Estremo Superiore, Estremo Inferiore, Induzione

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{x^2 + 3a}{x^2 + a} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

Dove $a \in \mathbb{R}$ **e** $a > 0$**.**

- ◯ **Determinare tutti i maggioranti di** A**.**
- ◯ **Determinare tutti i minoranti di** A**.**
- ◯ **Determinare** $\sup A$**.**
- ◯ **Determinare** $\inf A$**.**
- ◯ **Stabilire se** A **ammette massimo o ammette minimo ed in caso affermativo trovarli.**

Si consideri l'insieme

$$A = \{ y \in \mathbb{R} \ : \ y = \frac{\sqrt{n-1}}{n+3}, \ n \in \mathbb{N} \ (n \geq 1) \}$$

- ◯ **Determinare l'estremo inferiore di** A**.**
- ◯ **Determinare l'estremo superiore di** A**.**
- ◯ **Stabilire se** A **ammette massimo e se ammette minimo.**

Si consideri l'insieme

$$B = \left\{ \frac{x}{y} \ : \ x, y \in \mathbb{R} \ , \ y \neq 0 \right\}$$

- ◯ **Determinare** $\sup B$**.**
- ◯ **Determinare** $\inf B$**.**

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n-1} \ : \ n \in \mathbb{N}, n > 1 \right\}$$

- ◯ **Determinare tutti i maggioranti di** A**.**
- ◯ **Determinare tutti i minoranti di** A**.**
- ◯ **Determinare** $\sup A$**.**
- ◯ **Determinare** $\inf A$**.**

Si consideri la disequazione

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a$$

- ◯ **Determinare tutte le soluzioni della disequazione per** $a = 2$**.**
- ◯ **Determinare** α, β **reali tali che**
$$\frac{x+1}{x-1} = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$$
- ◯ **Disegnare il grafico di** $\frac{x+1}{x-1}$
- ◯ **Risolvere la disequazione al variare di** a **nei reali.**
- ◯ **Trovare gli** a **reali, se ne esistono, tali che**

$$\frac{x+1}{x-1} \leq a \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+x+1} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

- ◯ **Determinare i maggioranti di** A **e** $\sup A$
- ◯ **Determinare i minoranti di** A **e** $\inf A$
- ◯ **Stabilire se esistono** $\max A$ **e** $\min A$ **e calcolarli**
- ◯ **Provare che è vera la seguente affermazione**

La funzione x^n **è strettamente crescente su** $(0, +\infty)$ **per ogni** $n \in N$

Si consideri la funzione

$$f(x) = ||x-1|-1|$$

- ◯ **Disegnare il grafico di** f
- ◯ **Determinare le soluzioni della disequazione** $f(x) \leq 3$
- ◯ **Determinare le soluzioni della disequazione** $f(x) \leq k$ **al variare di** $k \in \mathbb{R}$

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2+n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

◯ **Determinare i maggioranti di A e $\sup A$**

◯ **Determinare i minoranti di A e $\inf A$**

◯ **Calcolare**

$$\lim \frac{(-1)^n}{n^2+n} =$$

Si consideri la disequazione

$$\sqrt{1-x^2} \leq 1 + ax$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni della disequazione per $a = 1$.**

◯ **Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e di $g(x) = 1 + ax$**

◯ **Determinare le soluzioni della disequazione al variare di $a \in \mathbb{R}$**

◯ **Determinare quante soluzioni ha l'equazione**

$$\sqrt{1-x^2} = (1 + ax)$$

al variare di a

Si consideri

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

◯ **Applicare il principio di induzione per verificare che**

$$\sigma_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

◯ **Applicare il principio di induzione per verificare che $2^n \geq n$**

◯ **Trovare un numero naturale n_ϵ tale che**

$$\frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$$

◯ **Verificare che**

$$\sigma_n(\frac{1}{2}) \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

◯ **Verificare che**

$$\sup \sigma_n(\frac{1}{2}) = 1$$

◯ **Dimostrare che $n^2 + n + 1$ è dispari per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$.**

◯ **Provare per induzione che**

$$\sum_{k=1}^{n} a = na$$

Si consideri la disequazione

$$\sqrt{1-x^2} \leq x^2$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni della disequazione**

◯ **Disegnare il grafico di** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ **e di** $g(x) = x^2$ **e risolvere la disequazione graficamente.**

◯ **Applicare il principio di induzione per verificare che**

$$\sum_{k=1}^{n} 6k = 3n^2 + 3n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$

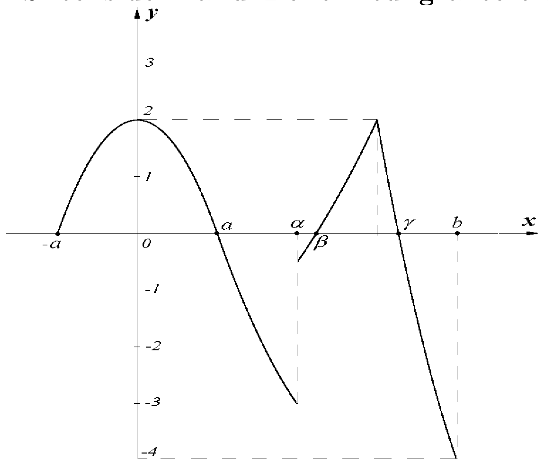
◯ **Applicare il principio di induzione per verificare che**

$$2^n < n!$$

per ogni $n \geq 4$

Grafici elementari di funzioni

Si consideri la funzione il cui grafico è di seguito riportato



- ◯ **Disegnare il grafico di $f(|x|)$ e di $|f(x)|$**

- ◯ **Disegnare il grafico di $f(x-\alpha)$ e di $f(x)-\alpha$**
  Sia $a=1$ ed $\alpha=2$ e sia $g(x)=f(x)$ per $x\in[-a,\alpha]$;

- ◯ **Determinare, dal grafico di g i valori di x per i quali è possibile calcolare $g(g(x))$**

- ◯ **Disegnare il grafico di $g(g(\cdot))$**

Si considerino le funzioni

$$f(x)=\log_2|x^2-ax| \qquad g(x)=\arctan(f(x)) \qquad a\in(0,2)$$

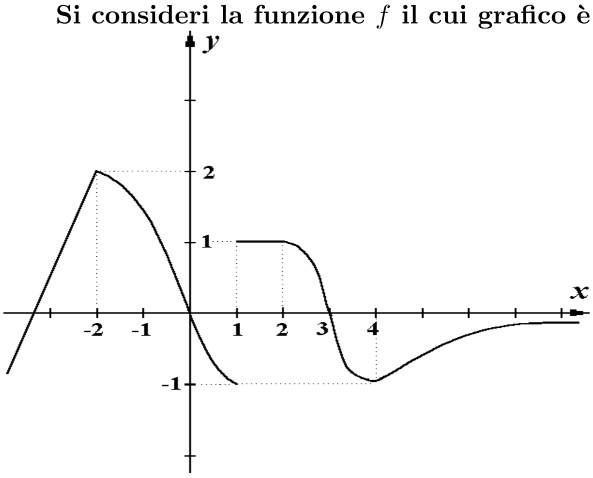
- ◯ **Disegnare il grafico di f al variare di a**

- ◯ **Disegnare il grafico di g al variare di a**

- ◯ **Disegnare il grafico di g per $a=2$ ed $a=0$**

- ◯ **Per $a=2$ stabilire ee g è invertibile su $(-\infty,0]$ ed in caso affermativo determinarne l'inversa.**

Si consideri la funzione f il cui grafico è di seguito riportato



○ **Disegnare il grafico di** $f(|x|)$ **e di** $|f(x)|$

○ **Disegnare il grafico di** $f(x+3)$ **e di** $\ln(f(x))$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln(\sqrt{x^2-1}))$$

○ **Disegnare il grafico di** f

○ **Stabilire se** f **è invertibile su** $(-\infty,-1)$ **ed in caso affermativo determinarne l'inversa.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^{63} - (x+b)^{63}}{x^c \arctan x^{63}}$$

○ **Calcolare per** $a > 1$**,** $b > 0$**,** $c > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $a = 1$**,** $b > 0$**,** $c > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $b > 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $a > 1$**,** $b = 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) =$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}}$$

○ **Calcolare per** $a > 1$**,** $b > 0$**,** $c > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $a = 1$**,** $b > 0$**,** $c > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $b > 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $a > 1$**,** $b = 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) =$$

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3} \qquad g : [-4,4] \to [-1,1]$$

dove g si suppone strettamente crescente e surgettiva

- ○ **Disegnare il grafico di f ed il grafico di una possibile g.**
- ○ **Disegnare il grafico di $f(g(x))$.**
- ○ **Disegnare il grafico di $g(f(x))$**
- ○ **Disegnare il grafico di $(f(x))^2$**
- ○ **Disegnare il grafico di $f(x^2)$**
- ○ **Calcolare l'inversa di f precisando dove f è invertibile.**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente decrescente, convessa e continua su $[-1,1)$, periodica di periodo 2, tale che $f(-1) = 0$

- ○ **Disegnare il grafico di f.**
- ○ **Stabilire se f deve essere o può essere continua in $\mathbb{R}$.**
- ○ **Stabilire se f è invertibile su $[-1,3]$.**
- ○ **Stabilire se f è invertibile su $[2,3]$.**
- ○ **Stabilire se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$**

Si consideri la funzione

$$f(x) = (\sin(x) - 1)^2 + 4$$

- ○ **Determinare una funzione g in modo che $f(x) = g(\sin x)$**
- ○ **Studiare crescenza e decrescenza di g, successivamente disegnarne il grafico e dedurne crescenza e decrescenza di f.**
- ○ **Disegnare il grafico di f**
- ○ **Disegnare con cura il grafico di f su $[0,5]$ Determinando maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di f su $[0,5]$**
- ○ **Verificare che f è strettamente crescente in $[\pi/2,\pi]$ e calcolare l'inversa di f ristretta a tale intervallo**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

◯ **Studiare la funzione $g(x) = f(x) - x$, disegnandone un grafico approssimativo.**

◯ **Studiare crescenza e decrescenza di f, giustificando brevemente i risultati senza far uso di derivate.**
(Si possono utilizzare i risultati ottenuti nel punto precedente)

◯ **Disegnare il grafico di f**

◯ **Stabilire se f è invertibile su $[0, +\infty)$ e determinare in caso affermativo la sua inversa disegnandone inoltre il grafico.**

◯ **Verificare usando la definizione che**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente decrescente, convessa e continua su $[-1, 1)$, periodica di periodo 2, tale che $f(-1) = 0$

◯ **Disegnare il grafico di f.**

◯ **Stabilire se f deve essere o può essere continua in $\mathbb{R}$.**

◯ **Stabilire se f è invertibile su $[-1, 3]$.**

◯ **Stabilire se f è invertibile su $[2, 3]$.**

◯ **Stabilire se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$**

Si consideri la funzione

$$g(x) = \min\{x, 1/x\}$$

◯ **Disegnare il grafico di g**

◯ **Determinare $\sup g$, $\inf g$, $\max g$, $\min g$.**
Sia poi

$$f(x) = \max\{g(x), 0\}$$

◯ **Disegnare il grafico di f**

◯ **Determinare $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$.**

◯ **Trovare il rango di f ed il rango di g**

◯ **Disegnare $|g|$ e $|f|$**

- ○ **Verificare che** $g(|x|) = f(|x|)$

- ○ **Stabilire se** g **è invertibile in** $(-1,0) \cup (0,1)$ **ed, in caso affermativo trovarne l'inversa precisandone il dominio.**

Si consideri la funzione

$$1 + \ln(3 - 2x - x^2)$$

- ○ **Determinare l'insieme di definizione di** f

- ○ **Determinare dove** f **è crescente, decrescente**

- ○ **Disegnare il grafico di** f**.**

- ○ **Determinare un insieme in cui** f **è invertibile**

- ○ **Determinare esplicitamente, se esiste, l'inversa di** g **di** f **ristretta all'intervallo** $(-\infty, -1]$**.**

- ○ **Determinare l'insieme di definizione ed il rango di** g **precisando se** g **è monotona e perchè.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(\frac{-x-1}{2}\right)\left(\frac{x}{|x|} - 1\right) + \left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x}{|x|} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x^2}{|x - x^2|} + 1\right)$$

