1
Campi Vettoriali

1

Si consideri in campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (0,0,y)$$

1·1 Calcolare $\operatorname{rot} F$ e $\div F$

1·2 Sia S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x = 0, \quad z^2 + y^2 \leq 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di $\operatorname{rot} F$ attraverso S.

1·3 Sia S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di $\operatorname{rot} F$ attraverso S.

1·4 Calcolare il lavoro di F sulla curva γ intersezione di $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con il piano $x = 1/2$.

1·5 Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} F$ attraverso la superficie $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 1/2\,, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \leq 1/2\,, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 1/2\,, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

2

Si consideri il campo vettoriale piano F associato ad una funzione potenziale ottenuta sommando due quantità, rispettivamente, proporzionali all'inverso dei quadrati delle distanze dai punti $(0,1)$ e $(0,-1)$.

2·1 Scrivere le componenti F_1 ed F_2 del campo $F = (F_1, F_2)$

2·2 Calcolare $\int_\gamma F$ dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^4 + y^4 = 10000\}$$

2·3 Calcolare $\int_\gamma F$ dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 2 \ \ y \geq x\}$$

2·4 Stabilire se è vero che $\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial x} F_2$ precisando, in caso affermativo per quali (x,y) è vero.

2·5 Calcolare il flusso del rotore di $G = (F_1, F_2, 0)$ attraverso un quadrato avente un vertice in $(0,0)$ e in $(1/2, 1/2)$

3

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+y^2} \right)$$

3·1 Determinare il campo di definizione D di F

3·2 Stabilire se F è conservativo in D

3·3 Calcolare il flusso del campo F attraverso la superficie laterale del cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \quad : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \,, \quad |z| \leq 1\}$

3·4 Calcolare il flusso del campo F attraverso le superfici di base del cilindro.

4

4·1 Scrivere le componenti di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ generato da una forza diretta verso l'asse z avente intensità $f(x,y,z)$

4·2 Scrivere le componenti di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ generato da una forza diretta verso l'asse z avente intensità proporzionale alla distanza dall'origine degli assi.

4·3 Calcolare il flusso Φ_n del campo vettoriale trovato attraverso una corona sferica S_n delimitata dalle sfere di raggio $1/n$ ed 1.

4·4 Calcolare

$$\lim \Phi_n$$

4·5 Verificare il teorema della divergenza relativamente a S_n

5

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} + 2x, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

5·1 Determinare l'insieme I di definizione del campo F.

5·2 Verificare che F è chiuso in I.

5·3 Stabilire se il campo F è conservativo in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, giustificando brevemente la risposta.

5·4 Stabilire se F è conservativo in A, ed in caso affermativo trovarne un potenziale

5·5 Stabilire se F è conservativo in I, ed in caso affermativo trovarne un potenziale

5·6 Calcolare $\int_\gamma F$ dove γ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ compreso, nell'ordine, tra i punti $(1,1)$ e $(-1,1)$, giustificando brevemente le affermazioni.

6

Si consideri la forma differenziale

$$\omega_1 = \frac{\alpha x^2 + \beta y}{x^2 - y^2 - 1} dx + \frac{\alpha y^2 + \beta x}{x^2 - y^2 - 1} dy$$

6·1 Determinare al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il campo di definizione di ω_1 precisando se è semplicemente connesso.

6·2 Stabilire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ω_1 è una forma chiusa.

6·3 Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ω_1 è una forma esatta.

6·4 Determinare, se ne esistono, tutte le primitive della forma ω_1

7

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x,y) = \left(\frac{bx}{ax^2+y^2+1}, \frac{y}{ax^2+y^2+1} \right)$$

7·1 Determinare il campo di definizione di F e stabilire se F è conservativo, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$,

7·2 Calcolare ove esistono tutti i potenziali di F

7·3 Disegnare la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

7·4 Calcolare $\int_\gamma F$

7·5 Calcolare, usando il teorema di Stokes,

$$\int\int_D \frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$$

ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ 4x^2 + 4y^2 \leq 1 \ \ x \geq 0 \ \ y \geq 0\}$

8

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

ed il solido T generato dalla rotazione di 2π attorno all'asse z dell'insieme

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq z \leq 1, \ 0 \leq x \leq 2 - z\}$$

8·1 Stabilire se F è conservativo, precisandone il campo di definizione.

8·2 Calcolare ove esistono tutti i potenziali di F

8·3 Calcolare il flusso di F attraverso la superficie frontiera di T.

8·4 Calcolare il flusso di F attraverso le circonferenze definite da

$$\{z = 0 \ \ x^2 + y^2 = 4\} \qquad \{z = 1 \ \ x^2 + y^2 = 1\}$$

8·5 Calcolare il flusso di F attraverso la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva

$$x = 2 - z \qquad 0 \leq z \leq 1$$

9

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = (x, z, y)$$

9·1 Calcolare $\div F$ e $\operatorname{rot} F$.

