

Si consideri l'equazione

$$y''(x) + y(x) = |x|$$

207·1 Risolvere l'equazione omogenea associata all'equazione data

207·2 Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}_+$

207·3 Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}_-$ **207·4** Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}$

208

Si consideri l'equazione

$$xy''(x) + y'(x) = 0$$

208·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

208·2 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

208·3 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

208·4 Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni

definite su $\mathbb{R}$

209

Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + y(x) = e^{-x} + 1$$

209·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

209·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

209·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

209·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

210

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) + z(x) = 1 \\ z'(x) - y(x) = 0 \end{cases}$$

210·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

210·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

210·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo tali che $y(0) = 0$, $z(0) = 0$

210·4 Determinare la matrice fondamentale del sistema omogeneo.

211

Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + 27y(x) = 1 + e^{-3x}$$

211·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

211·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

211·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$

211·4 Scrivere un sistema lineare del primo ordine equivalente all'equazione data.

212

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - 2}{\sqrt{x+1}} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

212·1 Determinare per quali valori di y_0 il problema ammette soluzioni costanti

212·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 1$

212·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 3$

212·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema al variare di y_0

213

Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + 2y'(x) = 1$$

213·1 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data. **213·2** Determinare le soluzioni dell'equazione data **213·3** Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y'(0) = y''(0)$

213·4 Determinare le soluzioni dell'equazione data che sono infinitesime per $x \to +\infty$

214

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 3z(x) + e^x \\ z'(x) = 2y(x) + 4z(x) \end{cases}$$

214·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato **214·2** Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

214·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo tali che $y(0) = 0, z(0) = 0$

214·4 Determinare la matrice fondamentale del sistema omogeneo.

215

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + y'(x) = x$$

215·1 Determinare tutte le soluzioni per $x > 0$ **215·2** Determinare tutte le soluzioni per $x < 0$

215·3 Determinare tutte le soluzioni per $x \in \mathbb{R}$

216

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y''(x) + 2y(x) = 3 + e^x$$

216·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata **216·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

216·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$

216·4 Stabilire se le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$ formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

217

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3 + sin(x)$$

217·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata **217·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

217·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$

217·4 Stabilire se le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = 0$ formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

218

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y''(x) = |x|$$

218·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata **218·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

218·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = y'(0) = y''' = 0$

218·4 Stabilire se le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$ formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

219

Si consideri il sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - 2z(x) \\ z'(x) = y(x) + 4z(x) + e^x \end{cases}$$

219·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo **219·2** Determinare l'integrale generale del sistema completo **219·3** Scrivere una matrice fondamentale del sistema **219·4** Scrivere una equazione lineare del secondo ordine equivalente al sistema dato

220

Si consideri il sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} y'(x) = 4y(x) + 3z(x) + \sin(x) \\ z'(x) = y(x) + 6z(x) \end{cases}$$

220·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo **220·2** Determinare l'integrale generale del sistema completo **220·3** Scrivere una matrice fondamentale del sistema **220·4** Determinare la soluzione tale che $y(0) = z(0) = 0$

221

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y''(x) - 2y(x) = 0$$

221·1 Verificare che $y(x) = e^x$ risolve l'equazione data

221·2 Determinare l'integrale generale dell'equazione data

Si consideri poi l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y''(x) - 2y(x) = x + e^{-x}$$

221·3 Determinarne l'integrale generale **221·4** Determinarne le soluzioni tale che $y(0) = y'(0) = 0$

222

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) = 2y'(x) + x \\ y(0) = a \end{cases}$$

222·1 Determinare le soluzioni del problema dato **222·2** Determinare le soluzioni del problema tali che $y'(0) = y''(0) = 0$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) = 2y'(x) + x + \ln(1+x) \\ y(0) = a \end{cases}$$

222·3 Determinare le soluzioni del problema dato

222·4 Determinare le soluzioni del problema tali che $y'(0) = y''(0) = 0$

223

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''''(x) = y''(x) + \sin(x) \\ y(0) = a \end{cases}$$

223·1 Determinare le soluzioni del problema dato **223·2** Determinare le soluzioni del problema tali che $y'(0) = 0$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''''(x) = y''(x) + \sin(x) + 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

223·3 Determinare le soluzioni del problema dato

223·4 Trovare, se ce ne sono, le soluzioni dell'equazione per cui il limite per $x \to +\infty$ è nullo

224

i consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x) - 1 \\ y(a) = b \end{cases}$$

224·1 Disegnare il grafico di y per $a = 1$, $b = 0$ **224·2** Disegnare il grafico di y per $a = -1$, $b = 0$

224·3 Disegnare il grafico di y per $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$

225

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 2z(x) + 1 \\ z'(x) = y(x) + 2 \end{cases}$$

225·1 Determinare le soluzioni del sistema omogeneo associato. **225·2** Determinare le soluzioni del sistema completo. **225·3** Determinare le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} z(x) = 0$$

225·4 Determinare una equazione differenziale lineare omogenea equivalente al sistema omogeneo associato e risolverla.

226

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\frac{1}{3}y^3(x) - y(x)}{y^2(x) - 1} \\ y(0) = a \end{cases}$$

226·1 Determinare la soluzione del problema per $a = 2$ precisandone il campo di definizione **226·2** Determinare la soluzione del problema per $a = 1.5$ precisandone il campo di definizione

226·3 Determinare la soluzione del problema per $a = \sqrt{3}$ precisandone il campo di definizione

226·4 Disegnare tutte le soluzioni del problema precisandone il campo di definizione

227

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

227·1 Determinare la soluzione del problema per $a = 2$ precisandone il campo di definizione **227·2** Determinare la soluzione del problema per $a = 0$ precisandone il campo di definizione

227·3 Disegnare tutte le soluzioni del problema precisandone il campo di definizione

228

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - 3y''(x) + 2y'(x) = 1 + x$$

228·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. **228·2** Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

228·3 Determinarne tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che $y(0) = 0$

228·4 Determinarne tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$$

229

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y(x)y'(x) = (y^2(x) + 1)$$

229·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare del dato iniziale. **229·2** Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ **229·3** Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ **229·4** Scrivere il polinomio di McLaurin di grado 2 della soluzione tale che $y(0) = 1$

230

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - 9y''(x) = e^{3x} + 1$$

230·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

230·2 Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

230·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata che tendono a 0 per $x \to +\infty$ **230·4** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = y'(0) = 0$

231

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - 8y''(x) = e^{2x} + 1$$

231·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. **231·2** Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

231·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata che tendono a 0 per $x \to +\infty$

231·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = y'(0) = 0$

232

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-x}$$

232·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. (Può essere utile sapere che e^{-x} risolve l'equazione omogenea)

232·2 Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

232·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

232·4 Scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine equivalente all'equazione data.

233

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) + 1 = 0$$

233·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. **233·2** Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

233·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

233·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea che sono limitate.

234

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = 2x - y'(x)$$

234·1 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(1) = 1$

234·2 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(-1) = -1$

234·3 Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 1$ **234·4** Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$

235

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'(x) - x^2 y(x) = x^2$$

235·1 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$

235·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$

235·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata **235·4** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

236

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - 3y(t) + t \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + 4y(t) + e^{-t} \end{cases}$$

236·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

236·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

236·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

236·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

237

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4x(t) + y(t) + \sin(t) \\ \dot{y}(t) = -2x(t) + y(t) \end{cases}$$

237·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

237·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

237·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

237·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

238

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'''(x) - y(x) = x^2$$

238·1 Determinare la soluzione dell'equazione omogenea associata.

238·2 Determinare la soluzione dell'equazione completa. **238·3** Determinare un sistema di equazioni lineari del primo ordine equivalente all'equazione data e scriverne tutte le soluzioni **238·4** Determinare una matrice fondamentale per il sistema di cui al punto precedente ed una base per lo spazio delle soluzioni.

239

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'''(x) - y(x) = x + e^x$$

239·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata. **239·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa. **239·3** Scrivere il polinomio di McLaurin di terzo ordine della soluzione tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$ **239·4** Calcolare $y^{(5)}(0)$

240

Si consideri l'equazione

$$y(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{t^2+1} dt$$

240·1 Calcolare $y(0)$

240·2 Determinare, derivando l'equazione data, un'equazione differenziale equivalente all'equazione data

240·3 Disegnare, al variare di il grafico di $y(x)$. **240·4** Determinare esplicitamente $y(x)$

241

Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) + 8y'(x) = x + e^x$$

241·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. **241·2** Determinare una soluzione particolare dell'equazione completa.

241·3 Determinare l'integrale generale dell'equazione completa. **241·4** Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di tale soluzione in 0.

242

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + xy'(x) = x$$

242·1 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

242·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

242·3 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

243

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) = x + e^x + e^{2x}$$

243·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$

e $y'(0) = 0$

243·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

243·3 Scrivere un sistema di equazioni differenziali de primo ordine equivalente all'equazione data. **243·4** Determinare una base

per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema di cui al punto precedente.

244

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y(x) = x + e^x + e^{2x}$$

244·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$

e $y'(0) = 0$

244·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

244·3 Scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine equivalente all'equazione data. **244·4** Determinare una base

per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo di cui al punto precedente.

