Analisi Matematica II

Complementi di Analisi Matematica

Prove d'Esame

A.A. 1992/2019

Prima Prova Parziale 92/93

Si consideri in campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (0,0,y)$$

<A> Calcolare **rot** F e **div** F

<B> Sia S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x = 0, \quad z^2 + y^2 \leq 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di **rot** F attraverso S.

<C> Sia S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di **rot** F attraverso S.

<D> Calcolare il lavoro di F sulla curva γ intersezione di $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con il piano $x = 1/2$.

<E> Calcolare il flusso di **rot** F attraverso la superficie $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \leq 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

<F> Determinare, se esistono, i punti del piano $z + y = 1$ aventi minima e massima distanza dall'origine.

<G> Studiare la curva ottenuta nel piano (x,y) proiettando sul piano $z = 0$ la curva δ intersezione del piano $z + y = 1$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

<H> Esprimere mediante un problema di minimizzazione vincolata il problema di trovare il punto della curva δ avente massima e minima quota.
Trovare tali punti.

Seconda Prova Parziale 92/93

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

<A> Calcolare $y''(0)$ per ogni soluzione dell'equazione data

<B> Detti $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, determinare una formula di ricorrenza per i coefficienti a_n di una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che sia soluzione dell'equazione data.

<C> Per i casi $a = 1$ $b = 0$ e $a = 0$ $b = 1$, determinare le formule di ricorrenza per b_n e c_n in modo che le corrispondenti soluzioni si possano scrivere nella forma $\sum b_n x^{3n}$ e $\sum c_n x^{3n+1}$, precisando la relazione tra a_n b_n e c_n.

<D> Determinare il raggio di convergenza delle serie trovate

<E> Scrivere l'integrale generale dell'equazione data

Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \qquad t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

<F> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili.

<G> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$.

<H> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$ e $u(t,\pi) = 0$.

<I> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$, $u(t,\pi) = 0$ e $u(0,x) = \sin x + 2\sin 4x$.

<J> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$, $u(t,\pi) = 0$ e $u(0,x) = x(x-\pi)$.

Prova d'Esame Giugno 1993

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\ln(1+e^{-n})\Big) x^{n!}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza della serie data.

<B> Precisare se la serie è convergente negli estremi dell'intervallo reale di convergenza.

<C> Studiare la convergenza uniforme della serie precisando se è convergente su tutto il suo intervallo di convergenza reale

<D> Determinare, nel piano complesso il cerchio di convergenza della serie data, precisando il suo comportamento sulla frontiera

<E> Stabilire se la serie data è uniformemente o totalmente convergente su tutto il suo cerchio di convergenza, nel piano complesso.

Si consideri l'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| \leq 2 \ \ 0 \leq y \leq 2 \ \ 0 \leq z \leq x - x^2\}$$

<F> Calcolare il volume di D

<G> Calcolare la superficie totale di $S = \partial D$
Si consideri poi il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x + zy^2, 0, z+1)$$

<H> Calcolare il flusso di F attraverso S

<I> Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| \leq 2 \ \ 0 \leq y \leq 2 \ \ 0 \leq z = x - x^2\}$$

<J> Determinare, se esistono, un maggiorante ed un minorante del campo di definizione della soluzione.

Prova d'Esame Luglio 1993

Si consideri il campo vettoriale piano F associato ad una funzione potenziale ottenuta sommando due quantità, rispettivamente, proporzionali all'inverso dei quadrati delle distanze dai punti $(0,1)$ e $(0,-1)$.

<A> Scrivere le componenti F_1 ed F_2 del campo $F = (F_1, F_2)$

<B> Calcolare $\int_\gamma F$ dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^4 + y^4 = 10000\}$$

<C> Calcolare $\int_\gamma F$ dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 2 \ \ y \geq x\}$$

<D> Stabilire se è vero che $\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial x} F_2$ precisando, in caso affermativo per quali (x,y) è vero.

<E> Calcolare il flusso del rotore di $G = (F_1, F_2, 0)$ attraverso un quadrato avente un vertice in $(0,0)$ e in $(1/2, 1/2)$

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 - y^2(x)$$

<F> Discutere brevemente esistenza ed unicità delle soluzioni al variare dei dati iniziali

<G> Determinare eventuali soluzioni costanti

<H> Trovare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$ precisandone il campo di definizione.

<I> Stabilire se tale soluzione è limitata e calcolarne eventuali massimi e minimi assoluti e relativi

<J> Determinare, se esistono, un maggiorante ed un minorante del campo di definizione della soluzione.

Prova d'Esame Settembre 1993

Sia $C = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \sin(y), y \in [0, \pi]\}$

<A> Scrivere una parametrizzazione della superficie R ottenuta facendo ruotare C di 2π radianti attorno all'asse z,

<B> Scrivere una parametrizzazione della superficie T ottenuta traslando C di 3 unità lungo l'asse x,

<C> Calcolare la superficie di R.

<D> Calcolare la superficie di T

<E> Calcolare il volume delimitato da R e dal piano $z = 0$

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 + \left(\int_0^y e^{-t^2} dt \right)^2$$

<F> Determinare il campo di definizione di f.

<G> Determinare, se esiste, (giustificando brevemente la risposta)

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$$

<H> Calcolare, se esistono, $\inf f$, $\sup f$, $\min f$ e $\max f$ su $\mathbb{R}^2$

<I> Calcolare, se esistono, $\inf f$, $\sup f$, $\min f$ e $\max f$ su $[0, 1]^2$

Prova d'Esame Ottobre 1993

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

<A> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > 0$.

<B> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < 0$.

<C> Determinare, se esistono, tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

<D> Stabilire se le soluzioni di cui ai punti precedenti formano uno spazio vettoriale ed in caso affermativo stabilirne la dimensione.

<E> Trovare, se esistono, le soluzioni tali che $y(0) = 1$ e $y(1) = 0$.

Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \qquad 0 \le t \le 1 \quad 0 \le x \le 1$$

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data che si possono ottenere per separazione delle variabili.
l

<G> Determinare tutte le soluzioni che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(0,x) = e^x$.

<H> Determinare tutte le soluzioni che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(0,x) = e^x$ e $u(1,x) = 2e^x$.

