1

Curve

1

Si consideri la curva Γ di equazione polare

$$\rho = 1 + (\sin(2\theta))^2 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

1·1 Dimostrare che Γ è semplice.

1·2 Dimostrare che Γ è regolare.

1·3 Dimostrare che Γ è limitata.

1·4 Dimostrare che Γ è simmetrica rispetto all'asse y.

1·5 Disegnare Γ.

2

Si consideri l'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2xy + x = 0\}$$

2·1 Determinare, al variare di t le intersezioni di C con la retta di equazione $y = tx$

2·2 Scrivere una parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

di C

2·3 Disegnare il grafico di $x(t)$ ed $y(t)$.

2·4 Disegnare C

2·5 Calcolare i punti di minima e di massima distanza dall'origine di C.

3

Si consideri la curva definita da

$$\Gamma \ : \ \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y(t) = \arctan t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3·1 Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva semplice

3·2 Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva regolare

3·3 Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva chiusa

3·4 Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva limitata

3·5 Disegnare nel piano la curva Γ, giustificando la risposta.

4

Si consideri il luogo D dei punti del piano definito da

$$f(x,y) = 2xy + x^3 + y^3 = 0$$

4·1 Esprimere in funzione del coefficiente angolare m l'ascissa $x(m)$ e l'ordinata $y(m)$ dell'intersezione di D con la retta $y = mx$, che non coincidono con l'origine.

4·2 Disegnare il grafico di $x(m)$

4·3 Disegnare il grafico di $y(m)$

4·4 Disegnare D nel piano.

4·5 Calcolare la misura della parte di D compresa nel quadrato di vertici $(1,1)$ e $(0,0)$

5

Si consideri la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \dfrac{2\theta}{\pi} \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

5·1 Stabilire se γ è semplice e regolare e calcolare la lunghezza di γ

5·2 Sia S_1 la superficie ottenuta congiungendo ogni punto di γ con l'origine; scrivere una parametrizzazione di S_1 e calcolarne l'area

5·3 Sia S_2 la superficie ottenuta congiungendo ogni punto di γ con la sua proiezione sul piano $z = 0$; scrivere una parametrizzazione di S_2 e calcolarne l'area

5·4 Calcolare il volume della parte di spazio compresa tra S_1, S_2, il piano $x = 0$ ed il piano $z = 0$.

6

6·1 Calcolare $\int_{\Gamma'} F$ ove $\Gamma' = \Gamma \cap \{x \ge 0\}$ ed

$$F = \left(\frac{x}{(x^2+y^2-1)^{3/2}} - \frac{y}{(x+1)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2-1)^{3/2}} + \frac{1}{x+1} \right)$$

7

Si consideri la curva

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \arctan x, x \in [0,1]\}$$

ed il solido ottenuto facendo ruotare la curva attorno all'asse y

7·1 Determinare le equazioni parametriche del solido ottenuto

7·2 Calcolare il vettore normale alla superficie ottenuta

7·3 Calcolare l'area della superficie ottenuta

7·4 Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x,0,0)$ attraverso la superficie ottenuta.

8

Si consideri la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = -t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

8·1 Disegnare la curva γ

8·2 Verificare che è semplice

8·3 Verificare che è regolare

8·4 Stabilire se è chiusa

8·5 Calcolarne la lunghezza

9

Si consideri la linea γ di equazioni

$$\begin{cases} z(t) = t^3 + t + 1 \\ y(t) = t\ln(t) - t \end{cases} \qquad t = \in [3, 4]$$

9·1 Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse z

9·2 Calcolare il vettore N normale alla superficie S

9·3 Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area della superficie S.

9·4 Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume delimitato da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$.

9·5 Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse y

10

Si consideri la linea γ di equazioni

$$\begin{cases} z(t) = t^3 \\ y(t) = t\ln(t) \end{cases} \qquad t = \in [1, 2]$$

10·1 Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse z

10·2 Calcolare il vettore N normale alla superficie S

10·3 Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area della superficie S.

10·4 Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume delimitato da S e dai piani $z = 1$ e $z = 8$.

11

Si consideri la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ x(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

11·1 Disegnare il grafico delle funzioni $x(t)$ ed $y(t)$.

11·2 Disegnare il grafico della curva γ.

11·3 Provare che γ è una curva limitata

11·4 Calcolare il vettore tangente a γ e la lunghezza della curva.