245

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = x^2 y(x) + 1 - x^3$$

245·1 Determinare la soluzione dell'equazione omogenea associata.

245·2 Determinare una soluzione dell'equazione completa

245·3 Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = 0$

245·4 Determinare il polinomio di taylor di ordine 3 della soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = 1$.

246

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = x^2 y(x) - x^2$$

246·1 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 2$

246·2 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$

246·3 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

247

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'''(x) + 1 = x^2$$

247·1 Determinare la soluzione dell'equazione omogenea associata.

247·2 Determinare la soluzione dell'equazione completa.

247·3 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione completa

247·4 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 13 della soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, e verificare che approssima y a meno di 0.00000000001

248

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$$

248·1 Verificare che $u(x) = e^{x^2}$ è soluzione dell'equazione data

248·2 Determinare v linearmente indipendente da u soluzione dell'equazione data.

248·3 Determinare l'integrale generale dell'equazione data.

248·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione data

249

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = 1 - y^6(x)$$

ed il dato iniziale $y(x_0) = y_0$

249·1 Disegnare il grafico di $y(x)$ nei casi in cui

- $x_0 = 0$, $y_0 = -2$
- $x_0 = 0$, $y_0 = -1$
- $x_0 = 0$, $y_0 = 0$
- $x_0 = 0$, $y_0 = 1$
- $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

249·2 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data al variare del dato iniziale.

250

Si consideri l'equazione differenziale

$$xy''(x) = y'(x)$$

250·1 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}_+$ **250·2** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}_-$ **250·3** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}$ **250·4** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale definite su $\mathbb{R}$ tali che $y(0) = 0$

251

Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ t+1 & t > 0 \end{cases}$$

e l'equazione differenziale

$$y'(x) + f(x)y(x) = f^2(x)$$

251·1 Determinarne tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$ **251·2** Determinarne tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$

251·3 Determinarne tutte le soluzioni

252

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = 1 - y'(x)$$

252·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

252·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

252·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data che sono nulle nell'origine.

252·4 Scrivere un sistema di primo ordine equivalente all'equazione data.

253

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = x - y(x)$$

253·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

253·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

253·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data che sono nulle nell'origine.

253·4 Scrivere un sistema di primo ordine equivalente all'equazione data.

254

Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{iv}(x) = y'(x) + x + e^x$$

254·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata **254·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

254·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = y'(0) = 0$ e stabilire se formano uno spazio vettoriale. In caso affermativo determinarne la dimensione.

254·4 Determinare un sistema di equazioni lineari del primo ordine equivalente all'equazione omogenea e scriverne una matrice fondamentale.

255

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) \\ z'(x) = z(x) + e^x \\ u'(x) = y(x) + u(x) \end{cases}$$

255·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato **255·2** Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

255·3 Determinare una matrice fondamentale del sistema.

255·4 Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo che sono infinitesime a $-\infty$, precisando se è spazio vettoriale ed in caso affermativo determinandone la dimensione.

256

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = y'(x) + y(x) + x + \sin(x)$$

256·1 Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

256·2 Determinare la soluzione del problema di Cauchy omogeneo per $a = 4$ e $b = 0$. **256·3** Determinare la soluzione del problema di Cauchy per $a = 0$ e $b = 0$.

257

Si consideri l'equazione differenziale

$$y^v(x) = 0$$

($y^v(x)$ indica la derivata quinta di y calcolata in x)

257·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

257·2 Determinare, se possibile, il numero minimo di condizioni iniziali da assegnare per ottenere una ed una sola soluzione **257·3** Determinare, se possibile, il numero minimo ed il numero massimo di condizioni iniziali da assegnare per ottenere una soluzione

257·4 Determinare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il problema di cauchy associato all'equazione data ha come unica soluzione $y(x) = x$ **257·5** Stabilire se le soluzioni dell'equazione data costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinarne la dimensione ed una base.

258

Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + \alpha|x| \\ y(0) = \beta \end{cases}$$

258·1 Determinare tutte le soluzioni per $\alpha = 0$ al variare di β

258·2 Determinare tutte le soluzioni per $\beta = 0$ al variare di α

258·3 Determinare tutte le soluzioni al variare di α e β reali

259

Si consideri il problema

$$\begin{cases} x^n y'(x) = y(x) + f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

259·1 Per $n = 1$ ed $f(x) = 0$, determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$ e disegnarne il grafico. **259·2** Per $n = 1$ ed $f(x) = 1$, determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$ e disegnarne il grafico. **259·3** Per $n = 2$ ed $f(x) = 0$, determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$ e disegnarne il grafico.

259·4 Per $n = 2$ ed $f(x) = 2$, determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$ e disegnarne il grafico.

260

Si consideri il problema

$$\begin{cases} xy'(x) = |x|y(x) + f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

260·1 Per $f(x) = 0$, Determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}_+$ e disegnarne il grafico.

260·2 Per $f(x) = 1$, determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$ e disegnarne il grafico. **260·3** Per $f(x) = e^x$, determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}_+$ e disegnarne il grafico.
260·4 Per $f(x) = e^x$, determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$ e disegnarne il grafico.

261

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{|x|}$$

261·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata definite su $\mathbb{R}_+$

261·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa definite su $\mathbb{R}_+$

261·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata definite su $\mathbb{R}$ **261·4** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa definite su $\mathbb{R}$

262

Si consideri il problema

$$\begin{cases} x^2y'(x) = y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

262·1 Determinare le soluzioni del problema per $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, disegnarne il grafico e studiarne la prolungabilità.

262·2 Determinare le soluzioni del problema per $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, disegnarne il grafico e studiarne la prolungabilità. **262·3** Determinare le soluzioni del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, disegnarne il grafico.

263

Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'''(x) = y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

263·1 Determinare le soluzioni del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ precisandone il campo di definizione **263·2** Determinare le soluzioni del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = \in \mathbb{R}$. **263·3** Stabilire la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale data. **263·4** Stabilire la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale data che sono infinitesime a $+\infty$.

264

Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'''(x) = -y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

264·1 Determinare le soluzioni del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ precisandone il campo di definizione **264·2** Determinare le soluzioni del problema per $x_0 = 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$. **264·3** Stabilire la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale data. **264·4** Stabilire la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale data che sono infinitesime a $-\infty$.

265

Si consideri

$$y'(x) + y(x) = (x+2)|x|$$

265·1 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$

265·2 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$

265·3 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$

266

Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{iv}(x) - 2y''(x) + y(x) = 0$$

266·1 Determinarne tutte le soluzioni. **266·2** Determinare una base dello spazio vettoriale delle soluzioni

266·3 Determinare un sistema del primo ordine equivalente all'equazione data. **266·4** Determinare la matrice dei coefficienti del sistema trovato.

266·5 Determinare la matrice fondamentale principale del sistema trovato.

267

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) + 4y(x) = x$$

267·1 Determinare tutte le soluzione dell'equazione omogenea associata.

267·2 Determinare tutte le soluzione dell'equazione completa.. **267·3** Determinare tutte le soluzione dell'equazione omogenea associata infinitesime a $+\infty$.

267·4 Determinare tutte le soluzione dell'equazione omogenea associata limitate.

268

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y(x) = \sqrt{|x|}$$

268·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione data .

268·2 Determinare tutte le soluzioni definite su R_+.

268·3 Determinare tutte le soluzioni definite su R_-.

268·4 Determinare tutte le soluzioni definite su R. **268·5** Determinare tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

269

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - 27y(x) = e^{3x} + 1$$

269·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data,

269·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data

269·3 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data che si annullano nell'origine

269·4 Determinare un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine equivalente all'equazione data e scriverne l'integrale generale. **269·5** Determinare il polinomio di McLaurin di ordine 5 della soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione data che si annulla con le sue prime due derivate nell'origine. **269·6** Determinare il polinomio di McLaurin di ordine 5 della soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione data tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$,

270

Si consideri il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale

$$y^2(x) + y(x) = y'(x)y(x)$$

ed ai dati iniziali $y(0) = y_0$

270·1 Studiare esistenza ed unicità e disegnare il grafico delle soluzioni del problema dato nel caso in cui: $y_0 = 0$ **270·2** Determinare le soluzioni del problema dato nel caso in cui: $y_0 = 0$

271

Si consideri il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^3$$

ed ai dati iniziali $y(x_0) = y_0$

271·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema dato. **271·2** Determinare le soluzioni del problema dato per $x > 0$,

precisando il campo di definizione

271·3 Determinare le soluzioni del problema dato per $x < 0$, precisando il campo di definizione

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = 4y'(x) - z(x) + e^{2x} \\ z'(x) = 2y'(x) + z(x) + 1 \end{cases}$$

271·4 Determinare tutte le soluzioni del sistema differenziale omo-

geneo associato

271·5 Determinare una soluzione del sistema completo

271·6 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che $y(0) = 0$ **271·7** Stabilire se le soluzioni di cui al punto prece-

dente costituiscono uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione.

