1
Serie

1

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\ln(1 + e^{-n}) \Big) x^{n!}$$

1·1 Determinare il raggio di convergenza della serie data. **1·2** Precisare se la serie è convergente negli estremi dell'intervallo reale di convergenza.

1·3 Studiare la convergenza uniforme della serie precisando se è convergente su tutto il suo intervallo di convergenza reale

1·4 Determinare, nel piano complesso il cerchio di convergenza della serie data, precisando il suo comportamento sulla frontiera **1·5** Stabilire se la serie data è uniformemente o totalmente convergente su tutto il suo cerchio di convergenza, nel piano complesso.

2

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n!}}{n!}$$

2·1 Determinare i coefficienti a_n della serie di potenze e precisare se è vero che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ fornisce il raggio di convergenza della serie
2·2 Trovare il raggio di convergenza R della serie

2·3 Stabilire se la serie data converge per $x = R$ **2·4** Stabilire se la serie data converge per $x = -R$ **2·5** Esprimere in serie di potenze

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

precisando il raggio di convergenza dello sviluppo ottenuto 3

consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^2}$$

3·1 Dimostrare che f converge totalmente su $\mathbb{R}$ **3·2** Dimostrare che f è periodica e determinarne il periodo minimo.

3·3 Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di f su $[0, 2\pi]$ **3·4** Calcolare $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a meno di .1 **3·5** Precisare se l'approssimazione ottenuta è per eccesso, per difetto e trovare con una cifra esatta $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4 Si

consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)(x+1)^n$$

4·1 Determinare il raggio di convergenza della serie giustificando brevemente le affermazioni **4·2** Provare che per $x = -3$ la serie data è convergente

4·3 Determinare gli insiemi in cui la serie converge puntualmente, assolutamente, uniformemente. **4·4** Approssimare a meno di .1

$$\int_{-2}^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

5

Si consideri, nel campo complesso la serie di funzioni

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z}\right)^n \frac{1}{(1+i)^n} \qquad z \in \mathbb{C}$$

5·1 Determinare l'insieme di convergenza D della serie assegnata

5·2 Disegnare l'insieme di convergenza D della serie assegnata

5·3 Determinare un insieme in cui la serie converga totalmente

5·4 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$$

5·5 Precisare la convergenza della serie di funzioni assegnata sulla frontiera di D

6

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(x^2-3x+1)n}}{n}$$

6·1 Stabilire per quali valori di x è definita f e per quali valori di x è continua

6·2 Stabilire per quali valori di x è derivabile e calcolarne la derivata

6·3 Disegnare approssimativamente il grafico di f

6·4 Studiare la serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Disegnando il grafico della restrizione all'asse reale della serie stessa.

6·5 Esprimere f mediante funzioni elementari (eventualmente servendosi del punto precedente) e disegnare il grafico di f con precisione.

7

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+h)!(n+k)!}{(\alpha n)!} x^n \qquad \alpha, h, k \in \mathbb{N}$$

7·1 Determinare il raggio di convergenza della serie per $\alpha = 2$

7·2 Trovare il campo di definizione della funzione

$$f\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

nel campo complesso e rappresentarlo nel piano complesso. **7·3** Determinare il raggio di convergenza della serie per $\alpha = 3$ **7·4** Determinare il raggio di convergenza della serie per $\alpha = 1$

7·5 Calcolare, se esiste $f^{(5)}(0)$per $\alpha = 2$.

8

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

8·1 Determinare il raggio di convergenza della serie, precisando la convergenza sul bordo del cerchio di convergenza.

8·2 Stabilire dove la serie è derivabile e calcolarne la derivata. **8·3** Disegnare il grafico della restrizione della serie all'asse reale.

8·4 Calcolare, se esiste, $f(.5)$ a meno di .01

8·5 Determinare la somma della serie. Calcolare, se esiste, $f(-1)$ a meno di .01

9

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n+n^2} \qquad z \in \mathbb{C}$$

9·1 Determinare il raggio di convergenza della serie.

9·2 Determinare il comportamento della serie sulla circonferenza di convergenza.

9·3 Trovare una espressione in termini di funzioni elementari della somma della erie.

9·4 Calcolare, se esiste, $f(-1)$ a meno di $1/10$

10

Si consideri la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^n + 1}{b^n}\right) \left(\frac{z^2 - 1}{z^2}\right)^n$$

10·1 Stabilire se f è una serie di potenze ed, in caso affermativo, scriverne i coefficienti. **10·2** Stabilire se è possibile trovare una serie di potenze $g(z) = \sum b_n z^n$ tale che

$$f(z) = g\left(\frac{z^2 - 1}{z^2}\right)$$

ed, in caso affermativo, scriverne i coefficienti. **10·3** Determinare il raggio di convergenza di g.

