ANALISI MATEMATICA

Ottavio Caligaris - Pietro Oliva

CAPITOLO 1

QUALCHE INTEGRALE ELEMENTARE

Forniamo qui una tabella di primitive F delle principali funzioni elementari f, essendosi trascurato di precisare l'insieme di definizione delle funzioni stesse.

$f(x)$	$F(x)$
0	1
1	x
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{\cos x}{\sin x}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\arcsin x$
$-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\frac{\cosh x}{\sinh x}$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\frac{\sinh x}{\cosh x}$
$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\sinh^{-1} x$
$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\cosh^{-1} x$

Per l'integrazione indefinita, oltre che della precedente tabella, si fa uso delle usuali regole di integrazione (linearità dell'integrale, integrazione per parti e per sostituzione). Inoltre esistono una serie di integrali che possono essere studiati in maniera standard; ne elenchiamo qui i principali, rimandando ad un libro di tavole matematiche, per un più completo assortimento.

- se

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi, si procede come segue
- ci si riduce, eventualmente effettuando una divisione di polinomi, al caso in cui il grado di P sia inferiore al grado di Q (si ricordi che, se $P(x) = A(x)Q(x)+B(x)$, si ha $P(x)/Q(x) = A(x) + B(x)/Q(x)$ con grado di B minore del grado di Q).
- si trovano le radici di Q; siano esse

$$\lambda_1, .., \lambda_n \ \ e \ \ \alpha_1 \pm i\beta_1, .., \alpha_m \pm i\beta_m$$

con molteplicità $\nu_1, .., \nu_n$ e $\mu_1, .., \mu_m$. Osserviamo che, se $\alpha + i\beta$ è una soluzione di $Q(x) = 0$, allora tale è anche $\alpha - i\beta$ in quanto Q ha coefficienti reali. Se

$$p = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ \ e \ \ q = \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

risulterà $p + 2q$ uguale al grado di Q.
- In corrispondenza di una radice reale λ, con molteplicità ν, si considerano le seguenti frazioni (dette fratti semplici)

$$\frac{A_1}{x-\lambda} \ , \ \frac{A_2}{(x-\lambda)^2} \ , \ \dots \ , \ \frac{A_\nu}{(x-\lambda)^\nu} \quad .$$

In corrispondenza di una radice complessa $\alpha \pm i\beta$, con molteplicità μ, si considera il trinomio di secondo grado a coefficienti reali

$$t(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

ed i fratti semplici

$$\frac{B_1 x + C_1}{t(x)} \ , \ \frac{B_2 x + C_2}{(t(x))^2} \ , \ \dots \ , \ \frac{B_\mu x + C_\mu}{(t(x))^\mu}.$$

- Si determinano poi, imponendo le opportune uguaglianze, le costanti A, B e C in modo che $P(x)/Q(x)$ sia la somma dei fratti semplici relativi a tutte le radici, cioè

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{\nu_i} \frac{A_{h,i}}{(x-\lambda_i)^h} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{B_{k,j} x + C_{k,j}}{(t_j(x))^k}.$$

- Gli integrali dei fratti semplici possono essere catalogati come segue: $(x-\lambda)^{-1}$ ammette come primitiva $\ln|x-\lambda|$; $(x-\lambda)^{-h}$ ammette come primitiva $[(1-h)(x-\lambda)^{h-1}]^{-1}$

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{A}{2a}\left(\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2aB/A)-b}{(ax^2+bx+c)^m}\right)$$

Una primitiva della prima frazione entro parentesi può essere trovata mediante la sostituzione

$$t = ax^2+bx+c$$

mentre una primitiva della seconda frazione può essere trovata mediante la sostituzione

$$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

che riduce il problema alla ricerca delle primitive della funzione

$$\frac{1}{(t^2+1)^m}.$$

Una primitiva di tale funzione si trova infine osservando che

$$\frac{1}{(t^2+1)^m} = \frac{1}{(t^2+1)^{m-1}} - \frac{t}{2}\frac{(d/dt)(t^2+1)}{(t^2+1)^m}$$

e ricavando una formula iterativa.

