Funzioni di 2 variabili

1

Determinare l'insieme di definizione di ciascuna delle seguenti funzioni precisando se tali insiemi sono aperti, chiusi, limitati.

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos y}}$$
$$F(x,y) = \arctan \sqrt{\sin xy}$$
$$F(x,y) = \ln \sin \frac{1}{x^2+y^2}$$
$$F(x,y) = \ln \sin xy$$
$$F(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$$
$$F(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$F(x,y) = \cos \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}}$$
$$F(x,y) = \arcsin \sqrt{4-x^2}$$

2

Determinare il campo di definizione delle seguenti funzioni, precisando le sue proprietà topologiche:

$$f(x,y) = \ln(x^2-y-1)$$
$$f(x,y) = \ln(x^2+2y^2)$$
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{9x^2+4y^2-36}{9-x^2-y^2}}$$
$$f(x,y) = \arcsin \frac{x-y}{x+y}$$
$$f(x,y) = \left[\frac{(x^2-y^2)}{x^2+4y^2-4}\right]^{xy}$$
$$f(x,y) = \ln \frac{2-|x|-|y|}{(1-x^2)(y^2-1)}$$
$$f(x,y) = \left(\frac{x\sqrt{x+y}}{\ln(x^2-x-y)}\right)^{1/y}$$
$$f(x,y) = \left[\ln\left(\sqrt{2x^2+y^2-3}-1\right)+\arccos(x+y)\right]$$

3

Determinare le linee di livello delle seguenti funzioni, dopo averne studiato il campo di definizione:

$$
\begin{aligned}
&F(x,y) = \ln(xy)\\
&F(x,y) = x^y\\
&F(x,y) = e^{1/(y-x^2)}\\
&F(x,y) = \sqrt{\cos(x^2+y^2)-1}\\
&F(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)-1}\\
&F(x,y) = e^{1/xy}\\
&F(x,y) = \arctan\frac{1}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

4

Determinare le regioni in cui sono continue le seguenti funzioni:

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \textbf{se } x^2+y^2>0 \\ 0 & \textbf{se } x=y=0 \end{cases}
$$

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^6x^2y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x=0, y=0 \end{cases}
$$

$$
f(x,y) = \begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x} + x\sin\dfrac{1}{y} & x\neq 0, y\neq 0 \\ 0 & \textbf{altrove} \end{cases}
$$

$$
f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2} & \textbf{se } x\neq 0, y\neq 0 \\ 0 & x=0, y=0 \end{cases}
$$

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin xy}{x^2+y^2} & \textbf{se } x^2+y^2>0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}
$$

5

Calcolare se esistono:

$$
\lim_{(x,y)\to(1,1)} \arctan\frac{x+y}{1-xy} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}
$$

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2y}{xy}
$$

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{xy}}
$$

$$
\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x^2(y-1)}{(y-1)^2-x^2}
$$

$$
\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{x^2(y-2)}{x^4-(y-2)^2}; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}
$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\ln(x^2y^2+1)}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \ln(xy)$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} e^{1/xy}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \arctan\frac{1}{x^2-y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x}{x^2+y^2}$$

6

Calcolare, se esistono,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} (x^2-y^2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+xy}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}; \qquad \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\frac{x-y}{x+y}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln y; \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ y_0\neq0}} y\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ x_0\neq0}} xy\ln y; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

7

Determinare, anche graficamente, le curve di livello delle seguenti funzioni

$$f(x,y)=x+y \qquad f(x,y)=xy$$
$$f(x,y)=\ln(2x^2+y^2) \qquad f(x,y)=x\ln y$$
$$f(x,y)=\arcsin\frac{x-y}{x+y} \qquad f(x,y)=xy\ln y$$

8

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & xy\le 1\\ |x|+|y|+x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2-2} & xy>1\end{cases}$$

A_4 ◯ **Determinare l'insieme D in cui f è continua.**

B_4 ◯ **Determinare l'insieme E in cui f è parzialmente derivabile.**

C_4 ◯ **Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ rispetto ad una direzione arbitraria (α,β). Cioè calcolare $f'((1,1),(\alpha,\beta))$**

D_3◯ **Calcolare**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,x)$$

9

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \ln x - xy$$

F_3◯ **Disegnare, nel piano il campo di definizione di** f

G_3◯ **Disegnare nel piano le curve di livello** $f(x,y) = k$ **dei** f **corrispondenti ai valori** $k = -1, 0, 1$

H_3◯ **Disegnare nel piano le curve di livello** $f(x,y) = k$ **dei** f **corrispondenti a qualche valore significativo di** k