272

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = \sin(x) \\ z'(x) = 2z(x) + y(x) + 1 \end{cases}$$

272·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema differenziale omo-

geneo associato

272·2 Determinare una soluzione del sistema completo

272·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che $y(0) = 1$ **272·4** Stabilire se le soluzioni di cui al punto precedente costituiscono uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione.

273

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = 2z(x) + y(x) + 1 \end{cases}$$

273·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema differenziale omogeneo associato

273·2 Determinare una soluzione del sistema completo

273·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che $y(0) = 1$ **273·4** Stabilire se le soluzioni di cui al punto precedente costituiscono uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione.

274

Si consideri l'equazione differenziale lineare ed il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\ddot{x}(t) = x(t) + \varphi(t) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + \varphi(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) + \psi(t) \end{cases}$$

274·1 $_2$ Per $\varphi(t) = 0$, determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data. **274·2** $_2$ Per $\varphi(t) = 0$, determinare una base per le le soluzioni dell'equazione differenziale data.

274·3 $_4$ Per $\varphi(t) = 0$, determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data tali che $x(0) = x(1)$.

274·4 $_3$ Per $\varphi(t) = \sin(t)$, determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data.

274·5 $_3$ Per $\varphi(t) = e^t$, determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data. **274·6** $_5$ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data.

274·7 $_3$ Per $\varphi(t) = 0$ e $\psi(t) = 0$, determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali dato.

274·8 $_3$ Per $\varphi(t) = 0$ e $\psi(t) = 0$, determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali dato.

274·9 $_3$ Per $\varphi(t) = 0$ e $\psi(t) = 0$, determinare una matrice fondamentale per il sistema di equazioni differenziali dato. **274·10** $_3$

Per $\varphi(t) = 0$ e $\psi(t) = 0$, determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali dato tali che $x(0) = y(0) = 0$ e $z(0) = 1$. **274·11** $_3$ Per $\varphi(t) = 0$ e $\psi(t) = e^t$, determinare tutte le soluzioni

del sistema di equazioni differenziali dato. **274·12** $_4$ Per $\varphi(t) = e^{2t}$

e $\psi(t) = e^t$, determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali dato.

275

Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{(iv)}(x) = y(x) + e^x$$

275·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

275·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa. **275·3** De-

terminare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata che siano limitate a $+\infty$. .

275·4 Stabilire se costituiscono uno spazio vettoriale. **275·5** In

caso, affermativo, determinarne la dimensione

276

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)z(x) \\ z'(x) = z(x) + 1 \end{cases}$$

276·1 Stabilire se il sistema è lineare e, in caso affermativo, se è a coefficienti costanti

276·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema tali che

$$z(0) = 2 \quad , \quad y(0) = 0$$

276·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema tali che

$$z(0) = 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

276·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni del sistema tali che

$$z(0) = 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

277

$$x(1+x)y'(x) = (1+x)y(x) + x^2$$

277·1 Studiare esistenza ed unicità del problema di Cauchy associato all'equazione differenziale data e al dato iniziale $y(x_0) = a$.

277·2 Risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = 0$
277·3 Risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale $y(-2) = 1$

277·4 Determinare il polinomio di McLaurin di grado 5 della soluzione relativa al dato iniziale $y(0) = 1$
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2xy'(x) = x^3$$

277·5 $_6$ Determinare tutte le soluzioni

277·6 $_2$ Stabilire se l'insieme delle sue soluzioni è uno spazio vettoriale

277·7 $_2$ Determinare una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea ad essa associata **277·8** $_2$ Trovare tutte le soluzioni tali che

$y(0) = 0$ Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + 2 \\ \dot{y}(t) = z(t) + 1 \\ \dot{z}(t) = 3z(t) - 2y(t) + 5 \end{cases}$$

277·9 $_6$ Determinare tutte le soluzioni del sistema

277·10 $_2$ Stabilire se l'insieme delle sue soluzioni è uno spazio vettoriale

277·11 $_2$ Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato **277·12** $_2$ Trovare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $y(0) = 0$

277·13 $_2$ Stabilire se le soluzioni trovate al punto precedente formano una spazio vettoriale.

278

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

e l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x)y(x) + 1$$

278·1 Determinare, se esistono, le, soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(1) = 1$

278·2 Determinare, se esistono, le, soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(-1) = -1$

278·3 Determinare, se esistono, le, soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(0) = 0$

279

280

280·1 Determinare, se esistono le soluzioni del problema dato per $x \in \mathbb{R}$.

280·2 Calcolare la soluzione che corrisponde ad $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

281

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$f(x) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 2y(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = -3x(t) + 4y(t) + \sin(t) \end{cases}$$

281·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo.

281·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo. **281·3** Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo.

281·4 Determinare le soluzioni tali che $x(0) = y(0) = 0$

282

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 3xy'(x) - 9y(x) = 0$$

282·1 Verificare che $y_1(x) = x^3 + x$ risolve l'equazione data.

282·2 Determinare $z(x)$ tale che $y_2(x) = z(x)y_1(x)$ sia soluzione dell'equazione data. **282·3** Verificare che y_1 ed y_2 sono linearmente indipendenti tra loro. **282·4** Determinare tute le soluzioni dell'equazione data.

283

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \sin(x)y(x) + \sin(x)$$

con il dato iniziale $y(x_0) = y_0$

283·1 Determinare tutte le soluzioni. **283·2** Disegnare il grafico di tutte le soluzioni **283·3** Determinare al variare di α tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ dell'equazione differenziale

$$x^\alpha y'(x) = y(x)$$

283·4 Si considerino le funzioni $u_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

Stabilire se sono linearmente indipendenti

283·5 Determinare un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti omogeneo che abbia come soluzioni

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{u}(t) = Au(t) + B(t)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

283·6 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato **283·7** Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

283·8 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato **283·9** Stabilire se lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato che sono infinitesime a $+\infty$ è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione ed una base **283·10** Stabilire se lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato che sono infinitesime a $-\infty$ è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione ed una base **283·11** Stabilire, al variare di α, se lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = y(0)$ e $z(0) = \alpha$ è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione ed una base.

284

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = (2 + 4x^2)y(x)$$

284·1 Verificare che $y_1(x) = e^{x^2}$ è soluzione dell'equazione data.

284·2 Determinare una soluzione y_2 dell'equazione data, linearmente indipendente da y_1

284·3 Dimostrare che y_1 ed y_2 sono linearmente indipendenti. **284·4** Determinare la soluzione dell'equazione data per cui $y(0) = 0$ ed $y'(0) = 1$

284·5 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione data per cui $y(0) = 0$ ed $y'(0) = 1$

285

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = y^2(x)$$

285·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni tali che $y(x_0) = y_0$

285·2 Determinare le soluzioni tali che $y(0) = 1$ **285·3** Determinare le soluzioni tali che $y(0) = -1$

285·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

286

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = 4 - y^2(x)$$

286·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni tali che $y(x_0) = y_0$

286·2 Determinare le soluzioni tali che $y(0) = 1$ **286·3** Determinare le soluzioni tali che $y(0) = -1$

286·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

287

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = y(x) + \frac{1}{1+x^2}$$

287·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

287·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa.

287·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che $y(0) = 0$.

287·4 Determinare la dimensione dello spazio delle le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che. $y(0) = 0$.

287·5 Determinare una base dello spazio delle le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che. $y(0) = 0$.

287·6 Determinare tutte le le soluzioni dell'equazione completa tali che. $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

287·7 Determinare un sistema lineare equivalente all'equazione completa.

287·8 Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare equivalente all'equazione completa.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = -3x(t) - 2y(t) + \sin(t) \end{cases}$$

287·9 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

287·10 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

287·11 Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

287·12 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

287·13 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

287·14 Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

287·15 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

288

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x)(y(x) - y^2(x)) = \ln|x|$$

288·1 Disegnare, se ne esistono, il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(1) = 2$

288·2 Disegnare, se ne esistono, il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(1) = 1$

289

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + t \\ \dot{y}(t) = x(t) - \sin(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) + 1 \end{cases}$$

289·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

289·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo. **289·3** Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato. **289·4** Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato. **289·5** Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$. **289·6** Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$. **289·7** Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

290

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) + y(x) = |x|$$

290·1 -[]y Determinare tutte le soluzioni per $x > 0$

290·2 Determinare tutte le soluzioni per $x < 0$

290·3 Determinare tutte le soluzioni per $x \in \mathbb{R}$

291

Si consideri il sistema di 'equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ky(t) \\ \dot{y}(t) = -kx(t) - hz(t) \\ \dot{z}(t) = hy(t) \end{cases}$$

291·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema

291·2 Determinare una base dello spazio delle soluzioni del sistema .

291·3 Determinare una matrice fondamentale del sistema .

291·4 Determinare tutte le soluzioni del sistema tali che $z(0) = 0$

291·5 Stabilire se le soluzioni trovate al punto precedente formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo determinarne la dimensione ed una base.

291·6 Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ky(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = -kx(t) - hz(t) \\ \dot{z}(t) = hy(t) + 1 \end{cases}$$

292

Si consideri

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + f(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + g(t) \\ \dot{z}(t) = z(t) \end{cases}$$

292·1 -[]y Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

292·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo per $f = e^{-t}$ e $g(t) = 0$.