9·2 Calcolare il flusso di F attraverso la parte della superficie definita da $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ che si trova tra i piani $z = 0$ e $z = 1$.

9·3 Calcolare il flusso di f attraverso il cerchio giacente nel pinao $z = 0$ di centro l'origine e raggio unitario.

9·4 Calcolare il lavoro compiuto da $\operatorname{rot} F$ lungo la circonferenza frontiera del cerchio di cui al punto precedente.

9·5 Verificare il teorema della divergenza sul volume identificato dalle superfici di cui ai precedenti punti.

10

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x, y, z) = \Big(x \ln(x^2 + y^2 + z^2), y \ln(x^2 + y^2 + z^2), z \ln(x^2 + y^2 + z^2)\Big)$$

10·1 Determinare se il campo è conservativo e calcolarne i potenziali.

10·2 Calcolare

$$\int_\gamma \langle F, T \rangle ds$$

dove

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0 \, , \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

10·3 Calcolare

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle d\sigma$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0 \, , \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

10·4 Calcolare $\div F$ e

$$\int_V \div F \, dxdydz$$

dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

10·5 Calcolare

$$\int_{\partial V} \langle F, N \rangle d\sigma$$

11

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{ax}{x^2+2y^2-1}, \frac{2y+b}{x^2+2y^2-1} \right)$$

11·1 Stabilire per quali $a, b \in \mathbf{R}$ il campo è chiuso.

11·2 Calcolare, per gli a e b determinati al punto c), il lavoro fatto dal campo F lungo la curva di equazione

$$\begin{cases} x(t) = 10 + t\cos t \\ y(t) = t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

11·3 Sempre con gli a e b trovati al punto c), determinare, se esistono, tutti i potenziali di F.

12

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = (x, 2y, z)$$

Stabilire se, e dove, F ammette potenziale
Trovare un potenziale di F
Trovare tutti i potenziali di F
Determinare le superfici equipotenziali e descriverle.
Determinare le linee di forza di F, cioè le linee che hanno in ogni punto direzione parallela al campo, e descriverle.

13

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y}{1+xy}, -\frac{x}{1+xy} \right)$$

13·1 Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso (irrotazionale).

13·2 Calcolare, se esiste, un potenziale di F, precisandone il campo di definizione

13·3 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1/2$

13·4 Calcolare tutti i potenziali di F

14

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(2x\cos(x^2+y^2) - \frac{1}{x^2}, 2y\cos(x^2+y^2)\right)$$

14·1 Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso (irrotazionale).

14·2 Calcolare, se esiste, un potenziale di F, precisandone il campo di definizione

14·3 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1/2$

15

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(y+x^2)^2}, 1 + \frac{1}{(y+x^2)^2}\right)$$

15·1 Determinare il campo di definizione di F

15·2 Determinare, se esiste, un potenziale di F

15·3 Determinare, se esistono, tutti i potenziali di F

15·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro l'origine, raggio unitario, giacente nel semipiano positivo delle y orientata in senso antiorario.

16

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(y+x^2)}, 1 + \frac{1}{(y+x^2)}\right)$$

16·1 Determinare il campo di definizione di F

16·2 Determinare, se esiste, un potenziale di F

16·3 Determinare, se esistono, tutti i potenziali di F

16·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro l'origine, raggio unitario, giacente nel semipiano positivo delle y orientata in senso antiorario.

17

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) = \left(\frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)+\cos^2(y)}, -\frac{\sin(2y)}{\sin^2(x)+\cos^2(y)} \right)$$

17·1 Determinare l'insieme D in cui F é definito, precisando se D é connesso, convesso o semplicemente connesso.

17·2 Stabilire se F é conservativo nel cerchio di centro $(2,0)$ e raggio 1.

17·3 Stabilire se F é conservativo in D.

17·4 Determinare un potenziale di F in $(0,\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$

18

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = (1, x, y)$$

e l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 \leq 1 \ , 1 \geq z \geq 0\}$$

18·1 Stabilire se F ammette potenziale ed, in caso affermativo, calcolarlo.

18·2 Calcolare il flusso di F attraverso ∂V

18·3 Verificare il teorema della divergenza per F e V.

18·4 Calcolare il lavoro di F lungo la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \dfrac{2t}{\pi} \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

19

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right)$$

ed il cilindro C con asse parallelo all'asse z delimitato dai piani $z=0$ e $z=1$ e generato dalla circonferenza giacente nel piano $z=0$ di raggio 1 e centro $(0,0)$.

19·1 Stabilire se il campo F ammette potenziale e, in caso affermativo, calcolarlo.