I_4◯ **Disegnare il grafico delle funzioni** $f(x,mx)$ **al variare di** $m \in \mathbb{R}$**, precisandone il significato**

J_3◯ **Calcolare** $\nabla f(x,y)$**, precisando dove è definito**

K_3◯ **Disegnare, nel piano il campo di direzioni individuato da** ∇f

---

10

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 \ln(|y|)$$

1 - **Disegnare l'insieme** D **di definizione di** f **e studiare continuità e differenziabilità di** f **in** D**.**
2 - **Stabilire se esistono punti di** $\mathbb{R}^2 \setminus D$ **ove** f **può essere prolungata per continuità.**
3 - **Dopo aver definito**

$$f(0,0) = 0$$

calcolare, se esistono, le derivate di f **in** $(0,0)$ **lungo le direzioni** $P = (\alpha, \beta)$ **e verificare che, dette** $f'(0,P)$ **tali derivate,** $f'(0,\cdot)$ **risulta lineare.**
4 - **Provare che** f **non è differenziabile in** $(0,0)$**.**
5 - **Disegnare le curve di livello di** f**.**
6 - **Studiare il comportamento all'infinito di** f**.**

11

Verificare che

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ha le derivate parziali ma non è continua in $(0,0)$**,**

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

è continua ma non ha le derivate parziali in $(0,0)$**,**

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

è continua, ha le derivate parziali non è differenziabile in $(0,0)$**,**

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \cos \dfrac{1}{x^2y^2} & \text{se} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è differenziabile, ma non ha le derivate parziali continue in $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^2}{x^2+y^2} & \textbf{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textbf{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

non ha derivate seconde miste uguali in $(0,0)$**,**

$$f(x,y)=\begin{cases}y^2\sin\dfrac{1}{y} & \textbf{se} \quad x\neq 0\\ 0 & \textbf{se} \quad x=0\end{cases}$$

ha derivate seconde miste uguali benchè le derivate parziali prime non siano continue.

12

Calcolare il differenziale di

$$f(x,y,z)=x^{(y^z)}$$

$$f(x,y)=e^{x^2/2y}\ln(x+y)$$

.

Calcolare la derivata secondo, la direzione (a,b,c) **di**

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy$$

.

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=x^4+x^2y$$

e l'insieme

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\ :\ x\in[0,2],y\in[0,1],y\leq 2-x\}$$

A_2◯ **Disegnare le curve di livello di** f

B_2◯ **Determinare i punti di massimo eo minimo relativo di** f

C_2◯ **Determinare massimi e minimi assoluti di** f **in** D

D_2◯ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

13

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=e^{(x+2y)}$$

e l'insieme

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\ :\ x\in[0,2],\ 0\leq y\leq|x-1|\}$$

A_3◯ **Disegnare le curve di livello di** f

B_2◯ **Trovare le derivate direzionali di** f **in** $(0,0)$**.**

C_2◯ **Determinare massimi e minimi assoluti di** f **in** D

$D_3\bigcirc$ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

14

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y$$

$A_3\bigcirc$ **Disegnare i livelli di** f

$B_4\bigcirc$ **Scrivere il piano tangente al grafico di** f **nel punto** $(1,1)$

$C_4\bigcirc$ **Disegnare, al variare di** x_0 **e di** y_0**, il grafico di** $g(x) = f(x, y_0)$ **e di** $h(y) = f(x_0, y)$

$D_4\bigcirc$ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

15

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

$A_3\bigcirc$ **Disegnare le curve di livello di** f

$B_3\bigcirc$ **Disegnare i grafici delle funzioni che si ottengono intersecando** f **con i piani coordinati** $x = 0$ **ed** $y = 0$

$C_3\bigcirc$ **Calcolare massimi e minimi assoluti di** f **su** $[0,1] \times [0,1]$

$D_3\bigcirc$ **Calcolare**

$$\int\int_C f(x,y)dxdy$$

essendo C **il cerchio di centro l'origine e raggio** 1**.**

$E_3\bigcirc$ **Calcolare le derivate direzionali di** f **nel punto** $(1,1)$

16

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 3xy(x^2 + y^2)$$

$A_3\bigcirc$ **Determinare il campo di definizione di** f**, l'insieme in cui** f **è continua e l'insieme in cui** f **è derivabile e differenziabile.**

$B_3\bigcirc$ **Calcolare, dove esiste,** $\nabla f(x,y)$ **e, se esiste,** $\frac{\partial f}{\partial Q}(1,1)$ **dove** $Q = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$C_3\bigcirc$ **Determinare, se esiste, l'equazione del piano tangente al grafico della funzione** $z = f(x,y)$ **nel punto** $(1,1)$

