1

Funzioni Implicite

1

Sia

$$f(x,y) = x^4 + 2xy^3 - xy$$

ed

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = x^4 + 2xy^3 - xy = 0 \ , \ x \neq 0\}$$

1·1 Determinare, al variare di m, le intersezioni di A con la retta $y = mx$

1·2 Scrivere, usando m come parametro, delle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(m) \\ y = y(m) \end{cases}$$

di A

1·3 Disegnare i grafici di $x(m)$ ed $y(m)$.

1·4 Disegnare A

1·5 Studiare l'esplicitabilità di $f(x,y) = 0$ rispetto ad x o a y.

2

Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = y^2 - \sin x \qquad\qquad g(x,y) = \max\{0, f(x,y)\}$$

2·1 Disegnare gli insiemi

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R} : f(x,y) = 0\} \qquad L_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R} : f(x,y) > 0\} \qquad L_- = \{(x,y) \in \mathbb{R} : f(x,y) < 0\}$$

e stabilire l'insieme in cui g è continua

2·2 Calcolare $\nabla g(\pi/2, 1)$ e le derivate direzionali di g in $P = (\pi/2, 1)$

2·3 Stabilire se g è differenziabile in P

2·4 Stabilire in quali punti del piano l'equazione $f(x, y) = 0$ può essere esplicitata in funzione di x

2·5 Stabilire in quali punti del piano l'equazione $f(x, y) = 0$ può essere esplicitata in funzione di y

3

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2) - y - 2$$

3·1 Calcolare f_x f_y

3·2 Studiare il segno di $\lim_{y \to +\infty} f(x, y)$ e di $\lim_{y \to -\infty} f(x, y)$; Determinare inoltre il segno di f sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

3·3 Studiare il segno di $f_y(x, y)$

3·4 Studiare il segno di $f_x(x, y)$ nella parte di piano esterna alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

3·5 Disegnare il grafico della funzione $\phi(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$f(x, y) = 0$$

4

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = xy + y^2 e^y$$

4·1 Stabilire se, in un intorno di $(0, 0)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x, y) = 0$$

4·2 Stabilire se, in un intorno di $(1, 0)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x, y) = 0$$

4·3 Stabilire se, in un intorno di $(-e, 1)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x, y) = 0$$

4·4 Disegnare il luogo di punti del piano definito da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

5

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y^2 + 4x^2(x^2 - 1)$$

5·1 Determinare δ_1 tale che

$$f(x, 0) \leq 0 \qquad \forall x \in [0, \delta_1]$$

5·2 Determinare δ_2 tale che

$$f(x, 1) \geq 0 \qquad \forall x \in [0, \delta_2]$$

5·3 Determinare δ tale che per ogni x fissato in $[0, \delta]$ l'equazione $f(x, y) = 0$ ammette una ed una sola soluzione in $[0, 1]$

5·4 Calcolare $f_x(x, y)$ ed $f_y(x, y)$ e disegnare l'insieme dei punti del piano in cui in cui sono positive.

5·5 Disegnare il grafico della funzione implicita definita da $f(x, y) = 0$

6

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$$

6·1 Determinare δ_1 tale che

$$f(x,3) \leq 0 \qquad \forall x \in [2-\delta_1, 2+\delta_1]$$

6·2 Determinare δ_2 tale che

$$f(x,1) \geq 0 \qquad \forall x \in [2-\delta_2, 2+\delta_2]$$

6·3 Determinare δ tale che per ogni x fissato in $[2-\delta, 2+\delta]$ l'equazione $f(x,y) = 0$ ammette una ed una sola soluzione.

6·4 Disegnare il grafico della funzione implicita definita da $f(x,y) = 0$

7

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^2 - x^3 + 1$$

7·1 Determinare se è possibile esplicitare y in funzione di x in un intorno di $(0,1)$ ed in caso affermativo disegnare il grafico di $y(x)$

7·2 Determinare se è possibile esplicitare x in funzione di y in un intorno di $(0,1)$

7·3 Determinare se è possibile esplicitare x in funzione di y in un intorno di $(0,0)$

7·4 Determinare se è possibile esplicitare y in funzione di x in un intorno di $(0,0)$

8

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^2 + \ln(1 + x^2y^2) - 1$$

8·1 Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y e disegnare nel piano gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative.

8·2 Studiare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

8·3 Studiare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm \frac{2}{x}$

8·4 Disegnare nel piano le curve

$$y = \pm 1 \quad . \quad y = 0 \quad , \quad y = \pm\frac{2}{x}$$

riportando il segno di f ristretta a tali curve.

8·5 Stabilire se $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assuma valori positivi, precisando il suo campo di definizione.

8·6 Studiare crescenza e decrescenza di φ, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \qquad , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) =$$

e disegnare il grafico di φ

9

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{y^2}(1 + x^2y^2) - e$$

9·1 Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y e disegnare nel piano gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative.

9·2 Studiare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

9·3 Disegnare nel piano le curve

$$y = \pm 1 \quad . \quad y = 0$$

riportando il segno di f ristretta a tali curve.

9·4 Stabilire se $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assuma valori positivi, precisando il suo campo di definizione.

9·5 Studiare crescenza e decrescenza di φ, e disegnare un grafico approssimativo di φ

10

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 3^{y^2}(1 + x^2y^2) - 2$$

10·1 Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y determinare gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative e disegnarli nel piano. **10·2** Determinare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

10·3 Determinare il segno di $f(x, y)$ per $y = \pm\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ e $|x| > 1$

10·4 Disegnare nel piano le curve

$$y = \pm 1 \quad . \quad y = 0 \quad , \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

riportando, ove possibile,il segno di f ristretta a tali curve. **10·5** Giustificare il fatto che $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assume valori negativi, definita su $\mathbb{R}$.

