1

Superfici

1

Si consideri la superficie E definita da

$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ z = \dfrac{x}{2} + 1 \end{cases}$$

1·1 Scrivere una parametrizzazione di E e della sua frontiera ∂E

1·2 Calcolare

$$\int_{\partial E} x dy - y dx$$

1·3 Calcolare

$$\int_E dx \wedge dy$$

1·4 Calcolare il volume del solido definito da

$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ z \leq x + 1 \end{cases}$$

1·5 Calcolare l'area di E (non si richiede di svolgere interamente i calcoli)

2

Si consideri l'insieme

$$\begin{cases} x(\theta,\phi) = \theta\cos\theta\cos\phi \\ y(\theta,\phi) = \theta\sin\theta\cos\phi \\ z(\theta,\phi) = \theta\sin\phi \end{cases} \qquad \theta,\phi \in [0,\pi/2]$$

2·1 Provare che S giace nel primo ottante.

2·2 Determinare le equazioni parametriche della curva ottenuta intersecando S con il piano $y = x$.

2·3 Determinare le equazioni parametriche della curva ottenuta intersecando S con il piano $z = k \in [0, \pi/2]$.

2·4 Verificare che S è limitata.

2·5 Calcolare il punto della superficie data che ha massima distanza dall'origine.

3

Si consideri il grafico della funzione

$$z = 1 + \sqrt{x} \qquad x \in [0, 1]$$

3·1 Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta facendo ruotare il grafico dato attorno all'asse z di 2π

3·2 Calcolare l'area della superficie ottenuta

3·3 Determinare il vettore normale alla superficie data

4

Si consideri la superficie definita da

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; z = xy + 1,\; x^2 + y^2 \leq 4\}$$

4·1 Calcolare l'area di S

4·2 Calcolare il vettore normale ad S

4·3 Calcolare le coordinate del baricentro di S

4·4 Calcolare il flusso di attraverso S del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, 1)$$

4·5 Scrivere una parametrizzazione della curva

$$C = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; z = xy + 1,\; x^2 + y^2 = 4\}$$

ed indicarne il versore tangente

5

Si consideri la parte S di $\mathbb{R}^3$ definita parametricamente da

$$\begin{cases} x(\rho,\theta) = (\rho+1)\cos\theta \\ y(\rho,\theta) = (\rho+1)\sin\theta \\ z(\rho,\theta) = \phi(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

dove ϕ è una funzione continua con la sua derivata seconda in$\mathbb{R}$.

5·1 Determinare una rappresentazione cartesiana

$$z = f(x,y)$$

della superficie S precisandone il campo di definizione D

5·2 Disegnare le curve di livello di f.

5·3 Calcolare il vettore normale ad S.

5·4 Scrivere una formula di riduzione per il calcolo dell'area di S.

5·5 Scrivere una formula di riduzione per il calcolo del baricentro di S.

6

6·1 Determinare una parametrizzazione della superficie S_o e del volume V_o descritti dalla circonferenza e dal cerchio di raggio unitario giacente in un piano parallelo al piano $z = 0$ il cui centro si muove sulla linea di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta \\ z(\theta) = \theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

6·2 Determinare una parametrizzazione della superficie S_v e del volume V_v descritti dalla circonferenza e dal cerchio di raggio unitario giacente in un piano parallelo al piano $x = 0$ il cui centro si muove sulla linea di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta \\ z(\theta) = \theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

6·3 Scrivere le formule di riduzione per il calcolo del volume di V_v

6·4 Scrivere le formule di riduzione per il calcolo della superficie di S_o

7

Si consideri la superficie S generata, mediante rotazione attorno all'asse z dalla curva definita da $z = \sin y$ con $y \in [0, 2\pi]$

7·1 Determinare l'equazione cartesiana della superficie S.

7·2 Determinare una parametrizzazione di S.

7·3 Calcolare il vettore normale alla superficie S nel punto $(0, \pi, 0)$.

7·4 Calcolare l'area di S

7·5 Calcolare il baricentro di S

8

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$S \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \rho \in [1, 2] \end{cases}$$

8·1 Determinare la normale alla superficie S

8·2 Determinare l'area della superficie S.

8·3 Il flusso del campo vettoriale $(0, 0, 1)$ attraverso S

8·4 La lunghezza di ∂S

8·5 Calcolare il baricentro di S

9

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$S \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = \sqrt{1 - (t^2 + s^2)} \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}, t^2 + s^2 \le 1.$$

9·1 Determinare la normale alla superficie S

9·2 Calcolare l'area della superficie S

9·3 Calcolare il flusso del campo vettoriale $(0,0,1)$ attraverso S

9·4 Calcolare il volume della parte di spazio delimitata da S e dal piano $z=0$.