Prova d'Esame Dicembre 1993

Si consideri l'equazione differenziale

$$(y''(x))^2 = 4y'(x)y(x)$$

<A> Determinare le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = k$, $y'(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

<B> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ e disegnarne il grafico.

<C> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ e disegnarne il grafico.

<D> Studiare l'unicità della soluzione al variare dei valori iniziali.

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n!}}{n!}$$

<E> Determinare i coefficienti a_n della serie di potenze e precisare se è vero che lim $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ fornisce il raggio di convergenza della serie

<F> Trovare il raggio di convergenza R della serie

<G> Stabilire se la serie data converge per $x = R$

<H> Stabilire se la serie data converge per $x = -R$

<I> Esprimere in serie di potenze

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

precisando il raggio di convergenza dello sviluppo ottenuto

Prova d'Esame Gennaio 1994

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+y^2} \right)$$

<A> Determinare il campo di definizione D di F

<B> Stabilire se F è conservativo in D

<C> Calcolare il flusso del campo F attraverso la superficie laterale del cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \quad : \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\ , \quad |z| \leq 1\}$

<D> Calcolare il flusso del campo F attraverso le superfici di base del cilindro.

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^2}$$

<E> Dimostrare che f converge totalmente su $\mathbb{R}$

<F> Dimostrare che f è periodica e determinarne il periodo minimo.

<G> Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di f su $[0, 2\pi]$

<H> Calcolare $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a meno di .1

<I> Precisare se l'approssimazione ottenuta è per eccesso, per difetto e trovare con una cifra esatta $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Prova d'Esame Febbraio 1995

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(\theta(x,y) - \phi)}{\rho^3(x,y)}$$

ove $\rho(x,y)$ e $\theta(x,y)$ sono le usuali coordinate polari nel piano associate al punto (x,y) e $\phi \in [0,\pi]$ è fissato.

<A> Determinare il campo di definizione

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x,y) \in \mathbb{R}\}$$

di f

<B> Trovare i sottoinsiemi di D in cui f è positiva, negativa o nulla.

<C> Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y), \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

<D> Calcolare

$$\int\int_T f(x,y)dxdy$$

ove

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$$

<E> Disegnare le curve di livello di f

Si consideri la funzione

$$f(k) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{x^2} dx$$

<F> Dimostrare che f è definita $\mathbb{R}$

<G> Stabilire per quali valori f è derivabile e calcolarne la derivata.

<H> Esprimere, integrando per parti, $f'(k)$ in funzione di f

<I> Determinare esplicitamente $f(k)$.

Prima Prova Parziale 93/94

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(|x|y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Stabilire se f è continua e differenziabile in $(0,0)$

<B> Stabilire se f è continua e differenziabile in $(1/2, 2)$.

<C> Calcolare, per i punti (x,y) per le quali esistono, le derivate parziali di f.

<D> Calcolare

$$\lim (x,y) \to \infty f(x,y)$$

<E> Stabilire se f è limitata su $\mathbb{R}^2$ provando brevemente quanto affermato.

Si consideri la curva Γ di equazione polare

$$\rho = 1 + (\sin(2\theta))^2 \qquad , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

<F> Dimostrare che Γ è semplice.

<G> Dimostrare che Γ è regolare.

<H> Dimostrare che Γ è limitata.

<I> Dimostrare che Γ è simmetrica rispetto all'asse y.

<J> Disegnare Γ.

<K> Calcolare $\int_{\Gamma'} F$ ove $\Gamma' = \Gamma \cap \{x \geq 0\}$ ed

$$F = \left(\frac{x}{(x^2+y^2-1)^{3/2}} - \frac{y}{(x+1)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2-1)^{3/2}} + \frac{1}{x+1} \right)$$

Seconda Prova Parziale 93/94

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) + 2y(x)y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

<A> Discutere esistenza ed unicità delle soluzione, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<B> Determinare tutte le soluzioni del problema quando $b = 0$.

<C> Determinare la soluzione del problema per $b = -4$ e $a = 1$.

<D> Determinare la soluzione del problema per $b = 13$ e $a = 1$.

<E> Precisare il campo di definizione delle soluzioni trovate discutendone la prolungabilità.

Si consideri

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

<F> Disegnare T

<G> Stabilire se T è limitato.

<H> Stabilire se T è chiuso.

<I> Calcolare il baricentro di T

$x_b =$ $y_b =$ $z_b =$

riportando succintamente i calcoli.

Sia inoltre $f(x, y, z) = x$

<J> Stabilire se esiste il massimo ed il minimo assoluto di f su T.

<K> Calcolare il minimo assoluto di f su T

<L> Calcolare il massimo assoluto di f su T

Prova d'Esame 14 Giugno 1994

Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$u_{xy}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$$

<A> Scrivere una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L(x,y) = (t(x,y), s(x,y))$$

tale che

$$L(1,0) = (1,1) \qquad L(0,1) = (0,1)$$

e ricavare la sua inversa

$$L^{-1}(x,y) = (x(t,s), y(t,s))$$

<B> Posto $v(t,s) = u(x(t,s), y(t,s))$ calcolare $v_t(t,s)$ e $v_{ts}(t,s)$

<C> Verificare che

$$v_{ts}(t(x,y), s(x,y)) = u_{xy}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$$

<D> Trovare tutte le funzioni $v(t,s)$ tali che $v_{ts}(t,s) = 0$

<E> Trovare tutte le funzioni $u(x,y)$ tali che

$$u_{xy}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ y(0) = k \end{cases}$$

<F> Stabilire per quali k esiste un'unica soluzione e giustificare brevemente le affermazioni

<G> Precisare l'insieme di definizione della soluzione del problema di Cauchy al variare di k.

<H> Calcolare $y''(x)$

<I> Disegnare il grafico locale della soluzione y del problema per $k = 1$

<J> Scrivere i primi due vertici della poligonale di Eulero, (escluso il punto iniziale)

<K> Scrivere il polinomio di McLaurin di secondo grado della soluzione y per $k = 1$

Prova d'Esame 29 Giugno 1994

<A> Scrivere le componenti di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ generato da una forza diretta verso l'asse z avente intensità $f(x, y, z)$

<B> Scrivere le componenti di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ generato da una forza diretta verso l'asse z avente intensità proporzionale alla distanza dall'origine degli assi.