- ○ **Disegnare il grafico di** f

- ○ **Determinare il rango di** f

- ○ **Stabilire se** f **è crescente e se** f **è monotòna su** $\mathbb{R}$

- ○ **Determinare un insieme contenente i punti** -2 **ed** 1 **in cui** f **sia invertibile e trovarne l'inversa.**

- ○ **Scrivere le equazioni delle rette tangenti, se esistono, al grafico della funzione** f **nei punti di ascissa** $1/2$ **ed** 1

Si consideri una delle seguenti funzioni f **ed il corrispondente intervallo** I

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{4^{|x-1|} - 4} \\ I = [1, 2) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{3^{|x-2|} - 3} \\ I = [2, 3) \end{cases}$$

- ○ **Determinare l'insieme di definizione di** f

- ○ **Stabilire se** f **è decrescente in** I

- ○ **Disegnare il grafico di** f**, giustificando il procedimento seguito**

- ○ **Sia** g **l'inversa della restrizione di** f **ad** I**, Stabilire se** g **è invertibile ed, in caso affermativo, determinare dominio, rango ed espressione esplicita di** g^{-1}

○ **Disegnare il grafico di g^{-1}**

Si consideri la funzione

$$f(x) = 4^{-x} - 2^{-x} + 1$$

○ **Determinare il campo di definizione I di f ed i sottoinsiemi di I in cui f è monotona (può essere utile considerare che f si può ottenere mediante la composizione di un polinomio di secondo grado e di un esponenziale)**

○ **Determinare**

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} f(x) \qquad \inf_{x\in(-\infty,0]} f(x)$$

○ **Stabilire se f è invertibile in $[0,+\infty)$ ed, in caso affermativo determinarne l'inversa**

○ **Stabilire per quali x è soddisfatta la disequazione**

$$f(x) \geq \frac{13}{16}$$

○ **Determinare k in modo che la funzione**

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-1}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$

Si consideri la funzione

$$f(x) = -(\sin x)^2 + 2\sin x$$

○ **Provare che f è periodica sul suo campo di definizione D.**

○ **Tracciare il grafico di f.**

○ **Stabilire se è vero che le restrizioni di f a $[0, 2\pi]$ e a $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ sono invertibili, ed in caso affermativo determinare una formulazione esplicita per l'inversa.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(\frac{2\,\sin x + 1}{1 - \sin x}\right)^2$$

○ **Determinare il dominio di f e stabilire se è periodica.**

○ **Determinare gli insiemi in cui f è monotona, precisando in quali è crescente ed in quali è decrescente.**

○ **Dopo aver determinato l'immagine di f, tracciare un grafico qualitativo della funzione stessa.**

◯ **Con quante cifre decimali è sufficiente conoscere $\sqrt{3}$ per calcolare $f(\frac{\pi}{3})$ a meno di 10^{-2}?**

◯ **Verificare, utilizzando la definizione di limite, che**

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{2x^2 - 3x + 1} = -\infty$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(\frac{2\cos x + 1}{1 - \cos x} \right)^2$$

◯ **Determinare il dominio di f e stabilire se è periodica.**

◯ **Determinare gli insiemi in cui f è monotona, precisando in quali è crescente ed in quali è decrescente.**

◯ **Dopo aver determinato l'immagine di f, tracciare un grafico qualitativo della funzione stessa.**

◯ **Con quante cifre decimali è sufficiente conoscere $\sqrt{2}$ per calcolare $f(\frac{\pi}{4})$ a meno di 10^{-2}?**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln |1 - \frac{x^2}{k^2}|$$

$$g(x) = \arctan(x)$$

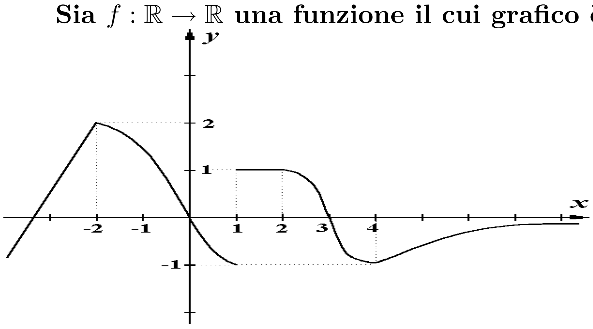
◯ **Disegnare il grafico di f**

◯ **Disegnare il grafico di g**

◯ **Disegnare il grafico di $g(f(x))$**

◯ **Disegnare il grafico di $f(g(x))$**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico è quello in figura:



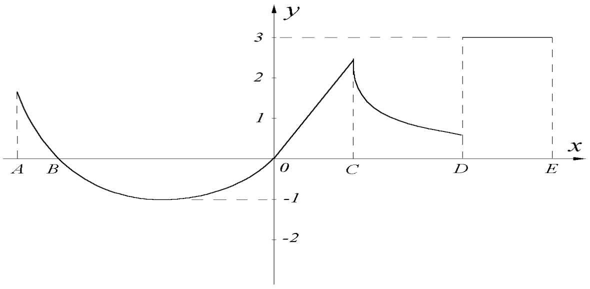
◯ **Disegnare il grafico di $f_1(x) = |f(x)|$**

◯ **Disegnare il grafico di** $f_2(x) = f(|x|)$

◯ **Disegnare il grafico di** $f_3(x) = 2f(x)$

◯ **Disegnare il grafico di** $f_4(x) = f(x + 1)$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **una funzione il cui grafico è quello in figura:**



◯ **Disegnare il grafico di** $f_1(x) = |f(x)|$

◯ **Disegnare il grafico di** $f_2(x) = f(|x|)$

◯ **Disegnare il grafico di** $f_3(x) = f(x + 1)$

◯ **Disegnare il grafico di** $f_4(x) = f(1 - x)$

Definizione di limite e grafici elementari.

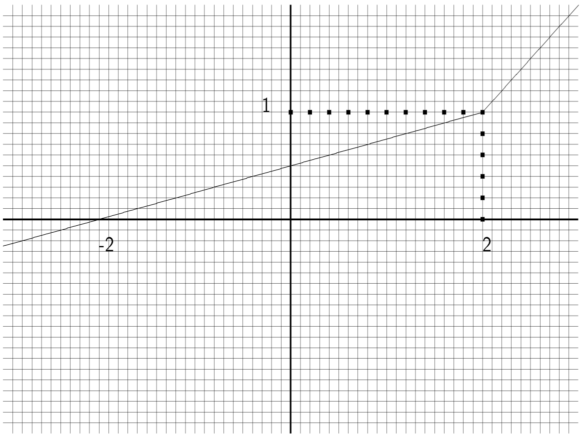
○ **Calcolare**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x(x+1))}{x^2} =$$

○ **Calcolare al variare di** $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x(x+b))}{ax^2+bx} =$$

Sia f **la funzione il cui grafico è riportato in figura**



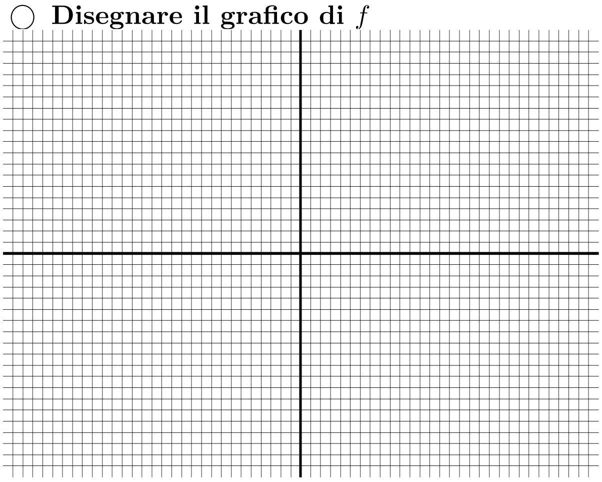
○ **Determinare, in corrispondenza di** $\epsilon = .5$ **un intorno bucato** I **di** 2 **in modo che sia verificato che** $|f(x)-1| < \epsilon$ **per** $x \in I$

○ **In corrispondenza di** $\epsilon > 0$ **determinare** $\delta > 0$ **tale che** $|f(x)-1| < \epsilon$ **per** $|x-2| < \delta$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln(\sqrt{x^2-1}))$$

○ **Disegnare il grafico di** f



○ **Stabilire se f è invertibile su $(-\infty,-1)$ ed in caso affermativo determinarne l'inversa.**

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione strettamente decrescente e continua su $[-1,1)$, periodica di periodo 2, tale che $f(-1)=0$

○ **Disegnare il grafico di f.**

○ **Stabilire se f è invertibile su $[-1,3]$.**

○ **Stabilire se f è invertibile su $[2,3]$.**

○ **Stabilire se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$**

Si consideri la funzione $f(x)=e^{\frac{k}{x}}$

○ **Al variare di $k\in\mathbb{R}$:**
determinare l'insieme di definizione di f;
calcolare i limiti di f agli estremi del dominio.

○ **Disegnare il grafico di f per $k>0$, $k=0$, $k<0$.**

○ **Sia $k>0$. Se esiste, determinare l'inversa f^{-1} della funzione f e disegnarne il grafico.**

Sia

$$f(x)=x^3+kx^2+1$$

○ **Determinare al variare di $k\in\mathbb{R}_+$ l'insieme in cui f è crescente**

○ **Per $k=1$ disegnare il grafico di f**

○ **Per $k=1$ disegnare stabilire se f è invertibile su $x\geq 0$ ed, in caso affermativo, determinare dominio, rango e disegnare il grafico dell'inversa.**

○ **Per $k=-3$ disegnare il grafico di f**

○ **Per $k=-3$ determinare, al variare di $t\in\mathbb{R}$, il numero degli zeri dell'equazione $f(x)=t$**

Si consideri la funzione

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x^{101}}}{1-2x^{101}}$$

○ **Determinare il campo di definizione di f giustificando brevemente la risposta**

○ **Studiare continuità e derivabilità di f**

○ **Studiare crescenza e decrescenza di f**

○ **Disegnare il grafico di f**

○ **Stabilire se f è invertibile, giustificando brevemente la risposta. e determinare l'inversa di f precisando dove essa esiste e perchè.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(|x^2 - 1| + 1)$$

○ **Disegnare il grafico di f precisando il suo campo di definizione**

○ **Determinare l'insieme in cui f è continua**

○ **Determinare l'insieme in cui f è derivabile**

○ **Determinare una restrizione di f che sia invertibile e trovarne l'inversa, precisando se è possibile invertire f su tutto $\mathbb{R}$ e perchè.**

○ **Determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to -1$**

Si consideri la funzione

$$f(x) = (\sin(x) - 1)^2 + 4$$

○ **Determinare una funzione g in modo che $f(x) = g(\sin x)$**

○ **Studiare crescenza e decrescenza di g, successivamente disegnarne il grafico e dedurne crescenza e decrescenza di f.**

○ **Disegnare il grafico di f**

○ **Disegnare con cura il grafico di f su $[0, 5]$ Determinando maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di f su $[0, 5]$**

○ **Verificare che f è strettamente crescente in $[\pi/2, \pi]$ e calcolare l'inversa di f ristretta a tale intervallo**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

○ **Studiare la funzione $g(x) = f(x) - x$, disegnandone un grafico approssimativo.**

○ **Studiare crescenza e decrescenza di f.**

○ **Disegnare il grafico di f**

○ **Stabilire se f è invertibile su $[0, +\infty)$ e determinare in caso affermativo la sua inversa disegnandone inoltre il grafico.**

○ **Verificare usando la definizione che**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Calcolo di limiti

○ **Calcolare**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x(x+1))}{x^2} =$$

○ **Calcolare al variare di** $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x(x+b))}{ax^2+bx} =$$

○ **Calcolare**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{x} =$$

○ **Calcolare al variare di** $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2-x} - a}{x} =$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^{42} - (x+b)^{42}}{x^c \arctan x^{21}}$$

○ **Calcolare per** $a > 1$**,** $b > 0$**,** $c > 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $a = 1$**,** $b > 0$**,** $c > 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $b > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

○ **Calcolare per** $a > 1$**,** $b = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^{63} - (x+b)^{63}}{x^c \arctan x^{63}}$$

○ **Calcolare per** $a > 1$**,** $b > 0$**,** $c > 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per $a = 1$, $b > 0$, $c > 0$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

○ **Calcolare per $b > 0$**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

○ **Calcolare per $a > 1$, $b = 0$**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