292·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo per $f = 0$ e $g(t) = 1/t$.

292·4 Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

292·5 -[]y Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

292·6 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(1) = 0$.

292·7 Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(1) = 0$.

292·8 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(1) = 0$.

293

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$(1-x)^2 y''(x) = 2y(x) + f(x)$$

293·1 Determinare k in modo che $y(x) = \frac{k}{1-x}$ sia soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione data

293·2 Determinare $z(x)$ in modo che $y(x) = \frac{z(x)}{1-x}$ sia soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione data

293·3 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data e tutte le sue soluzioni.

293·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data per $f(x) = e^x$

294

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + y(t) + t \\ \dot{y}(t) = -x(t) - 3y(t) + e^t \end{cases}$$

294·1 -[]y Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

294·2 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato

294·3 Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato

294·4 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato

294·5 Determinare tutte le soluzioni del sistema

295

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + t \\ \dot{y}(t) = z(t) + e^t \\ \dot{z}(t) = x(t) \end{cases}$$

295·1 -[4]y Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

295·2 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato

295·3 Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato

295·4 Determinare tutte le soluzioni del sistema

296

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari e di condizioni iniziali

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases}, \begin{cases} x(0) = 0\ ,\ \dot{x}(0) = v_x \\ y(0) = 0\ ,\ \dot{y}(0) = v_y \end{cases}, \quad g, v_x, v_y \in \mathbb{R}^+$$

296·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema

296·2 Esprimere, se possibile, y in funzione di x

296·3 Determinare, se esiste, $\bar{x}$, tale che $y(\bar{x}) = 0$

296·4 Se esiste $\bar{x}$, tale che $y(\bar{x}) = 0$, determinare $\bar{t} > 0$ tale che $x(\bar{t}) = \bar{x}$

296·5 -[]y Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Determinare v_x, v_y in modo che $y(\bar{x}) = 0$ e calcolare il valore $\bar{t}$ per cui $x(\bar{t}) = \bar{x}$

297

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = E(x)y(x)$$

297·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data **297·2** Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data definite su $[0, 2]$

297·3 -[5]y Stabilire se esistono funzioni continue definite su $[-1, 2]$ che risolvano l'equazioni differenziale data a meno di un numero finito di punti.

297·4 Determinare tutte le funzioni continue definite su $[-1, 2]$ che risolvano l'equazioni differenziale

$$y''(x) = E(x)y(x) = e^x$$

a meno di un numero finito di punti.

298

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 2z(t) \\ \dot{z}(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$$

298·1 Determinare la matrice dei coefficienti del sistema **298·2** Dis-

cutere esistenza, unicità e campo di definizione della soluzione del sistema.

298·3 -[10]y Determinare tutte le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \dot{y}(t) = -y(t) - 2z(t) \\ \dot{z}(t) = -x(t) + z(t) = \sin(x^2) \end{cases}$$

298·4 Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo dato **298·5** Determinare una matrice fondamentale principale

del sistema omogeneo dato

298·6 Determinare una equazione differenziale lineare del terzo ordine equivalente al sistema omogeneo dato **298·7** -[6]y Determinare

tutte le soluzioni dell'equazione trovata al punto precedente.

299

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

299·1 Calcolare $y''(0)$ per ogni soluzione dell'equazione data

299·2 Detti $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, determinare una formula di ricorrenza per i coefficienti a_n di una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che sia soluzione dell'equazione data. **299·3** Per i casi $a = 1$ $b = 0$ e

$a = 0$ $b = 1$, determinare le formule di ricorrenza per b_n e c_n in modo che le corrispondenti soluzioni si possano scrivere nella forma $\sum b_n x^{3n}$ e $\sum c_n x^{3n+1}$, precisando la relazione tra a_n b_n e c_n.

299·4 Determinare il raggio di convergenza delle serie trovate

299·5 Scrivere l'integrale generale dell'equazione data

300

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

300·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > 0$. **300·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite

per $x < 0$.

300·3 Determinare, se esistono, tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. **300·4** Stabilire se le soluzioni di cui ai punti precedenti formano

uno spazio vettoriale ed in caso affermativo stabilirne la dimensione. **300·5** Trovare, se esistono, le soluzioni tali che $y(0) = 1$ e $y(1) = 0$.

301

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = k \end{cases}$$

301·1 Stabilire per quali valori di k esiste un'unica soluzione del problema assegnato **301·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale relativa al problema assegnato, definite per $x > 0$.

301·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale relativa al problema assegnato, definite per $x \in \mathbb{R}$.

301·4 Determinare tutte le soluzioni del problema assegnato, per $k = 1$ precisandone l'insieme di definizione.

301·5 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = -2x$$

definite per $x < 0$.

302

Si consideri l'equazione differenziale

$$xy''(x) + y(x) = 0$$

302·1 Studiare esistenza e unicità della soluzione dell'equazione assegnata **302·2** Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione che siano analitiche in 0

302·3 Determinare il raggio di convergenza della serie che rappresenta la soluzione.

302·4 Stabilire la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni analitiche definite in un intorno di 0

302·5
Determinare una soluzione analitica in 0 dell'equazione

$$xy''(x) + y(x) = \sin x$$

303

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 6x(t) - 11y(t) + 6z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \\ \dot{z}(t) = y(t) \end{cases}$$

303·1 Determinare una soluzione del sistema tale che $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 1$ **303·2** Determinare una soluzione del sistema tale che $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ e $z(0) = 0$

303·3 Determinare una soluzione del sistema tale che $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$

303·4 Scrivere l'integrale generale del sistema **303·5** Scrivere una matrice fondamentale del sistema ed indicare una espressione della soluzione del sistema non omogeneo avente termine noto $B(t)$

304

Si consideri l'equazione differenziale
=

$$y'''(x) + xy(x) = 0$$

304·1 Discutere esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione data. **304·2** Determinare la regola di ricorrenza cui deve soddisfare a_n affinchè $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data.

304·3 Determinare quali condizioni deve soddisfare a_n affinchè $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ $y'(0) = y''(0) = 0$. **304·4** Determinare esplicitamente a_{20} **304·5** Provare che per ogni soluzione y dell'equazione data si ha

$$y^{(19)}(0) = y^{(23)}(0) = 0$$

305

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = xy(x) - \int_0^x y(t)dt$$

305·1 Determinare i coefficienti a_n delle serie di potenze di x che risolvono l'equazione data **305·2** Determinare il raggio di convergenza di tali serie **305·3** Verificare che le soluzioni dell'equazione data formano uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione **305·4** Determinare una base dell'insieme dello spazio vettoriale delle soluzioni **305·5** Trovare, se esiste una soluzione tale che $y^{(4)}(0) = 0$

306

Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

306·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema.

306·2 Scrivere una matrice fondamentale del sistema. **306·3** Disegnare le traiettorie del sistema che corrispondono ai dati iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

.

307

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x) + xy(x) + f(x)$$

dove f è una funzione continua con la sua derivata prima su $\mathbb{R}$. **307·1** Stabilire esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = a$ $y'(0) = b$

307·2 Per $f(x) = 0$, trovare per serie la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
307·3 Per $f(x) = 0$, trovare per serie la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
307·4 Per $f(x) = x^2$, determinare tutte le soluzioni di tipo polinomiale dell'equazione data **307·5** Per $f(x) = x^2$, determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

308

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = xy'(x) + f(x)$$

308·1 Per $f(x) = 0$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x < 0$

308·2 Per $f(x) = 0$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x > 0$

308·3 Per $f(x) = 0$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per ogni $x \in \mathbb{R}$

308·4 Per $f(x) = x$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x > 0$ **308·5** Per $f(x) = x$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per ogni $x \in \mathbb{R}$

309

Si consideri il problema

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x) + e^x - 1 + x \\ y(0) = \gamma \\ y'(0) = \delta \end{cases}$$

309·1 Determinare, al variare di γ e δ le soluzioni sviluppabili in serie di potenze di centro 0, precisandone il dominio.

310

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + xy'(x) = x$$

310·1 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

310·2 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$

310·3 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

310·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea **310·5** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

311

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (8^n + 2^n)(x-3)^{3n}$$

311·1 Determinare il raggio di convergenza R della serie che definisce f e l'insieme di definizione D di f

311·2 Stabilire se f è definita agli estremi dell'intervallo di convergenza. **311·3** Calcolare $f(3 - \frac{1}{4})$ con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1-x)y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e sia

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

311·4 Determinare una legge di ricorrenza per i coefficienti a_n in corrispondenza della quale y sia soluzione del problema dato

311·5 Determinare esplicitamente y

312

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = x$$

312·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

312·2 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$
312·3 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

313

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + xy'(x) = x$$

313·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

313·2 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$
313·3 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

314

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = z(t) + 1 \\ \dot{z}(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$$

Determinare la soluzione del sistema omogeneo associato Determinare la soluzione del sistema completo

Determinare le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $y(0) = 0$

Stabilire se costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinarne la dimensione.

315

Si consideri

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = x^2 \log(1 - x)$$

Determinare a, b in modo che l'equazione omogenea associata abbia come soluzioni x ed x^2. Scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata precisandone il campo di definizione.