Si consideri l'insieme definito da

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,,\; x \ge 0\,,\; y \ge 0\,,\; z \ge 0\,,\; x + y \le 1\}$$

11·5 Calcolare il Volume di V

12

Si consideri la curva

$$\gamma \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ z(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, 1/2]$$

12·1 Disegnare la curva γ

12·2 Calcolare la lunghezza di γ

12·3 Calcolare l'area della superficie S ottenuta facendo ruotare γ di $\pi/2$ attorno all'asse z

12·4 Calcolare il volume del solido delimitato da S, dai piani coordinati e dal piano $z = \sin(1)$

13

Si consideri la curva

$$\gamma \begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = t^3 - t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

13·1 Disegnare la curva γ

13·2 Calcolare la lunghezza di γ

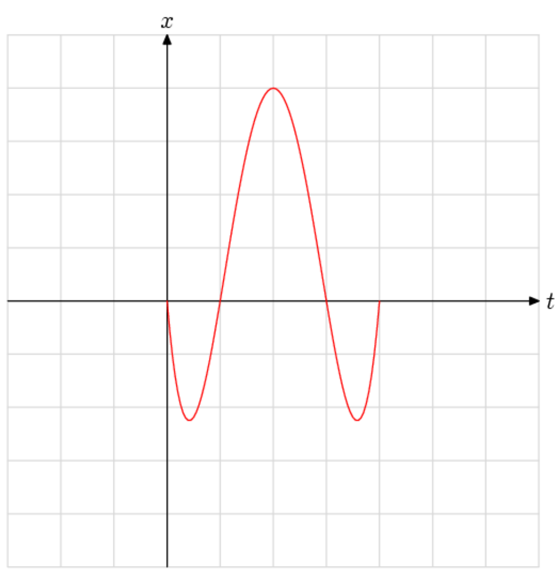
13·3 Calcolare l'area della superficie S ottenuta facendo ruotare γ di 2π attorno all'asse z

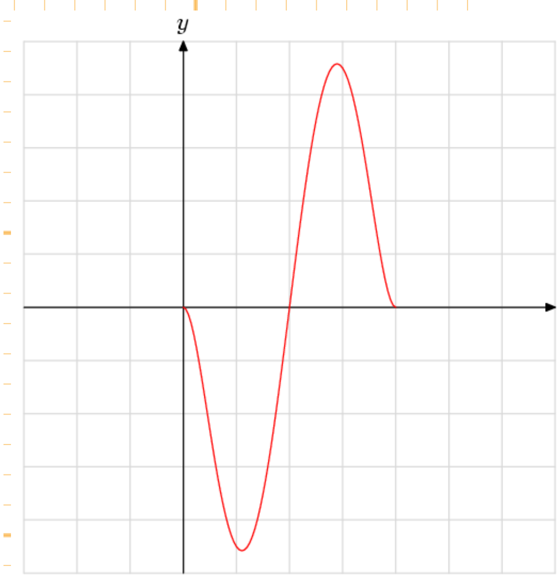
13·4 Calcolare il volume del solido delimitato da S, e dal piano $z = 0$

14

Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = t(t-1)(t-3)(t-4) \\ y(t) = t^2(t-4)^2(t-2) \end{cases} \qquad t \in [0,4]$$





14·1 Disegnare la curva γ

14·2 Calcolare il vettore tangente alla curva in $(0,0)$ ed in $(4,0)$, ed utilizzare le informazioni per precisare il disegno di γ

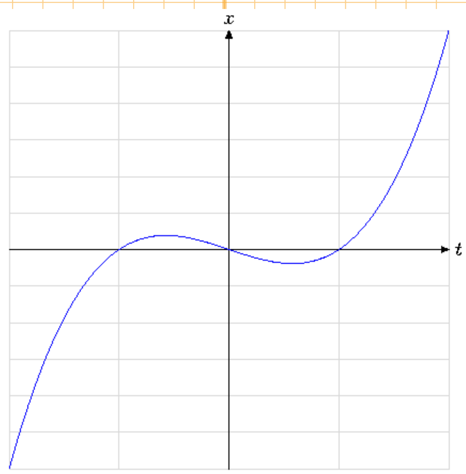
14·3 Calcolare la lunghezza di γ

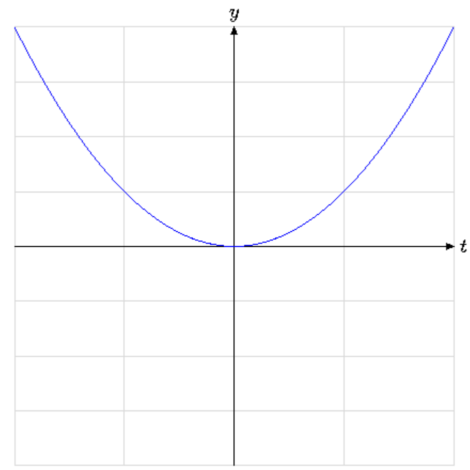
14·4 Verificare che γ è semplice, chiusa, regolare