○ **Calcolare**

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 + 1 - e^x}{x^3} =$$

○ **Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$**

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 + 1 - e^x}{x^\alpha} =$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2\cos(x) - x^2}{x^a} & x > 0 \\ \dfrac{e^x - b}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

○ **Al variare di a, calcolare**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

○ **Al variare di b, calcolare**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

○

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } x - \sin x}{x^n} \quad (n \in \mathbf{Z}) \qquad \lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \sin^2\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to k\frac{\pi}{2}} E[\cos x], \quad k \in \mathbf{Z}, \quad k \neq 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to x_0} \left|\frac{x - |x+1|}{x}\right|, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 7} \left\{E[x] + (x - E[x])^2\right\} \qquad \lim_{x\to+\infty} x \ \sin x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x + \sqrt{x^2\tan x}} \qquad \lim_{x\to x_0} \left[x^8 + |x^7 - 1| + 1\right]^{1+x^2-|x|^2} \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-kx}\right), \ k \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{k\to-\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-kx}\right),\ x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^m-1}{x^n-1}\quad(m,n\in\mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x-E[x]},\quad x_0\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left\{\sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-\sin\sqrt{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2+\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to1}(x-1)\left[\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]^2$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^k\sin^k x},\ k\in\mathbf{Z}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{x}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2},\quad(a>b)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+\sin x^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{cotg}\ x}{2x-\pi}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{a\ \sin x+x+ax^2},\quad(a\in\mathbb{R})$$

○

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan\ 2x}{\sin\ x}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\ x^3}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\ x+3\sin\ x}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin\ x}{x+1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\ x-3\sin\ x\cos\ x+x\cos^2\ x}{x^2\cos\ x-3x\cos\ x+x\cos^3\ x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\ x}{3+\sin\ x}$$

$$\lim_{x\to0}\sin\ \left(\frac{\sin^2\ x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^3+1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to0}x^2-\cot^2\ x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin\ x}{4x-\sin\ x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin\ (3x)}{\sin\ (2x)\sin(5x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^3\ x}{\cos^2\ x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\ 2x}{\sin\ x+1}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\ x}{(\pi-2x)^2}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos\ x}{\sin^2(\pi-x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\ x-3\sin\ x+2}{\sin\ x-1}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3\ x+1}{x^3-3x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\sin\ \left(\frac{\sin\ x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\cot\ x\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}-\sin\ x}{\tan\ x\sqrt{\sin\ x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-5\sin\ x+x\cos\ x}{x^5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2-3x+5}{x^3-3x^2+4}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4\ \sin\ x-x-x^2}{\sin\ x-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^4-3x^2-2x+1}.$$

$$\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2-\cos\ x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$$
$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\right)$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin\ 2x}{\sin\ x+1}$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2-\cos\ x}$$
$$\lim_{x\to +\infty} x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$
$$\lim_{x\to 0^+} 1-\cos x/x^k\sin(kx)\,,\ \ k\in\mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln x)}{\ln x}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x-x}$$
$$\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x^{\sin x})$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln x^2}{e^{1/x^2}}$$
$$\lim_{x\to 0}\cot^2 x\cdot\ln(1+x)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$
$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{(x^2-1)^2}-\frac{1}{\ln x}\right\}$$
$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{1/\tan x}$$
$$\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}.$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left\{\ln\left(x^2-1\right)-\ln\left(x^2-x+1\right)\right\}$$
$$\lim_{x\to \pi/4}\frac{\sin\ (2x)-1}{2\sin x-\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$
$$\lim_{x\to a^+}\frac{\ln(e^x-e^a)}{\ln(x-a)}$$
$$\lim_{x\to +\infty} 2^x\sin\frac{1}{2^x}$$
$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x}\ln x$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln(3x)}$$
$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$$

○

$$(-1)^n\,\frac{2}{2n^2+\sqrt{n}}$$
$$\frac{\ln\ n}{n},$$
$$\ln\ n-n$$
$$\frac{\text{sen}\ n}{n},$$
$$e^n-(-1)^n\ln\ n$$
$$\sqrt[n]{n},$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^4}$$
$$\frac{n}{(n+1)^n},$$
$$(-1)^n\,\frac{2-e^{-n}}{1+e^{-n}}$$
$$\sqrt{n^3}+1,$$
$$n-\sqrt{2n-1}$$
$$\sqrt{n^3}-1-10n,$$
$$(-1)^n\,\frac{n\ \text{sen}\ 1/n}{1+n}$$
$$(-1)^n\,\frac{n^n}{2^n-10},$$
$$\frac{(-1)^n\,2^n}{2^{n+2}+1}$$
$$(-1)^n\,\frac{n^2\,(1+\sin\ 1/n)}{1+n},$$
$$\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}$$
$$(-1)^{n+1}\,\frac{2-e^{-n}}{1+e^{n^2}}$$
$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2},$$
$$\left(1+\frac{1}{\ln\ n}\right)^{\ln\ n}$$
$$\frac{n}{n^2+\sqrt{n}},$$
$$(-1)^n\,\frac{3}{n+\sqrt{n}}$$
$$\frac{n+1}{2n^2-\sqrt{n}},$$

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} \qquad \sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1},$$

$$\sqrt{(n-\alpha)(n-\beta)}-n \qquad n^2\left(1-\frac{\cos\ 2a}{n}\right),$$

$$\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\ \frac{b}{n}} \qquad \frac{\sin\frac{1}{n}}{n\left(1-\cos\ \frac{1}{n}\right)},$$

$$n\ \ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad n\ \ \ln\left(1+\mathrm{sen}\frac{1}{n}\right),$$

$$\sqrt{\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}} \qquad \frac{5^{2n}+(1+1/n+2)^{n+2}}{\mathrm{sen}\ n+4n},$$

$$\frac{n^3-\cos\ x^n}{\mathrm{sen}\ x^n+n^3}.$$

Successioni

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

e si ponga

$$b_n = a_{2n}, \qquad c_n = a_{2n+1}$$

◯ **Determinare** b_0 **e ricavare** b_n **in funzione di** b_{n-1}**.**

◯ **Provare che** b_n **è decrescente e calcolare il limite di** b_n

◯ **Rappresentare graficamente la successione ricorrente** a_n

◯ **Stabilire per ciascuno dei seguenti fatti se è vero o falso.**
c_n **è crescente** ◯

c_n **è decrescente** ◯

c_n **è limitata** ◯

c_n **non è limitata** ◯

c_n **ammette limite** ◯ **ed il suo limite è...........**

c_n **non ammette limite** ◯

a_n **ammette limite** ◯ **ed il suo limite è...........**

a_n **non ammette limite** ◯

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = a \end{cases}$$

◯ **Stabilire per quali valori di** a, a_n **è crescente**

◯ **Stabilire per quali valori di** a, a_n **è decrescente**

◯ **Stabilire per quali valori di** a, a_n **ammette limite e calcolarlo**

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sin(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

◯ **Per** $a = 3$**, verificare che** $a_n \in (0, \pi)$

◯ **Per $a = 3$, provare che a_n è decrescente**

◯ **Calcolare per $a = 3$**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

◯ **Per $a = -4$, studiare il comportamento di a_n**

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n - 1} \\ a_0 = a \end{cases}$$

◯ **Studiare il comportamento della successione per $a = 4$,**

◯ **Studiare il comportamento della successione per $a = -4$,**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

◯ **Disegnare il grafico di f**
Si consideri poi la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

◯ **Determinare al variare di a gli eventuali limiti della successione a_n (Non è necessario giustificare con calcoli le affermazioni, ma si richiede un risultato corretto supportato da considerazioni sul grafico di f)**

Sia a_n la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + k \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

◯ **Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che $a_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.**

◯ **Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il limite di a_n.**

◯ **Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ a_n è monotona.**

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \\ a_0 = k \in \mathbb{R} \quad k > 0 \end{cases}$$

○ **Dimostrare che $a_n > 0$ e che a_n è definita per ogni $n \in \mathbb{N}$**

○ **Dimostrare che a_n è decrescente**

○ **Calcolare $\lim a_n$**

○ **Studiare la successione per $k = 0$**

○ **Mostrare che se $-1 < k < 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $1 + a_{n_0} < 0$ per cui a_{n_0+1} non è definito.**

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 \\ a_0 = k \end{cases}$$

○ **Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la crescenza e la decrescenza di a_n.**

○ **Determinarne limite, estremo superiore ed estremo inferiore.**

○ **Studiare successivamente la successione**

$$\begin{cases} b_{n+1} = (-1)^n (b_n)^2 \\ a_0 = -k \end{cases}$$

provando che $b_n = (-1)^{n+1} a_n$.

Si considerino tutte le successioni tali che

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

○ **Determinare tutti i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $a_n = \lambda^n$ giustificando brevemente le affermazioni**

○ **Verificare che $a_n = \alpha 2^n + \beta$ giustificando brevemente le affermazioni**

○ **Determinare α, β in modo che $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ giustificando brevemente le affermazioni**

○ **Determinare una regola di ricorrenza per la successione**

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

○ **Calcolare il limite di r_n**

Sia

$$f(x) = \sin x$$

oppure

$$f(x) = \arctan x$$

Data la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **definita da**

$$a_0 = \pi/2, \qquad a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

stabilire il segno di a_n

◯ **La funzione** $x - f(x)$ **è crescente in** $\mathbb{R}$**?**

◯ **La funzione** $x - f(x)$ **è decrescente in** $\mathbb{R}$**?**

◯ **La successione è limitata?**

◯ **La successione è crescente?**

◯ **La successione è decrescente?**

◯ **Si ha** $lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$**. Perché?**

Si considerino le successioni definite da

$$\begin{cases} a_0 = k \\ a_{n+1} = \delta a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = \beta \\ b_{n+1} = \delta b_n + \varepsilon \end{cases}$$

ove $\delta \neq 1$

◯ **Trovare per quali valori di** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$ **si ha**

$$a_n = \mu\lambda^n$$

◯ **Trovare per quali valori** $\beta \in \mathbb{R}$ **si ha**

$$b_n = \beta$$

Sia

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \delta c_n + \varepsilon \end{cases}$$

◯ **Trovare per quali valori di** $\beta, k \in \mathbb{R}$ **si ha** $c_n = b_n - a_n$

◯ **Trovare una espressione esplicita della successione** c_n

◯ **Calcolare** $\lim c_n =$**.**

Si consideri la successione definita da

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} \quad , \quad a_0 = 1/2.$$

◯ **Provare che** $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$**.**

○ **Trovare una formula di ricorrenza per le successioni**

$$b_n = a_{2n} \quad \textbf{e} \quad c_n = a_{2n+1} \quad , \quad n \geq 0.$$

○ **Provare che b_n è crescente e che c_n è decrescente.**

○ **Trovare i limiti di b_n, di c_n e di a_n, se esistono.**

○ **Detta $a_n = p_n/q_n$, con $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, trovare una formula di ricorrenza che definisca p_n e q_n e calcolare i limiti di p_n e q_n, se esistono.**

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + 5}{3} \\ a_0 = k \end{cases}$$

○ **Determinare, se esiste, $k \in \mathbb{R}$ in modo che la successione sia costante.**

○ **Nel caso $k = 10$, stabilire se esiste il limite della successione, ed in caso affermativo, calcolarlo.**

○ **Nel caso $k = 10$, verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha**

$$a_n = \frac{5}{2}\left(1 + \frac{3}{3^n}\right)$$

○ **Sempre per $k = 10$, determinare n in modo che a_n approssimi il limite a meno di 10^{-5}.**

Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza da:

$$a_1 = 3\,, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2 + a_n}$$

○ **Dopo averne valutato l'eventuale monotonia, calcolare, se esiste, il limite della successione.**

Sia a_n la successione definita per ricorrenza da:

$$a_1 = 3 \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - a_n + 1}\,.$$

○ **Stabilire se a_n é monotona e calcolarne il limite, se esiste.**

Si consideri la funzione definita da

$$\begin{cases} \dfrac{e^x \sin(x^4)}{x} & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{(\ln x)^2}{x-1} + x & x > 1 \end{cases}$$

○ **Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in 0.**
f è continua in 0 per

○ **Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in 0 ed in 1.**
f è continua in 0 ed in 1 per

○ **Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia derivabile in 0.**
f è derivabile in 0 per

○ **Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia derivabile in 0 ed in 1.**
f è derivabile in 0 ed in 1 per