Determinare una soluzione dell'equazione completa della forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Scrivere l'integrale generale dell'equazione completa precisandone il campo di definizione.

316

Si consideri

$$y''(x) = xy(x) - x^2$$

Studiare l'esistenza delle soluzioni dell'equazione differenziale.

Determinare, per serie, la soluzione dell'equazione omogenea associata tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea precisandone il dominio Determinare un polinomio di secondo grado che risolve l'equazione completa e scriverne l'integrale generale

317

Si consideri

$$x^2y''(x) + 2y(x) = x$$

Studiare l'esistenza delle soluzioni dell'equazione differenziale. Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$

Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$ Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$

318

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^4$$

318·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata su $\mathbb{R}_+$

318·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata su $\mathbb{R}$

318·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione su $\mathbb{R}_+$ **318·4** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione su $\mathbb{R}$

319

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) + xy^2(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

319·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

319·2 Trovare la soluzione al variare di x_0, y_0

319·3 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1$

319·4 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$

320

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-1)^2 y''(x) + y(x) = 1 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

320·1 Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

320·2 Trovare le soluzioni per $x_0 = 0$

320·3 Trovare le soluzioni per $x_0 = 2$

321

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - x^2 y(x) = 0$$

321·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

321·2 Determinare una serie di potenze centrata in $x = 0$ che soddisfi l'equazione data e sia tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

321·3 Determinare la serie di Taylor della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **321·4** Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4 della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

322

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + y(x) = x$$

322·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. **322·2** Determinare tutte le soluzioni definite su $x > 0$. **322·3** Determinare tutte le soluzioni definite su $x < 0$.

322·4 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$. **322·5** Scrivere un sistema differenziale del primo ordine equivalente all'equazione data e determinarne la matrice fondamentale su $x > 0$.

323

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x$$

323·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. **323·2** Determinare tutte le soluzioni definite su $x > 0$. **323·3** Determinare tutte le soluzioni definite su $x < 0$.

323·4 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$.

323·5 Scrivere un sistema differenziale del primo ordine equivalente all'equazione data e determinarne la matrice fondamentale su $x > 0$.

324

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'(x) + xy(x) = f(x)$$

324·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata. **324·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa per $f(x) = x$.

324·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa. **324·4** Determinare la soluzione dell'equazione completa per la quale $y(0) = 0$.

325

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'(x) + xy(x) = f(x)$$

325·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata. **325·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa per $f(x) = x$.

325·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa. **325·4** Determinare la soluzione dell'equazione completa per la quale $y(0) = 0$.

326

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) - y(x) = 0$$

326·1 Determinare la serie di potenze centrata in 0 soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$ ed $y'(0) = 1$. **326·2** Determinare la serie di potenze centrata in 0 soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ ed $y'(0) = 0$.

326·3 Determinare tutte le serie di potenze centrate in 0 soluzioni dell'equazione data.

326·4 Determinare la serie di potenze centrata in 0 soluzione dell'equazione

$$y'''(x) - y'(x) = 0$$

327

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + y(x) = x$$

327·1 Determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}_+$ **327·2** Determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}_-$ **327·3** Determinare, se esistono, le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$ **327·4** Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ della soluzione dell'equazione differenziale tale che $y(1) = 0 = y'(1)$

328

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + 3y(x) = \ln(x^2)$$

328·1 Stabilire esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione differenziale al variare dei dati iniziali **328·2** Determinare la soluzione dell'equazione differenziale tale che

$$y(1) = y'(1) = 0$$

328·3 Stabilire se la soluzione trovata al punto precedente è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$

329

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + 2y(x) = x$$

329·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > 0$

329·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < 0$ **329·3** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

330

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) = x$$

330·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > 0$

330·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < 0$ **330·3** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

331

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^5 y^{(5)}(x) + y(x) = f(x)$$

e la serie di potenze

$$z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

331·1 Sia $f(x) = x^9$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata. **331·2** Sia $f(x) = e^x$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

331·3 Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n$.

331·4 Determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

331·5 Determinare al variare di α il raggio di convergenza della serie trovata.

331·6 Sia $\alpha = 3$. Stabilire per quali dati iniziali il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^5 y^{(5)}(x) + y(x) = f(x) \\ y(0) = y_0\,,\ y'(0) = y_1\,,\ y''(0) = y_2\,,\ y'''(0) = y_3\,,\ y^{(4)}(0) = y_4\,, \end{cases}$$

ammette soluzione.

332

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 2y(x) = 2x$$

332·1 Risolvere per serie l'equazione assegnata. **332·2** Determinare i dati iniziali in corrispondenza dei quali l'equazione differenziale ammette soluzioni che si possono scrivere come serie di potenze centrate in 0

Si consideri poi l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2y(x) = 2x$$

332·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

333

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + z(t) + 1 \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

333·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato **333·2** Determinare l'integrale generale del sistema completo

333·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

333·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

334

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + t \\ \dot{z}(t) = z(t) + 1 \end{cases}$$

334·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato **334·2** Determinare l'integrale generale del sistema completo

334·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

334·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

335

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + sin(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + t \\ \dot{z}(t) = z(t) + 1 \end{cases}$$

335·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato **335·2** Determinare l'integrale generale del sistema completo

335·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

335·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

336

Si consideri l'equazione differenziale

$$(x-1)^3 y''(x) + (x-1)(y'(x)) = (x-1)$$

336·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

336·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data **336·3** Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = a$, ed eventualmente trovarle.

336·4 Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = a$, $y'(1) = b$ ed eventualmente trovarle.

337

Si consideri l'equazione differenziale

$$xy''(x) + y'(x) = 0$$

337·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

337·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$ **337·3** Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$ ed eventualmente determinarle.

337·4 Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$ ed eventualmente determinarle.

338

Si consideri l'equazione

$$y(x) = \int_0^x ty(t)dt + \frac{x^2}{2}$$

338·1 Determinare i coefficienti di una serie di potenze centrata nell'origine che risolva l'equazione data. **338·2** Determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

338·3 Verificare che la somma della serie trovata è

$$e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

338·4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = xy(x) + x$$

339

Si consideri l'equazione

$$(x-1)^2 y''(x) + y(x) = |x-1|$$

339·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x > 1$. **339·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x < 1$

339·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

339·4 Stabilire se esistono soluzioni derivabili 4 volte in $x = 1$

340

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = xy'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

340·1 Determinare i coefficienti di una serie di potenze centrata nell'origine che risolva il problema di Cauchy assegnato. **340·2** Determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

340·3 Verificare che la somma della serie trovata è

$$y(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

341

Si consideri l'equazione

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

341·1 Determinare una serie di potenze che rappresenti la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ precisandone il raggio di convergenza. **341·2** Determinare una serie di potenze che rappresenti la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, precisandone il raggio di convergenza.

341·3 Determinare l'integrale generale dell'equazione data **341·4** Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2(y(x) - 1) = 0$$

342

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = \int_0^x (t + y(t))dt + 3$$

342·1 Studiare esistenza esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione data. **342·2** Determinare una serie di potenze che rappresenti la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$. **342·3** Precisare il raggio di convergenza della serie trovata al punto precedente. **342·4** Determinare lo sviluppo di Taylor di $y(x)$ di ordine 5. **342·5** calcolare l'ordine di infinitesimo di y in 0.

343

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

343·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema dato **343·2** Studiare la stabilita' della soluzione nulla per il sistema dato.

Si consideri poi il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) - 2 \end{cases}$$

343·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema. **343·4** Studiare la stabilita' della soluzione identicamente uguale a $(1,1)$ per il sistema.

344

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - 1 \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2x(t) + 2 \end{cases}$$

344·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema **344·2** Determinare le soluzioni del sistema dato. **344·3** Disegnare il grafico delle orbite del sistema dato. **344·4** Studiare la stabilità delle soluzioni costanti del sistema.

345

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

345·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema dato **345·2** Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema dato Si consideri poi il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) - 1 \end{cases}$$

345·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema.

346

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = a$, $y(0) = b$.

346·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema **346·2** Determinare la soluzione del sistema dato. **346·3** Disegnare il grafico delle soluzioni. **346·4** Disegnare la curva definita da $(x(t), y(t))$

347

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2x(t) + 2 \end{cases}$$

347·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema **347·2** Determinare le soluzioni del sistema dato. **347·3** Disegnare il grafico della curva γ le cui equazioni parametriche sono date da $(x(t), y(t))$. **347·4** Stabilire se la curva γ è semplice e se è regolare.

348

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 4y(x) - z(x) + f(x) \\ z'(x) = 2y(x) + z(x) + g(x) \end{cases}$$

348·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo . **348·2** Disegnare le traiettorie del sistema Omogeneo. **348·3** Studiare la stabilità della soluzione nulla per il sistema omogeneo. **348·4** Trovare tutte le soluzioni del sistema completo per $f(x) = 1$ e $g(x) = |x|$

349

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) - z(x) + f(x) \\ z'(x) + z(x) = g(x) \end{cases}$$

349·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo . **349·2** Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo che sono limitate su $\mathbb{R}_+$. **349·3** Trovare tutte le soluzioni del sistema completo per $f(x) = 1$ e $g(x) = e^x$

350

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = |x| y'(x) - y(x)$$

350·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x > 0$. **350·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x < 0$. **350·3** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x \in \mathbb{R}$.