<C> Calcolare il flusso Φ_n del campo vettoriale trovato attraverso una corona sferica S_n delimitata dalle sfere di raggio $1/n$ ed 1.

<D> Calcolare

$$\lim \Phi_n$$

<E> Verificare il teorema della divergenza relativamente a S_n

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = k \end{cases}$$

<F> Stabilire per quali valori di k esiste un'unica soluzione del problema assegnato

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale relativa al problema assegnato, definite per $x > 0$.

<H> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale relativa al problema assegnato, definite per $x \in \mathbb{R}$.

<I> Determinare tutte le soluzioni del problema assegnato, per $k = 1$ precisandone l'insieme di definizione.

<J> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = -2x$$

definite per $x < 0$.

Prova d'Esame Luglio 1994

Sia

$$f(x,y) = x^4 + 2xy^3 - xy$$

ed

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = x^4 + 2xy^3 - xy = 0 \ , \ x \neq 0\}$$

<A> Determinare, al variare di m, le intersezioni di A con la retta $y = mx$

<B> Scrivere, usando m come parametro, delle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(m) \\ y = y(m) \end{cases}$$

di A

<C> Disegnare i grafici di $x(m)$ ed $y(m)$.

<D> Disegnare A

<E> Studiare l'esplicitabilità di $f(x,y) = 0$ rispetto ad x o a y.

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) (x+1)^n$$

<F> Determinare il raggio di convergenza della serie giustificando brevemente le affermazioni

<G> Provare che per $x = -3$ la serie data è convergente

<H> Determinare gli insiemi in cui la serie converge puntualmente, assolutamente, uniformemente.

<I> Approssimare a meno di .1

$$\int_{-2}^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

Prova d'Esame Settembre 1994

Sia

$$f(x,y) = \int\int_A \frac{|\sin(ts)|}{\sqrt{t^2+s^2+1}} dtds$$

ove

$$A = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [0,x] \ , \ s \in [0,y]\}$$

<A> Determinare il dominio di definizione di f

<B> Calcolare, dove esiste, ∇f

<C> Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to+\infty}$

<D> Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine

<E> Studiare la differenziabilità di f.

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} + 2x, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

<F> Determinare l'insieme I di definizione del campo F.

<G> Verificare che F è chiuso in I.

<H> Stabilire se il campo F è conservativo in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, giustificando brevemente la risposta.

<I> Stabilire se F è conservativo in A, ed in caso affermativo trovarne un potenziale

<J> Stabilire se F è conservativo in I, ed in caso affermativo trovarne un potenziale

<K> Calcolare $\int_\gamma F$ dove γ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ compreso, nell'ordine, tra i punti $(1,1)$ e $(-1,1)$, giustificando brevemente le affermazioni.

Prova d'Esame Dicembre 1994

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{y\sin(x)} - 1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

<A> Stabilire se f è continua in $(0,0)$

<B> Calcolare, se esiste, $\nabla f(0,0)$

<C> Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$

<D> Stabilire se f è differenziabile in $(1,1)$

<E> Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{per} x \geq 0$$

<F> Determinare l'equazione cartesiana della superficie $z = g(x,y)$ ottenuta mediante rotazione attorno all'asse z.

<G> Calcolare l'area della superficie A definita da

$$0 \leq z \leq g(x,y) \quad , \quad x = y$$

<H> Calcolare il volume V definito da

$$0 \leq z \leq g(x,y)$$

<I> Calcolare le coordinate del baricentro di A

<J> Calcolare le coordinate del baricentro di V

Prova d'Esame Gennaio 1995

<A> Determinare le equazioni parametriche della retta di equazione

$$\begin{cases} z = x \\ z = y \end{cases}$$

<B> Determinare le equazioni parametriche del cilindro, il cui asse è parallelo alla retta data, generato dalla circonferenza di centro l'origine e raggio unitario che giace nel piano $z = 0$.

<C> Determinare il vettore normale alla superficie data.

<D> Calcolare l'area della parte di superficie del cilindro dato posta all'interno del cilindro

$$[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t} \sin(\omega t) dt$$

<E> Determinare il campo di definizione di f al variare di $\omega \in \mathbb{R}$

<F> Esprimere $f(x)$ in termini di funzioni elementari.

<G> Calcolare, se esiste $\ell = \lim_{x \to 0}(x)$;

<H> Prolungare per continutà $f(x)$

<I> Calcolare $f'(0)$ e scrivere il polinomio di Mc Laurin di f di primo grado.

Prova d'Esame Febbraio 1995

Si consideri la superficie E definita da

$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ z = \dfrac{x}{2} + 1 \end{cases}$$

<A> Scrivere una parametrizzazione di E e della sua frontiera ∂E

<B> Calcolare

$$\int_{\partial E} x dy - y dx$$

<C> Calcolare

$$\int_E dx \wedge dy$$

<D> Calcolare il volume del solido definito da

$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ z \leq x + 1 \end{cases}$$

<E> Calcolare l'area di E (non si richiede di svolgere interamente i calcoli)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin^2(x)$$

<F> Disegnare il grafico di f e stabilire se f è sviluppabile in serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$

<G> Disegnare, ove possibile, il grafico della somma della serie di Fourier di f

<H> Calcolare i coefficienti della serie di Fourier di f

<I> Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

<J> Stabilire se è possibile sviluppare f in serie di soli seni su $[-\pi, \pi]$

Prova d'Esame Marzo 1995

Si consideri la funzione

$$\begin{cases} \dfrac{x\arctan(y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

<A> Stabilire se f è continua in $(0,0)$

<B> determinare l'insieme in cui f è differenziabile, giustificando brevemente la risposta
Si consideri poi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

<C> Stabilire per quali (x_0,y_0) esiste una ed una sola soluzione dell'equazione data, giustificando brevemente la risposta.

<D> Calcolare $y''(x)$

<E> Disegnare il grafico locale della soluzione per $x_0=1$ $y_0=1$.