Si consideri la funzione definita da

$$\begin{cases} \dfrac{e^{2x} - a}{x} & x < 0 \\ x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ b\dfrac{(\ln x)^2}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

○ **Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia continua in $\mathbb{R}$.**
f è continua in $\mathbb{R}$ per

○ **Determinare, se possibile, a, b in modo che f sia derivabile in $\mathbb{R}$.**
f è derivabile in $\mathbb{R}$ per

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cos(x) - x^2}{x^a} & x > 0 \\ \dfrac{e^x - b}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

○ **Al variare di a, calcolare**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

e stabilire se f è prolungabile per continuità in $x = 0$ da destra

◯ **Al variare di b, calcolare**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

e stabilire se f è prolungabile per continuità in $x=0$ da sinistra

◯ **Al variare di a,b, stabilire se f è prolungabile per continuità in $x=0$**

Si consideri la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-b-\cos(x)}{x} & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$$

◯ **Determinare a,b,c, in modo che f sia prolungabile per continuità in 0**

◯ **Determinare a,b,c, in modo che f sia derivabile in 0**

◯ **Calcolare $f'(x)$**

◯ **Scrivere, se esiste, la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(0,c)$**

◯ **Studiare le seguenti funzioni definendo, se esistono, prolungamenti continui e derivabili su $\mathbb{R}$;**

e^{x^2},	$\sin(2x)$,	$\sqrt{1+4x^2}$
$(x-1)^4$,	$\ln(1+x^2)$,	$\sqrt[3]{1+x}$
$x^{1/3}$,	$x^{3/2}$,	$x^{2/3}$,
$x^{-3/2}$,	$x^{-2/3}$,	$\lvert\ln(x+1)\rvert$
$\begin{cases} x\ \sin\ 1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,	$\begin{cases} x^2\sin\ 1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,	x^x
$\sqrt[3]{x^2-2x+3}$	$x^2\sin(1+\ln x^2)$	$\arcsin\left\lvert\dfrac{x}{x+1}\right\rvert$
$\arcsin\left\lvert\dfrac{x}{x-1}\right\rvert$	$x2^{\sin x}$	$\ln\sqrt{x^2-3x+8}$
$\dfrac{\ln\lvert x^2-6x+8\rvert}{x-1}$	$\arcsin\dfrac{1}{\ln\lvert x-1\rvert}$	$x+\sin x$
$\ln(x^2+1)$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$	$\dfrac{x^2\lvert x-1\rvert}{x+1}$
$\sin^4 x+\cos^4 x$	$x^{2/3}e^{-x}$	$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
x^3-3x	x^4-6x^2	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\dfrac{2x}{x^3-1}$	$\lvert 1-x^2\rvert$	$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
$\left\lvert\dfrac{x}{x^2+1}\right\rvert$	$\dfrac{x}{x^3+1}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\dfrac{x^2}{1+x}$	$\sin^2 x$	$\sqrt{1-x^2}$
$x-\sqrt{x-1}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$	$\lvert x\rvert+\lvert 2x-1\rvert$

$\dfrac{1-\sin x}{\sqrt{\cos x}}$	$\ln(x^2+2x)$	
e^{2x+3}	$\arcsin\ e^x$	2^{3x}
$\ln(\ln x)$	$\lg_x\ e$	$\ln(\sin\ x)$
x^{3x}	$x^{\ln\ x}$	$(\sin\ x)^{\cos\ x}$
$\arcsin\ (3x^2-7)$	$\dfrac{\sin\ x}{\arcsin\ x}$	$\arctan\ \dfrac{1}{x}$
e^{-x}	e^{x^2}	$\sin\ (\arcsin\ x)^2$
e^{2x}	$e^{(2^x)}$	$e^{-x^2/x}$
$2^{(x^2)}$	$e^{\arctan\ x}$	$x^{(x^x)}$
$(\ln\ x)^x$	$\ln(\sin\ x)$	$x^{1/x}$
$(\sin\ x)^n$	$\cos\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	$\sin\ (x^n)$

○ **Calcolare la derivata di**

$$\sin\left(\sin(\sin x)\right) \quad , \quad (x^x)^x \quad , \quad (x)^{x^x},$$

$$\lg_{v(x)} u(x) \quad , \quad \left(x+(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x^7 \sin\ x^9 \mathrm{E}\left(\cos\ (\sin x^2)+x\right).$$

○ **Discutere la derivabilità di**

$$f : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} -\left|1-2x^2\right| & x<0 \\ \ln(1-2x) & 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x+\ \mathrm{E}(x)} & x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Siano

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le c \\ ax+b & x > c \end{cases};$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| > c \\ ax+b & |x| \le c \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\ x & x \le c \\ ax+b & x > c \end{cases}.$$

Trovare i valori di a e b (in funzione di c) per cui esiste $f'(c)$.

○ **Calcolare gli zeri della derivata prima di**

$$|\sin x| \quad , \quad \sin|x| \quad , \quad \sin(nx)$$

$$|\sin(nx)| \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

○ **Calcolare la derivata di**

$$\arctan\frac{1}{x} \quad , \quad \arcsin(\cos x) \quad , \quad \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad \arcsin(2x^2)$$

Sia $f(x) = 5x^{271} + 3x^{18} + 1, \quad x \geq 0$.

○ **Osservare che f è invertibile e che $f(1) = 9$.**

○ **Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico dell'inversa nel punto di ascissa 9.**

Sia

$$f(x) = 3x^2 - x - 1, \qquad per \qquad x \geq \frac{1}{6}$$

○ **Calcolare, se esiste, la derivata dell'inversa in 7 .**
a) **usando il teorema di derivazione della funzione inversa;**
b) **trovando una formula per l'inversa (se possibile).**

Sia $f(x) = 3x^2 - x - 1$, per $x \leq \frac{1}{6}$.

○ **Calcolare, se esiste, la derivata dell'inversa in -5.**
a) **usando il teorema di derivazione della funzione inversa;**
b) **trovando una formula per l'inversa (se possibile).**

Sia $f(x) = x^{21} + 6$.

○ **Calcolare, se esiste, la derivata dell'inversa.**
a) **usando il teorema di derivazione della funzione inversa;**
b) **trovando una formula per l'inversa (se possibile).**

Stabilire se la funzione $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$ è invertibile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$? Detta g l'inversa di f ristretta a $(0, +\infty)$ calcolare, se esiste, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Sia g l'inversa di

$$f(x) = x + \ln\ x + e^x$$

in $(0, +\infty)$. Calcolare $g'(1 + e)$.

Sia g l'inversa di

$$f(x) = \ln(1 + kx^2) \ (k \in \mathbb{R})$$

Calcolare $g'(1)$.

Sia g derivabile in $\mathbb{R}$.

○ **Stabilire per quali valori di $t, x \in \mathbb{R}$ $g(t - a^x + \sin\ x)$ è derivabile ?**

○ **Calcolare per tali valori**

$$\frac{d}{dx}[g(t - a^x + \sin\ x)]$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{\sin|x|^k}\right)}{\sin^n x} & \text{se} \qquad x \neq 0,\ \sin^n\ x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \qquad x = 0 \end{cases}$$

○ **Determinare** n **e** $k\ \in\ \mathbb{N}$ **tali che** f **sia derivabile in** 0**.**

Calcolare la derivata di

$$F(x) = \begin{vmatrix} e^x & \sin\ x & x^x \\ x & \ln\ x & \sqrt{x} \\ 5 & \frac{1}{x} & x^3 \end{vmatrix}.$$

Formula di Taylor, Grafico di funzione

○ **Disegnare il grafico di** $f(x) = xe^{-x}$

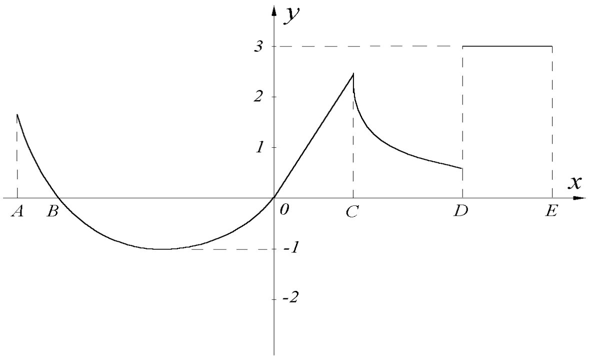
○ **Stabilire per quali** x **si ha**

$$e^{-x} < \frac{1}{x}$$

○ **Disegnare il grafico di** $g(x) = \ln|x| + e^{-x}$

○ **Stabilire quante volte si annulla** g **ed il segno dei punti in cui** g **vale** 0

Sia f **una funzione derivabile due volte tale che** $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ **e sia**



il grafico della sua derivata seconda

○ **Disegnare il grafico di** f'

○ **Disegnare il grafico di** f

○ **Scrivere il suo polinomio di McLaurin di grado** 2

○ **Stabilire con quale errore la retta tangente (Polinomio di McLaurin di grado** 1**) approssima la funzione data.**

○ **Disegnare il grafico di** $f(x) = (x^2 - 1)e^x$

○ **Stabilire quante soluzioni ha l'equazione** $f(x) = k$, **al variare di** $k \in \mathbb{R}$

Sia f **una funzione derivabile due volte tale che** $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ **e**

$$f''(x) = \begin{cases} x(x+1) & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \\ 1 - 3x & x > 2 \end{cases}$$

○ **Disegnare il grafico di** f'

- ◯ **Disegnare il grafico di f**

- ◯ **Scrivere il suo polinomio di McLaurin di grado 4**

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x^2 + 1)\arctan(x) - 2x$$

- ◯ **Calcolare f' ed f''**

- ◯ **Disegnare il grafico di f'**

- ◯ **Disegnare il grafico di f**

- ◯ **Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 0$**

- ◯ **Scrivere il resto di Peano ed il resto di Lagrange relativi al polinomio di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 0$**

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 e^x + kx \qquad k \in \mathbb{R}$$

- ◯ **Disegnare il grafico di f'**

- ◯ **Disegnare il grafico di f**

- ◯ **per $k = 0$ Scrivere il polinomio di McLaurin di ordine 10 di f**

---

(1) Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$ tale che

$$f'(x) = \sin(f(x)) \qquad\qquad f(0) = \frac{\pi}{2}$$

OPPURE

(2) Sia $f(x) = 2\arctan(e^x)$

- ◯
  (1) PER IL CASO (1) Derivare entrambi i membri della (1) e ricavare f'' in funzione di f ed f' ed f''' in funzione di f f' ed f''
  (2) PER IL CASO (2) Calcolare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

- ◯ **Calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ e scrivere il polinomio di Taylor P_2 ed il polinomio di Taylor P_3 di f centrato in 0 di grado 2 e 3, rispettivamente.**

- ◯ **Disegnare il grafico di P_2 e di P_3 per $|x| \leq 1$**

- ◯ **SCONSIGLIATA PER IL CASO (2) Provare che $|f'(x)| \leq 1$ $|f''(x)| \leq 1$ $|f'''(x)| \leq 2$**

- ◯ **Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$ stimare il resto di Lagrange relativo al polinomio di Taylor di grado 2 in funzione di x**

○ **Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, disegnare un maggiorante ed un minorante di f per $|x| \leq 1$**

○ **Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, determinare un maggiorante dell'errore commesso sostituendo f con P_2 per $|x| \leq 1/2$.**

○ **Trovare, se possibile, a in modo che $f(x) - ax - \frac{\pi}{2}$ sia infinitesima in 0 di ordine superiore al secondo.**

Sia $f(x) = x + x^2 + 2x^3 + (2\sin(x^5))^2$

○ **Scrivere il polinomio di Taylor di f centrato in $x = 0$ di grado 2**

○ **Calcolare $f'(0)$ $f''(0)$, $f^{(7)}(0)$, $f^{(10)}(0)$**

○ **Calcolare $f(0.1)$ a meno di $.0001$**

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 + x)e^x$$

○ **Disegnare il grafico di f**

○ **Scrivere lo sviluppo di McLaurin di f di grado 1, e l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0)0$**

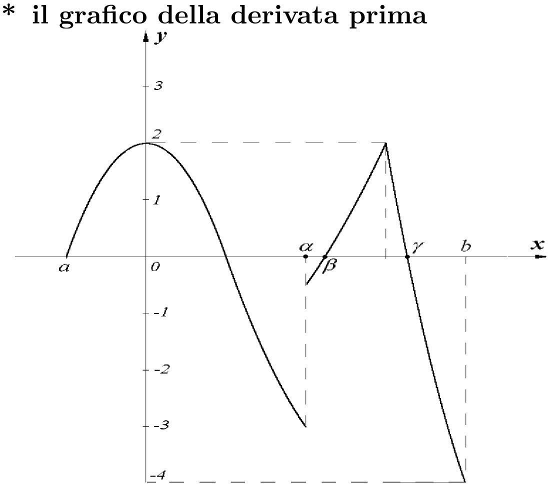
○ **Scrivere lo sviluppo di McLaurin di $f(x)$ di ordine 3 con il resto nella forma di Lagrange**

○ **Scrivere lo sviluppo di McLaurin di $f(x)$ di ordine 5 con il resto nella forma di Peano**

○ **Determinare l'ordine di infinitesimo a di $(1 + x)e^x - 1 - 2x$ nell'origine e calcolare**

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)e^x - 1 - 2x}{x^a}$$

Si consideri la funzione f sull'intervallo $[a, b]$ di cui è noto
* **il grafico della derivata prima**



* **i valori** $f(0) = 0$, $f(\alpha) = -1$, $f(\beta) = -2$. $f(\gamma) = 1$

○ **Disegnare il grafico di** f

○ **Precisare gli intervalli in cui** f **è convessa o concava e trovare eventuali punti di flesso.**

○ **Determinare i valori massimi e minimi assoluti di** f'

○ **Stimare, usando il teorema di Lagrange,** $f(a)$.