351

Si consideri il problema

$$y''(x) = b + \int_a^x y'(t)dt$$

351·1 Determinare tutte le soluzioni del problema per $a = 3$, $b = 0$.

351·2 Determinare tutte le soluzioni del problema al variare di a e b. **351·3** Detta $y(x, a, b)$ la soluzione del problema; verificare che y è una funzione lineare nelle variabili (a, b)

352

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''''(x) = y(x)$$

352·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. **352·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

352·3 Verificare che la soluzione y dipende linearmente dai dati iniziali.

353

353·1 Determinare l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di grado minimo che abbia come soluzioni $\sin x$ ed e^x **353·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione trovata al punto precedente.

353·3 Determinare l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di grado minimo che abbia come soluzioni $\sin x$, e^x e $\cos x$ **353·4** Determinare un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, diversa dalla precedente, che abbia come soluzioni $\sin x$, e^x e $\cos x$

354

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-1)^2 y''(x) = 3(x-1)y'(x) - 5y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

354·1 Stabilire se e dove la soluzione esiste ed è unica

354·2 Determinare tutte le soluzioni.

354·3 Studiare la prolungabilità delle soluzioni trovate

355

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} t\dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = tx(t) + ty(t) \end{cases}$$

355·1 Determinare una regola di ricorrenza per a_n, b_n in modo che

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad \text{e} \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

siano soluzioni per il sistema dato **355·2** Determinare condizioni in grado di identificare completamente a_n, b_n in modo che x e y siano soluzioni del sistema dato

355·3 Determinare il raggio di convergenza delle serie che definiscono x e y **355·4** Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema che possono essere scritte come serie di potenze centrate in 0.

356

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} w'(x) = z(x) \\ w''(x) = u(x) \\ w'''(x) = v(x) \\ w^{iv}(x) = 2u(x) - w(x) \end{cases}$$

356·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema dato **356·2** Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni e scrivere una matrice fondamentale per il sistema. **356·3** Determinare una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti equivalente al sistema dato **356·4** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione trovata.

357

Si consideri il problema di trovare una funzione y che sia soluzione della seguente equazione integrodifferenziale.

$$y''(x) = \int_0^x ty(t)dt$$

357·1 Determinare, derivando ambo i membri, un'equazione differenziale che sia necessaria per una soluzione dell'equazione integrodifferenziale

357·2 Scrivere un problema di Cauchy equivalente all'equazione integrodifferenziale data.

357·3 Determinare, mediante una relazione di ricorrenza, una successione a_n tale che $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ soddisfi l'equazione integrodifferenziale data

357·4 Determinare, mediante una relazione di ricorrenza, una successione a_n tale che $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ soddisfi l'equazione integrodifferenziale data

357·5 Determinare, tutte le soluzioni dell'equazione integrodifferenziale data.

358

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + y(x) = f(x)$$

Dove f è una funzione sviluppabile in serie di MacLaurin su $\mathbb{R}$. **358·1** Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data. **358·2** Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data definite su $\mathbb{R}$.

358·3 Determinare, se esiste, una serie di potenze centrata in $x = 0$ che soddisfi l'equazione omogenea

358·4 Determinare, se esiste, una serie di potenze centrata in $x = 0$ che soddisfi l'equazione completa

359

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 6y'(x) + 6y(x) = x^2$$

359·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

359·2 Stabilire se l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.

359·3 Determinare, se esistono, le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

360

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 6y'(x) + 6y(x) = x^2$$

360·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

360·2 Stabilire se l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.
360·3 Determinare, se esistono, le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

361

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = 0$$

361·1 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

361·2 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

361·3 Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

362

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$(x+1)^2y''(x) + y(x) = x$$

362·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

362·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

363

Si consideri l'equazione differenziale

$$x(1+x)y'(x) = (1+x)y(x) + x^2$$

363·1 Studiare esistenza ed unicità del problema di Cauchy associato all'equazione differenziale data e al dato iniziale $y(x_0) = a$.
363·2 Determinare, se esistono, le soluzioni relative al dato iniziale

$y(0) = a$ **363·3** Determinare, se esistono, le soluzioni relative al dato

iniziale $y(0) = 0$ sviluppabili in serie di McLaurin.

364

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + xy'(x) = x^2$$

364·1 Studiare esistenza ed unicità del problema di Cauchy associato all'equazione differenziale data e al dato iniziale $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$. **364·2** Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$

364·3 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$

364·4 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$

365

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + 2 \\ \dot{y}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = 3z(t) - 2y(t) + \sin^2(t) \end{cases}$$

365·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

365·2 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato **365·3** Trovare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $y(0) = 0$

365·4 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

366

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = (2 + 4x^2)y(x)$$

con i dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

366·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione.

366·2 Determinare una regola di ricorrenza per a_n in modo che $\sum_0^n a_n x^n$ soddisfi le condizioni assegnate **366·3** Verificare che

$$c_n = a_{2n+1} = 0$$

366·4 Verificare che

$$b_n = a_{2n} = \frac{1}{n!}$$

366·5 Determinare y in termini di funzioni elementari.

367

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = 2 + y(x)$$

367·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione.

367·2 Determinare le soluzioni dell'equazione per $x > 0$

367·3 Determinare le soluzioni dell'equazione per $x < 0$

367·4 Determinare le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

368

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = 0$$

368·1 Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$ **368·2** Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$

368·3 Determinare tutte le funzioni continue su $\mathbb{R}$ soluzioni dell'equazione data su $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$

369

Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \int_0^x t^4 y(t) dt \\ y(0) = a \end{cases}$$

369·1 Determinare una serie di potenze centrata in $x = 0$ soluzione del problema **369·2** Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.. **369·3** Determinare a in modo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione data sia uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione ed una base.

370

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \sin(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + e^{-t} \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t \end{cases}$$

370·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato **370·2** Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo

completo **370·3** Determinare tre soluzioni del sistema omogeneo lin-

earmente indipendenti

370·4 Determinare una matrice fondamentale del sistema.

371

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) = (2 + 4x^2)y(x)$$

con i dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e si consideri la serie di potenze $\sum_n a_n x^n$ **371·1** Determinare a_0, a_1, a_2, a_3 ed una regola di ricorrenza

che consenta di calcolare a_{n+2} in funzione di a_n e di a_{n-2} per $n \geq 2$ **371·2** Dimostrare che $a_{2n} = \frac{1}{n!}$ **371·3** Determinare lo sviluppo di

McLaurin della soluzione del problema assegnato **371·4** Calcolare

$y(1)$ a meno di $1/1000$

371·5 Disegnare il grafico di y

372

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y(x)$$

372·1 Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 1$, $y('0) = 1$.

372·2 Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 0$, $y('0) = 0$.

372·3 Trovare tutte le soluzioni della serie data che si possano esprimere come serie di potenze centrate in $x_0 = 0$

373

Si consideri l'equazione differenziale

$$(2x+1)^2 y''(x) + (2x+1)y'(x) + y(x) = x$$

373·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali. **373·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > -1/2$

373·3 -[]y Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < -1/2$ **373·4** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

374

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = x^3 y(x)$$

374·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali. **374·2** Determinare a_n in modo che $\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ **374·3** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione (espresse come serie di potenze) **374·4** -[]y Determinare la soluzione dell'equazione

$$y'''(x) = x^3 y(x) + x^5$$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

375

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + -\dfrac{5}{4} z(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = z(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + t \end{cases}$$

375·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

375·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo. **375·3** Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato. **375·4** Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato. **375·5** Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$. **375·6** Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$. **375·7** Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

376

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$$

376·1 -[4]yDeterminare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

376·2 Dimostrare che deve essere $a_{2n+1} = 0$ per ogni n naturale.

376·3 Determinare i valori che possono assumere a_0 ed a_1

376·4 Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

376·5 -[3]y Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione data che si possono esprimere come serie di potenze centrate in $x_0 = 0$

376·6 Determinare una espressione esplicita per a_n

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$x2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 16)y(x) = 0$$

376·7 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

376·8 Dimostrare che deve essere $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

376·9 Dimostrare che deve essere $a_{2n-1} = 0$ per ogni n naturale.

376·10 Determinare i valori che può assumere a_4

376·11 Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

376·12 -[4]y Determinare l'ordine di infinitesimo di y in $x_0 = 0$

377

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2t \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + z(t) + e^t \\ \dot{u}(t) = x(t) + y(t) + 1 \end{cases}$$

377·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

377·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema

377·3 Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo.

377·4 Determinare una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo.

377·5 Determinare l'insieme W di tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che

$$x(0) = u(0)$$

377·6 -[9]y Stabilire se W è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione ed una base

378

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y - e^t \\ \dot{y}(t) = z(t) + t \\ \dot{z}(t) = z(t) + y(t) + 1 \end{cases}$$

378·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

378·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

378·3 Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

378·4 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

378·5 Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

379

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = z(t) + \sin(t) \\ \dot{z}(t) = z(t) + x(t) + 1 \end{cases}$$

379·1 -[3]y Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

379·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

379·3 Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

379·4 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

379·5 Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $y0) = \dot{y}(0)$.