D_3○ **Calcolare**

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$$

E_3○ **Determinare massimi e minimi assoluti di** $f(x,y)$ **su** $[0,1]\times[0,1]$

17

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y + y^2$$

A_3○ **Determinare il campo di definizione di** f**, l'insieme in cui** f **è continua e l'insieme in cui** f **è derivabile e differenziabile.**

B_3○ **Calcolare, dove esiste,** $\frac{d}{dx}\sin(f(x^2,x)$ **e, se esiste,** $\frac{\partial f}{\partial Q}(1,1)$ **dove** $Q=(1,2)$

C_3○ **Disegnare le curve di livello di** f

D_3○ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

ove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$

E_3○ **Determinare massimi e minimi assoluti di** $f(x,y)$ **su** D

18

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x & x\geq\sqrt{|y|} \\ y & x<\sqrt{|y|} \end{cases}$$

A_3○ **Calcolare, se esiste,** $\nabla f(0,0)$**, precisando il procedimento seguito**

B_3○ **Calcolare le derivate direzionali** $f'((0,0),(a,b))$ **nel punto** $(0,0)$ **rispetto alle direzioni** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

C_3○ **Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di** f **in** $[-1,1]\times[-1,1]$

D_3○ **Scrivere il piano tangente al grafico della funzione** $z=f(x,y)$ **nel punto** $(-10,0)$

E_3○ **Disegnare il grafico della funzione** $\phi(x) = f(x,x^2)$

19

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^2 + x^2 - x^6$$

F_3○ **Disegnare le curve di livello di** f

G_3○ **Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di** f **nel punto** $(1,0)$

H_3○ **Determinare massimi e minimi relativi di** f

I_3○ **Determinare massimi e minimi assoluti di f su $Q = [0,1] \times [0,1]$**

J_3○ **Calcolare** $\int\int_Q f(x,y)dxdy$

20

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^2 + x^2 - x^6$$

F_3○ **Disegnare le curve di livello di f**

G_3○ **Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto** $(1,0)$

H_3○ **Determinare massimi e minimi relativi di f**

I_3○ **Determinare massimi e minimi assoluti di f su $Q = [0,1] \times [0,1]$**

J_3○ **Calcolare** $\int\int_Q f(x,y)dxdy$

21

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = xy^2 + x^2$$

G_3○ **Disegnare le curve di livello di f**

H_3○ **Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto** $(1,0)$

I_3○ **Determinare massimi e minimi assoluti di f su $Q = [0,1] \times [0,1]$**

J_3○ **Calcolare** $\int\int_D f(x,y)dxdy$ **dove**

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \}$$

22

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

e l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1 \ \ 1 - x \leq y \leq 1\}$$

G_3○ **Disegnare il suo campo di definizione precisando dove f è continua e derivabile.**

H_4○ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

H_4○ **Calcolare massimi e minimi assoluti di f in D.**

I_2○ **Disegnare le linee di livello di f**

J_2○ **Scrivere il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$.**

23

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^y + 1$$

A_3○ **Disegnare il campo di definizionedi f**

B_3○ **Disegnare il grafico delle funzioni $f(x, y_0)$ ed $f(x_0, y)$ al variare di x_0 e di y_0**

C_3○ **Disegnare le curve di livello di f**

D_3○ **Determinare massimi e minimi assoluti di f**

E_3○ **Calcolare, il gradiente di f**

24

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \ln x - xy$$

F_3○ **Disegnare, nel piano il campo di definizione di f**

G_3○ **Disegnare nel piano le curve di livello $f(x,y) = k$ dei f corrispondenti ai valori $k = -1, 0, 1$**

H_3○ **Disegnare nel piano le curve di livello $f(x,y) = k$ dei f corrispondenti a qualche valore significativo di k**

I_4○ **Disegnare il grafico delle funzioni $f(x, mx)$ al variare di $m \in \mathbb{R}$, precisandone il significato**

J_3○ **Calcolare $\nabla f(x,y)$, precisando dove è definito**

K_3○ **Disegnare, nel piano il campo di direzioni individuato da ∇f**

25

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

A_3○ **Disegnare** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$

B_3○ **Disegnare** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\}$

C_3○ **Disegnare** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = -1\}$

D_3○ **Calcolare** $\nabla f(x,y)$

E_3○ **Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di f su $\mathbb{R}^2$**