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 + x)\ln(x + 1)$$

○ **Disegnare il grafico di** f

○ **Scrivere lo sviluppo di McLaurin di** f **di grado** 1, **e l'equazione della retta tangente al grafico di** f **nel punto** $(0, f(0))$

○ **Scrivere lo sviluppo di McLaurin di** $f(x)$ **di ordine** 5 **con il resto nella forma di Peano**

Si consideri la funzione f **sull'intervallo** $[a, b]$ **di cui è noto che** $f(0) = 0$ **e che**

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 2 \\ x^2 & 2 \le x \le 3 \\ 12 - x & x > 3 \end{cases}$$

○ **Disegnare il grafico di** f

○ **Precisare gli intervalli in cui** f **è convessa o concava e trovare eventuali punti di flesso.**

○ **Determinare i valori massimi e minimi assoluti di** f'

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \sin x^3 \qquad g(x) = e^{x^2}$$

○ **Scrivere gli sviluppi di McLaurin di** $\sin x$ **e** e^x **di ordine** n **con il resto nella forma di Peano.**

○ **Scrivere gli sviluppi di McLaurin di** f **e** g **di ordine** 6 **con il resto nella forma di Peano.**

○ **Scrivere gli sviluppi di McLaurin di** $f(x)g(x)$ **di ordine** 6 **con il resto nella forma di Peano.**

○ **Calcolare, al variare di** α **reale**

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - 1)\sin x^3}{x^\alpha}$$

○ **Determinare l'ordine di infinitesimo di** $(e^{x^2} - 1)\sin x^3$ **nell'origine.**

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad g(x) = (\sin x)^2 \qquad h(x) = \ln\left(1 + \frac{(\sin x)^2}{10}\right)$$

◯ **Determinare il polinomio di McLaurin di f che approssima f a meno di $\frac{1}{200}$ sull'intervallo $[0, \frac{1}{10}]$.**

◯ **Determinare l'errore che si commette sostituendo ad $h(x)$ il valore $\frac{(\sin x)^2}{10}$ per $x \in \mathbb{R}$**

◯ **Trovare lo sviluppo di McLaurin di g di ordine 2 e stimare il resto di Lagrange corrispondente per $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$**

◯ **Stimare l'errore che si commette sostituendo $h(x)$ con $\frac{x^2}{10}$ per $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$**

Si consideri la funzione

$$f(x) = (1+x)\arctan x$$

◯ **Calcolare la derivata prima di f** $\quad f'(x) =$

◯ **Calcolare la derivata seconda di f** $\quad f''(x) =$

◯ **Disegnare il grafico di f'**

◯ **Disegnare il grafico di f**

◯ **Precisare dove f è convessa e dove f è concava**

◯ **Determinare la retta tangente al grafico di f nei punti in cui f'' si annulla e stabilire la posizione di tale retta rispetto al grafico.**

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \log(1+x^4) \qquad g(x) = \cos(x)$$

◯ **Scrivere gli sviluppi di McLaurin di f e g di ordine** 5

◯ **Calcolare,**

$$\lim_{x \to 0} \frac{(g(x)-1)^2 - f(x)}{x^4}$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan x$$

◯ **Determinare il polinomio $p(x)$ di McLaurin di f del primo ordine**

◯ **Scrivere il resto di Lagrange relativo al polinomio $p(x)$ di McLaurin di f del primo ordine**

○ **Determinare δ in modo che**

$$|f(x) - p(x)| \leq 10^{-3}$$

su $[-\delta, \delta]$

Si consideri la funzione

$$f(x) = x \log(1 + x)$$

○ **Disegnare il grafico di** f'

○ **Disegnare il grafico di** f

○ **Trovare un polinomio** $P(x)$
a) di 1^o **grado e tale che** $P(0) = a,\ P'(0) = b$**;**
b) di 2^o **grado e tale che** $P(0) = a,\ P''(0) = c$**;**
c) di 3^o **grado e tale che** $P''(0) = c$ **e** $P'''(0) = d$**.**

○
Studiare la relazione che intercorre tra i coefficienti di un polinomio di grado n **e le sue derivate in** 0**. Cosa si può dire se si sostituisce** x_0 **a** 0**.**

○ **Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito (per** $x \to +\infty$**), rispetto all'infinitesimo o all'infinito campione di**

$$\sqrt[3]{x},\ (1 + 2x)\sqrt{x},\ x^2 \arctan\ x,\ x^{\frac{x}{x-1}}\ ,\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

○ **Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito (per** $x \to 0$**), rispetto all'infinitesimo o all'infinito campione di**

$$x - \sin x\ ,\ e^x - x\ ,\ \frac{x}{x - \tan\ x}\ ,\ x + e^{-1/x^2}$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

○ **Calcolare, se esiste,** $f^{(n)}(0)$**.**

○ **Confrontare fra loro per** $x \to +\infty$ **le funzioni:**

$$\frac{\ln\ x}{\sqrt{x}}\ ,\ \frac{\ln(\ln\ x)}{\ln x}\ ,\ \frac{x}{\ln\ x}$$

$$x(\ln\ x)^2\ ,\ e^{-x}x^3\ ,\ \frac{x\ \ln x}{(\ln(\ln\ x))^2}$$

$$\frac{x^2+1}{x\ \ln\ x}\ ,\ \frac{x\,(\ln(\ln\ x))^3}{\ln\ x}\ ,\ x\ \ln\ (x\ \ln\ x)$$

○ **Calcolare** $\sin 0,2$ **a meno di** 10^{-5} **ed** $e^{0,003}$ **a meno di** 10^{-9}.

○ **Trovare i primi** $(n \leq 5)$ **polinomi di Mac Laurin per le funzioni**

$$x^{x^2},\ \tan x,\ \arctan x,\ \arcsin x.$$

○ **Trovare il polinomio di Mac Laurin di ordine** n **per le funzioni**

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f(x) = \ln(1+x)$$
$$f(x) = \sqrt{1+x}$$
$$f(x) = (x-1)^4$$
$$f(x) = 2^x.$$

○ **Trovare il polinomio di Mac Laurin ed una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo il polinomio alla funzione nei seguenti casi:**

$a)$ $f(x) = e^x$,	$0 \leq x \leq 2$	$n = 2$;
$b)$ $f(x) = e^x$,	$-3 \leq x \leq 0$	$n = 1$;
$c)$ $f(x) = \cos\ x$,	$0 \leq x \leq 0,1$	$n = 3$;
$d)$ $f(x) = \frac{1}{1+x}$,	$0 \leq x \leq 0,2$	$n = 2$;
$e)$ $f(x) = \sin x^2 + \cos\lvert x\rvert$,	$\lvert x\rvert < \frac{1}{10}$,	$n = 2$.

○ **Valutare l'errore che si commette approssimando:**

$a)$ e^x	**con**	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	**per**	$0 \leq x \leq 2$
$b)$ e^x	**con**	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	**per**	$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
$c)$ $\tan x$	**con**	x	**per**	$-0,2 \leq x \leq 0,2$

◯ **Calcolare i seguenti limiti (se esistono) precisando in quali casi si può applicare il teorema di De l'Hôpital**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos\ x}-\frac{2}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}(a^x+1)^{\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2\ x}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin\ x}{x(1-\cos\ x)}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{2\sin\ x+x\cos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin\ x}{x+\cos\ x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)-\sin x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\ 1/x}{\sin\ x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin\ x}{x+\cos\ x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left\{(\ln\ x)^x-\frac{x^3+x^2}{x^2+1}-\left(1+\cos\ \frac{1}{x}\right)^x\right\}.$$

◯ **Usando la formula di Taylor calcolare il seguente limite**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin\ x-x(1+x)}{x^3}.$$

◯ **L'equazione $\ln\ x = e^x$ ha una soluzione, ha un numero finito di soluzioni, ha infinite soluzioni, oppure non ha soluzioni?**

Se $f(x)$ è infinitesimo d'ordine superiore a $g(x)$ e $g(x)$ è infinitesimo d'ordine superiore ad $h(x)$, sono confrontabili $f(x)$ e $g(x)-h(x)$?

Il resto della formula di Taylor di grado n è nullo per tutti i polinomi, per i polinomi di grado $\leq n$, in un intorno di $x=x_0$, in altri casi?

◯ **Se**

$$f(x_0)=g(x_0)$$
$$f'(x_0)=g'(x_0)$$
$$f''(x_0)\neq g''(x_0)$$
$$f'''(x_0)=g'''(x_0)$$

allora

$$f(x)-g(x)$$

è infinitesimo di ordine $1,2,3$ o 4?

○ **Calcolare i seguenti limiti (se esistono):**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\ x - x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x) - x + \arctan\ \frac{1}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\ln x}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{1/x^2}+e^{1/x^4}\ln x}{e^{1/x^2}-e^{1/x^4}} + \frac{|\ln(1+\cos x)| + 1/x}{x^4}\right\}$$
$$\lim_{x\to 0}\{(\ln\sin\ x)(\arctan\ \sin\ \ln x) + \mathbf{E}\ (\mathbf{x}) + \cos\ln\mathbf{x} - \mathbf{E}\ (\mathbf{1}+\mathbf{x})\}$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4\sqrt[3]{x} - \sin\ ^3x + x^2}{e^{x^2}-\cos x}\right)^{1/(x^2\sin\ x)}$$
$$\lim_{x\to \pi/4}\left\{\frac{\sin\ 2x - 1}{2\sin x - \sqrt{2}} + \ln\left(\frac{4}{\pi}x\right) - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} + \sqrt{|x| - \arctan\ x}\right\}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left\{(\sin\ x)^{\tan\ x} + x^{\ln 1/x} - (\sin\ x)^{\sin\ x} - x^{\sin\ x}\right\}$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sin\ 1/x} - x^{3/2}\right)$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left\{e^{-x}\ln x - x^{1/x} + 2^{-x}\sin\ \frac{1}{2^x}\right\}$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sin\ ^2x}{x} - x\sin\ \frac{1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2} - x^2\tan\ \frac{1}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left\{x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \sqrt[3]{x^3+1} - \ln\left(x^2-1\right)e^{2x} - x\right\}$$

Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/\sqrt{1-x} - 1/\sqrt{1+x} - \tan x}{\ln(1+x) - \sin x + x^2/2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\arcsin x)^2/\sin x} - 1}{x\ \tan\ x} - 2^{(x^{-1/2})}$$

Scrivere la formula di Taylor (polinomio di ordine n,punto iniziale x_0) con resto di Lagrange di

$a) f(x) = e^{x^2}$,	$x_0 = 1$,	$n = 8$;
$b) f(x) = \sin(2x)$,	$x_0 = 0$,	$n = 5$;
$c) f(x) = \sqrt{1+4x^2}$,	$x_0 = 0$,	$n = 4$;
$d) f(x) = (x-1)^4$,	$x_0 = 0$,	$n = 4$;
$e) f(x) = \ln(1+x^2)$,	$x_0 = 0$,	$n = 3$;
$f) f(x) = \sqrt[3]{1+x}$,	$x_0 = 0$,	$n = 2$.