10·6 Studiare crescenza e decrescenza di φ, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \qquad , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) =$$

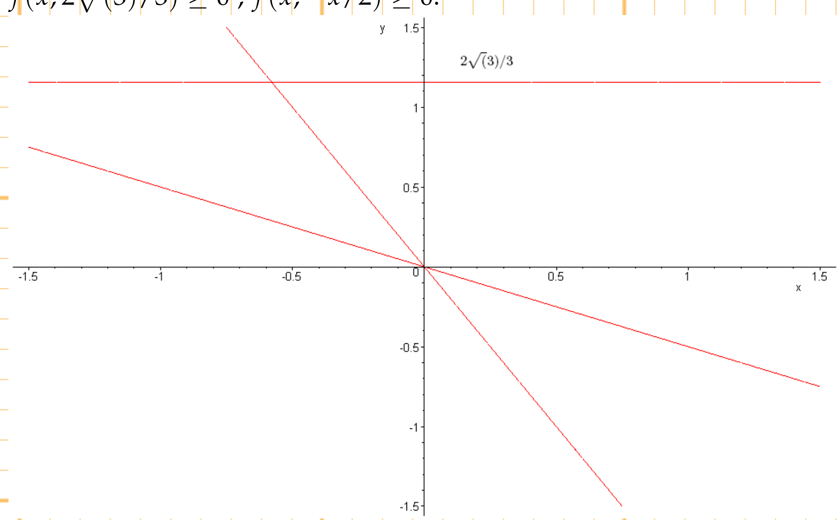
e disegnare il grafico di φ

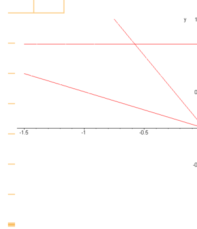
11

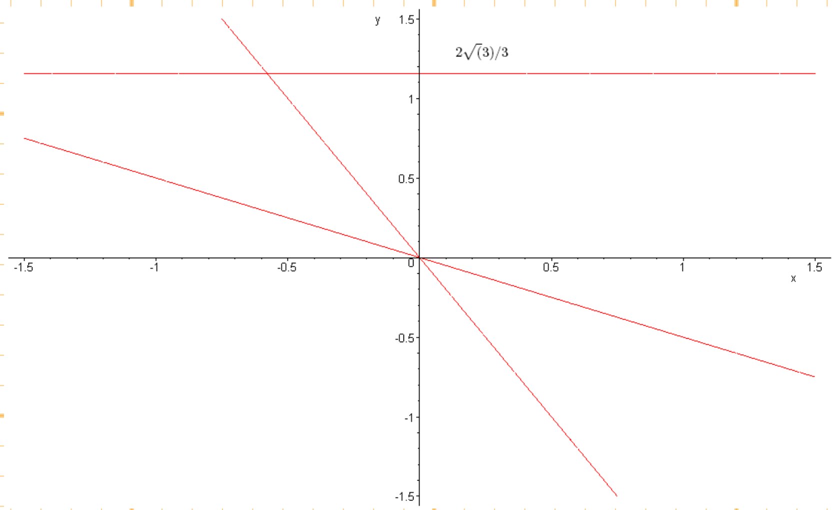
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$$

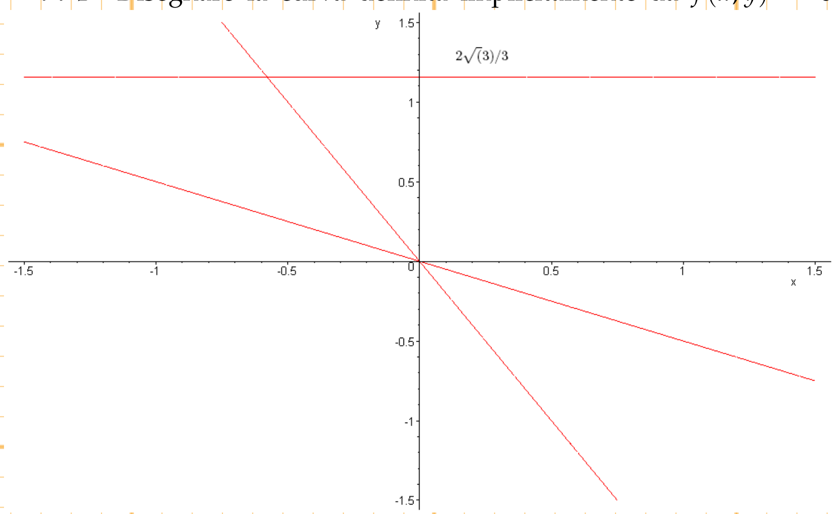
11·1 Determinare nel piano gli insiemi in cui $f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$, $f(x, 2\sqrt(3)/3) \geq 0$, $f(x, -x/2) \geq 0$.







11·2 Disegnare la curva definita implicitamente da $f(x,y) = 0$



12

Si consideri

$$f(x,y) = x + xy^2 + y$$

12·1 Stabilire in quali punti del piano l'equazione

$$f(x,y) = 0$$

definisce y come funzione implicita di x

12·2 Giustificare l'affermazione che l'equazione

$$f(x,y) = 0$$

definisce y come funzione implicita di x in un intorno di $(0,0)$.