Si consideri, nel campo complesso la serie di funzioni

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{z}\right)^n\frac{1}{(1+i)^n} \qquad z\in\mathbb{C}$$

<F> Determinare l'insieme di convergenza D della serie assegnata

<G> Disegnare l'insieme di convergenza D della serie assegnata

<H> Determinare un insieme in cui la serie converga totalmente

<I> Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+i)^n}$$

<J> Precisare la convergenza della serie di funzioni assegnata sulla frontiera di D

Prima Prova Parziale 94/95

Si consideri il solido delimitato dalla superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u,\theta) = u\cos\theta \\ y(u,\theta) = (1-u)\sin\theta \\ z(u,\theta) = u \end{cases} \qquad 0 \le u \le 1 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

<A> Disegnare le sezioni del solido ottenute tagliandolo con i piani

$$z = 0 \qquad z = 1 \qquad z = 1/2$$

<B> Disegnare le sezioni S_k del solido ottenute tagliandolo con i piani $z = k$ con $0 \le k \le 1$.

<C> Calcolare l'area delle sezioni S_k.

<D> Calcolare il volume del solido

<E> Calcolare le coordinate del baricentro del solido

<F> Disegnare nel piano (y, z) i luoghi dei punti tali che

$$|z| = y + 1 \qquad z = |y + 1| \qquad z^2 = (y + 1)^2$$

<G> Descrivere il luogo dei punti dello spazio (x, y, z) tali che

$$|z| = y + 1 \qquad z = |y + 1| \qquad z^2 = (y + 1)^2$$

<H> Stabilire quali sono i punti dello spazio in un intorno dei quali è possibile esplicitare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 = 1 \\ |z| = 1 + y \end{cases}$$

<I> Determinare una parametrizzazione della curva γ descritta dal sistema dato nel semispazio $z > 0$.

<J> Determinare i punti di minima distanza dalla curva γ della retta

$$\begin{cases} z = \sqrt{5} \\ y = 4 + x \end{cases}$$

Seconda Prova Parziale 94/95

Si consideri il tetraedro T definito da

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z - 1 \leq 0\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

<A> Calcolare il volume di T, determinare una parametrizzazione di ∂T e il vettore normale alla frontiera di T.

<B> Calcolare $\int_T \mathbf{div}\ F$ e $\int_{\partial T} \mathbf{rot}\ F$

<C> Individuare le facce del tetraedro attraverso le quali il flusso del campo F è non nullo e calcolarlo.

<D> Calcolare il flusso di F attraverso ∂T

<E> Stabilire se F è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + \sin y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità in grande della soluzione del problema di Cauchy assegnato

<G> Disegnare il grafico della soluzione del problema assegnato.

<H> Studiare il problema della prolungabilità della soluzione a tutto $\mathbb{R}$

<I> Determinare la soluzione z del problema

$$\begin{cases} z''(x) + z(x) = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

<J> Determinare il polinomio di Taylor di $y(x) - z(x)$ del terzo ordine centrato in $x = 0$ e stimare la differenza $y(x) - z(x)$ vicino a 0.

Prova d'Esame Giugno 1995

Si consideri la funzione

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t} \cos(t - x) dt$$

<A> Determinare il campo di definizione di g

<B> Studiare continuità e derivabilità di g e calcolare, ove esiste, g'.

<C> Integrare per parti g' e ricavare g' in funzione di g

<D> Calcolare $g(0)$

<E> Scrivere un problema di Cauchy che identifichi g e determinarne una espressione esplicita.

Si consideri l'equazione differenziale

$$xy''(x) + y(x) = 0$$

<F> Studiare esistenza e unicità della soluzione dell'equazione assegnata

<G> Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione che siano analitiche in 0

<H> Determinare il raggio di convergenza della serie che rappresenta la soluzione.

<I> Stabilire la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni analitiche definite in un intorno di 0

<J>
Determinare una soluzione analitica in 0 dell'equazione

$$xy''(x) + y(x) = \sin x$$

Prova d'Esame Luglio 1995

Si consideri l'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2xy + x = 0\}$$

<A> Determinare, al variare di t le intersezioni di C con la retta di equazione $y = tx$

<B> Scrivere una parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

di C

<C> Disegnare il grafico di $x(t)$ ed $y(t)$.

<D> Disegnare C

<E> Calcolare i punti di minima e di massima distanza dall'origine di C.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 6x(t) - 11y(t) + 6z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \\ \dot{z}(t) = y(t) \end{cases}$$

<F> Determinare una soluzione del sistema tale che $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 1$

<G> Determinare una soluzione del sistema tale che $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ e $z(0) = 0$

<H> Determinare una soluzione del sistema tale che $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$

<I> Scrivere l'integrale generale del sistema

<J> Scrivere una matrice fondamentale del sistema ed indicare una espressione della soluzione del sistema non omogeneo avente termine noto $B(t)$

Prova d'Esame Settembre 1995

Si consideri l'insieme

$$\begin{cases} x(\theta,\phi) = \theta\cos\theta\cos\phi \\ y(\theta,\phi) = \theta\sin\theta\cos\phi \\ z(\theta,\phi) = \theta\sin\phi \end{cases} \qquad \theta,\phi \in [0,\pi/2]$$

<A> Provare che S giace nel primo ottante.

<B> Determinare le equazioni parametriche della curva ottenuta intersecando S con il piano $y = x$.

<C> Determinare le equazioni parametriche della curva ottenuta intersecando S con il piano $z = k \in [0,\pi/2]$.

<D> Verificare che S è limitata.

<E> Calcolare il punto della superficie data che ha massima distanza dall'origine.

Si consideri l'equazione differenziale
=

$$y'''(x) + xy(x) = 0$$

<F> Discutere esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione data.

<G> Determinare la regola di ricorrenza cui deve soddisfare a_n affinchè $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data.

<H> Determinare quali condizioni deve soddisfare a_n affinchè $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ $y'(0) = y''(0) = 0$.