10

Sia

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2+z^2 \le 1 \, , \ x \ge 0 \, , \ y \ge 0 \, , \ z \ge 0 \, , \ x+y=1\}$$

10·1 Determinare una parametrizzazione della superficie S.

10·2 Calcolare il vettore normale alla superficie S.

10·3 Calcolare l'area della superficie S.

11

Si consideri la superficie S ottenuta facendo ruotare la curva

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x=t \, , \ y=0 \, , \ z=2\sqrt{t} \, , \ t \in [0,2]\}$$

attorno all'asse z. **11·1** Determinare una parametrizzazione di S

11·2 Determinare il vettore normale ad S

11·3 Calcolare l'area di S

11·4 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F = (0,0,1)$$

attraverso S

12

Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

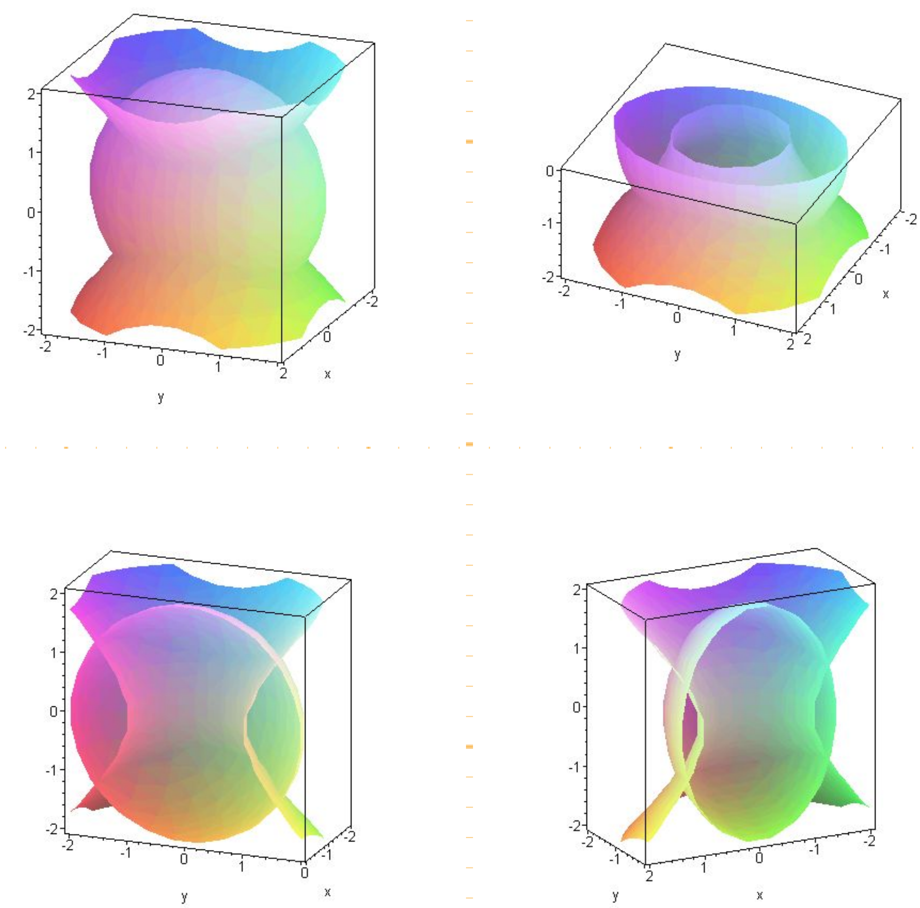
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 \le 1 \\ 2x^2+y^2+z^2 \le 4 \end{cases}$$

12·1 Calcolare la misura di A.

Si consideri la parte B di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

12·2 Calcolare la misura di B



13

Si consideri la superficie $S = S_1 \cup S_2$ definita da

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = a \ , \ 0 \le z \le a\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0 \ , \ a \le z\}$$

13·1 Calcolare l'area di S_1

13·2 Calcolare l'area di S_2

13·3 Calcolare le coordinate del baricentro di S.

14

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t,s) = s\cos(t) + 2(1-s)\cos(t) \\ y(t,s) = s\sin(t) + 2(1-s)\sin(t) \\ z(t,s) = \dfrac{t}{2\pi} \end{cases}$$

per $t \in [0, 2\pi]$ ed $s \in [0,1]$,

14·1 Calcolare il vettore normale alla superficie S

14·2 Calcolare l'area di S

14·3 Calcolare la lunghezza di di ∂S

14·4 Calcolare il volume del solido V delimitato pal piano $z = 0$, dai cilindri $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e da S

14·5 Dimostrare che V è contenuto nel cubo $[-2,2]^3$

15

Si consideri la superficie S le cui equazioni parametriche sono date da

$$\begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = 2s(1-t^2) + t^2 - 1 \qquad t \in [-1,1]\ ,\ s \in [-1,1] \\ z(t,s) = 2s - 1 \end{cases}$$

15·1 Stabilire se S è limitata ed in caso affermativo determinare una sfera che contiene S

15·2 Calcolare l'area della superficie di S

15·3 Stabilire se é vero che S è il grafico di una funzione f rispetto alle variabili (x, y).