15

Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = t - t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-2, 2]$$





15·1 Stabilire se γ è semplice, chiusa, regolare e disegnare la curva γ

15·2 Calcolare il vettore tangente alla curva e la sua lunghezza

16

Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad , \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

16·1 Determinare una parametrizzazione di γ e calcolarne il vettore tangente e lunghezza.

16·2 Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (1, 2y, 1)$$

lungo la curva γ

16·3 Determinare il potenziale di F che si annulla sulla retta definita da $y = 0$, $x + z = 0$

16·4 Determinare i punti della curva γ in cui il potenziale è massimo.

17

Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

17·1 Disegnare la curva γ

17·2 Sia S la superficie ottenuta facendo ruotare γ attorno all'asse y di 2π; Determinare una parametrizzazione di S.

17·3 Calcolare l'area di S.

17·4 Calcolare il volume del solido delimitato dalla superficie S

18

Si consideri

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \ , \ |z| \ge |xy|\}$$

18·1 Studiare eventuali simmetrie di V

18·2 Calcolare il volume di V

18·3 Determinare una parametrizzazione della frontiera di V ∂V

18·4 Calcolare la Superficie di ∂V

19

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$\begin{cases} x(t, s, u) = t - su = t(1-u) + (t-s)u \\ y(t, s, u) = s + tu = s(1-u) + (t+s)u \\ z(t, s, u) = u \end{cases} \qquad per \quad t \in [0, 1] \ , \ s \in [0, 1] \ , \ u \in [0, 1]$$

19·1 Disegnare

$$\{(x, y, z) \in V \ : \ z = 0\}$$

$$\{(x, y, z) \in V \ : \ z = 1\}$$

$$\{(x,y,z) \in V \ : \ z = 1/2\}$$

19·2 Calcolare l'area di

$$\{(x,y,z) \in V \ : \ z = k\}$$

19·3 Calcolare il volume di V

19·4 Calcolare lo Jacobiano $J(t,s,u)$ della trasformazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$(x(t,s,u), y(t,s,u), z(t,s,u))$$

19·5 Sia $C = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, calcolare

$$\iiint_C |J(t,s,u)| dt$$

19·6 Usando il teorema di cambio di variabili calcolare il volume di V

20

Si consideri nel piano la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = 2t - t^2 \\ y(t) = 3t^2 - t^3 - 2t \end{cases} \qquad per \quad t \in [0,2]$$

20·1 Disegnare il grafico di $x(t)$ e di $y(t)$

20·2 Disegnare γ

20·3 Calcolare l'area della parte di piano limitata definita da γ.

20·4 Scrivere la parametrizzazione della superficie ottenuta traslando γ parallelamente all'asse z con $0 \le z \le 3$

21

Si consideri la parte di piano γ definita dalla

$$f(x,y) = y^3 - y - x = 0$$

21·1 Determinare le intersezioni $(x(m), y(m))$ di γ con la retta $y = mx$ al variare di m

21·2 Disegnare i grafici di $x(m)$ e di $y(m)$.

21·3 Disegnare γ

22

Si consideri la curva γ definita da

$$a(t) = \cos(3t)$$

$$\begin{cases} x(t) = a(t)\cos(t) \\ y(t) = a(t)\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

22·1 Disegnare γ.

22·2 Detta $\gamma/3$ la curva ottenuta considerando $t \in [-\pi/6, \pi/6]$ Stabilire se $\gamma/3$ è semplice regolare, chiusa.

22·3 Si consideri la superficie piana D di cui $\gamma/3$ è frontiera nel piano. Determinare una parametrizzazione di D e calcolarne l'area

22·4 Si consideri la superficie S costituita dai punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y) \in D$, e z giace sul grafico del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Determinare un parametrizzazione di S e calcolarne l'area.

22·5 Calcolare il volume della parte di spazio delimitata dal piano $z = 0$ dal paraboloide $z = x^2 + y^2$ e dal cilindro con asse parallelo all'asse z generato da D.