380

Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 - x)^2 y'' = 2y(x)$$

380·1 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

sia soluzione dell'equazione data

l **380·2** -[3]y Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data tale che

$$y(0) = 1 \qquad , y'(0) = 1$$

380·3 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data tale che

$$y(0) = 1 \qquad , y'(0) = 0$$

380·4 Stabilire se le soluzioni trovate sono linearmente indipendenti e determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

381

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

381·1 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

sia soluzione dell'equazione data

l **381·2** -[3]y Determinare la successione esplicitamente a_n in modo

che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data tale che

$$y(0) = 1 \qquad , y'(0) = 1/2$$

381·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

382

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 4y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 4y(t) + t \\ \dot{z}(t) = 2y(t) + 3z(t) + 1 \end{cases}$$

382·1 -[3]y Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo as-

sociato.

382·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

382·3 Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

382·4 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

382·5 Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

383

Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0$$

383·1 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

sia soluzione dell'equazione data **383·2** Dimostrare che deve essere

$a_{2n+1} = 0$ per ogni n naturale.

383·3 -[4]y Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

383·4 Determinare se esistono soluzioni dell'equazione nella forma considerata, se formano uno spazio vettoriale e qualè la sua dimensione.

384

Si consideri l'equazione differenziale

$$(x - 1)^2 y''(x) = y(x)$$

384·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati

iniziali. **384·2** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

384·3 -[]y Determinare tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze su $\mathbb{R}$

384·4 Determinare tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

385

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 5xy'(x) + 5y(x) = 0$$

385·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione **385·2** Deter-

minare tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze centrate in 0

385·3 -[]y Verificare che l'insieme delle soluzioni definite su $\mathbb{R}$ costituisce uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione

385·4 Determinare una base per lo spazio delle soluzioni definite su $\mathbb{R}$

386

Si consideri l'equazione differenziale

$$xy'' + (1-x)y'(x) + \alpha y(x) = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

386·1 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data **386·2** -[4]y Determinare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soluzione dell'equazione data

386·3 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data nel caso in cui $\alpha = 5$ **386·4** Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data nel caso in cui $\alpha = m \in \mathbb{N}$ **386·5** Verificare che

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(n-\alpha)}{(n!)^2}$$

387

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ \ddot{y}(t) = x(\dot{y}(t)) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$

387·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema **387·2** Determinare la soluzione del sistema dato. **387·3** Disegnare il grafico delle soluzioni. **387·4** Disegnare il grafico dell'orbita del sistema dato corrispondente alle condizioni iniziali fissate.

388

Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=0 \qquad t\geq 0 \quad 0\leq x\leq \pi$$

388·1 Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili. **388·2** Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0)=0$.

388·3 Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0)=0$ e $u(t,\pi)=0$. **388·4** Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0)=0$, $u(t,\pi)=0$ e $u(0,x)=\sin x+2\sin 4x$.

388·5 Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0)=0$, $u(t,\pi)=0$ e $u(0,x)=x(x-\pi)$.

389

Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \qquad 0\leq t\leq 1 \quad 0\leq x\leq 1$$

389·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data che si possono ottenere per separazione delle variabili. **389·2** Determinare tutte le soluzioni che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(0,x)=e^x$.

389·3 Determinare tutte le soluzioni che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(0,x)=e^x$ e $u(1,x)=2e^x$.

390

Si consideri l'equazione differenziale

$$2z_x(x,y)+3z_y(x,y)=0$$

390·1 Determinare per quali $a,b\in\mathbb{R}$ e per quali funzioni ϕ si ha $z(x,y)=\phi(2x+3y)$ **390·2** Verificare che la soluzione z dell'equazione data è costante sulle rette parallele ad una opportuna retta, determinandola.

390·3 Scrivere le soluzioni dell'equazione data **390·4** Trovare le soluzioni dell'equazione data che valgono x^2 sull'asse delle x **390·5** Trovare le soluzioni dell'equazione data che valgono 1 sulla retta $2y = 3x$

391

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove

$$f(y) = \begin{cases} 1 & y > 1 \\ \sqrt[3]{y} & -1 \leq y \leq 1 \\ -1 & y < -1 \end{cases}$$

391·1 Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$

391·2 Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = -2$

391·3 Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

391·4 Disegnare il grafico delle soluzioni al variare dei dati iniziali x_0, y_0

392

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x + \sin x$$

392·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

392·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

392·3 Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = y'(0) = 0$

392·4 Scrivere il sistema di primo ordine equivalente all'equazione data

392·5 Scrivere tutte le soluzioni del sistema trovato e determinarne una matrice fondamentale.

393

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^4(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

393·1 Stabilire esistenza ed unicità locale della soluzione del problema, al variare di $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

393·2 Disegnare il grafico delle soluzioni al variare dei dati iniziali x_0, y_0

394

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

394·1 Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

394·2 Determinare tutte le soluzioni costanti e disegnare il grafico delle soluzioni al variare dei dati iniziali x_0, y_0

395

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x + x$$

395·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

395·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

395·3 Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = y'(0) = 0$

396

Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

397

Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + 27y(x) = 2e^{-3x} + 1$$

397·1 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata

397·2 Determinare le soluzioni dell'equazione completa

397·3 Scrivere un sistema del primo ordine equivalente all'equazione data.

397·4 Determinare le soluzioni del sistema trovato precisando la matrice fondamentale del sistema omogeneo ad esso associato.

398

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

398·1 Provare che la soluzione del problema è convessa dove è definita.

398·2 Provare che la soluzione ha un minimo locale in 0

398·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato

398·4 Determinare esplicitamente tutte le soluzioni del'equazione differenziale data

398·5 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

399

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) - 2z(x) + e^x \\ z'(x) = 2y(x) - z(x) + x \end{cases}$$

399·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

399·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

399·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che $y(0) = 0$

399·4 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo tali che $y(0) = 0$

399·5 Precisare se le soluzioni ottenute in ciascuno dei punti precedenti è uno spazio vettoriale e, in caso affermativo trovarne la dimensione

400

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = y^7(x) - 1$$

400·1 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$

400·2 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1$

400·3 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) > 1$

400·4 Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) < 1$

400·5 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni

401

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y(x) = x$$

401·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

401·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

401·3 Stabilire se le soluzioni del problema completo costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinarne la dimensione.

401·4 Trovare tutte le soluzioni del problema completo tale che y(0)=0

402

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{\sin y(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

402·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema assegnato

402·2 Scrivere la retta tangente al grafico della soluzione per $x_0 = y_0 = 1$

402·3 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema per $x_0 = y_0 = 1$

402·4 Disegnare il grafico delle soluzioni del problema.

403

Si consideri l'equazione

$$y(x) = 2 + \int_1^x \frac{1}{\sin(y(t))} dt$$

403·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema assegnato

403·2 Determinare la soluzione dell'equazione data

403·3 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione

403·4 Scrivere il polinomio di McLaurin di grado 2 della soluzione del problema

404

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2xe^{-y(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

404·1 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, precisando il campo di definizione

404·2 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni del problema al variare di x_0, y_0

405

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \ln(y(x) + 1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

405·1 Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 1$ e precisare il campo di definizione ed eventuali prolungamenti.

405·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema al variare di y_0

406

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{2x}$$

406·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

406·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

406·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$

407

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + f(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

407·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

407·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema relativo al caso in cui $f(t) = e^t$.

408

Si consideri l'equazione

$$xy''(x) - y'(x) = |x|$$

408·1 Risolvere l'equazione omogenea associata all'equazione data

408·2 Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}_+$

408·3 Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}_-$

408·4 Risolvere l'equazione data su $\mathbb{R}$

409

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = z(x) + 1 \end{cases}$$

409·1 Risolvere il sistema omogeneo associato

409·2 Risolvere il sistema

409·3 Trovare la soluzione del sistema omogeneo associato tale che $y(0) = z(0) = 0$

409·4 Trovare la soluzione del sistema tale che $y(0) = z(0) = 0$

410

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = z(x) \\ z'(x) + z(x) = x \end{cases}$$

410·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema dato

410·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema dato

410·3 Scrivere un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine equivalente al sistema dato

410·4 Trovare una matrice fondamentale del sistema del primo ordine trovato al punto precedente.

411

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{\ln(y(x)) + 1} \\ y(0) = a \end{cases}$$

411·1 Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato, al variare di a.