10·4 Disegnare nel piano complesso l'insieme dove è definita f precisando il comportamento di f sulla frontiera di tale insieme. **10·5** Determinare, ove possibile, una espressione di f in termini di funzioni elementari.

11

Si consideri la serie

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$$

11·1 Dopo aver stabilito che si tratta di una serie di potenze e averne determinato centro e coefficienti, calcolarne il raggio di convergenza.

11·2 Trovare $f_n(x)$ tale che $f_n''(x) = x^{n-1}$

11·3 Determinare $g(x)$ in modo che

$$\frac{x^{n-1}}{n * (n+1)} = g(x) f_n(x)$$

11·4 Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x)$ **11·5** Calcolare la somma della serie data $h(x)$ 12

consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{2+\sqrt{n}}$$

12·1 Determinare il dominio di f.

12·2 Determinare un numero razionale che approssimi $f(2.1)$ a meno di 10^{-6} 13

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^n$$

13·1 Determinare il dominio di f **13·2** Stabilire dove f è continua

e differenziabile

13·3 Calcolare $\nabla f(0,1)$ **13·4** Calcolare esplicitamente f e studiare la prolungabilità di f sui punti della bisettrice $II - IV$ quadrante

14

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (8^n + 2^n)(x-3)^{3n}$$

14·1 Determinare il raggio di convergenza R della serie che definisce f e l'insieme di definizione D di f

14·2 Stabilire se f è definita agli estremi dell'intervallo di convergenza. **14·3** Calcolare $f(3-\frac{1}{4})$ con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1-x)y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e sia

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

14·4 Determinare una legge di ricorrenza per i coefficienti a_n in corrispondenza della quale y sia soluzione del problema dato

14·5 Determinare esplicitamente y

15

Si consideri la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n}$$

15·1 Stabilire, nel campo complesso, l'insieme di definizione D della serie.

15·2 Scrivere la serie che definisce $f'(z)$ e precisarne il campo di definizione

15·3 Determinare esplicitamente f (in termini di funzioni elementari)

16

Si consideri la funzione definita da

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{n}$$

16·1 Determinare il campo di definizione D di y

16·2 Stabilire se y è derivabile e calcolarne la derivata, precisandone il campo di definizione

16·3 Calcolare $y(1)$, se è possibile.

16·4 Determinare una espressione di $y(x)$ in termini di funzioni elementari

17

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} (x - x^2)^{2n}$$

Determinare il campo di definizione di f

Studiare la derivabilità di f e calcolarne la derivata dove esiste.

Disegnare il grafico di f Determinare una espressione di f in termini di funzioni elementari

18

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n^2+2n}$$

18·1 Determinare l'intervallo D in cui la serie converge **18·2** Studiare la convergenza della serie negli estremi di D

18·3 Approssimare la somma della serie calcolata nel primo estremo di D, a meno di $1/10$ **18·4** Calcolare, dove esiste, la derivata di f.

19

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x^2)^n}{n!}$$

19·1 Determinare l'insieme D in cui la serie converge **19·2** Provare che

$$f'(x) = (1 - 2x)f(x)$$

20

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3 + n}$$

20·1 Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza. **20·2** Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale.

20·3 Disegnare il grafico della somma della serie sul suo intervallo di convergenza reale Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - x^2)^n}{n^3 + n}$$

20·4 Stabilire dove f è continua, dove è derivabile e disegnare il grafico della somma della serie.

21

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

21·1 Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza. **21·2** Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale. Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{\sqrt{n^2+1}}$$

21·3 studiare il campo di definizione di f la sua continuità e la sua derivabilità

22

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{\ln(n^2+1)}$$

22·1 Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza. **22·2** Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale. Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(x))^n}{2^n \ln(n^2+1)}$$

22·3 studiare il campo di definizione di f, la sua continuità e la sua derivabilità

23

Si consideri la funzione definita dalla serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

23·1 Determinare l'insieme su cui y è definita continua e derivabile

2 volte

23·2 calcolare su tale insieme $y'(x)$ ed $y''(x)$

23·3 Verificare che

$$y'(x) = -2xy(x)$$

23·4 Calcolare $y(1/2)$ a meno di $1/100$

23·5 Esprimere y in termini di funzioni elementari.