19·2 Calcolare il flusso uscente dal cilindro C

19·3 Calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro C

19·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva di equazioni parametriche

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \\ z(t) = t \end{cases} \qquad . \qquad t \in [0, 2\pi]$$

20

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y}, 1 \right)$$

20·1 Trovare campo di definizione di F

20·2 Stabilire se F è conservativo ed, in caso affermativo, determinarne un potenziale.

20·3 Determinare tutti i potenziali di F

20·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo F lungo la linea spezzata che passa per i punti $(1,1,0)$, $(1,3,0)$ e $(3,3,0)$

21

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(x - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}, x - \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}\right) = (f(x,y), g(x,y))$$

21·1 Disegnare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso

21·2 Stabilire se il campo è conservativo e determinarne un potenziale

21·3 Determinare tutti i potenziali del campo

21·4 Calcolare il lavoro di F lungo l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ situato nel primo quadrante, precorso in senso orario.

21·5 Calcolare, usando la formula di Gauss-Green

$$\int\int_D (f_y - g_x)dxdy$$

dove D è il cerchio centrato in $(10,10)$ di raggio 1

22

Si consideri

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y}}, \frac{3z^2}{\sqrt{z^3}}\right)$$

22·1 Disegnare il campo di definizione di F e stabilire se F è chiuso.

22·2 Determinare se F è conservativo ed, in caso affermativo calcolarne tutti i potenziali

22·3 Calcolare rot F

22·4 Verificare il teorema del rotore per il campo F e la superficie S definita da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

23

Si consideri

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y}, \frac{1}{x^2+y}, \frac{3z^2}{z^3}\right)$$

23·1 Disegnare il campo di definizione di F e stabilire se F è chiuso.

23·2 Determinare se F è conservativo ed, in caso affermativo calcolarne tutti i potenziali

23·3 Calcolare $\operatorname{rot} F$

23·4 Verificare il teorema del rotore per il campo F e la superficie S definita da $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

24

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}} \right)$$

24·1 Determinare il campo di definizione di F

24·2 Stabilire se F è chiuso

24·3 Stabilire se F è conservativo

24·4 Determinare un potenziale per F

24·5 Determinare tutti i potenziali per F

24·6 Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ x + y + z = 0$$

24·7 Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z \geq 0$$

25

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{x}{2-x^2-y^2-z^2}, -\frac{y}{2-x^2-y^2-z^2} + 1, -\frac{z}{2-x^2-y^2-z^2} \right)$$

25·1 Determinare il campo di definizione di F

25·2 Stabilire se F è chiuso

25·3 Stabilire se F è conservativo

25·4 Determinare un potenziale per F

25·5 Determinare tutti i potenziali per F

25·6 Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ x + y + z = 0 \ , \ z \geq 0$$

25·7 Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ x \geq 0$$

26

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(x \ln(x^2 + y^2 - 1) - 2, y \ln(x^2 + y^2 - 1) + 1\Big)$$

26·1 Determinare il campo di definizione di F

26·2 Stabilire se F è chiuso

26·3 Stabilire se F è conservativo

26·4 Determinare un potenziale per F

26·5 Determinare tutti i potenziali per F

26·6 Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \ x + y \geq 0$$

27

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = (f(x,yz), g(x,y,z), h(x,y,z)) = \left(\frac{1}{\sqrt{x-y+2}}, -\frac{1}{\sqrt{x-y+2}}, z\right)$$

27·1 Determinare il campo di definizione di F

27·2 Stabilire se F è chiuso

27·3 Stabilire se F è conservativo

27·4 Determinare il potenziale di F

27·5 Calcolare $\int_\gamma f dx + g dy + h dz$ dove γ è il triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

28

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = \left(\alpha x + \frac{\beta x + \gamma y}{x^2 + y^4 - 1}, \alpha y + \frac{2\beta y^3}{x^2 + y^4 - 1}\right)$$

28·1 Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ F è conservativo.

28·2 Determinare, ove possibile, un potenziale di F

28·3 Determinare, ove possibile, tutti i potenziali di F

28·4 Calcolare $\int_\gamma F$ essendo γ la curva definita da $x^2 + 2y^2 = 20$

29

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{x^4 + y^4 - 2}, \frac{y^3}{x^4 + y^4 - 2}, \ln(|z|)\right)$$

29·1 Stabilire se F ammette potenziale ed in caso affermativo calcolarlo precisandone il campo di definizione.

29·2 Determinare tutti i potenziali di F

29·3 Calcolare $\int_\gamma < F, T_\gamma > ds$ essendo T_γ il vettore tangente alla curva γ costituita dalla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e giacente nel piano $z = 1$.

29·4 Calcolare il flusso di $F(x,y,z)$ attraverso il cerchio di cui γ è frontiera.