23

Si consideri la curva γ definita da

$$\gamma : \begin{cases} t + \sin(t) \\ 1 + \cos(t) \end{cases} \qquad , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

23·1 Verificare se γ è semplice e regolare

23·2 Disegnare γ

23·3 calcolare la lunghezza di γ

23·4 Calcolare l'area delimitata dalla parte della curva γ che si ottiene per $t \in [0, \pi]$, e dagli assi coordinati.

24

Si consideri la linea definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} t - t^3 \\ t^4 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

24·1 stabilire se γ è semplice, chiusa, regolare.

24·2 Disegnare γ

24·3 Calcolare la lunghezza di γ

24·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x,y) = (x,y)$ lungo γ.

25

Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right)$$

25·1 Calcolare il flusso di F attraverso ∂A.

25·2 Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la curva.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

25·3 Stabilire se F ammette potenziale ed, in caso affermativo, calcolare tutti i potenziali precisandone il campo di definizione.

26

Si consideri la curva γ definita da

$$\gamma : \begin{cases} t^2 - t^4 \\ t^3 \end{cases} \qquad , \qquad t \in [0,1]$$

26·1 Verificare se γ è semplice e regolare

26·2 Disegnare γ

26·3 calcolare la lunghezza di γ

26·4 Calcolare l'area delimitata dalla parte della curva γ che si ottiene per $t \in [0,1]$, e dagli assi coordinati.

27

Si consideri la curva γ definita dalle

$$\begin{cases} x(t) = (t^2 - 1) \\ y(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 4)t \end{cases} \qquad t \in [-2, 2]$$

27·1 Disegnare la traccia di γ

27·2 Verificare che γ è chiusa e calcolare l'area delimitata da γ

27·3 Determinare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si annulli in tutti e soli i punti di γ

27·4 Determinare le equazioni di una curva giacente sul piano $z = x + y$ la cui proiezione sul piano $z = 0$ sia γ

28

Si consideri l'insieme

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : \ (x+1)(x^2 + y^2) = 4x^2\}$$

Rispondere a (almeno) 4 delle seguenti domande.

28·1 Determinare al variare di t le intersezioni $x(t), y(t))$ di G con la retta $y = tx$

28·2 Disegnare il grafico di x e di y in funzione di t

28·3 Disegnare la traccia della curva γ definita da $x(t), y(t))$

28·4 Calcolare l'area della parte di piano limitata da G

28·5 Studiare l'esplicitabilità di G rispetto ad x

28·6 Determinare una o più funzioni di x l'unione dei grafici delle quali descriva completamente G

28·7 Calcolare la derivata seconda della funzione definita implicitamente da G il un intorno di $(1, 1)$

28·8 Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione definita implicitamente da G il un intorno di $(1,1)$, in $x = 1$

29

Si consideri la curva γ, nel piano (x,z), definita da

$$\begin{cases} z = \cos(t) \\ y = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

29·1 Disegnare γ

29·2 Stabilire se γ è semplice, regolare, chiusa

29·3 Calcolare $\int_\gamma xdy + ydx$

Sia S la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della parte di γ che giace nel semipiano delle ascisse positive

29·4 Determinare una parametrizzazione di S

29·5 Calcolare l'area della superficie S

30

Si consideri

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 + xy = 1\}$$

30·1 Determinare l'intersezione $(x(m), y(m))$ di A con una generica retta $y = mx + 1$ per $(0,1)$.

30·2 Disegnare i grafici di $x(\cdot)$ e di $y(\cdot)$

30·3 Disegnare A.

30·4 Calcolare

$$\int_S dx \wedge dy$$

dove S è la regione di piano limitata delimitata da A.

31

Si consideri la curva γ definita da

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t(t^2 - 1) \\ y(t) = t(t^2 - 1)(t^2 - 1/4) \end{cases}$$

31·1 Disegnare γ

31·2 Stabilire se γ è semplice, regolare, chiusa, limitata .

31·3 Calcolare l'area della parte di piano delimitata da γ.