12·3 Disegnare il grafico della funzione definita implicitamente da $f(x,y)=0$ in un intorno dell'origine.

12·4 Disegnare

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y)=0\}$$

13

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=e^{(x^2)}-y^2+2y-1$$

e l'insieme dei punti del piano

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R} \,:\, f(x,y)=0\}$$

13·1 Stabilire se A è rappresentabile come grafico di una funzione $y(x)$ o $x(y)$ in un intorno dell'origine.

13·2 Nel caso la risposta alla prima domanda sia affermativa, determinare prima un intorno e poi il pù grande intorno in cui è vero quanto affermato.

13·3 Nel caso la risposta alla prima domanda sia affermativa, disegnare il grafico di quelle tra $y(x)$ ed $x(y)$ che esistono.

14

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=1-x^2-y^2$$

e l'insieme dei punti del piano

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R} \,:\, f(x,y)=0\}$$

14·1 Determinare un intorno $[\sqrt{2}/2-a,\sqrt{2}/2,+a]\times[\sqrt{2}/2-b,\sqrt{2}/2,+b]$ di $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ in cui f_x si mantiene negativa.

14·2 Determinare a tale che $f(\sqrt{2}/2-a,\sqrt{2}/2)$ e di $f(\sqrt{2}/2+a,\sqrt{2}/2)$ assumano segno discorde.

14·3 Determinare δ tale che $f(\sqrt{2}/2-a,y)$ e $f(\sqrt{2}/2+a,y)$ abbiano segno costante nell'intervallo $[\sqrt{2}/2-\delta,\sqrt{2}/2,+\delta]$.

14·4 Giustificare il fatto che $f(x,y)$ definisce implicitamente x come funzione di y in un intorno di $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

15

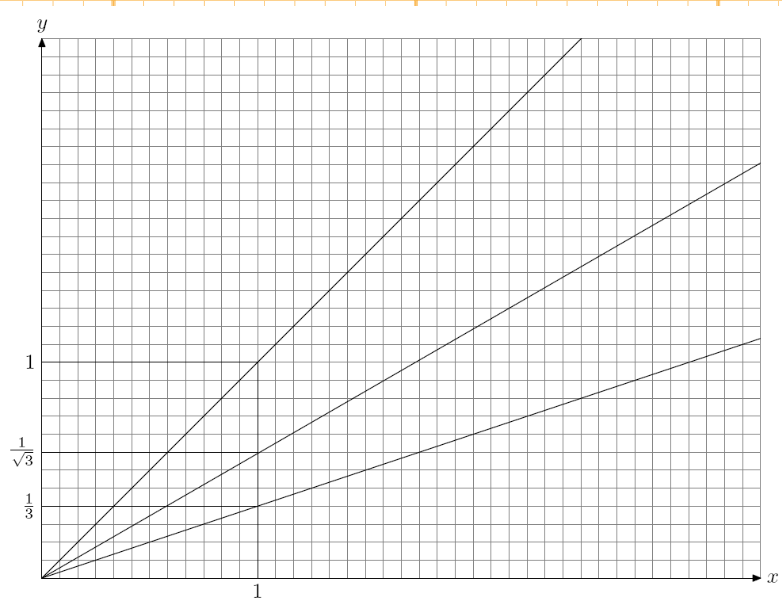
Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = xy^3 - \frac{1}{3}x^3y \qquad , \qquad f_1(x,y) = f(x,y) - 1$$

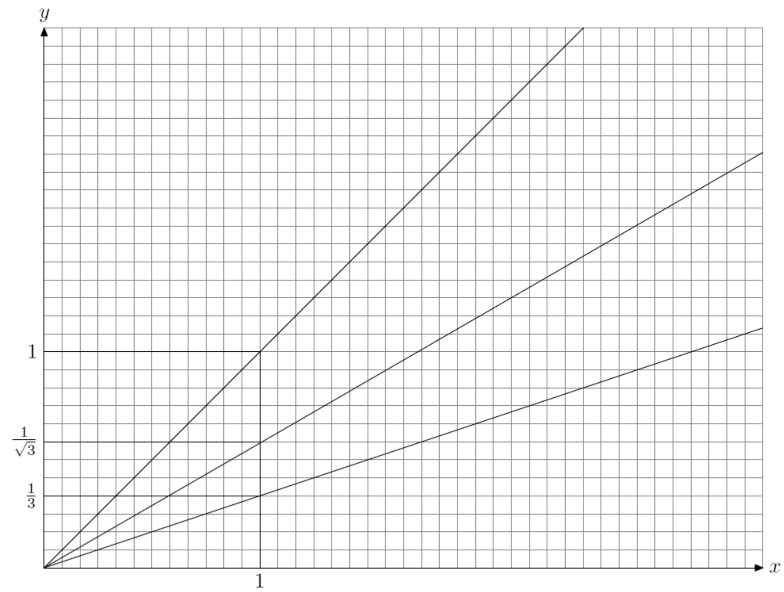
15·1 Individuare nel grafico sottostante il luogo dei punti Z del primo