<I> Determinare esplicitamente a_{20}

<J> Provare che per ogni soluzione y dell'equazione data si ha

$$y^{(19)}(0) = y^{(23)}(0) = 0$$

Prova d'Esame Febbraio 1996

<A> Determinare la retta di equazione $y = mx$ in modo che sia minimo lo scarto quadratico dai punti

$$A = (1, 1) \qquad B = (2, 3) \qquad C = (3, 2)$$

<B> Determinare la retta di equazione $y = mx + n$ in modo che sia minimo lo scarto quadratico dai punti

$$A = (1, 1) \qquad B = (2, 3) \qquad C = (3, 2)$$

Si consideri l'equazione

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = x$$

<C> Determinare tutte le soluzioni su $\mathbb{R}_+$ dell'equazione omogenea associata all'equazione data

<D> Determinare tutte le soluzioni su $\mathbb{R}_-$ dell'equazione omogenea associata all'equazione data

<E> Determinare tutte le soluzioni su $\mathbb{R}$ dell'equazione omogenea associata all'equazione data

<F> Determinare tutte le soluzioni su $\mathbb{R}_+$ dell'equazione data
Si consideri il grafico della funzione

$$z = 1 + \sqrt{x} \qquad x \in [0, 1]$$

<G> Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta facendo ruotare il grafico dato attorno all'asse z di 2π

<H> Calcolare l'area della superficie ottenuta

<I> Determinare il vettore normale alla superficie data

Prova d'Esame Marzo 1996

Si consideri la forma differenziale

$$\omega_1 = \frac{\alpha x^2 + \beta y}{x^2 - y^2 - 1} dx + \frac{\alpha y^2 + \beta x}{x^2 - y^2 - 1} dy$$

<A> Determinare al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il campo di definizione di ω_1 precisando se è semplicemente connesso.

<B> Stabilire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ω_1 è una forma chiusa.

<C> Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ω_1 è una forma esatta.

<D> Determinare, se ne esistono, tutte le primitive della forma ω_1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{(x^2-3x+1)n}}{n}$$

<E> Stabilire per quali valori di x è definita f e per quali valori di x è continua

<F> Stabilire per quali valori di x è derivabile e calcolarne la derivata

<G> Disegnare approssimativamente il grafico di f

<H> Studiare la serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Disegnando il grafico della restrizione all'asse reale della serie stessa.

<I> Esprimere f mediante funzioni elementari (eventualmente servendosi del punto precedente) e disegnare il grafico di f con precisione.

Prima Prova Parziale 95/96

Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 + x^2 \leq y, \qquad y \in [1, 2]\}$$

<A> Determinare il volume del solido descritto da V

<B> Sia $S = \partial V$, determinare una parametrizzazione di S

<C> Determinare il vettore normale ad S

<D> Calcolare l'area della superficie di S

<E> Calcolare le coordinate del baricentro di S

Si considerino le funzioni

$$f(x, y) = y^2 - \sin x \qquad\qquad g(x, y) = \max\{0, f(x, y)\}$$

<F> Disegnare gli insiemi

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x, y) = 0\} \qquad L_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x, y) > 0\} \qquad L_- = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x, y) < 0\}$$

e stabilire l'insieme in cui g è continua

<G> Calcolare $\nabla g(\pi/2, 1)$ e le derivate direzionali di g in $P = (\pi/2, 1)$

<H> Stabilire se g è differenziabile in P

<I> Stabilire in quali punti del piano l'equazione $f(x, y) = 0$ può essere esplicitata in funzione di x

<J> Stabilire in quali punti del piano l'equazione $f(x, y) = 0$ può essere esplicitata in funzione di y

Seconda Prova Parziale 95/96

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{y'(x)}{1+y(x)} \\ y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione determinando eventuali soluzioni costanti

<B> Scrivere un problema del primo ordine equivalente al problema dato.

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $y_1 > 0$, $y_0 > -1$.

<D> Provare che se y è soluzione dell'equazione data, anche $z(x) = -2 - y(-x)$ risolve la stessa equazione

<E> Disegnare tutte le soluzioni dell'equazione data

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \qquad z \in \mathbb{C}$$

<F> Decomporre f in fratti semplici

<G> Esprimere ciascuno dei fratti semplici trovati in serie di potenze di z, precisandone il raggio di convergenza.

<H> Esprimere f in serie di potenze di z, precisandone il raggio di convergenza ed il comportamento sulla circonferenza di convergenza.

<I> Determinare la serie di potenze che esprime f' precisandone il raggio di convergenza

<J> Determinare la serie di potenze che esprime $\int_0^x f(t)dt$ precisandone il raggio di convergenza

Prova d'Esame Giugno 1996

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = xy(x) - \int_0^x y(t)dt$$

<A> Determinare i coefficienti a_n delle serie di potenze di x che risolvono l'equazione data

<B> Determinare il raggio di convergenza di tali serie

<C> Verificare che le soluzioni dell'equazione data formano uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione

<D> Determinare una base dell'insieme dello spazio vettoriale delle soluzioni

<E> Trovare, se esiste una soluzione tale che $y^{(4)}(0) = 0$

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x,y) = \left(\frac{bx}{ax^2+y^2+1}, \frac{y}{ax^2+y^2+1}\right)$$

<F> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se F è conservativo, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$,

<G> Calcolare ove esistono tutti i potenziali di F

<H> Disegnare la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

<I> Calcolare $\int_\gamma F$

<J> Calcolare, usando il teorema di Stokes,

$$\int\int_D \frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 4x^2 + 4y^2 \leq 1 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0\}$

Prova d'Esame Luglio 1996

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)\sin y(x) \\ y(2) = \dfrac{5\pi}{2} \\ y'(2) = 1 \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

<B> Trovare la soluzione del problema dato precisandone il campo di definizione.

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato.

<D> Scrivere un sistema differenziale del primo ordine equivalente a problema dato

<E> Trovare il polinomio di Taylor di ordine 3 della soluzione del problema dato centrato in $x_0 = 0$.

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

ed il solido T generato dalla rotazione di 2π attorno all'asse z dell'insieme

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le z \le 1,\ 0 \le x \le 2 - z\}$$

<F> Stabilire se F è conservativo, precisandone il campo di definizione.

<G> Calcolare ove esistono tutti i potenziali di F

<H> Calcolare il flusso di F attraverso la superficie frontiera di T.

<I> Calcolare il flusso di F attraverso le circonferenze definite da

$$\{z = 0 \quad x^2 + y^2 = 4\} \qquad \{z = 1 \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

<J> Calcolare il flusso di F attraverso la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva

$$x = 2 - z \qquad 0 \le z \le 1$$

Prova d'Esame Ottobre 1996

Si consideri la successione di problemi di Cauchy

$$\begin{cases} n y_n''(x) - y_n(x) = n \\ y_n(0) = 0 \\ y_n'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0''(x) = 1 \\ y_0(0) = 0 \\ y_0'(0) = 0 \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione dei problemi dati

<B> Trovare la soluzione dei problemi dati precisandone il campo di definizione.