24

Si consideri la funzione definita dalla serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2^n)}}{n^2}$$

24·1 Determinare l'insieme su cui y è definita continua e derivabile 2 volte

24·2 calcolare su tale insieme $y'(x)$ ed $y''(x)$

24·3 Calcolare $y(1/2)$ a meno di $1/100$

25

Si consideri la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(nz)^n}{n!}$$

25·1 Determinare, nel piano complesso, l'insieme di convergenza della serie **25·2** Disegnare il campo di definizione della funzione che si ottiene sostituendo alla variabile complessa z l'espressione $x^2 + y$ **25·3** Disegnare il campo di definizione della funzione $f(z^2)$ **25·4** Discutere continuità e derivabilità della Funzione di una variabile reale $f(x)$.

26

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}(x-1)^{3n}$$

26·1 Determinare il raggio di convergenza della serie ed il suo intervallo di convergenza

26·2 Stabilire se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza **26·3** Studiare la convergenza uniforme della serie

26·4 Calcolare f' **26·5** Studiare il segno di f' **26·6** Disegnare il grafico di f

27

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^{3n}$$

27·1 Determinare il raggio di convergenza della serie ed il suo intervallo di convergenza

27·2 Studiare la convergenza uniforme della serie

27·3 Calcolare f' **27·4** Studiare il segno di f' **27·5** Disegnare il grafico di f

28

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}(x-1)^{3n}$$

28·1 Stabilire se la serie che definisce f è una serie di potenze e, in caso affermativo, determinarne i coefficienti a_n ed il raggio di convergenza. **28·2** Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme, totale della serie **28·3** Studiare la derivabilità di f e calcolarne la derivata **28·4** Disegnare il grafico di f

29

29·1 Determinare la successione a_n in modo che

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

sia tale che

$$y'(x) = \int_0^x t y(t) dt$$

29·2 Precisare il raggio di convergenza della serie di potenze y trovata al punto precedente.

29·3 Verificare che le funzioni y dipendono da una costante e precisarne il significato. Stabilire se definiscono uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione.

29·4 Trovare lo sviluppo di McLaurin di y di ordine 4.

30

30·1 Determinare la successione a_n in modo che

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

sia tale che

$$y'(x) = \int_0^x 2y(t) dt$$

30·2 Precisare il raggio di convergenza della serie di potenze y trovata al punto precedente. **30·3** Verificare che le funzioni y dipendono da una costante e precisarne il significato. Stabilire se definiscono uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione. **30·4** Trovare lo sviluppo di McLaurin di y di ordine 4.

31

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^{n(x^2+x)}}{n}$$

31·1 Determinare il campo di definizione di f

31·2 Determinare dove f è derivabile

31·3 Disegnare il grafico di f **31·4** Calcolare $f(-1/2)$ a meno di $1/10$

32

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^{n(x^2+x)}}{n}$$

32·1 Determinare il campo di definizione di f

32·2 Determinare dove f è derivabile

32·3 Disegnare il grafico di f **32·4** Calcolare $f(-1/2)$ a meno di $1/10$

33

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^{n(x^2+x)}}{n}$$

33·1 Determinare il campo di definizione di f

33·2 Determinare dove f è derivabile

33·3 Disegnare il grafico di f **33·4** Calcolare $f(-1/2)$ a meno di $1/10$

34

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^5 y^{(5)}(x) + y(x) = f(x)$$

e la serie di potenze

$$z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

34·1 Sia $f(x) = x^9$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata. **34·2** Sia $f(x) = e^x$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

34·3 Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n$.

34·4 Determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

34·5 Determinare al variare di α il raggio di convergenza della serie trovata.

34·6 Sia $\alpha = 3$. Stabilire per quali dati iniziali il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^5 y^{(5)}(x) + y(x) = f(x) \\ y(0) = y_0\,,\ y'(0) = y_1\,,\ y''(0) = y_2\,,\ y'''(0) = y_3\,,\ y^{(4)}(0) = y_4\,, \end{cases}$$

ammette soluzione. 35

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2n+1} \frac{x^{3n}}{5n}$$

35·1 Determinare i coefficienti ed il centro della serie. **35·2** Determinare il raggio di convergenza della serie

35·3 Studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza. **35·4** Calcolare la somma della serie per $x = .1$ a meno di 0.001. 36

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{6n}$$

36·1 Determinare i coefficienti ed il centro della serie. **36·2** Determinare il raggio di convergenza della serie

36·3 Studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza. **36·4** Per $x = 0.5$, determinare n in modo che la ridotta di ordine n approssimi la somma della serie a meno di 0.01.

37

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = x^4 y(x)$$

e si consideri

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$$

37·1 Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data.

37·2 Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data ed inoltre sia $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ **37·3** Determinare a_n

in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data ed inoltre sia $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

37·4 Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ ed $y'(0) = 1$

38

Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^2 e^{-n(1+t^2)} dt$$

38·1 Verificare che f è definita in $x = 0$.