Si consideri la funzione

$$g(x) = \ln(1+x^2) + \sin(x - x^3)$$

○ **Scrivere il polinomio di Taylor nel punto $x_0 = 0$ di g di grado 4** $\qquad p(x) =$

○ **Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ di g rispetto ad x^α ,$\alpha \in \mathbb{R}_+$ di**

$$g(x) - x - x^2$$

L'ordine è......

○ **Scrivere il resto di Peano relativo al polinomio trovato al punto G** $\qquad R(x) =$......

Sia

$$f(x) = e^{(e^{3x}-1)} - 1$$

○ **L'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$ è**

○ **Il polinomio di Mc Laurin di f di grado 1 è**

Sia $f : x \to \ln(x^2 + 1)$. Tracciare il grafico di f.

○ **f è limitata inferiormente?**

○ **è limitata superiormente?**

○ **f è limitata?**

○ **Dire se f è invertibile in $[-1, 2]$.**

○ **Trovare l'inversa, se esiste.**

○ **Dire se f è invertibile in $[2, +\infty)$.**

○ **Trovare l'inversa, se esiste.**

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{\ln|x-1|}$$

indicandone l'insieme di definizione e disegnandone il grafico.

a) **La funzione f è continua in $[1 - \frac{1}{e},\ 1 + \frac{1}{e}]$? In caso contrario, esiste un prolungamento continuo di f nello stesso intervallo? E derivabile?**

b) **In quali intervalli f è invertibile? Detta g l'inversa della restrizione di f a $[4, +\infty)$, calcolare $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.**

Calcolare insieme di derivabilità, derivata e studiare le seguenti funzioni:

e^{2x+3}	$\arcsin\ e^x$	2^{3x}
$\ln(\ln x)$	$\lg_x\ e$	$\ln(\sin\ x)$
x^{3x}	$x^{\ln\ x}$	$(\sin\ x)^{\cos\ x}$
$\arcsin\ (3x^2 - 7)$	$\dfrac{\sin\ x}{\arcsin\ x}$	$\arctan\ \dfrac{1}{x}$
e^{-x}	e^{x^2}	$\sin\ (\arcsin\ x)^2$
e^{2x}	$e^{(2^x)}$	$e^{-x^2/x}$

$2^{(x^2)}$	$e^{\arctan\ x}$	$x^{(x^x)}$
$(\ln\ x)^x$	$\ln(\sin\ x)$	$x^{1/x}$
$(\sin\ x)^n$	$\cos\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	$\sin\ (x^n)$
$\ln(x^2+2x)$.		

Sia

$$f(x) = k\ln x + x,\ \ x>0,\ \ k\in\mathbb{R}$$

○ **Determinare il numero degli zeri di f al variare di k.**

○ **Determinare i valori di k per cui esiste l'inversa g di f.**

○ **Per quesi valori di k calcolare i primi tre termini dello sviluppo di Taylor per g con centro in $k\ln\epsilon+\epsilon$.**

Si consideri la funzione

$$\ln(1+x^2) - k\arctan(x) \qquad k\in\mathbb{R}$$

○ **Disegnare il grafico di f al variare di k**

○ **Stabilire il numero degli zeri di f**
f ha ...... zeri perchè......

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}+2\sin x & x>0 \\ ax^2+bx+c & x\le 0 \end{cases}$$

○ **Trovare tutti i valori di $a,b,c\in\mathbb{R}$ per cui f risulta continua in $\mathbb{R}$.** $a=$ $\quad b=$ $\quad c=$

○ **Per tali valori calcolare** $f(0)=$......

○ **Trovare tutti i valori di $a,b,c\in\mathbb{R}$ per cui f risulta derivabile in $\mathbb{R}$.** $a=$ $\quad b=$ $\quad c=$
Giustificando le affermazioni

○ **Per tali valori calcolare** $f'(x)=$

○ **Stabilire quale delle seguenti affermazioni sono sempre vere**

○ **f ammette almeno uno zero in** $[\pi/2, 3\pi/2]$

○ **f ammette un solo zero in** $[\pi/2, 3\pi/2]$

○ **f ammette almeno due zeri in** $[\pi/2, 3\pi/2]$

○ **f ammette infiniti zeri in** $[\pi/2, 3\pi/2]$ **Giustificando le affermazioni**

○ **Determinare per quali valori $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ si ha**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) - x^2}{x^\alpha} = -\frac{1}{2}$$

$a =$ $\quad b =$ $\quad c =$ $\quad \alpha =$

Disegnare il grafico di

$$y(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$$

(non è richiesto lo studio della derivata seconda).

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \arcsin(a \sin(x) + b)$$

○ **Determinare il campo di definizione I di f per $a = 10, b = 1$;**

○ **Disegnare nel piano l'insieme D dei punti (a, b) per iquali f è definita su tutto $\mathbb{R}$**

○ **Per $a = 1/2 \quad b = 1/3$ disegnare il grafico di f precisando massimi e minimi assoluti**

○ **Per $a = 1/2 \quad b = 1/3$ determinare un intervallo I in cui f è invertibile e calcolarne l'inversa**

○ **Determinare l'insieme E dei valori che sono raggiunti da f al variare di $x \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in D$.**

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \arcsin(a \sin(x) + b)$$

○ **Determinare il campo di definizione I di f per $a = 10, b = 1$;**

○ **Disegnare nel piano l'insieme D dei punti (a, b) per iquali f è definita su tutto $\mathbb{R}$**

○ **Per $a = 1/2 \quad b = 1/3$ disegnare il grafico di f precisando massimi e minimi assoluti**

○ **Per $a = 1/2 \quad b = 1/3$ determinare un intervallo I in cui f è invertibile e calcolarne l'inversa**

○ **Determinare l'insieme E dei valori che sono raggiunti da f al variare di $x \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in D$.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1} \mathrm{e}^x$$

○ **Calcolare $f'(x)$, $f''(x)$ determinare il massimo intervallo contenente $1/2$ in cui f è strettamente crescente**

○ **Disegnare il grafico di f .**
Sia g la funzione inversa di f in I. Trovare l'insieme J di definizione di g e disegnare il grafico di g.

○ **In quali intervalli di J, g è derivabile? Calcolare $g(-3) =$, $g'(-3) =$ e $g''(-3) =$**

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \ln x + x$$

◯ **Disegnare il grafico di f ed f', giustificando brevemente le affermazioni.**
Si consideri poi la famiglia di funzioni

$$g_{a,b}(x) = g(x) = ax^2 \ln x + bx$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}_+$

◯ **Disegnare al variare di a, b il grafico di g ed g'.**

◯ **Determinare i valori di a, b per cui g risulta monotona.**

Si consideri la funzione

$$f(y) = y \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) - \ln|y-1|$$

◯ **Determinare il campo di definizione I di f**

◯ **Stabilire dove f è derivabile e calcolare la sua derivata.**

◯ **Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f giustificando brevemente le affermazioni.**

◯ **Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f' giustificando brevemente le affermazioni.**

◯ **Disegnare il grafico di f precisando crescenza, decrescenza, convessità e comportamento della retta tangente agli estremi del campo di definizione**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x-k}{x^2 - 3x + 2}$$

◯ **Disegnare il grafico di f per $k = -1$.**

◯ **Disegnare il grafico di f per $k = 0.5$.**

◯ **Disegnare il grafico di f per $k = 1.5$.**

◯ **Disegnare il grafico di f per $k = 2.5$.**

◯ **Disegnare il grafico di f al variare di $k \in \mathbb{R}$.**

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + \sqrt{y(x)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

○ **Provare che posto $z(x) = \sqrt{y(x)}$ si ha**

$$\begin{cases} z'(x) = \frac{1}{2}(z(x)+1) \\ z(0) = \sqrt{\alpha} \end{cases}$$

○ **Determinare $z(x)$.**

○ **Determinare $y(x)$.**

○ **Trovare le eventuali soluzioni costanti della equazione data**

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

○ **Determinare il campo di definizione I di f;**

○ **Determinare l'insieme J in cui f è derivabile;**

○ **Disegnare il grafico di f**

○ **Stabilire se f è decrescente su $(-\infty\ ,\ -1-\sqrt{6}]$ e su $[-1+\sqrt{6}\ ,\ +\infty)$ e giustificare brevemente l'affermazione.**

○ **Stabilire se f è invertibile su $[-1-\sqrt{6}\ ,\ 1) \cup [-1+\sqrt{6}\ ,\ 2)$ e calcolare f^{-1}**

○ **Dopo aver verificato che f è invertibile su $(2+\infty)$, detta g l'inversa, stabilire se g è derivabile e calcolare $g'(2)$**

○ **Determinare il rango di f**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x$$

○ **Provare che f è decrescente per $x < 0$.**

○ **Determinare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo di f per $x < 0$**

○ **Stabilire se f è invertibile su $x < 0$ ed, in caso affermativo determinare f^{-1} Giustificare brevemente le affermazioni.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+x+1}$$

○ **Determinare il dominio della funzione f**

○ **Disegnarne il grafico precisando dove f è crescente e dove f è decrescente.**

○ **Determinare punti e valori di massimo e di minimo relativo ed assoluto**

○ **Determinare il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione**

$$f(x) = k$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$
Si consideri successivamente, al variare di $k \in \mathbb{R}$ **la funzione**

$$g(x) = e^x - k(x^2 + x + 1)$$

○ **Provare che g è continua e ammette derivate continue di ogni ordine su** $\mathbb{R}$

○ **Disegnare il grafico approssimativo di** g'', g' **e di** g **(non occorre precisare il numero degli zeri)**

○ **Usando il grafico di** f **precisare il grafico di** g **individuando il numero ed il segno degli zeri.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - x$$

○ **Provare che** f **è decrescente per** $x < 0$**.**

○ **Determinare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo di** f **per** $x < 0$

○ **Stabilire se** f **è invertibile su** $x < 0$ **ed, in caso affermativo determinare** f^{-1} **Giustificare brevemente le affermazioni.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x + x^2)\sin x$$

○ **Determinare il polinomio** p_5 **di Taylor centrato in** $x_0 = 0$ **di grado** 5 **della funzione** f

○ **Scrivere il resto relativo al polinomio trovato nella forma di Peano.**

○ **Determinare un maggiorante di**

$$|f(x) - p_5(x)|$$

su $[0, 1]$

○ **Determinare l'ordine di infinitesimo di** f **per** $x \to 0$

Si consideri la funzione

$$g(x) = \frac{5x^2 + 5x + 2}{(2x + 1)^2(x^2 + x + 1)}$$

○ **Determinare <u>una</u> primitiva di** f

○ **Determinare <u>tutte</u> le primitive di** f

○ **Determinare <u>tutte</u> le primitive continue su** $\mathbb{R}$ **di** f

○ **Calcolare**

$$\int_0^1 f(x)dx$$

○ **Disegnare il grafico di f (si consiglia di tenere conto della forma di f ottenuta mediante la decomposizione in fratti semplici), illustrare graficamente il significato di $\int_0^1 f(x)dx$ e giustificarne il segno.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(|x^2 - 1| + 1)$$

○ **Disegnare il grafico di f precisando il suo campo di definizione**

○ **Determinare l'insieme in cui f è continua**

○ **Determinare l'insieme in cui f è derivabile**

○ **Determinare una restrizione di f che sia invertibile e trovarne l'inversa, precisando se è possibile invertire f su tutto $\mathbb{R}$ e perchè.**

○ **Determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to -1$**

Si consideri la funzione

$$f(x) = (ax + b)\arctan(x)$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$

○ **Calcolare, dove esistono, f' ed f''**

○ **Disegnare il grafico di f'**

○ **Studiare la crescenza di f**

○ **Studiare la convessità di f**

○ **Determinare punti di massimo di minimo e di flesso di f e disegnare il grafico di f**

Si considerino le funzioni

$$f_+^k(x) = \frac{-x + \sqrt{4k - 3x^2}}{2} \qquad f_-^k(x) = \frac{-x - \sqrt{4k - 3x^2}}{2}$$

○ **Determinare il campo di definizione di $f_\pm^k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$**