quadrante per cui

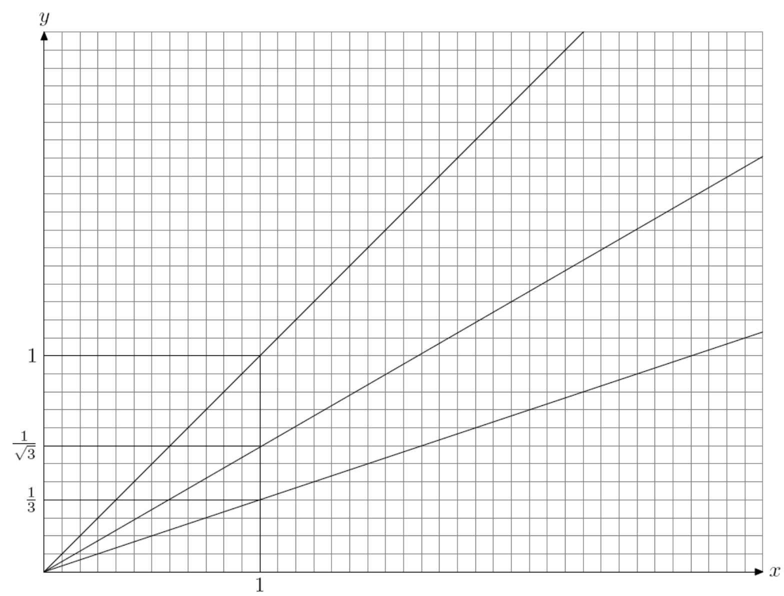
$$f(x,y) = 0$$



15·2 Calcolare le derivate parziali di f. $f_x(x,y) =$ $f_y(x,y) =$ e studiarne il segno nel primo quadrante; determinare inoltre il luogo dei punti Z' del primo quadrante in cui f_x ed f_y si annullano.



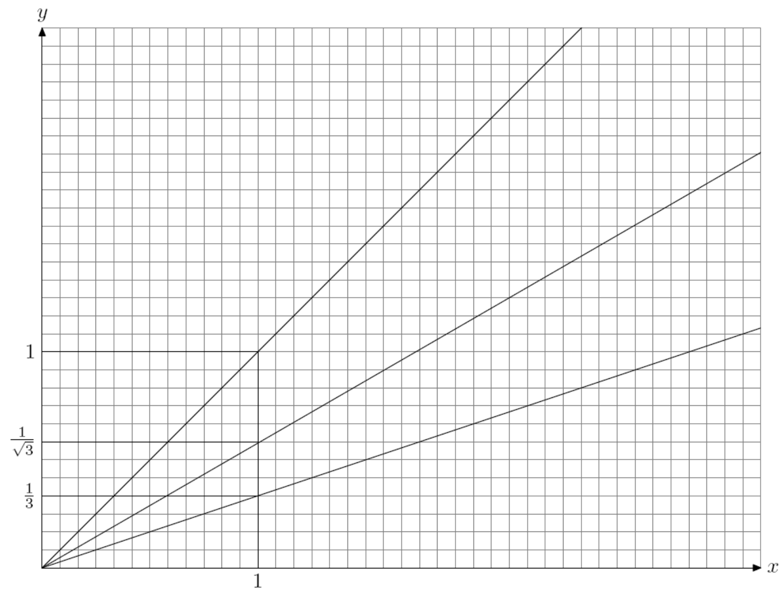
15·3 Determinare il segno di f_1 su Z e su Z'.



15·4 Disegnare il luogo dei punti del primo quadrante in cui

$$f_1(x,y) = 0$$

giustificando in maniera BREVE ed ESAURIENTE il disegno.



16

Si considerino le funzioni f e g definite su $\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ tali che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}_+$ e strettamente decrescente su $\mathbb{R}_-$,$f(0) = \frac{1}{2}$ $\lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty = \lim_{t\to+\infty} f(t)$; $\lim_{t\to-\infty} g(t) = \frac{3}{2}$, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\frac{1}{2}$, $g(-4) = \frac{1}{2}$ $g'(t) \neq 0$ per ogni t ed il luogo dei punti del piano

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = g(y)\}$$

16·1 Disegnare il grafico di f e di g. Si considerino le funzioni

f e g definite su $\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}_-$ e strettamente decrescente su $\mathbb{R}_+$,$f(0) = 2$ $\lim_{t\to-\infty} f(t) = -1$, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$; $\lim_{t\to-\infty} g(t) = \frac{3}{2}$, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\frac{1}{2}$, $g(-4) = \frac{1}{2}$,s $g'(t) \neq 0$ per ogni t ed il luogo dei punti del piano

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = g(y)\}$$

16·2 Disegnare il grafico di f e di g.

16·3 Verificare che G è non vuoto

16·4 Verificare che G è il grafico di una funzione $y = \phi(x)$

17

17·1 Verificare che G è non vuoto

17·2 Verificare che G è il grafico di una funzione $y = \phi(x)$

18

Si consideri l'insieme

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : \ (x+1)(x^2+y^2) = 4x^2\}$$

Rispondere a (almeno) 4 delle seguenti domande. **18·1** Determinare al variare di t le intersezioni $x(t), y(t))$ di G con la retta $y = tx$

18·2 Disegnare il grafico di x e di y in funzione di t

18·3 Disegnare la traccia della curva γ definita da $x(t), y(t))$

18·4 Calcolare l'area della parte di piano limitata da G

18·5 Studiare l'esplicitabilità di G rispetto ad x

18·6 Determinare una o più funzioni di x l'unione dei grafici delle quali descriva completamente G

18·7 Calcolare la derivata seconda della funzione definita implicitamente da G il un intorno di $(1,1)$

18·8 Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione definita implicitamente da G il un intorno di $(1,1)$, in $x = 1$

19

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y,z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 1, x - y)$$

19·1 Stabilire se e dove l'equazione $f(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $(z,y) = \phi(x)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

19·2 Calcolare $\nabla\phi$

19·3 Determinare esplicitamente una espressione di ϕ in termini di funzioni elementari precisandone la validità.