38·2 verificare che la serie delle derivate dei termini $n-$esimi è uniformemente convergente su I, e precisare I. **38·3** Verificare che f

è continua e derivabile su I.

38·4 Determinare una espressione di f in termini di funzioni elementari.

39

Si

consideri la funzione

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} x^n n^x$$

39·1 Determinare il campo di definizione di f **39·2** Dimostrare che la serie che definisce f converge totalmente per $|x| < 0.5$ **39·3** Dimostrare che f è continua in $(-1/2, 1/2)$ **39·4** Dimostrare che f è derivabile in $(-1/2, 1/2)$ e calcolarne la derivata.

40

Si consideri

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{x^{3n}}{4n}$$

40·1 Determinare il campo di definizione di f.

40·2 Determinare N in modo che $\sum_0^N \frac{(-1)^{3n}}{4n}$ approssimi $f(-1)$ a meno di 0.01 **40·3** Sviluppare f in serie di potenze con centro in $x = 0$

40·4 Determinare una espressione di f in termini di funzioni elementari.

41

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^n}{n}\right)$$

41·1 Determinare il campo di definizione di f.

41·2 Studiare la continuità di f **41·3** Studiare la derivabilità di f

41·4 Studiare convergenza puntuale uniforme e totale della serie che definisce f

42

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} t\dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = tx(t) + ty(t) \end{cases}$$

42·1 Determinare una regola di ricorrenza per a_n, b_n in modo che

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad \text{e} \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

siano soluzioni per il sistema dato **42·2** Determinare condizioni in grado di identificare completamente a_n, b_n in modo che x e y siano soluzioni del sistema dato

42·3 Determinare il raggio di convergenza delle serie che definiscono x e y **42·4** Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema che possono essere scritte come serie di potenze centrate in 0.

43

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n + \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{b}{x}\right)^n$$

43·1 Determinare il campo di definizione di f

43·2 Determinare una funzione razionale fratta g che coincida con f dove f è definita

43·3 Per $a = 2$ e $b = 1$ Calcolare $f(1.5)$ a meno di 10^{-100}

44

Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{|x|}\right)^n$$

44·1 Determinare l'insieme di definizione di f **44·2** Studiare la derivabilità di f e studiare il segno di f'.

44·3 Disegnare il grafico di f. Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 2] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

44·4 Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di g su $[-\pi, \pi]$

44·5 Disegnare il grafico della somma delle serie di Fourier ottenuta.

45

Si consideri

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} n e^{-n} x^{2n}$$

45·1 Determinare dove f è definita, continua e derivabile **45·2** Disegnare il grafico di f **45·3** Calcolare $f(-1)$ a meno di $1/100$

45·4 Determinare il polinomio di McLaurin di f di ordine 5 **45·5** Calcolare $f^{(22)}(0)$. **45·6** Determinare esplicitamente f

46

consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^n + 1) x^{3n}$$

46·1 Determinare il campo di definizione di f **46·2** Calcolare $f'(x)$ precisando dove e' definita. **46·3** Disegnare il grafico di f

47

Si consideri la serie numerica

$$S = \sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^5}$$

47·1 Determinare il carattere della serie. **47·2** Approssimare S a meno di $1/100$

47·3 Enunciare i risultati usati per rispondere alle domande precedenti.

48

Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a - kp)(1 - p)^{k-1}$$

48·1 Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ in modo che la serie sia convergente **48·2** Determinare la somma della serie per i valori trovati al punto precedente.

48·3 Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ in modo che la serie abbia somma nulla

49

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

49·1 Studiare la convergenza puntuale di f_n **49·2** Studiare la convergenza uniforme di f_n si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} x^{n^2}$$

49·3 Determinare il raggio di convergenza ρ **49·4** Studiare la convergenza agli estremi dell'intervallo di convergenza

49·5 approssimare a meno di 0.01 $f(-\rho)$ **49·6** approssimare a meno di 0.01 $f(\rho)$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y(x)$$

49·7 Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 1$, $y('0) = 1$.

49·8 Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 0$, $y('0) = 0$.