411·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato per $a = e$

411·3 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato per $a = 1/over2e$

411·4

Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy al variare di a

412

Si consideri l'equazione

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x} + \sin(x)$$

412·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

412·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

412·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea completa tali che $y(0) = 0$

412·4 Scrivere un sistema differenziale lineare di primo ordine equivalente all'equazione data:

412·5 Risolvere il sistema trovato al punto precedente

413

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + 2z(x) + e^x \\ z'(x) = 3y(x) + 4z(x) \end{cases}$$

413·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

413·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

413·3 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che $y(0) = 0$

413·4 Scrivere un'equazione differenziale del secondo ordine equivalente al sistema dato

414

consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{e^{-y^2(x)}} \\ y(0) = a \end{cases}$$

414·1 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato per $a = 0$

414·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato per $a = 1$

414·3

Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy al variare di a

415

Si consideri l'equazione

$$y''(x) + 9y(x) = e^{2x} + x$$

415·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

415·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

415·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

416

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + 2z(x) + e^x \\ z'(x) = y(x) \end{cases}$$

416·1 Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

416·2 Determinare tutte le soluzioni del sistema completo

417

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (2-x)\sqrt{-y(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

417·1 Determinare la soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

417·2 Determinare la soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = -2$

417·3 Determinare la soluzione del problema per $x_0 = 3$, $y_0 = -2$

417·4 Determinare la soluzione del problema per $x_0 = 2$, $y_0 = 0$

418

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'''(x) = 27y(x) + \sin x + xe^{3x}$$

418·1 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'''(x) = 27y(x) + \sin x$$

418·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'''(x) = 27y(x) + xe^{3x}$$

418·3 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data

418·4 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = y'(0) = 0$

419

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) + y'(x) = e^x + 1$$

419·1 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data

419·2 Determinare un sistema lineare del primo ordine equivalente all'equazione data.

419·3 Trovare tutte le soluzioni del sistema di cui al punto precedente

419·4 Trovare una matrice fondamentale per il sistema e due soluzioni del sistema che siano linearmente indipendenti

420

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2 - \sqrt{y(x)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

420·1 Determinare la soluzione del problema per, $y_0 = 2$

420·2 Determinare la soluzione del problema per, $y_0 = -2$

420·3 Determinare le soluzione del problema per, $y_0 = 0$

421

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2 - \sqrt{y(x)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

421·1 Determinare la soluzione del problema per, $y_0 = 2$

421·2 Determinare la soluzione del problema per, $y_0 = -2$

421·3 Determinare le soluzione del problema per, $y_0 = 0$

422

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'''(x) = y'(x) + x + e^x$$

422·1 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'''(x) = y'(x) + x$$

422·2 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'''(x) = y'(x) + e^x$$

422·3 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data

422·4 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$

423

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) + y(x) = \sin(x)$$

423·1 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data

423·2 Determinare un sistema lineare del primo ordine equivalente all'equazione data.

423·3 Trovare tutte le soluzioni del sistema di cui al punto precedente

423·4 Trovare una matrice fondamentale per il sistema e due soluzioni del sistema che siano linearmente indipendenti

424

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x))^3 - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

424·1 Disegnare il grafico dell'inversa della soluzione

424·2 Disegnare il grafico della soluzione

424·3 Esprimere l'inversa della soluzione in termini di funzioni elementari.

425

Si consideri l'equazione differenziale

$$4y''(x) - 4y(x)' + y(x) = e^{\frac{1}{2}x} + \sin(x)$$

425·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

425·2 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea completa

425·3 Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = y'(0) = 0$

425·4 Determinare un sistema equivalente all'equazione omogenea e scrivere una matrice fondamentale per il sistema

426

Si consideri il sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 4z(x) \\ z'(x) = y(x) + 4z(x) + e^x \end{cases}$$

426·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo

426·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

427

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x))^2 - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

427·1 Disegnare il grafico dell'inversa della soluzione

427·2 Disegnare il grafico della soluzione

427·3 Esprimere l'inversa della soluzione in termini di funzioni elementari.

428

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 5y(x)' + 6y(x) = e^x + x$$

428·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

428·2 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea completa

428·3 Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = y'(0) = 0$

428·4 Determinare un sistema equivalente all'equazione omogenea e scrivere una matrice fondamentale per il sistema

429

Si consideri il sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} y'(x) = 4y(x) + 2z(x) + e^x \\ z'(x) = 4y(x) + 6z(x) + e^{5x} \end{cases}$$

429·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo

429·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

430

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{y(x)} + e^{-y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

430·1 Determinare esplicitamente la soluzione del problema dato

430·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato

431

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y^{iv}(x) = 2y''(x) - y(x) - 1$$

431·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

431·2 Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

431·3 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea completa tale che

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

432

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + e^{-t} \\ \dot{y}(t) = 4x(t) - 2y(t) + e^{t} \end{cases}$$

432·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

432·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

432·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0)$$

433

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

433·1 Determinare esplicitamente la soluzione del problema dato

433·2 Disegnare il grafico della soluzione del problema dato

434

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'''(x) = y''(x) + 1$$

434·1 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

434·2 Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

434·3 Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea completa tale che

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

435

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

435·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

435·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

435·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0)$$

436

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

436·1 Disegnare il grafico della soluzione per $a = 1$, precisandone il campo di definizione.

436·2 Disegnare il grafico della soluzione per $a = 5$, precisandone il campo di definizione.

436·3 Disegnare il grafico della soluzione al variare di a, precisandone il campo di definizione.

436·4 Determinare esplicitamente la soluzione per $a = \pi/2$, precisandone il campo di definizione.

436·5 Determinare esplicitamente la soluzione per $a = 0$, precisandone il campo di definizione.

437

Siano a, b, c funzioni continue su $\mathbb{R}$ ed y, u, v le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (a(x) + b(x))y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(x) = a(x)u(x) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(x) = b(x)v(x) \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

437·1 Giustificare il fatto che y, u, v sono unicamente determinati

437·2 Verificare che $z(x) = u(x)v(x)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(x) = (a(x) + b(x))z(x) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

437·3 Dimostrare che

$$y(x) = u(x)v(x)$$

437·4 Per $a(x) = x$ e $b(x) = 0$, determinare esplicitamente $y(x)$.

437·5 Determinare esplicitamente la v, precisandone il campo di definizione.

438

Si consideri

$$y''' - 8y(x) + e^{2x} + 1 + \sin(x) = 0$$

438·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

438·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

438·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea.

439

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4x(t) + y(t) + \sin(t) \\ \dot{y}(t) = -2x(t) + y(t) + t \end{cases}$$

439·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

439·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

439·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

439·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

440

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{\sin(y(x))} \\ y(0) = a \end{cases}$$

440·1 Disegnare il grafico della soluzione per $a = 0$, precisandone il campo di definizione.

1

440·2 Disegnare il grafico della soluzione per $a = \pi/2$, precisandone il campo di definizione.

441

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - xy(x) = x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

441·1 Discutere esistenza ed unicità della soluzione.

441·2 Determinare la soluzione del problema di Cauchy per $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

441·3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy al variare di x_0, y_0

442

Si consideri

$$y'' + 16y(x) + \sin(4x) = 0$$

442·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

442·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

442·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa.

443

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - 3y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + 4y(t) + t \end{cases}$$

443·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

443·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

443·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

443·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

444

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{y^2(x) + 1}{x}$$

444·1 Stabilire per quali valori a, b il problema di Cauchy definito dall'equazione differenziale data e dal dato iniziale $y(a) = b$ ammette una soluzione e per quali valori la soluzione è unica.

444·2 Determinare la soluzione del problema per $a = 1$ e $b = 0$

444·3 Determinare la soluzione del problema per $a = -1$ e $b = 4$

444·4 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data al variare dei dati iniziali a, b

445

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x + e^x$$

445·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

445·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

445·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

445·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

446

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - 3y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + 4y(t) \\ \dot{z}(t) = 2x(t) + 4y(t) + e^{3t} \end{cases}$$

446·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

446·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

446·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

446·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

447

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{y^2(x)+1} \\ y(a) = b \end{cases}$$

447·1 Determinare la soluzione del problema per $a = 1$ e $b = 0$

447·2 Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data al variare dei dati iniziali a, b

448

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 16y'(x) = sin(x)$$

448·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

448·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

448·3 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

449

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) - y(t) + 1 \\ \dot{y}(t) = 4x(t) + 7y(t) + e^t \end{cases}$$

449·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

449·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

450

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = 4y^2(x) - 9$$

con il dato iniziale $y(x_0) = y_0$

450·1 Determinare la soluzione dell'equazione con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

450·2 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

450·3 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 1.5$

450·4 Determinare la soluzione dell'equazione con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

450·5 Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

451

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = 27y(x) + 1 - e^x$$

451·1 Determinare la soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

451·2 Determinare la soluzione dell'equazione data.

451·3 Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

451·4 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

452

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 3y(t) + \sin(x) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + 2y(t) + 1 \end{cases}$$

452·1 Determinare la soluzione del sistema omogeneo associato al sistema dato.

452·2 Determinare la soluzione del sistema dato.

452·3 Determinare le soluzioni del dato tali che $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

452·4 Determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato al sistema dato.

453

Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 - x^2)y'(x) = 1 - y^2(x)$$

ed il dato iniziale $y(x_0) = y_0$

453·1 Disegnare il grafico di $y(x)$ nei casi in cui

$x_0 = 0, y_0 = 0$ $\quad$ $x_0 = 2, y_0 = 2$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = 1 - y'(x)$$

453·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

453·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

453·4 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data che sono nulle nell'origine.

453·5 Scrivere un sistema di primo ordine equivalente all'equazione data.

454

454·1 Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale data al variare del dato iniziale.

455