– Un modo alternativo per decomporre la frazione $P(x)/Q(x)$ è dato dal metodo di Hermite: si determinano $A_h, B_k, C_k \in \mathbb{R}$, $h = 1,..,n$, $k = 1,..,m$, e due polinomi $N(x)$ e $D(x)$ in modo che

$$D(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{\nu_i-1}\prod_{j=1}^{m}(t_j(x))^{\mu_j-1} \quad ,$$

N abbia grado inferiore di una unità al grado di D e

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{h=1}^{n}\frac{A_h}{x-\lambda_h} + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_kx+C_k}{t_k(x)} + \frac{d}{dx}\frac{N(x)}{D(x)} \quad .$$

- $x^m \sin x$, $x^m \cos x$, $\sin^m x$, $\cos^m x$, $x^n a^{\alpha x} \sin mx$, $x^n a^{\alpha x} \cos mx$, $x^m a^{\alpha x}$, $x^\alpha \log_a^m x$, $x^n \arctan^m x$, con $n, m \in \mathbb{N}$, si integrano iterativamente per parti.
- $\sin(mx)\cos(nx)$ si integra usando le formule di prostaferesi.
- $\cos(a_1x+b_1)\ldots\cos(a_nx+b_n)$ si integra usando le formule di Werner iterativamente.

Molti integrali possono essere risolti per sostituzione: indichiamo qui di seguito le sostituzioni più comuni. Nelle righe che seguono R indica una funzione razionale dei suoi argomenti.

- $R(x^{p_1/q_1}, .., x^{p_n/q_n})$ si integra ponendo $x = t^\mu$ dove
$$\mu = \text{m.c.m.}(q_1, ..., q_n) \quad .$$
- Lo stesso vale se in luogo di x c'è
$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad .$$
- $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$; se α, β sono radici di $ax^2 + bx + c = 0$ si esegue una delle seguenti tre sostituzioni (di Eulero), purché possibile
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$
- $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$; si pone $\sqrt{ax+b} = t$ e ci si riconduce ad uno dei precedenti
- $x^q(a+bx^r)^s$, $q, r, s \in \mathbb{Q},\ s = m/n$ (integrali binomi).
  - se $(q+1)/r \in \mathbb{Z}$ si pone $a + bx^r = t^n$
  - se $s + (q+1)/r \in \mathbb{Z}$ si pone $b + ax^{-r} = t^n$.
  - qualora $q, r, s \in \mathbb{R}$, le sostituzioni indicate sono ancora valide purché
  $$(q+1)/r \in \mathbb{N} \ \ e \ \ s + (q+1)/r \in (-\mathbb{N})$$
  e si ponga $n = 1$.
- $R(a^{\alpha x})$; si pone $a^{\alpha x} = t$
- $R(a^{p_1 x/q_1}, .., a^{p_n x/q_n})$; si pone $a^x = t^\mu$ dove
$$\mu = \text{m.c.m.}(q_1, ..., q_n) \quad .$$
- $R(\sin x, \cos x)$; si pone $t = \tan(t/2)$
- $\sin^m x \cos^n x$; si pone $t = \sin x$ e diventa un integrale binomio.
- $R(x, f(x))$, dove R è una funzione razionale, si può ridurre per sostituzione ad un integrale razionale se esiste una parametrizzazione razionale
$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$
della curva
$$y = f(x)$$
cioè se esistono due funzioni ϕ e ψ razionali tali che
$$\psi(t) = f(\phi(t)).$$

In tal caso infatti è sufficiente operare la sostitizione $x = \phi(t)$.

Aggiungiamo che una parametrizzazione razionale della curva $y = f(x)$ può essere ottenuta trovando al variare di t l'intersezione della retta
$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

con il grafico di $y = f(x)$, essendo (x_0, y_0) scelto in modo che $y_0 = f(x_0)$ e l'ulteriore intersezione sia unica.

Osserviamo ancora che nel caso in cui la curva $y = f(x)$ sia una conica o una parte di conica ciò può essere sempre fatto eventualmente scegliendo come (x_0, y_0) un punto improprio.