26

Si consideri

$$f(x,y) = x^2 + \frac{2}{y^2}$$

F_3○ **Determinare il campo di definizione di f.**

$G_3\bigcirc$ **Stabilire per quali valori dell'argomento f è derivabile.**

$H_3\bigcirc$ **Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.**

$I_3\bigcirc$ **Disegnare le curve di livello di f**

$J_3\bigcirc$ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x \le 2 \ , \ 2 \le y \le 3\}$$

27

Si consideri

$$f(x,y) = x^2 + \frac{2}{y^2}$$

$F_3\bigcirc$ **Determinare il campo di definizione di f.**

$G_3\bigcirc$ **Stabilire per quali valori dell'argomento f è derivabile.**

$H_3\bigcirc$ **Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.**

$I_3\bigcirc$ **Disegnare le curve di livello di f**

$J_3\bigcirc$ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x \le 2 \ , \ 2 \le y \le 3\}$$

28

Si consideri

$$f(x,y) = x^2 + 3x + 2xy$$

$F_3\bigcirc$ **Determinare il campo di definizione di f e disegnarne le curve di livello.**

$G_3\bigcirc$ **Stabilire per quali valori dell'argomento f è derivabile parzialmente.**

$H_3\bigcirc$ **Calcolare**

$$\nabla f(x,y)$$

$I_3\bigcirc$ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

$J_3\bigcirc$ **Calcolare massimi e minimi assoluti di f su**

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2 \ , \ 0 \le y \le 3 \ , \ y \le x + 1\}$$

29

Si consideri

$$f(x,y) = x + y + x^2$$

E_3○ **Determinare il campo di definizione di f.**

F_3○ **Disegnarne le curve di livello.**

G_3○ **Calcolare**

$$\nabla f(x,y)$$

e determinare tutti i punti in cui il gradiente si annulla precisando se sono di massimo o di minimo relativo.

H_3○ **Calcolare massimi e minimi assoluti di f su**

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \ , \ y \le x^2\}$$

I_3○ **Calcolare**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

30

Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y) \qquad (x,y) \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$$

F_3○ **Indicare nel piano (x,y) le zone in cui f è positiva e quelle in cui f è negativa.**

G_3○ **Disegnare la curva di livello di altezza $1/2$**

H_3○ **Determinare massimi e minimi assoluti di f**

I_3○ **Stabilire per quali valori di α l'equazione $f(x,y) = \alpha$ ammette soluzioni**

J_3○ **Calcolare**

$$\int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} f(x,y)dxdy$$

31

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^x + 2y^2 x$$

A_3○ **Determinare l'insieme in cui f è definita, è derivabile, è differenziabile e il rango di f**

B_3○ **Disegnare le curve di livello di f**

C_3○ **Calcolare $g'(t)$ dove $g(t) = f(x(t), y(t))$ e $x, y \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$**

D_3○ **Calcolare**

$$\int\int_{[1,2]\times[2,3]} f(x,y)dxdy$$

$E_3\bigcirc$ **Calcolare massimi e minimi assoluti di** f **su** $[1,2]\times[2,3]$

32

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^y$$

$F_3\bigcirc$ **Determinare il campo di definizione di** f

$G_3\bigcirc$ **Stabilire dove** f **è differenziabile**

$H_3\bigcirc$ **Calcolare** $\nabla f(x,y)$ **e** $f'((x,y),(a,b))$

$I_3\bigcirc$ **Determinare massimi e minimi di** f **sul triangolo di vertici** $A=(0,1)$**,** $B=(1,0)$**,** $C=(0,0)$

$J_3\bigcirc$ **Determinare il piano tangente al grafico di** $z=f(x,y)$ **in** $(1,1)$

33

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & |y| \geq x^2 \\ y & |y| < x^2 \end{cases}$$

$F_3\bigcirc$ **Determinare il campo di definizione di** f **e precisare dove** f **è continua**

$G_3\bigcirc$ **Disegnare i livelli di** f

$H_3\bigcirc$ **Studiare la derivabilità parziale di** f

$I_3\bigcirc$ **Calcolare massimi e minimi assoluti di** f **su** $Q=[0,1]\times[0,1]$

$J_3\bigcirc$ **Calcolare** $\int\int_Q f(x,y)dxdy$

34

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & |y| \geq x^2 \\ y & |y| < x^2 \end{cases}$$

$F_3\bigcirc$ **Determinare il campo di definizione di** f **e precisare dove** f **è continua**

$G_3\bigcirc$ **Disegnare i livelli di** f

$H_3\bigcirc$ **Studiare la derivabilità parziale di** f

$I_3\bigcirc$ **Calcolare massimi e minimi assoluti di** f **su** $Q=[0,1]\times[0,1]$