20

Si consideri

$$f(x,y) = y^2 - x^3 + x$$

e l'insieme

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = 0\}$$

20·1 Disegnare, nel piano D. **20·2** Studiare l'esplicitabilità di $f(x, y) =$

0 rispetto ad y

20·3 Studiare l'esplicitabilità di $f(x, y) = 0$ rispetto ad x

Sia $y = \phi(x)$ la funzione che esplicita $f(x, y) = 0$ rispetto ad x in un intorno di $(2, \sqrt{2})$. **20·4** Calcolare $\phi'(x)$

20·5 Calcolare $\phi''(x)$

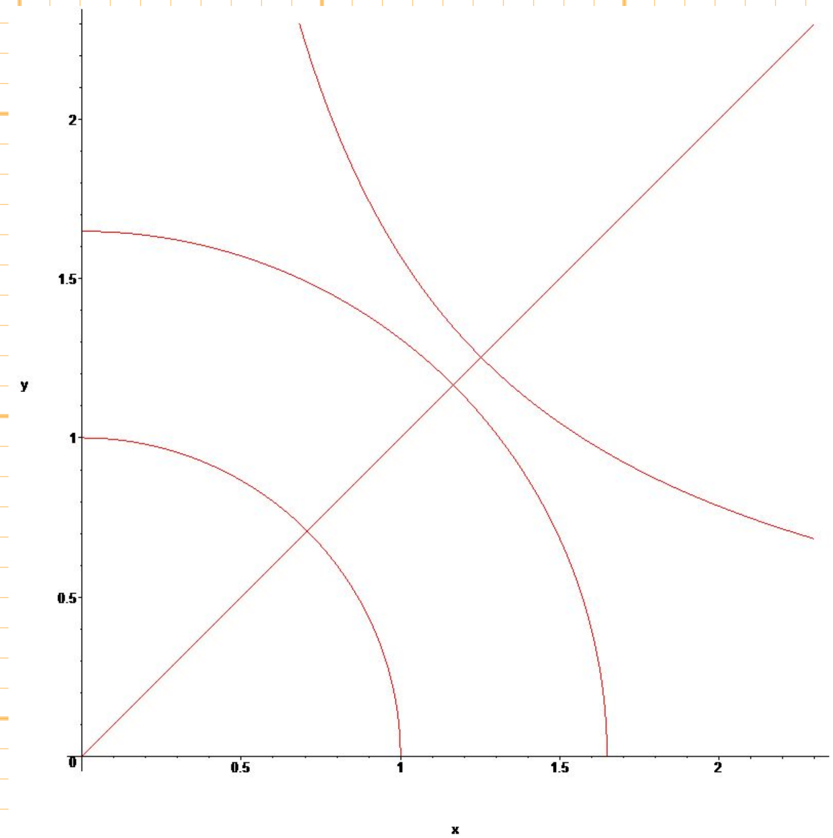
21

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 2\ln(x^2 + y^2) - \sin(xy)$$

21·1 Studiare continuità e differenziabilità di f.

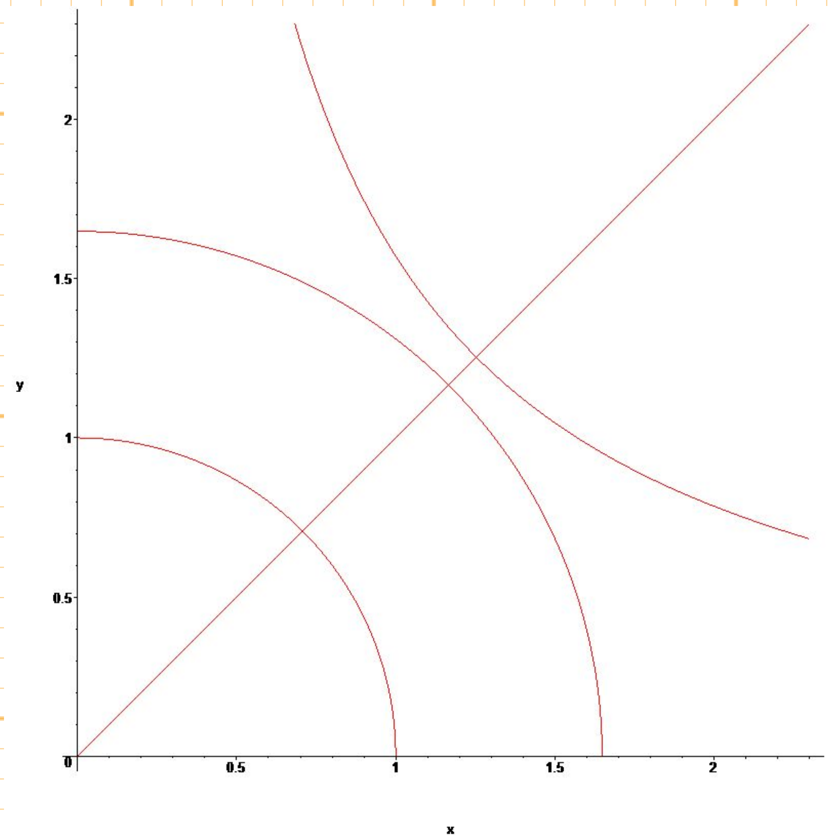
21·2 Restringendosi al primo quadrante, studiare il segno di f sulle circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e $\sqrt{e}$ (l'iperbole riportata in figura ha equazione $xy = \pi/2$)