49·9 Trovare tutte le soluzioni della serie data che si possano esprimere come serie di potenze centrate in $x_0 = 0$

50

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \\ a_0 = 5 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

e la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$$

50·1 Trovare i k per i quali $a_n = k$ soddisfa la regola di ricorrenza

50·2 Trovare gli h per i quali $a_n = hn$ soddisfa la regola di ricorrenza **50·3** Trovare, se possibile k ed h per i quali $a_n = k + hn$

soddisfa la regola di ricorrenza

50·4 Determinare il raggio di convergenza ρ della serie

50·5 Studiare la convergenza della serie per $x = \pm\rho$

51

consideri la funzione f definita da

$$f(x, y) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{y^n}{x^n}$$

51·1 Determinare il campo di definizione di f

51·2 Stabilire dove è continua e dove è parzialmente derivabile e differenziabile

51·3 Approssimare $f(2, 1)$ a meno di 0.001

51·4 Determinare una espressione esplicita di f.

52

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} \quad , \quad x \geq 0$$

52·1 Determinare il limite puntuale della successione f_n precisando il suo campo di definizione.

52·2 Determinare dove la convergenza puntuale di f_n è anche uniforme..

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

52·3 Determinare il campo di definizione di f **52·4** Determinare i

coefficienti di Fourier di f su $[-\pi, \pi]$ **52·5** Verificare che f è limite

uniforme della serie su $\mathbb{R}$
vspace2cm
Si consideri la serie definita , per $a, b \in \mathbb{R}_+$, da

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{b}{x} \right)^n \right)$$

52·6 Determinare se si tratta di una serie di potenze ed in caso affermativo indicarne i coefficienti **52·7** Studiare la convergenza uni-

forme della serie al variare di a, b **52·8** Indicare se esistono a, b per i

quali la serie non converge puntualmente per nessun valore di x reale.
52·9 Esprimere, nel caso in cui la serie sia convergente, la sua somma

in termini di funzioni elementari

53

Si consideri l'equazione differenziale

$$xy'' + (1-x)y'(x) + \alpha y(x) = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

53·1 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

sia soluzione dell'equazione data **53·2** Determinare il raggio di con-

vergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soluzione dell'equazione data

53·3 Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data nel caso in cui $\alpha = 5$ **53·4** Deter-

minare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data nel caso in cui $\alpha = m \in \mathbb{N}$ **53·5** Verificare che

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(n-\alpha)}{(n!)^2}$$

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! x^{2n}}$$

53·6 Determinare l’insieme di definizione di f e discuterne la recolarit’a.

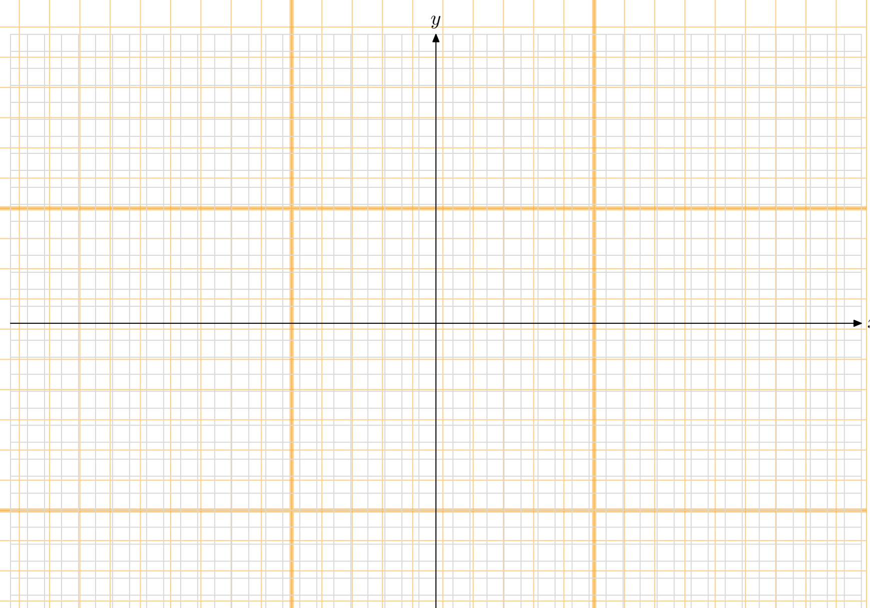
53·7 Determinare una espressione di f in termini di funzioni elementari.

54

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^2 + y^2 - 2|x| + 1)^{n-1}$$

54·1 Determinare il campo di definizione di f e disegnarlo nel piano.



54·2 Studiare la continuità di f

54·3 Studiare la differenziabilità di f

54·4 Esprimere f mediante funzioni elementari

55

Si consideri

$$f(x,y) = \sum_{2}^{+\infty} 2^n \left(\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} \right)^n$$

55·1 Stabilire per quali $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è definita f

55·2 Disegnare il dominio di f del piano.

55·3 Approssimare $f(4,0)$ a meno di $1/100$ **55·4** Determinare

una espressione mediante funzioni elementari di f