15·4 Nel caso in cui la risposta al punto precedente sia affermativa, calcolare il massimo di f

16

Si consideri la superficie S generata dalle circonferenze di raggio $\sin(t)$, centrate in $(0,0,t)$ per $t \in [0,\pi]$ e giacenti nel piano parallelo al piano (x, y).

16·1 Determinare una parametrizzazione di S e verificare se S è semplice, regolare.

16·2 Calcolare l'area di S

16·3 Calcolare $\int_S xdydx$

16·4 Calcolare il volume del solido V delimitato da S

17

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t,s) = \cos(t) + s \\ y(t,s) = \sin(t) + s \qquad t \in 0, 2\pi] \ , \ s \in [0,1] \\ z(t,s) = s \end{cases}$$

17·1 Stabilire se S è semplice , regolare, limitata ,chiusa.

17·2 Calcolare l'area di S

17·3 Calcolare Il volume della parte di spazio delimitata da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$

17·4 Calcolare il flusso attraverso la frontiera della parte di spazio delimitata da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$ del campo vettoriale $(x^2, 0, 0)$

18

Si consideri la superficie S generata congiungendo, mediante una semicirconferenza, i punti che si trovano sulla stessa retta parallela all'asse z di due circonferenze centrate in $(0, 0, -1)$ e $(0, 0, 1)$ aventi raggio 1 e giacenti in piani paralleli al piano x, y

18·1 Determinare una parametrizzazione di S e stabilire è semplice , regolare, limitata ,chiusa.

18·2 Calcolare l'area di S

18·3 Calcolare Il volume della parte di spazio delimitata da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$

19

Si consideri la superficie S generata dai segmenti di retta aventi un estremo P sulla circonferenza di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 giacente nel piano $z = 0$ ed il secondo estremo Q sulla circonferenza di centro $(0,0,1)$ e raggio 1 giacente nel piano $z = 1$ scelti in modo che, detta Q' la proiezione di Q sul piano $z = 0$ e indicata con O l'origine, l'angolo $\widehat{POQ'}$ sia $\pi/4$

19·1 Determinare una parametrizzazione di S

19·2 Calcolare l'area di S

19·3 Calcolare il volume del solido delimitato da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$

20

Si consideri la superficie S che si ottiene congiungendo i punti del segmento di retta S_1 avente estremi $(0,0,0)$ e $0,1,1)$ con i punti del segmento di retta S_2 avente estremi $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$

20·1 Determinare una parametrizzazione di S

20·2 Calcolare la misura di S

20·3 Determinare l'espressione di un campo vettoriale che, fissato $P_0 \in \mathbb{R}^3$, associa ad ogni punto P dello spazio un vettore avente direzione $P - P_0$ ed intensità proporzionale all'inverso del quadrato della distanza $||P - P_0||$

20·4 Calcolare il flusso attraverso S del campo vettoria F

21

Si consideri la superficie S mediante una rotazione completa attorno all'asse z la parte del piano (x,z) definita dalle disuguaglianze

$$2x + z \leq 4 \quad , \quad 2x - x^2 - z \leq 0 \quad , \quad z \geq 0\,,\ x \geq 0$$

21·1 Determinare una parametrizzazione di S

21·2 Calcolare la misura di S

21·3 Calcolare il volume del solido delimitato da S

21·4 Determinare una parametrizzazione del volume del solido delimitato da S

Si consideri il luogo dei punti del piano L definito da

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

21·5 Determinare, al variare di m le intersezioni $(x(m), y(m))$ di L con la retta per l'origine che ha coefficiente angolare m

21·6 Disegnare i grafici di x ed y in funzione di m

21·7 Disegnare L e dimostrare che L è una curva chiusa non semplice.

21·8 Calcolare l'are delimitata da L (può essere utile considerare $m = \tan(\theta)$) o considerare l'equazione polare della curva)

22

Si consideri la parte di corona sferica S delimitata dalle sfere di centro l'origine e raggi 1 e 2 e giacente nel primo ottante ed il campo vettoriale F che associa ad ogni punto dello spazio un vettore diretto verso l'origine di lunghezza proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dall'origine.

22·1 Determinare una parametrizzazione di S

22·2 Calcolare la misura di S

22·3 Determinare l'espressione di F

22·4 Calcolare il flusso di F attraverso S