21·3 Calcolare la derivata rispetto a ρ e rispetto a θ di

$$\varphi(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$$

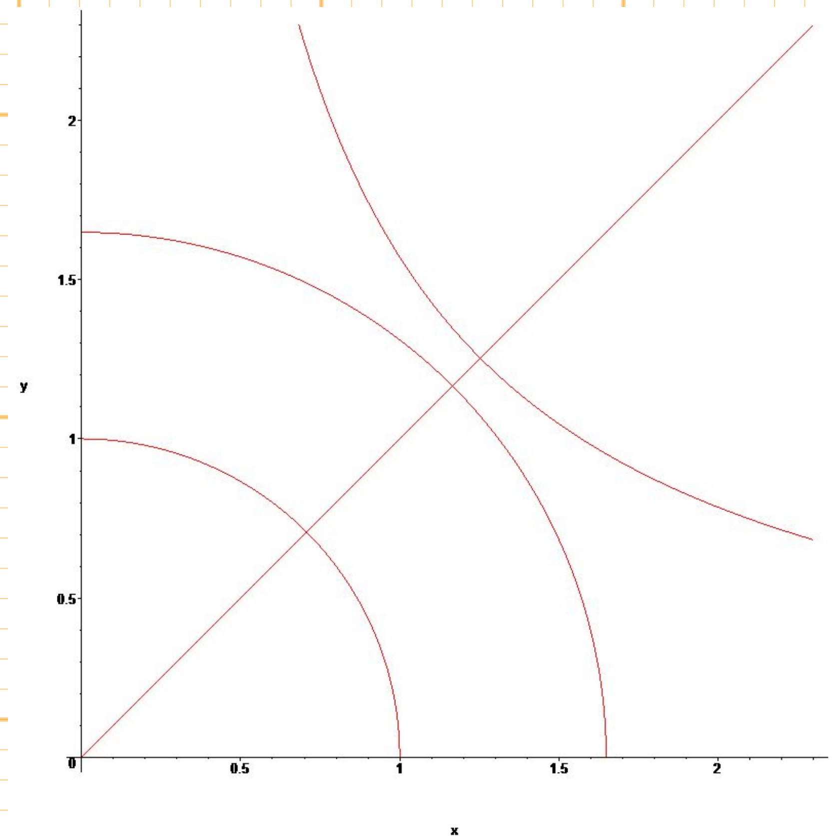
21·4 Studiare il segno di $\frac{\partial}{\partial\rho}\varphi(\rho,\theta)$ e $\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi(\rho,\theta)$ nella parte del cerchio $x^2+y^2 \leq e$ che si trova nel primo quadrante.



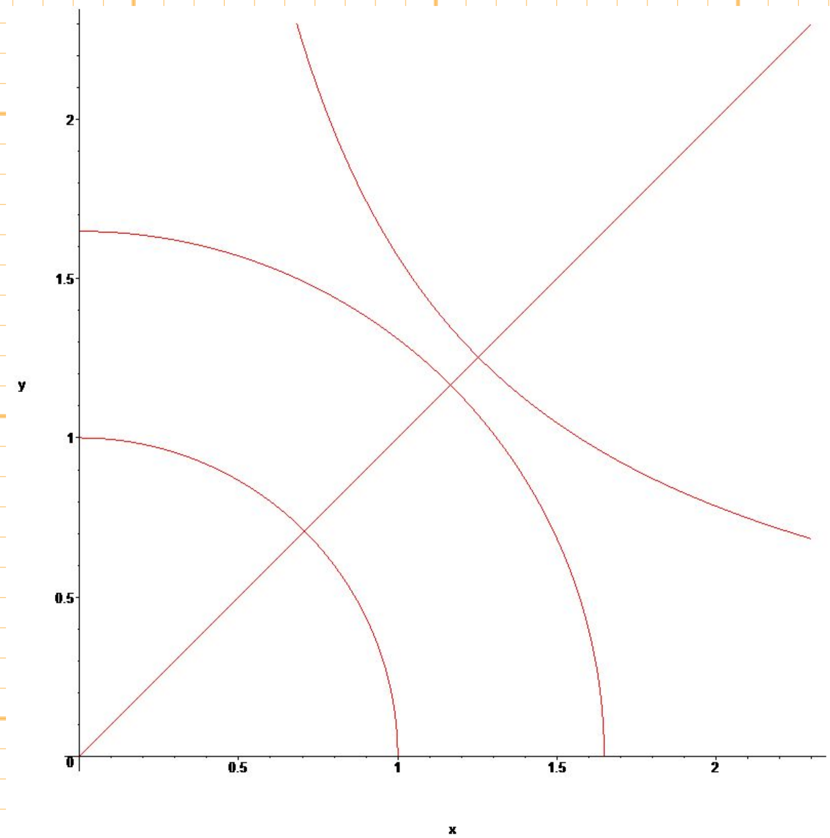
21·5 Usando i risultati ottenuti dimostrare che per ogni $\theta \in [0.\pi/2]$ la retta di equazioni parametriche $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$ incontra una ed una sola volta l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ x^2 + y^2 \leq e \ , \ f(x,y) = 0\}$$

, e che pertanto e' possibile definire una funzione $\rho(\theta)$ che lo rappresenta.