$J_3\bigcirc$ **Calcolare** $\int\int_Q f(x,y)dxdy$

35

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \int_0^x ye^{-t^2}dt$$

F_3◯ **Determinare il campo di definizione di f e precisare dove f è continua**

G_3◯ **Disegnare i livelli di f**

H_3◯ **Studiare la derivabilità parziale di f**

I_3◯ **Calcolare massimi e minimi assoluti di f su $Q = [0,1] \times [0,1]$**

J_3◯ **Calcolare le derivate direzionali di f in $(0,0)$.**

36

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y + y^2$$

F_3◯ **Disegnare le curve di livello di f**

G_3◯ **Determinare massimi e minimi assoluti di f sull'insieme**

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le x^2\}$$

H_3◯ **Calcolare $\int\int_D f(x,y)dxdy$**

37

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \pi/4 \le \theta \le \pi/2 \ , \ x^2 + y^2 \le 1\}$ dove (ρ, θ) sono le coordinate polari associate alle coordinate cartesiane (x,y).

A_3◯ **Determinare massimi e minimi assoluti di f su D.**

B_3◯ **Disegnare gli insiemi di livello di f.**

C_3◯ **Calcolare $\int\int_D f(x,y)dxdy$**

D_3◯ **Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$**

E_3◯ **Calcolare le derivate direzionali di f nel punto $(1,1)$**

38

A_2○ **Sia X una variabile aleatoria avente densità f, di media 0 e varianza 1. Determinare media e varianza della variabile aleatoria $3X + 7$.**

B_2○ **Si considerino nel piano (x, y) i punti**

$$(0,4)\ (1,4)\ (2,3)\ (3,2)\ (4,2)$$

Determinare la retta di regressione ed il coefficiente di correlazione tra le variabili x ed y

C_2○ **Determinare la probabilità di ottenere, in 100 lanci di una moneta (non truccata), un numero di 'teste' compreso tra 45 e 60.**

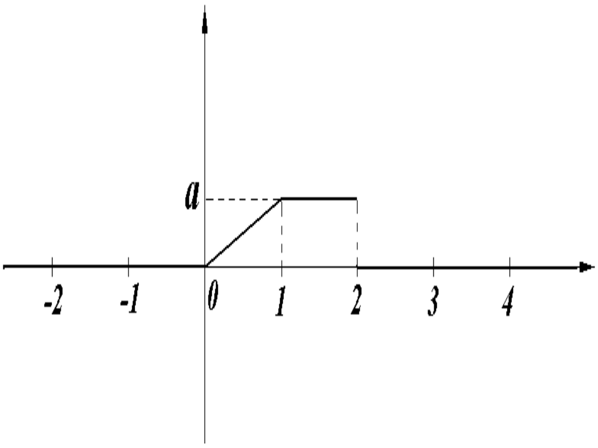
39

A_3○ **Si considerino nel piano (x, y) i punti**

$$(0,0)\ (1,0)\ (1,1)\ (2,1)$$

Determinare la retta di regressione tra le variabili x ed y

B_4○ **Sia f, la funzione rappresentata nel seguente grafico**



Determinarne a in modo che f rappresenti la densità di una variabile aleatoria X e successivamente calcolarne media e varianza.

C_3○ **Si consideri un dado sulle cui 6 facce sono segnati i punteggi 1, 1, 2, 2, 3, 3 (tutti con eguale probabilità); determinare la probabilità che la somma dei punteggi ottenuti in 150 lanci sia compresa tra 280 e 310.**

40

Un'urna contiene 3 dadi, uno Rosso, uno Bianco ed uno Nero; si estrae un dado e lo si lancia osservandone il punteggio ed il colore.

$A\bigcirc$ **Descrivere lo spazio dei campioni;**

$B\bigcirc$ **Determinare la probabilità che il punteggio ottenuto sia** 1 **e sia ottenuto con il dado Bianco.**

$C\bigcirc$ **Determinare la probabilità che il punteggio ottenuto sia** 1.