○ **Disegnare il grafico di $f_\pm^1$ precisandone le intersezioni con gli assi**

○ **Verificare che $y = f_\pm^k$ se e solo se $x^2 + xy + y^2 = k$**

○ **Determinare i punti del grafico di $f_\pm^1$ aventi distanza massima dall'origine.**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \max\{x, x^2, -\arctan x\}$$

○ **Disegnare il grafico di** f

○ **calcolare** $f(-1/2)$

○ **Disegnare i grafici di** x, x^2, $-\arctan x$ **nello stesso piano cartesiano, precisandone la mutua posizione.**

○ **Disegnare il grafico di** $x^2 + \arctan x$

Integrazione

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{x} - 1 & x > 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & x < -1 \end{cases}$$

- ◯ **Disegnare il grafico di f, precisandone il dominio D**
- ◯ **Determinare una primitiva di f su D**
- ◯ **Determinare tutte le primitive di f su D**
- ◯ **Determinare una espressione esplicita per**

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

- ◯ **Calcolare**

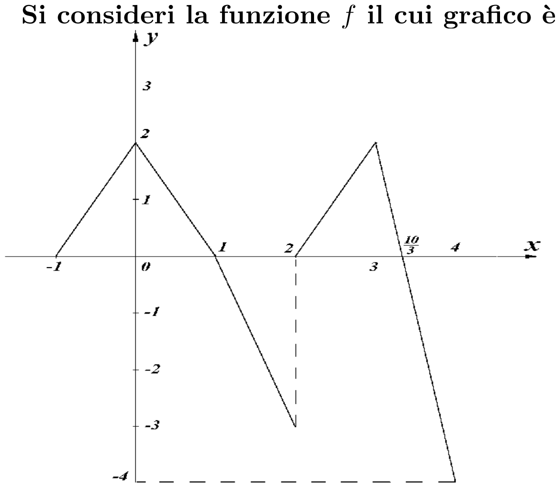
$$\int_4^{+\infty} f(t)dt, \qquad \int_1^4 f(t)dt, \qquad \int_2^4 f(t)dt$$

- ◯ **Disegnare il grafico di**

$$\int_4^x f(t)dt$$

- ◯ **Disegnare il grafico di tutte le primitive di f**

Si consideri la funzione f il cui grafico è indicato in figura



◯ **Disegnare il grafico di** $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

◯ **Disegnare il grafico di** $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ 1 & x > 1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$$

◯ **Disegnare il grafico di** f**, precisandone il dominio** D

◯ **Determinare una primitiva di** f **su** D

◯ **Determinare tutte le primitive di** f **su** D

◯ **Determinare una espressione esplicita per**

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{3-x} + \frac{1}{3+x} = \frac{9+9x}{9x-x^3}$$

◯ **Calcolare**

$$\int_4^{+\infty} f(t)dt, \qquad \int_0^1 f(t)dt, \qquad \int_1^2 f(t)dt$$

◯ **Disegnare il grafico di tutte le primitive di** f

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{2}{x(1-x^2)}$$

◯ **Disegnare il grafico di** f

◯ **Disegnare il grafico di** $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

◯ **Disegnare il grafico di tutte le primitive di** f

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x + \dfrac{1}{x^2-1} & x < 3 \\ \sin^2(x-1) + a & x \geq 3 \end{cases}$$

◯ **Determinare una primitiva di f su $(3, +\infty)$ precisando dove è definita.**

◯ **Determinare una primitiva di f su $(-\infty, 3)$ precisando dove è definita.**

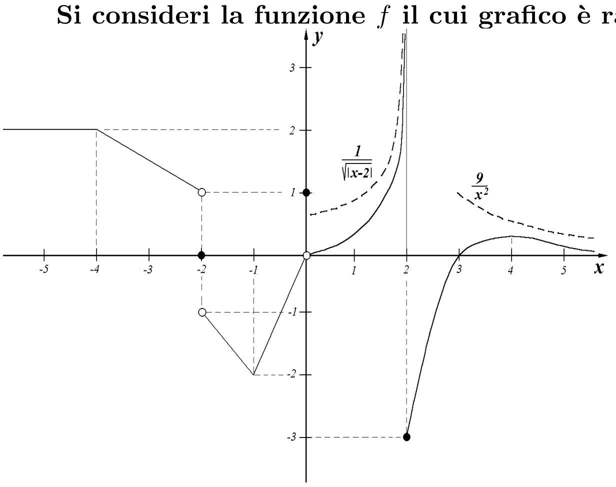
◯ **Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ f ammette primitiva su $\mathbb{R}$ e determinarne una precisando dove è definita.**

◯ **Per i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali f ammette primitiva su $\mathbb{R}$ determinare tutte le primitive di f precisando dove sono definite.**

◯ **Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ $\int_2^4 f(x)dx$**

$\int_2^4 f(x)dx =$

Si consideri la funzione f il cui grafico è rappresentato di seguito



◯ **Disegnare il grafico della funzione**

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

◯ **Precisare dove F è derivabile**

◯ **Calcolare, se esistono, $F'(0)$, $F'(0-)$, $F'(0+)$.**

◯ **Calcolare**

$$F(x) = \int_{-10}^{-4} f(t)dt$$

Si consideri la funzione

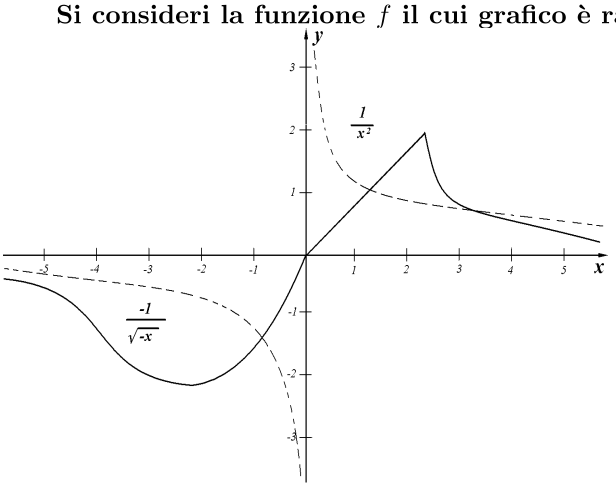
$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x > 0 \\ \log(1+x) & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

○ **Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che f ammetta primitiva su $(-1, +\infty)$**

○ **Determinare una primitiva di f su $(-1, +\infty)$.**

○ **Per i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali f ammette primitiva su $(-1, +\infty)$ determinare tutte le primitive di f**

Si consideri la funzione f il cui grafico è rappresentato di seguito



○ **Disegnare il grafico della funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ precisando crescenza convessità ed asintoti**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x^2}$$

○ **Disegnare il grafico di f**

○ **Disegnare il grafico di $g(x) = \int_0^x f(t)dt$**

○ **Disegnare il grafico di tutte le primitive di f**

Sia

$$f(x) = \frac{1}{(t-1)\sqrt[3]{(t+2)}}$$

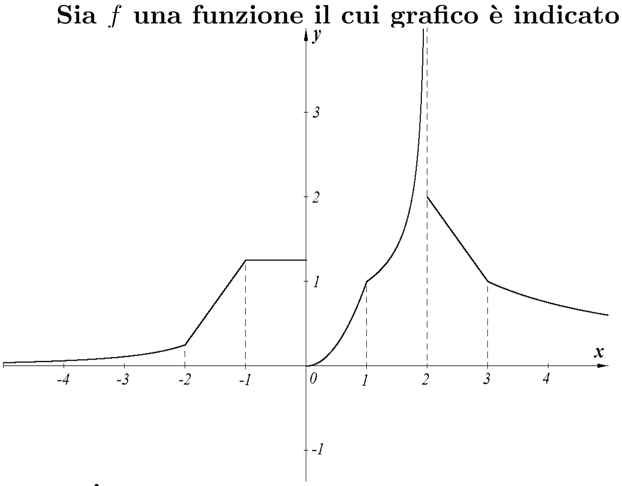
e sia $F(x) = \int_x^{\frac{5x}{|x|+1}} f(t)dt$

○ **Determinare il campo di definizione di F**

○ **Studiare i limiti agli estremi del campo di definizione.**

◯ **Stabilire dove F è derivabile e calcolare la derivata di F**

Sia f una funzione il cui grafico è indicato in figura



$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x < -2 \\ x + 9/4 & -2 \leq x < -1 \\ 5/4 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1/\sqrt{2-x} & 1 \leq x < 2 \\ 4 - x & 2 \leq x < 3 \\ 3/x & 3 \leq x \end{cases}$$

e sia

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

◯ **Calcolare**

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx$$

◯ **Calcolare, se esistono**

* $F'_+(0) =$

* $F'_-(0) =$

* $F'_+(2) =$

* $F'_-(2) =$

◯ **Trovare una primitiva di f in $(-2, 0)$**

◯ **Disegnare il grafico di F**

Sia f definita da

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt[3]{(x+4)}}$$

e sia

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

◯ **Trovare il campo di definizione di F**

◯ **Calcolare, dove esiste, $F'(x)$ e precisare il suo campo di definizione.**

◯ **Disegnare il grafico di F**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t+1}(e^t-1)^3}dt$$

◯ **Disegnare il grafico di f.**

◯ **Disegnare il grafico di**

$$g(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t+1}(e^t-1)^3}dt$$

◯ **Determinare il campo di definizione di**

$$h(x) = \int_{x^2}^{x^2+2} \frac{1}{\sqrt{t+1}(e^t-1)^3}dt$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^t}\ (t-1)\ \sqrt{t+2}}dt$$

◯ **Determinare il dominio di f.**

◯ **Studiare la derivabilità di f.**

◯ **Disegnare il grafico di f.**

◯ **Disegnare il grafico di**

$$g(x) = \int_0^{|x|} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^t}\ (t-1)\ \sqrt{t+2}}dt$$

◯ **Calcolare la derivata di**

$$h(x) = \int_{x^3}^{x^2+2} \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^t}\ (t-1)\ \sqrt{t+2}}dt$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & -1 \le x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x^4} & x \ge 1 \end{cases}$$

◯ **Disegnare il grafico di f.**

◯ **Disegnare il grafico di $F(x) = \int_0^x f(t)dt$**

◯ **Calcolare gli eventuali asintoti, i punti di massimo e di minimo ed i punti di flesso per il grafico di F.**

◯ **Disegnare il grafico di $\int_{-\infty}^x f(t)dt$**

◯ **Determinare una primitiva di f precisandone il campo di definizione.**

Equazioni Differenziali a Variabili Separabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} y'(x) = y(x)(1 - y^2(x))^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- ◯ **Determinare le soluzioni costanti dell'equazione data**
- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per** $y_0 = 1/2$ **e** $y_0 = -1/2$
- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per** $y_0 = 2$ **e** $y_0 = -2$
- ◯ **Disegnare il grafico di eventuali soluzioni definite su tutto** $\mathbb{R}$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt[3]{y(x) - 1} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per** $y_0 = 0$
- ◯ **Disegnare il grafico di tutte le soluzioni del problema dato al variare di** y_0

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = 1 + \ln(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione per** $x_0 = 1$, $y_0 = 1$
- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione per** $x_0 = -1$, $y_0 = 1$
- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione per** $x_0 = 1$,
- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione al variare di** x_0, y_0

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-y^4(x)} - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- ◯ **Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato.**
- ◯ **Determinare le soluzioni costanti dell'equazione e precisare i dati iniziali in corrispondenza dei quali si hanno soluzioni costanti**
- ◯ **Disegnare il grafico della soluzione relativa al dato iniziale** $x_0 = 0$ **,** $y_0 = 1$

○ **Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali** $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - y^2(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

○ **Determinare la soluzione relativa al dato iniziale** $x_0 = 0$ **,** $y_0 = 1$

○ **Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy dato al variare dei dati iniziali** $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

○ **Provare che la soluzione del problema è convessa dove è definita.**

○ **Provare che la soluzione ha un minimo locale in** 0

○ **Disegnare il grafico della soluzione del problema dato**

○ **Determinare esplicitamente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data**

○ **Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.**

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = y^7(x) - 1$$

○ **Disegnare il grafico della soluzione tale che** $y(0) = 0$

○ **Disegnare il grafico della soluzione tale che** $y(0) = 1$

○ **Disegnare il grafico della soluzione tale che** $y(0) > 1$

○ **Disegnare il grafico della soluzione tale che** $y(0) < 1$

○ **Disegnare il grafico di tutte le soluzioni**

Sia

$$y'(x) = \frac{\sin(y(x))}{\sin(x)}$$

○ **Disegnare il grafico della soluzione** y **relativa al dato iniziale** $y(\pi/4) = \pi/4$**.**