21·6 Studiare il segno della funzione $\rho(\theta)$ e disegnare l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ x^2 + y^2 \leq e \ , \ f(x,y) = 0\}$

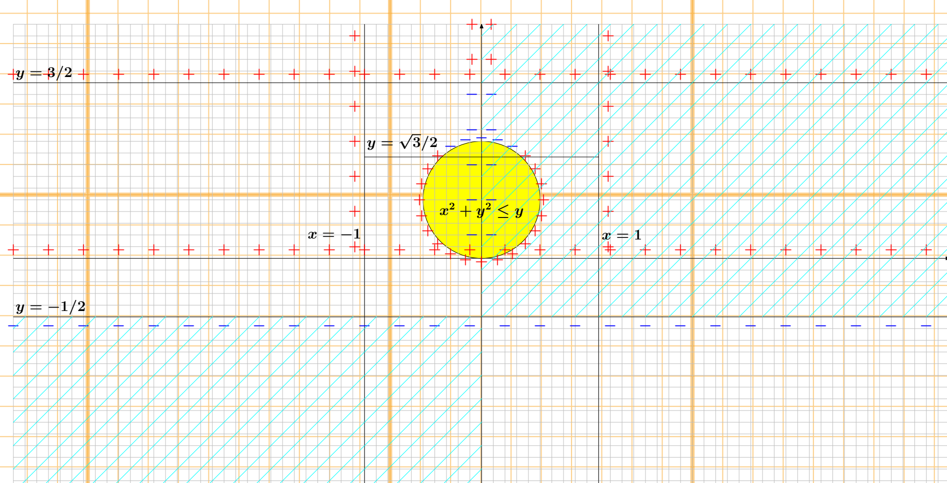


22

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 2y^3 + 6x^2y + 3x^2 - 3y^2$$

e la figura seguente



in cui è evidenziato il segno che f assume nei punti delle rette $y = -1/2$, $y = 0$, $y = 3/2$, $x = 1$, $x = -1$ e sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$ La parte tratteggiata indica l'insieme in cui $f_x > 0$ mentre la parte colorata indica l'insieme in cui $f_y < 0$

22·1 -[15] Disegnare l'insieme dei punti del piano tali che $f(x, y) = 0$

22·2 -[10] Verificare le affermazioni descritte nella figura che sono state usate per disegnare l'insieme dei punti del piano tali che $f(x, y) = 0$

22·3 - [2] Determinare se f è differenziabile in $(1, 0)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(1, 0)$.

22·4 -[1] Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 0)$.

22·5 - [7] Determinare la direzione di massima pendenza per f nel punto $(0, 0)$.

22·6 -[4] Determinare massimi e minimi assoluti di f sul cerchio di equazione $x^2 + y^2 - y \leq 0$

22·7 -[3] Calcolare se esiste il $\lim_{x,y)\to+\infty} f(x, y)$

22·8 -[8] Calcolare le derivate direzionali di $g(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$ in $(0, 0)$.

23

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4xy^2$$

e l'insieme dei punti

$$G = \{(x, y) \ : \ f(x, y) = 0\}$$

23·1 -[3] Determinare i punti di G aventi massima ascissa.

23·2 -[3] Determinare i punti di G aventi massima ordinata.

23·3 -[3] Determinare i punti di G aventi massima distanza dall'origine.

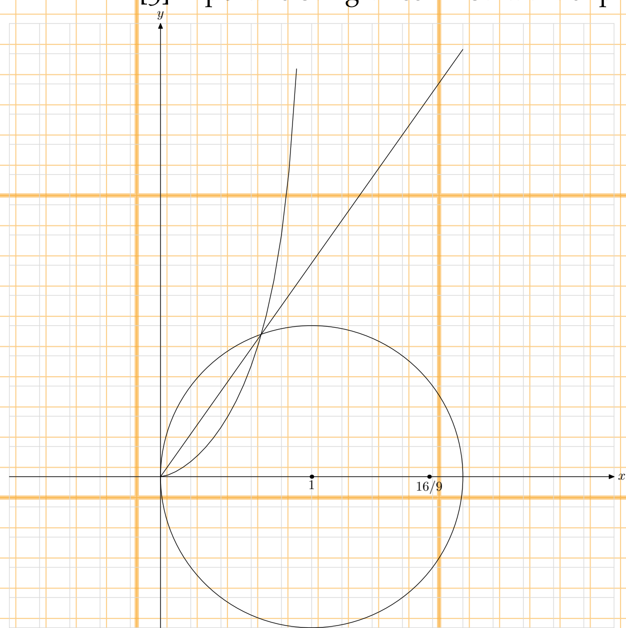
23·4 -[2] Verificare che G è contenuto del semipiano delle ascisse positive ed è simmetrico rispetto all'asse x.

23·5 - [1] Verificare che $f(x,0) \geq 0$ per ogni x reale.