$D\bigcirc$ **Determinare la probabilità che il punteggio ottenuto sia** 1 **e non sia ottenuto con il dado Bianco.**

$E\bigcirc$ **Determinare la funzione distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che restituisce il punteggio ottenuto e della variabile aleatoria che restituisce la coppia di valori (punteggio,colore).**

41

Due giocatori A **e** B **lanciano a turno una moneta, cominciando da** A. **Il giocatore che lancia vince se esce Testa.**

$A\bigcirc$ **Determinare la probabilità che** A **vinca al primo lancio.**

$B\bigcirc$ **Determinare la probabilità che** A **vinca al terzo lancio.**

$C\bigcirc$ **Determinare la probabilità che** A **vinca al quinto lancio.**

$D\bigcirc$ **Determinare la probabilità che** A **vinca al** $n-$**esimo lancio.**

$E\bigcirc$ **Determinare la probabilità che** A **vinca (supponendo di effettuare infiniti lanci).**

42

Si consideri un'urna contenente:
un dado a forma di tetraedro (4 **facce),**
un dado a forma di esaedro (6 **facce),**
un dado a forma di ottaedro (8 **facce),**
un dado a forma di dodecaedro (12 **facce),**
un dado a forma di icosaedro (20 **facce).**
Si estrae un dado e si lancia osservando il punteggio.

$A\bigcirc$ **Determinare lo spazio dei campioni.**

$B\bigcirc$ **Determinare la probabilità che il punteggio sia** 1.

$C\bigcirc$ **Determinare la probabilità che il punteggio sia** 3.

$D\bigcirc$ **Determinare la probabilità che il punteggio sia** 10.

$E\bigcirc$ **Determinare la probabilità che il punteggio sia** 15.

$F\bigcirc$ **Determinare la probabilità che si sia estratto e lanciato il dado a forma di ottaedro sapendo che**
è uscito il punteggio 7
è uscito il punteggio 10
è uscito il punteggio 15

43

Determinare la funzione di distribuzione di probabilità della variabile aleatoria s che restituisce il punteggio ottenuto lanciando due dadi, uno a forma di tetraedro ed uno a forma di esaedro (cubo).

Calcolare media, moda e varianza della variabile aleatoria s.

44

Si supponga di disporre di N monete

$$\{M_1, M_2, ...M_i..., M_N\}$$

lanciando ciascuna delle quali si ha una probabilità di successo (uscita di Testa)

$$\{p_1, p_2, ...p_i..., p_N\}$$

ed una probabilità di insuccesso (uscita di Croce)

$$\{q_1, q_2, ...q_i..., q_N\} \qquad , \quad q_i = 1 - p_i$$

Si estrae una moneta, essendo l'estrazione di ciascuna equiprobabile, e la si lancia per n volte.

Calcolare la probabilità che si sia estratta la moneta $M_{\hat{i}}$ sapendo che su n lanci ci sono stati k successi.

45

Si considerino due urne U_1 ed U_2 contenenti
U_1 3 palline Bianche e 2 palline Nere
ed
U_2 5 palline Bianche e 7 palline Nere
Si lancia una moneta e si estrae una pallina da U_1 nel caso il lancio della moneta dia T oppure da U_2 nel caso il lancio della moneta dis C.
La probabilità di ottenere T sia p e quella di ottenere C sia $q = 1 - p$.
Determinare la probabilità che si sia estratta una pallina dall'urna U_1 sapendo che è stata estratta una pallina Bianca

---

46

---

100 lanci di un dado a forma di tetraedro forniscono i seguenti risultati

1	2	3	4
20	25	24	31

Riportare su un istogramma i dati e calcolare media, moda e varianza.

Determinare la funzione di distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che restituisce il punteggio del dado e calcolare le frequenze attese su 100 lanci.

Stabilire, usando il test del χ^2, se i dati ottenuti si adattano alle frequenze teoriche ottenute.

47

Si consideri una variabile aleatoria ξ la cui funzione di distribuzione di probabilità è bernoulliana con parametri $n = 100$ (numero di prove effettuate), $p = 1/3$ (probabilità di successo), $q = 1 - p = 2/3$ (probabilità di insuccesso

Calcolare

$$\mathcal{P}(10 \le \xi \le 30) \;\; ; \;\; \mathcal{P}(\xi \le 30) \;\; ; \;\; \mathcal{P}(4 \le \xi) \;\; ; \;\; \mathcal{P}(\xi \le 120) \;\; ; \;\; \mathcal{P}(-10 \le \xi) \;\; ; \;\; p(-10 \le \xi \le 10)$$

48

Il diametro medio delle sferette prodotte da una macchina è $\mu = 5\ mm$ con una varianza $\sigma^2 = 0.0025 mm^2$.

Determinare quante sferette, su 100 prodotte, hanno un diametro compreso tra $4.95\ mm$ e $5.05\ mm$.

49

Una macchina produce sferette; tra le sferette prodotte 1 su 10 risulta non conforme agli standard di qualità.