<C> Disegnare il grafico delle soluzioni dei problemi dati.

<D> Verificare che y_n converge ad y_0

<E> Stabilire se e dove y_n converge uniformemente ad y_0.

Si consideri la superficie definita da

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ z = xy + 1, \ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

<F> Calcolare l'area di S

<G> Calcolare il vettore normale ad S

<H> Calcolare le coordinate del baricentro di S

<I> Calcolare il flusso di attraverso S del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, 1)$$

<J> Scrivere una parametrizzazione della curva

$$C = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ z = xy + 1, \ x^2 + y^2 = 4\}$$

ed indicarne il versore tangente

Prova d'Esame Dicembre 1996

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+h)!(n+k)!}{(\alpha n)!} x^n \qquad \alpha, h, k \in \mathbb{N}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza della serie per $\alpha = 2$

<B> Trovare il campo di definizione della funzione

$$f\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

nel campo complesso e rappresentarlo nel piano complesso.

<C> Determinare il raggio di convergenza della serie per $\alpha = 3$

<D> Determinare il raggio di convergenza della serie per $\alpha = 1$

<E> Calcolare, se esiste $f^{(5)}(0)$per $\alpha = 2$.

Si consideri il solido definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \leq z \leq 1 \ , \ y \geq 0 \ , \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$$

<F> Calcolare il volume di V supponendo il solido di densità costante δ

<G> Calcolare il volume di V supponendo il solido di densità lineare con la distanza dall'origine

<H> Calcolare la coordinata x del baricentro di V (supponendo la densità costante)

<I> Calcolare la coordinata y del baricentro di V (supponendo la densità costante)

<J> Calcolare la coordinata z del baricentro di V (supponendo la densità costante)

Prova d'Esame Febbraio 1997

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza della serie, precisando la convergenza sul bordo del cerchio di convergenza.

<B> Stabilire dove la serie è derivabile e calcolarne la derivata.

<C> Disegnare il grafico della restrizione della serie all'asse reale.

<D> Calcolare, se esiste, $f(.5)$ a meno di $.01$

<E> Determinare la somma della serie. Calcolare, se esiste, $f(-1)$ a meno di $.01$

Si consideri la parte S di $\mathbb{R}^3$ definita parametricamente da

$$\begin{cases} x(\rho,\theta) = (\rho+1)\cos\theta \\ y(\rho,\theta) = (\rho+1)\sin\theta \\ z(\rho,\theta) = \phi(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

dove ϕ è una funzione continua con la sua derivata seconda in$\mathbb{R}$.

<F> Determinare una rappresentazione cartesiana

$$z = f(x,y)$$

della superficie S precisandone il campo di definizione D

<G> Disegnare le curve di livello di f.

<H> Calcolare il vettore normale ad S.

<I> Scrivere una formula di riduzione per il calcolo dell'area di S.

<J> Scrivere una formula di riduzione per il calcolo del baricentro di S.

Prova d'Esame Aprile 1997

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n+n^2} \qquad z \in \mathbb{C}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza della serie.

<B> Determinare il comportamento della serie sulla circonferenza di convergenza.

<C> Trovare una espressione in termini di funzioni elementari della somma della erie.

<D> Calcolare, se esiste, $f(-1)$ a meno di $1/10$

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = (x, z, y)$$

<E> Calcolare div F e rot F.

<F> Calcolare il flusso di F attraverso la parte della superficie definita da $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ che si trova tra i piani $z = 0$ e $z = 1$.

<G> Calcolare il flusso di f attraverso il cerchio giacente nel pinao $z = 0$ di centro l'origine e raggio unitario.

<H> Calcolare il lavoro compiuto da rot F lungo la circonferenza frontiera del cerchio di cui al punto precedente.

<I> Verificare il teorema della divergenza sul volume identificato dalle superfici di cui ai precedenti punti.

Prima Prova Parziale 97/98

Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 0 \leq z \leq 1 - x\}$$

<A> Disegnare la proiezione di V sul piano (x, y)

<B> Determinare una formula di riduzione per il calcolo del volume di V

<C> Calcolare la coordinata y del baricentro di V

<D> Scrivere il piano tangente al grafico di $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto $(x, y) = (-1, 0)$

<E> Calcolare

$$\max_{(x,y,z)\in V} z$$

Si consideri l'equazione

$$bx^2 + 2ax + b = 0 \qquad b \neq 0$$

e siano $f_\pm(a, b)$ le funzioni che esprimono le soluzioni reali dell'equazione data rispetto ad a ed a b.

<F> Determinare il campo di definizione di $f_\pm$

<G> Disegnare l'insieme dei punti del piano (a, b) tali che:

$$|f_\pm(a, b)| = 1$$

<H> Disegnare l'insieme dei punti del piano (a, b) tali che:

$$|f_+(a, b)| \gtrless 1 \qquad |f_-(a, b)| \gtrless 1$$

<I> Calcolare

$$\lim_{(a,b)\to(1,0)} f_+(a, b) \qquad \lim_{(a,b)\to(-1,0)} f_+(a, b)$$

<J> Stabilire se esistono massimi e minimi assoluti per $|f_+|$

Seconda Prova Parziale 97/98

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x,y,z) = \big(x\ln(x^2+y^2+z^2), y\ln(x^2+y^2+z^2), z\ln(x^2+y^2+z^2)\big)$$

<A> Determinare se il campo è conservativo e calcolarne i potenziali.

<B> Calcolare

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle ds$$

dove

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0 \ , \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

<C> Calcolare

$$\int_S \langle \mathbf{rot}\ F, N\rangle d\sigma$$

dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0 \ , \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

<D> Calcolare div F e

$$\int_V \mathbf{div}\ F\ dxdydz$$

dove

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

<E> Calcolare

$$\int_{\partial V} \langle F, N\rangle d\sigma$$

<F> Determinare una parametrizzazione della superficie S_o e del volume V_o descritti dalla circonferenza e dal cerchio di raggio unitario giacente in un piano parallelo al piano $z = 0$ il cui centro si muove sulla linea di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = \theta \end{cases}$$

<G> Determinare una parametrizzazione della superficie S_v e del volume V_v descritti dalla circonferenza e dal cerchio di raggio unitario giacente in un piano parallelo al piano $x = 0$ il cui centro si muove sulla linea di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = \theta \end{cases}$$

<H> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo del volume di V_v

<I> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo della superficie di S_o

Terza Prova Parziale 97/98

Si consideri la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^n + 1}{b^n}\right) \left(\frac{z^2 - 1}{z^2}\right)^n$$

<A> Stabilire se f è una serie di potenze ed, in caso affermativo, scriverne i coefficienti.