32

Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} (x(\theta) = (\theta - sin(\theta)) \\ y(\theta) = (1 - cos(\theta)) \end{cases} \theta \in [0, 2\pi]$$

32·1 Disegnare la curva γ

32·2 Calcolare la lunghezza di γ

32·3 Calcolare l'area delimitata da γ e dall'asse x

32·4 Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta facendo ruotare γ attorno all'asse x di 2π

33

Si consideri il punto $P = (0, 0, 2)$ e la circonferenza γ di centro $C = (a, b, 1)$ e raggio 1 giacente nel piano $z = 1$ Si consideri inoltre la curva δ definita dai punti che si ottengono come intersezione delle rette che passano per P e per un generico punto di γ con il piano $z = 0$

33·1 Determinare le equazioni parametriche della curva γ

33·2 Determinare le equazioni parametriche delle rette che passano per P e per un generico punto di γ

33·3 Determinare le equazioni parametriche della curva δ

33·4 Disegnare nel piano $z = 0$ la curva δ

33·5 Calcolare la lunghezza di δ

34

Siano $R, H > 0$ e si consideri la curva definita da

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = R\cos(\theta) \\ x(\theta) = R\sin(\theta) \qquad , \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ x(\theta) = H\theta \end{cases}$$

34·1 Parametrizzare γ mediante la lunghezza d'arco.

34·2 Determinare il versore tangente T

34·3 Determinare il versore normale N

34·4 Determinare il versore binormale B

34·5 Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x,y,z) = (x,y,z)$ lungo la curva γ.

34·6 Determinare una parametrizzazione della superficie generata da una circonferenza centrata in un punto di γ di raggio proporzionale alla lunghezza d'arco, giacente in un piano ortogonale alla curva γ.

Si consideri la superficie definita da

$$S = \begin{cases} x = (t)\cos(s) \\ y = (t)\sin(s) \\ z = s \end{cases} \qquad s \in [0, 2\pi] \ , \ t \in [0, 1]$$

34·7 Calcolare il versore N normale alla superficie S

34·8 Calcolare l'area della superficie S

34·9 Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ attraverso la superficie S

34·10 Descrivere la superficie studiata

35

Si consideri la curva γ definita sulla superficie di una sfera di centro l'origine e raggio 1 imponendo la condizione $\theta = \phi$ e considerando $\theta \in [0, 2\pi]$

35·1 Determinare una parametrizzazione di γ

35·2 Calcolare la lunghezza di γ

35·3 Disegnare le proiezioni della curva sui piani coordinati

35·4 Calcolare l'area delle parti di superficie sferica in cui γ divide l'intera sfer.a

36

Si consideri la parte di spazio definita da

$$V = \{(x,y,z) \,:\, 0 \le z \le \theta \,,\, 1 \le \rho \le 2 \,, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Dove (ρ, θ) sono le coordinate polari nel piano (x, y).

36·1 Parametrizzare ∂V
Siano

$$S_0 = \{(x,y,z) \,:\, z = 0,\, 1 \le \rho \le 2 \,, \theta \in [0, 2\pi]\} \qquad , \qquad S_1 = \{(x,y,z) \,:\, z = \theta,\, 1 \le \rho$$

36·2 Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x,y,z)$ attraverso S_0 e attraverso S_1

36·3 Determinare una parametrizzazione di ∂S_1

36·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x,y,z) = (0,0,z)$ lungo la curva ∂S_1
vspace2cm Siano

$$\gamma_1 = \{(x,y,z) \,:\, z = \theta,\, \rho = 1 \,, \theta \in [0, 2\pi]\} \qquad , \qquad \gamma_2 = \{(x,y,z) \,:\, z = \theta,\, \rho = 2 \,, \,, \theta$$

e si consideri la superficie P generata dalle parabole giacenti nel piano definito da $y = x\tan(\theta)$ passanti che si annullano nei punti $\gamma_1(\theta)$ e $\gamma_2(\theta)$

36·5 Parametrizzare γ_1

36·6 Parametrizzare γ_2

36·7 Parametrizzare P

37

Si consideri la curva definita da

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} \\ y(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

37·1 Disegnare la curva nel piano;

37·2 Stabilire se è semplice, regolare , chiusa.

37·3 Determinare i punti della curva aventi massima e minima distanza dall'origine.

37·4 Scrivere le equazioni parametriche della superficie ottenuta facendo ruotare la curva attorno all'asse x di 2π radianti.

38

Si consideri la curva definita da

$$\begin{cases} x(t) = t + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$

38·1 Disegnare la curva nel piano;

38·2 Stabilire se è semplice, regolare , chiusa.

38·3 Calcolare la lunghezza della curva .

38·4 Scrivere le equazioni della curva descritta da un punto che si muove in senso antiorario su una circonferenza di raggio 1 con moto circolare uniforme e velocità v_1 , $\|v_1\| = 1$ il cui centro si sposta con velocità v_2 lungo l'asse delle x, $\|v_2\| = 1$

38·5 Calcolare la velocità v del punto e determinarne il modulo.