30

Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x.y,z), h(x,y,z)) = (1/(x+10), 1/(y+10), 1/z)$

30.1 Determinare, se esistono tutti i potenziali di F

30.2 Calcolare il lavoro fatto dal campo lungo la curva γ definita da

$$\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z = \pi \end{cases}$$

30.3 Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie della metà superiore della sfera unitaria centrata in $(2, 2, 2)$

31

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \Big(\frac{x}{(x^2 - y^2) + 1} + yz, \frac{-y}{(x^2 - y^2) + 1} + xz, xy\Big)$$

31.1 Determinare il campo di definizione di F e stabilire se è connesso e se è semplicemente connesso.

31.2 Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne un potenziale

31.3 Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne tutti i potenziali

31.4 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva γ definita da:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\cos(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

31.5 Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie del cerchio giacente nel piano (x, y) di centro l'origine e raggio 1

32

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \Big(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}} + 1, \frac{1}{\sqrt{z}}\Big)$$

32.1 Determinare il campo di definizione di F e stabilire se è connesso e se è semplicemente connesso.

32·2 Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne un potenziale

32·3 Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne tutti i potenziali

32·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva γ definita da:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases} \qquad t \in [0, 2]$$

32·5 Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie del quadrato giacente nel piano $z = 0$ di centro $(2, 2)$ e lato 2

33

Si consideri la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & x < 0 \end{cases}$$

ed il campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (\varphi(x + y + z), \varphi(x + y + z), \varphi(x + y + z))$$

33·1 Determinare A in modo che F sia chiuso su A.

33·2 Stabilire se e dove F è conservativo e determinarne il potenziale precisandone il campo di definizione.

33·3 Calcolare $\int_S F ds$, dove S è sfera di centro l'origine e raggio 1

33·4 Calcolare $\int_\gamma F ds$, dove γ è la circonferenza intersezione di S con il piano $z = 0$

34

Si supponga che un punto nel piano sia attratto dai punti $P_0 = (1, 0)$ e $Q_0 = (-1, 0)$ con intensità inversamente proporzionale alla distanza da ciascun punto.

34·1 Determinare il campo vettoriale della forza cui è sottoposto ogni punto del piano.

34·2 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P - P_0\| \leq 1/2$

34·3 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P - Q_0\| \leq 1/2$

34·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P\| \leq 3$

34·5 Determinare un potenziale del campo vettoriale, se esiste.

35

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

35·1 -[]Studiare l'insieme di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso

35·2 -[] Stabilire se F è conservativo ed in caso affermativo determinarne tutti i potenziali

35·3 Descrivere la superficie precisando se è semplice regolare e chiusa

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2-2x-2y-2x+2=0\}$$

e calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso V

35·4 Descrivere la linea definita da

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2-2x-2y-2x+2=0\,, x+y+z=3\,\}$$

precisando se è semplice regolare e chiusa e calcolare il lavoro del campo vettoriale F lungo la linea L

36

Si consideri un campo vettoriale F nel piano le cui componenti nel punto P siano ortogonali allo stesso P e si abbia che $\|F\|$ sia proporzionale al quadrato del logaritmo della distanza di P dall'origine.

36·1 Determinare il campo F precisando il suo campo di definizione

36·2 Stabilire se F è conservativo ed in caso affermativo trovarne il potenziale.

36·3 Calcolare il lavoro svolto da F lungo una ellisse centrata nell'origine di semiassi 1 e2.

36·4 Calcolare il flusso attraverso la superficie S del campo vettoriale G in $\mathbb{R}^3$ essendo S definita da $x^2 + y^2 = 1$, $z \in [0, 1]$ e d essendo G il campo che associa ad ogni punto dello spazio un vettore le cui prime componenti sono date da F e che ha la terza componente nulla.

37

37·1 Determinare un campo vettoriale $F_1(x, y, z) = (f_1(x, y, z), g_1(x, y, z), h_1(x, y, z))$ in modo che

$$\operatorname{rot} F_1(x, y, z) = 0$$

37·2 Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} F_1(x, y, z)$ attraverso una semisfera centrata nell'origine e di raggio 1.

37·3 Determinare un campo vettoriale $F_2(x, y, z) = (f_2(x, y, z), g_2(x, y, z), h_2(x, y, z))$ in modo che

$$\operatorname{rot} F_2(x, y, z) = (x, -y, 0)$$

37·4 Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} F_2(x, y, z)$ attraverso una semisfera centrata nell'origine e di raggio 1.

38

Si supponga che un punto nel piano sia attratto dai punti $P_0 = (1, 0)$ e $Q_0 = (-1, 0)$ con intensità inversamente proporzionale alla distanza da ciascun punto.

38·1 Determinare il campo vettoriale della forza cui è sottoposto ogni punto del piano.

38·2 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P - P_0\| \leq 1/2$

38·3 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P - Q_0\| \leq 1/2$

38·4 Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P\| \leq 3$

38·5 Determinare un potenziale del campo vettoriale, se esiste.