<B> Stabilire se è possibile trovare una serie di potenze $g(z) = \sum b_n z^n$ tale che

$$f(z) = g\left(\frac{z^2 - 1}{z^2}\right)$$

ed, in caso affermativo, scriverne i coefficienti.

<C> Determinare il raggio di convergenza di g.

<D> Disegnare nel piano complesso l'insieme dove è definita f precisando il comportamento di f sulla frontiera di tale insieme.

<E> Determinare, ove possibile, una espressione di f in termini di funzioni elementari.

Si consideri la funzione $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$

<F> Calcolare i coefficienti di Fourier dello sviluppo di f in serie di soli seni su $[-1, 1]$.

<G> Disegnare il grafico della somma della serie che rappresenta lo sviluppo di Fourier di f in serie di soli seni su $[-1, 1]$

<H> Disegnare il grafico della somma della serie che rappresenta lo sviluppo di Fourier di f in serie di soli coseni su $[-1, 1]$

<I> Calcolare i coefficienti di Fourier dello sviluppo di f su $[0, 2]$.

<J> Calcolare la media quadratica di f su $[-1, 1]$

Quarta Prova Parziale 97/98

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} (y''(x))^2 = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicitá locale della soluzione di un problema di Cauchy.

<B> Studiare esistenza ed unicitá globale della soluzione di un problema di Cauchy.

<C> Determinare l'inversa delle soluzioni convesse dell'equazione che corrispondono ad $y_0 > 0$.

<D> Determinare l'inversa delle soluzioni concave dell'equazione che corrispondono ad $y_0 > 0$.

<E> Determinare l'inversa delle soluzioni convesse dell'equazione che corrispondono ad $y_0 < 0$.

<F> Determinare l'inversa delle soluzioni concave dell'equazione che corrispondono ad $y_0 < 0$.

<G> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

<H> Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della soluzione convessa dell'equazione data che passa per il punto $(0, 0)$ con pendenza 1

Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

<I> Determinare tutte le soluzioni del sistema.

<J> Scrivere una matrice fondamentale del sistema.

<K> Disegnare le traiettorie del sistema che corrispondono ai dati iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

.

Prova d'Esame Giugno 1998

Si consideri la curva definita da

$$\Gamma \; : \; \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y(t) = \arctan t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

<A> Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva semplice

<B> Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva regolare

<C> Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva chiusa

<D> Stabilire, giustificando la risposta, se Γ è una curva limitata

<E> Disegnare nel piano la curva Γ, giustificando la risposta.

Si consideri la funzione

$$y(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(x-t) dt$$

<F> Stabilire dove f è definita e continua, giustificando la risposta.

<G> Stabilire dove f è derivabile, giustificando la risposta.

<H> Calcolare $y'(x)$ e, integrando per parti esprimere y' in funzione di y.

<I> Calcolare $y(0)$.

<J> Scrivere un problema di Cauchy la cui soluzione sia y e determinare y mediante funzioni elementari.

Prova d'Esame Luglio 1998

Si consideri il problema di trovare i punti della retta R definita da

$$R \; : \; \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

che hanno massima e minima distanza dall'origine degli assi.

<A> Stabilire esistenza ed unicità dei punti di massimo e di minimo chiesti.

<B> Scrivere una formulazione del problema usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

<C> Trovare una parametrizzazione di R.

<D> Determinare tutti i punti che soddisfano il problema dato.

<E> Scrivere il vettore tangente alla curva R, nel punto $(0,0,1)$.

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) + g(x)y^3(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

essendo g continua su $\mathbb{R}$.

<F> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato.

<G> Risolvere il problema dato in corrispondenza dei dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

<H> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $g(x) = 0$ in corrispondenza dei dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

<I> Risolvere il problema dato in corrispondenza dei dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = a$.

<J> Se $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$, scrivere lo sviluppo di McLaurin di grado 3 della soluzione y del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ con il resto nella forma di Peano.

Prova d'Esame Settembre 1998

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = e^{y(x)}$$

<A> Stabilire esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = a\ y'(0) = b$

<B> Trovare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0\ y'(0) = 1$

<C> Trovare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0\ y'(0) = -1$

<D> Trovare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0\ y'(0) = 0$

<E> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0\ y'(0) = 0$

Si consideri il solido definito da:

$$T = \{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

<F> Disegnare l'insieme $T_\theta = \{(\rho, z) : (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \in T\}$

<G> Determinare una parametrizzazione per ∂T

<H> Calcolare il volume del solido T

<I> Calcolare l'area della superficie ∂T

<J> Calcolare il flusso del campo $F = (0, 0, 1)$ **attraverso la superficie** ∂T

Prova d'Esame Dicembre 1998

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x) + xy(x) + f(x)$$

dove f è una funzione continua con la sua derivata prima su $\mathbb{R}$.

<A> Stabilire esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = a$ $y'(0) = b$

<B> Per $f(x) = 0$, trovare per serie la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$

<C> Per $f(x) = 0$, trovare per serie la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data e ai dati iniziali $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$

<D> Per $f(x) = x^2$, determinare tutte le soluzioni di tipo polinomiale dell'equazione data

<E> Per $f(x) = x^2$, determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

Si consideri il luogo D dei punti del piano definito da

$$f(x, y) = 2xy + x^3 + y^3 = 0$$

<F> Esprimere in funzione del coefficiente angolare m l'ascissa $x(m)$ e l'ordinata $y(m)$ dell'intersezione di D con la retta $y = mx$, che non coincidono con l'origine.

<G> Disegnare il grafico di $x(m)$

<H> Disegnare il grafico di $y(m)$

<I> Disegnare D nel piano.