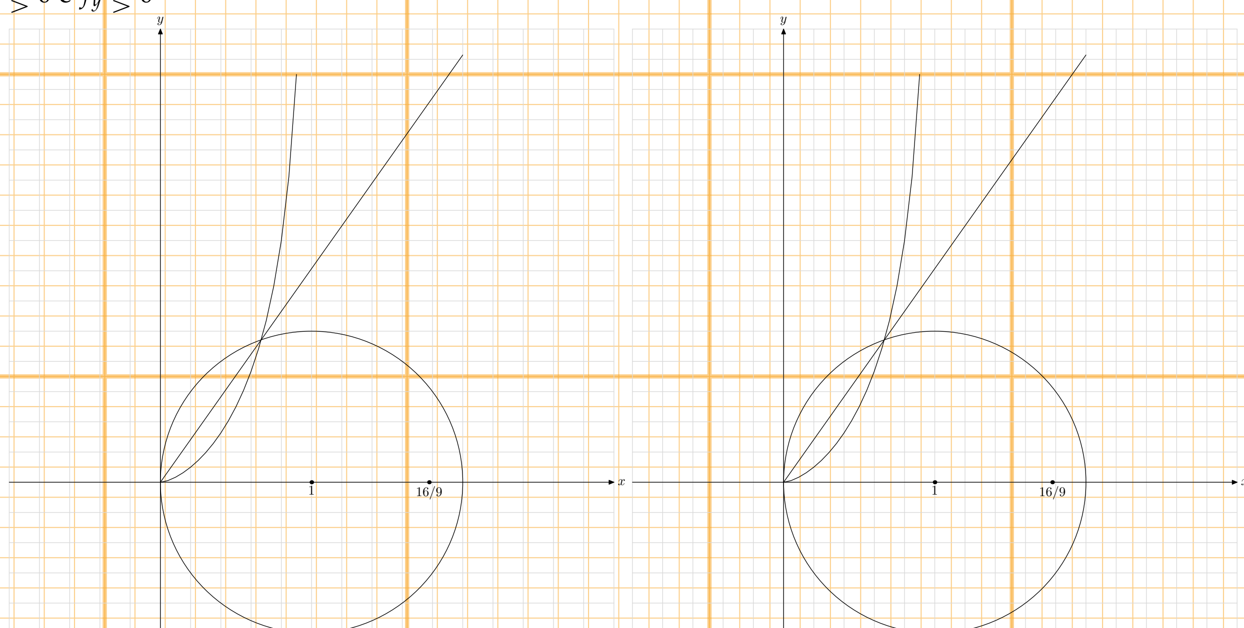
23·6 - [1] Verificare che $\lim y \to +\infty f(x,0) = +\infty$ per ogni x reale.

23·7 - [1] Verificare che $f(x, \sqrt{2}x) \leq 0$ $0 < x < 1$ reale.

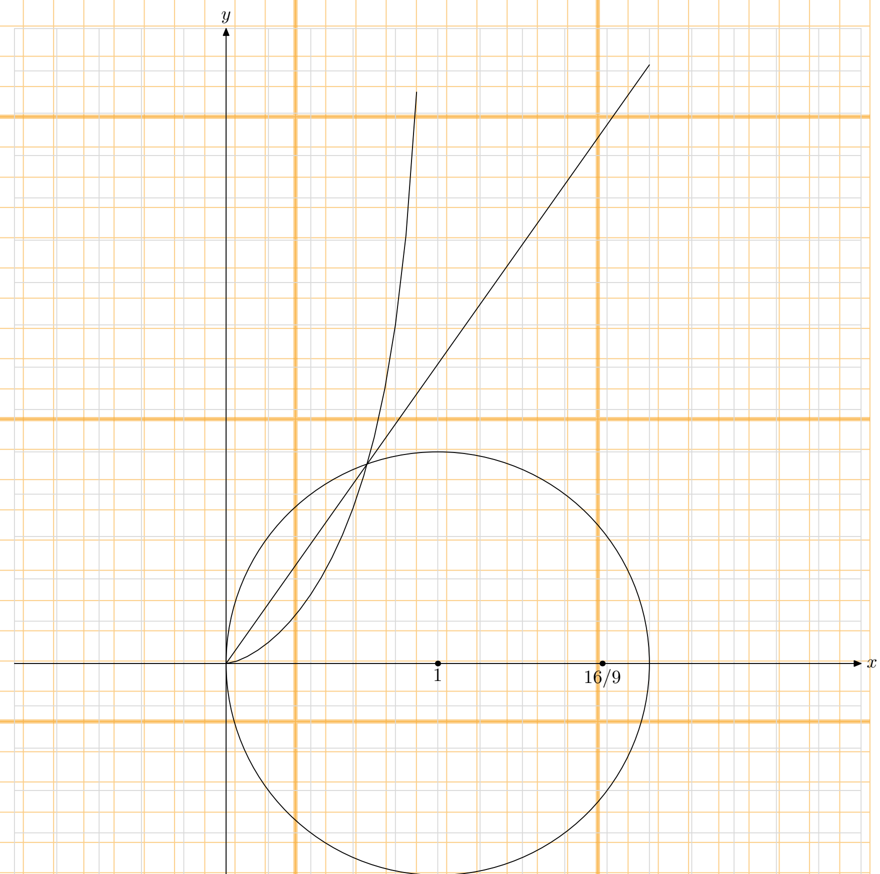
23·8 - [3] Riportare sul grafico i risultati dei precedenti tre punti



23·9 - [3] Calcolare f_x e f_y e indicare sul grafico l'insieme in cui $f_x \lesseqgtr 0$ e $f_y \lesseqgtr 0$



23·10 - [10] Disegnare G



Si consideri

$$f(x, y) = y^4 + x^4 - 10x^2 + 9$$

23·11 -[] Disegnare nel piano l'insieme dei punti tali che $f(x, y) =$ 0

23·12 -[] Studiare l'esplicitabilità di $f(x, y) = 0$

Sia ϕ la funzione che definisce y come funzione implicita di x mediante la $f(x, y) = 0$ in un intorno di $(\sqrt{5}, 9)$ **23·13** -[] Verificare

l'esistenza e l'unicità di ϕ

23·14 -[] Calcolare $\phi'(x)$

23·15 -[] Calcolare $\phi''(x)$