Determinare la propabilità che su 10 sferette ce ne siano 2 non conformi agli standard di qualità usando:

La distribuzione Binomiale (di Bernoulli),
La distribuzione di Poisson (per eventi rari),
La distribuzione di Normale (di Gauss).

50

Sia ξ una variabile aleatoria avente distribuzione gaussiana con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$, (variabile normale, standardizzata).

Calcolare

$$\mathcal{P}(-5 \le \xi \le 5) \quad ; \quad \mathcal{P}(-4 \le \xi \le 4) \quad ; \quad \mathcal{P}(-3 \le \xi \le 3) \quad ; \quad \mathcal{P}(-2 \le \xi \le 2) \quad ; \quad \mathcal{P}(-1 \le \xi \le 1)$$

51

Sia ξ una variabile aleatoria avente distribuzione gaussiana con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 2$, (variabile normale, standardizzata).

Calcolare

$$\mathcal{P}(-5 \le \xi \le 5) \quad ; \quad \mathcal{P}(-4 \le \xi \le 4) \quad ; \quad \mathcal{P}(-3 \le \xi \le 3) \quad ; \quad \mathcal{P}(-2 \le \xi \le 2) \quad ; \quad \mathcal{P}(-1 \le \xi \le 1)$$

$$\mathcal{P}(-2 \le \xi \le 4) \quad ; \quad \mathcal{P}(0 \le \xi \le 2)$$

52

Usando la funzione generatrice dei momenti, calcolare i momenti μ_3 e μ_4 di una variabile aleatoria gaussiana standardizzata.

53

sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} ae^{-kx} & x < 0 \\ be^{-hx} & x \ge 0 \end{cases}$$

Determinare quali relazioni devono essere verificate da a, b, h, k affinchè φ sia la funzione di distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria.

54

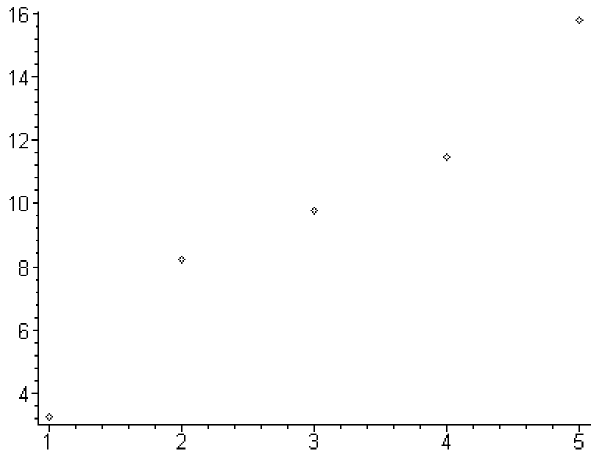
Calcolare la probabilità che lanciando un dado a forma di tetraedro per 100 volte si ottenga il punteggio di 4 un numero di volte compreso tra 40 e 60.

(Si usi la distribuzione binomiale o la sua approssimazione con la distribuzione Gaussiana data dal teorema del limite centrale)

55

Determinare la retta di equazione $y = ax + b$ che meglio approssima i seguenti dati:

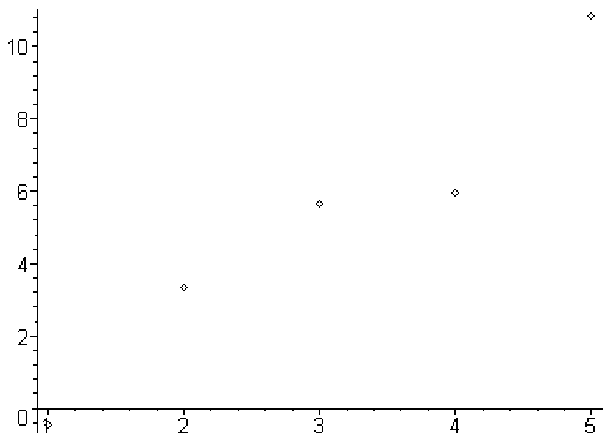
$$[1, 3.231770570], [2, 8.201485027], [3, 9.758165839], [4, 11.48198882], [5, 15.79776321]$$



56

Determinare la retta di equazione $y = ax + b$ che meglio approssima i seguenti dati:

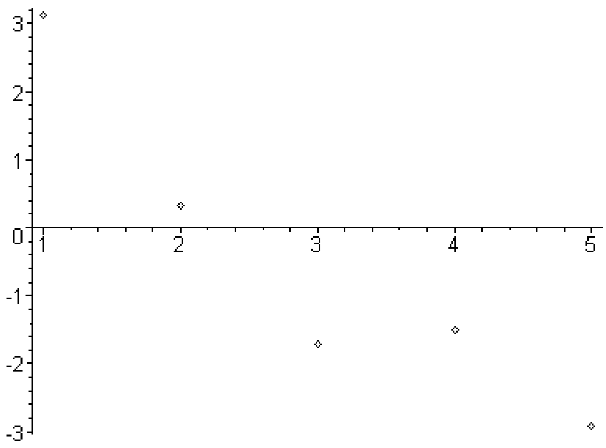
$$[1, -.461084500], [2, 3.341098639], [3, 5.671447079], [4, 5.943624511], [5, 10.82728930]$$



57

Determinare la retta di equazione $y = ax + b$ che meglio approssima i seguenti dati:

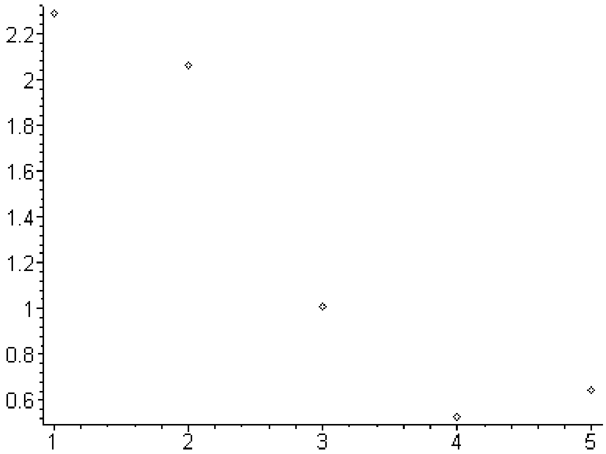
$$[1, 3.117359638], [2, .3260824573], [3, -1.718780648], [4, -1.502103155], [5, -2.920347382]$$



58

Determinare la retta di equazione $y = ax + b$ che meglio approssima i seguenti dati:

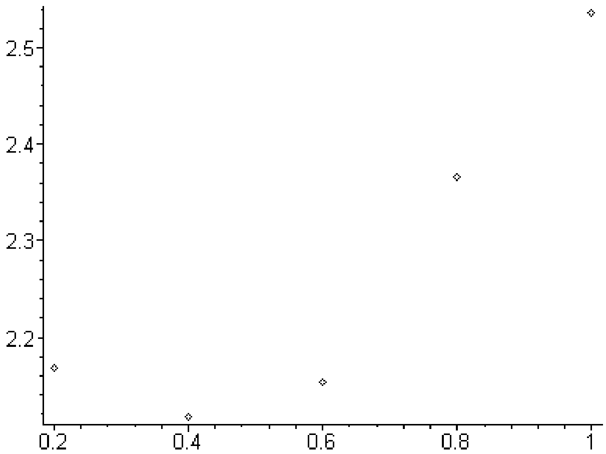
$$[1, 2.286864883], [2, 2.064214012], [3, 1.011615494], [4, .5280262240], [5, .6452964433]$$



59

Determinare la funzione di equazione $y = ae^{bx}$ che meglio approssima i seguenti dati:

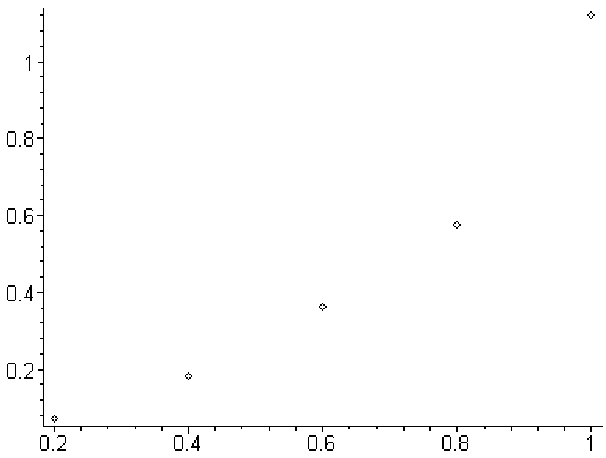
$[.2000000000, 2.167419134], [.4000000000, 2.117562590], [.6000000000, 2.153698863], [.8000000000, 2.366609467], [1., 2.53572$



60

Determinare la funzione di equazione $y = ax^b$ che meglio approssima i seguenti dati:

$[.2000000000, .07122902255], [.4000000000, .1834645394], [.6000000000, .3642062295], [.8000000000, .5767290950], [1., 1.1205$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1