○ **Disegnare il grafico della soluzione** y **relativa al dato iniziale** $y(\pi/4) = \pi/2$**.**

○ **Disegnare il grafico della soluzione y relativa al dato iniziale $y(\pi/4) = 5\pi/4$.**

○

Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

Sia

$$y'(x) = y^2(x) - 1$$

○ **Disegnare il grafico della soluzione y relativa al dato iniziale $y(0) = 0$, $y(0) = 2$, $y(0) = 1$, $y(0) = -2$.**

Si consideri l'equazione

$$y(x) = a + \int_0^x \frac{2t}{2y(t) - 1} dt$$

○ **Determinare le soluzioni dell'equazione data per $a = 0$**

○ **Determinare le soluzioni dell'equazione data per $a = 4$**

○ **Determinare le soluzioni dell'equazione data per $a = -1$**

○ **Determinare le soluzioni dell'equazione data al variare di a**

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + \sin(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

○ **Studiare esistenza ed unicità del problema dato**

○ **Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 0$**

○ **Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 2\pi$**

○ **Determinare tutte le primitive di**

$$\frac{1}{1 + \sin(t)}$$

Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = y^4(x) + y(x) \\ y(0) = a \end{cases}$$

○ **Studiare esistenza ed unicità del problema dato**

○ **Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 1$**

○ **Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per $a = 0$**

◯ **Studiare al variare di a $\lim_{x\to+\infty} y(x)$**

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^3(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Discutere esistenza ed unicità locale della soluzione del problema dato.**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 0$, precisandone il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0 per $y_0 = 0$, precisandone il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ al variare di y_0, precisandone il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0, y_0, precisandone il campo di definizione**

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \sin y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Discutere esistenza ed unicità locale della soluzione del problema dato.**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0 per $y_0 = 1$, precisandone il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione per $x_0 = 0$ al variare di y_0, precisandone il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione al variare di x_0, y_0, precisandone il campo di definizione**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^{y(x)} y'(x) = 2x(e^{y(x)} + 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, precisando il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ precisando il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = -1$, $y_0 = -1$ precisando il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ precisando il campo di definizione**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt[3]{\ln(y(x)+1)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Determinare le soluzioni costanti dell'equazione differenziale data**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ precisando il campo di definizione ed eventuali prolungamenti.**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = -1/2$ precisando il campo di definizione ed eventuali prolungamenti.**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema al variare di x_0, y_0**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2xe^{-y(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, precisando il campo di definizione**

◯ **Disegnare il grafico di tutte le soluzioni del problema al variare di x_0, y_0**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \ln(y(x)+1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema per $y_0 = 1$ e precisare il campo di definizione ed eventuali prolungamenti.**

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema al variare di y_0**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{y^2(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Stabilire esistenza ed unicità locale della soluzione del problema, al variare di $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$**

◯ **Disegnare il grafico della funzione**

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} e^{-t^2}\,dt$$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali** $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

◯ **Disegnare il grafico delle soluzioni al variare dei dati iniziali** x_0, y_0

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove

$$f(y) = \begin{cases} 1 & y > 1 \\ \sqrt[3]{y} & -1 \leq y \leq 1 \\ -1 & y < -1 \end{cases}$$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali** $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali** $x_0 = 0$, $y_0 = -2$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali** $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

◯ **Disegnare il grafico delle soluzioni al variare dei dati iniziali** x_0, y_0

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^4(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Stabilire esistenza ed unicità locale della soluzione del problema, al variare di** $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

◯ **Disegnare il grafico delle soluzioni al variare dei dati iniziali** x_0, y_0

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

◯ **Disegnare il grafico della soluzione che corrisponde ai dati iniziali** $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

◯ **Determinare tutte le soluzioni costanti e disegnare il grafico delle soluzioni al variare dei dati iniziali** x_0, y_0

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

◯ **Provare che la soluzione del problema è convessa dove è definita.**

◯ **Provare che la soluzione ha un minimo locale in** 0

◯ **Disegnare il grafico della soluzione del problema dato**

◯ **Determinare esplicitamente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data**

◯ **Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.**

Equazioni e Sistemi di Equazioni Differenziali Lineari

Si consideri l'equazione

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x} + \sin(x)$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea completa tali che** $y(0) = 0$

◯ **Scrivere un sistema differenziale lineare di primo ordine equivalente all'equazione data:**

◯ **Risolvere il sistema trovato al punto precedente**

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + 2z(x) + e^x \\ z'(x) = 3y(x) + 4z(x) \end{cases}$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema completo**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che** $y(0) = 0$

◯ **Scrivere un'equazione differenziale del secondo ordine equivalente al sistema dato**

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = z(x) + 1 \end{cases}$$

◯ **Risolvere il sistema omogeneo associato**

◯ **Risolvere il sistema**

◯ **Trovare la soluzione del sistema omogeneo associato tale che** $y(0) = z(0) = 0$

◯ **Trovare la soluzione del sistema tale che** $y(0) = z(0) = 0$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = z(x) \\ z'(x) + z(x) = x \end{cases}$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema dato**

◯ **Scrivere un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine equivalente al sistema dato**

◯ **Trovare una matrice fondamentale del sistema del primo ordine trovato al punto precedente.**

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$y'''(x) + k^3 y(x) = 0$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data**

◯ **Determinare tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}_+$ dell'equazione data**

◯ **Determinare tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}_-$ dell'equazione data**

◯ **Determinare tutte le soluzioni di**

$$y'''(x) + k^3 y(x) = e^{-kx} + x$$

Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + 27y(x) = 2e^{-3x} + 1$$

◯ **Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata**

◯ **Determinare le soluzioni dell'equazione completa**

◯ **Scrivere un sistema del primo ordine equivalente all'equazione data.**

◯ **Determinare le soluzioni del sistema trovato precisando la matrice fondamentale del sistema omogeneo ad esso associato.**

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) - 2z(x) + e^x \\ z'(x) = 2y(x) - z(x) + x \end{cases}$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema completo**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che $y(0) = 0$**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema completo tali che $y(0) = 0$**

◯ **Precisare se le soluzioni ottenute in ciascuno dei punti precedenti è uno spazio vettoriale e, in caso affermativo trovarne la dimensione**

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + 4y'(x) = \sin(x) + \sin(2x)$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea tali che** $y(0) = 0$**,** $y'(0) = 0$ **e** $y''(0) = 0$

◯

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$ **e** $y(\Pi) = 0$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + y(t) + f(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) - 2y(t) + g(t) \end{cases}$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema relativo al caso in cui** $f(t) = \sin t$ **e** $g(t) = 0$**.**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema relativo al caso in cui** $f(t) = 0$ **e** $g(t) = e^{2t}$**.**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema relativo al caso in cui** $f(t) = \sin t$ **e** $g(t) = e^{2t}$**.**

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{2x}$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea tali che** $y(0) = 0$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + f(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.**

◯ **Determinare tutte le soluzioni del sistema relativo al caso in cui** $f(t) = e^t$**.**

Si consideri l'equazione

$$xy''(x) - y'(x) = |x|$$

○ **Risolvere l'equazione omogenea associata all'equazione data**

○ **Risolvere l'equazione data su** $\mathbb{R}_+$

○ **Risolvere l'equazione data su** $\mathbb{R}_-$

○ **Risolvere l'equazione data su** $\mathbb{R}$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = z(x) + 1 \end{cases}$$

○ **Risolvere il sistema omogeneo associato**

○ **Risolvere il sistema**

○ **Trovare la soluzione del sistema omogeneo associato tale che** $y(0) = z(0) = 0$

○ **Trovare la soluzione del sistema tale che** $y(0) = z(0) = 0$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = z(x) \\ z'(x) + z(x) = x \end{cases}$$

○ **Determinare tutte le soluzioni del sistema dato**

○ **Determinare tutte le soluzioni del sistema dato**

○ **Scrivere un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine equivalente al sistema dato**

○ **Trovare una matrice fondamentale del sistema del primo ordine trovato al punto precedente.**

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x + \sin x$$

○ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata**

○ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa**

○ **Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che** $y(0) = y'(0) = 0$

○ **Scrivere il sistema di primo ordine equivalente all'equazione data**

○ **Scrivere tutte le soluzioni del sistema trovato e determinarne una matrice fondamentale.**

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x + x$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa**

◯ **Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che** $y(0) = y'(0) = 0$

Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + 27y(x) = 2e^{-3x} + 1$$

◯ **Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata**

◯ **Determinare le soluzioni dell'equazione completa**

◯ **Scrivere un sistema del primo ordine equivalente all'equazione data.**

◯ **Determinare le soluzioni del sistema trovato precisando la matrice fondamentale del sistema omogeneo ad esso associato.**

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y(x) = x$$

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea**

◯ **Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa**

◯ **Stabilire se le soluzioni del problema completo costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinarne la dimensione.**

◯ **Trovare tutte le soluzioni del problema completo tale che y(0)=0**

Data l'equazione differenziale

$$y'' + 3y' + ky = 0,$$

◯ **calcolare per ogni** $k \in \mathbb{R}$ **la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni soddisfacenti la condizione** $y'(0) = 0$**.**

◯ **Determinare tutti i valori del parametro reale** k **in modo che per tutte le soluzioni** y **dell'equazione si abbia** $y(x) \to 0$ **per** $x \to +\infty$**.**

◯ **Risolvere il problema** $y'' + 3y' = x^2, y(0) = 0 = y'(0).$

È dato il problema

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} = kx^2 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

- ◯ **Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il problema ha soluzioni, quante soluzioni ha e l'insieme di definizione delle soluzioni.**

- ◯ **Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme delle soluzioni sia uno spazio vettoriale, calcolare la dimensione di tale spazio.**

- ◯ **Per $k = 1$ trovare esplicitamente tutte le soluzioni.**

Data l'equazione differenziale:

$$y''(x) + ay'(x) + y(x) = \sin(bx) \text{ **con** } a, b \in \mathbb{R},$$

- ◯ **determinare se per $a = 2,\ b = -2$ l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.**

- ◯ **Determinare quindi tutti e soli i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui:**
  i) l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale;
  ii) esiste almeno una soluzione limitata;
  iii) tutte le soluzioni sono limitate.

- ◯ **Infine per $a = 0$, $b = 1$ scrivere esplicitamente la soluzione y dell'equazione differenziale tale che $y(0) = 0 = y'(0)$.**

Dato il sistema

$$\begin{cases} y_1'(x) = 5y_1(x) - 3y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) = 3y_1(x) - y_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = -5y_1(x) - 3y_2(x) \\ y_2'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) + e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2y_1(x) - y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) = y_1(x) + 4y_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = -2y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) - 4y_2(x) + e^x \end{cases}$$

- ◯ **Determinare le radici dell'equazione caratteristica con la loro molteplicità**

- ◯ **Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato**

- ◯ **Determinare una soluzione particolare del sistema non omogeneo**

- ◯ **Determinare se l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo trovarne la dimensione**

- ◯ **Determinare se l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo trovarne la dimensione**

- ◯ **Determinare la soluzione $Y^*(x)$ del sistema non omogeneo tale che $Y^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = 2y(t) - x(t) + 1 \end{cases}$$

○ **Determinare tutte le soluzioni del sistema.**

○ **Determinare la soluzione tale che**

$$x(0) = y(0) = 0$$

○ **Trovare tutte le soluzioni tali che** $x(0) = 0$ **del sistema omogeneo**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 2y(t) - x(t) \end{cases}$$

giustificando brevemente le affermazioni

○ **Stabilire se l'insieme delle soluzioni del punto C formano uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione.**

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = e^x + 1$$

○ **Trovare tutte le soluzioni della equazione omogenea associata**

○ **Trovare tutte le soluzioni della equazione data (non omogenea)**
Si consideri poi, al variare di $a \in \mathbb{R}$ **l'equazione differenziale**

$$y''(x) + ay'(x) + y(x) = e^x + 1$$

○ **Trovare tutte le soluzioni della equazione omogenea associata**

○ **Trovare tutte le soluzioni della equazione data (non omogenea)**