<J> Calcolare la misura della parte di D compresa nel quadrato di vertici $(1, 1)$ e $(0, 0)$

Prova d'Esame Gennaio 1999

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = xy'(x) + f(x)$$

<A> Per $f(x) = 0$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x < 0$

<B> Per $f(x) = 0$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x > 0$

<C> Per $f(x) = 0$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per ogni $x \in \mathbb{R}$

<D> Per $f(x) = x$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x > 0$

<E> Per $f(x) = x$ determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per ogni $x \in \mathbb{R}$

Si consideri l'insieme D definito dalle

$$z \geq 0 \qquad z \geq x^2 + y^2 - 1 \qquad z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

<F> Calcolare il volume di D

<G> Scrivere una parametrizzazione di ∂D

<H> Calcolare la superficie di ∂D (è sufficiente fornire le formule di riduzione dell'integrale)

<I> Calcolare le coordinate x ed y del baricentro di D

<J> Calcolare la coordinata z del baricentro di D (è sufficiente fornire le formule di riduzione dell'integrale)

Prova d'Esame Aprile 1999

Si consideri la serie

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$$

<A> Dopo aver stabilito che si tratta di una serie di potenze e averne determinato centro e coefficienti, calcolarne il raggio di convergenza.

<B> Trovare $f_n(x)$ tale che $f_n''(x) = x^{n-1}$

<C> Determinare $g(x)$ in modo che

$$\frac{x^{n-1}}{n * (n+1)} = g(x) f_n(x)$$

<D> Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x)$

<E> Calcolare la somma della serie data $h(x)$

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^4 + xy + 2y^3$$

<F> Calcolare f_x ed f_y e disegnare gli insiemi in cui $f_x \geq 0$ e $f_y \geq 0$

<G> Determinare il segno di f sugli assi e sulla parte avente ordinata negativa delle curve $f_x = 0$ e $f_y = 0$

<H> Determinare il segno di f sulle curve $f_x = 0$ e $f_y = 0$

<I> Disegnare il grafico della funzione definita implicitamente da $f(x, y) = 0$ per $y \leq 0$

Prima Prova Parziale 98/99

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{|x|y^6}{x^6+y^6} & , (x,y) \neq (0,0) \\ k & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di continuità di f.

<B> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di differenziabilità di f.

<C> Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

<D> Determinare, per $k = 1$, se esistono, i punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti, di f, sul suo dominio.

Seconda Prova Parziale 98/99

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{|x|y^6}{x^6+y^6} & , (x,y) \neq (0,0) \\ k & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di continuità di f.

<B> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di differenziabilità di f.

<C> Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

<D> Determinare, per $k = 1$, se esistono, i punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti, di f, sul suo dominio.

***

Terza Prova Parziale 98/99

Si consideri, nel piano (x, z), la circonferenza di centro $(2, 3)$ e raggio 1, e sia S la superficie ottenuta ruotando tale circonferenza di un giro completo attorno all'asse z.

<A> Determinare una parametrizzazione di S.

<B> Calcolare la massa di S, supponendo la sua densità superficiale proporzionale alla distanza dal piano $z = 0$.
Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{ax}{x^2 + 2y^2 - 1}, \frac{2y + b}{x^2 + 2y^2 - 1} \right)$$

<C> Stabilire per quali $a, b \in \mathbf{R}$ il campo è chiuso.

<D> Calcolare, per gli a e b determinati al punto c), il lavoro fatto dal campo F lungo la curva di equazione

$$\begin{cases} x(t) = 10 + t \cos t \\ y(t) = t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

<E> Sempre con gli a e b trovati al punto c), determinare, se esistono, tutti i potenziali di F.

Quarta Prova Parziale 98/99

Si consideri il problema

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x) + \mathrm{e}^x - 1 + x \\ y(0) = \gamma \\ y'(0) = \delta \end{cases}$$

<A> Determinare, al variare di γ e δ le soluzioni sviluppabili in serie di potenze di centro 0, precisandone il dominio.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{2+\sqrt{n}}$$

<B> Determinare il dominio di f.

<C> Determinare un numero razionale che approssimi $f(2.1)$ a meno di 10^{-6}

Quinta Prova Parziale 98/99

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = 2(y'(x))^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

<A> Studiarne l'esistenza e l'unicità della soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

<B> Nel caso $a = 0$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

<C> Nel caso $a = 1$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{xy(x) + y^2(x) + x^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

<D> Determinarne tutte le soluzioni, precisandone il dominio.

Prova d'Esame Giugno 1998

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \right)^n$$

<A> Determinare il dominio di f

<B> Stabilire dove f è continua e differenziabile

<C> Calcolare $\nabla f(0,1)$

<D> Calcolare esplicitamente f e studiare la prolungabilità di f sui punti della bisettrice $II-IV$ quadrante

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) - 1 + \frac{1}{2\sqrt{y(x)}} = 0$$

<E> Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0)=1$, $y'(0)=1$

<F> Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0)=-1$, $y'(0)=1$

<G> Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0)=1$, $y'(0)=0$

<H> Determinare le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

Prova d'Esame Luglio 1998

Si consideri la parte di piano

$$D = \{(z, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - z^2 \geq 1, z \geq 2y - 2, y \geq 0\}$$

ed il solido V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse z di un giro completo

<A> Determinare il volume di V

<B> Determinare la superficie di ∂V

<C> Calcolare

$$\int_{\partial V} x dx dy$$

<D> Calcolare le coordinate del baricentro di V

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + xy'(x) = x$$

<E> Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

<F> Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$

<G> Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

<H> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

<I> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

Prova d'Esame 9 Ottobre 1998

Si consideri il cono generato dalla rotazione del segmento di retta $z = 1 - x$ per $x \in [0, 1]$ attorno all'asse z.

<A> Scrivere le equazioni parametriche della parte di superficie conica ottenuta.

<B> Determinare il vettore normale alla superficie del cono

<C> Verificare la ben nota formula che fornisce la superficie laterale del cono mediante integrazione

<D> Determinare le equazioni che identificano il percorso di una pallina che partendo dal vertice del cono scende fino alla base mantenendosi aderente alla superficie conica in modo da compiere una rotazione di 2π attorno all'asse z durante il passaggio da una quota z_0 alla quota $z_0 - h$

Si consideri l'equazione differenziale

$$2z_x(x, y) + 3z_y(x, y) = 0$$

<E> Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ e per quali funzioni ϕ si ha $z(x, y) = \phi(2x + 3y)$

<F> Verificare che la soluzione z dell'equazione data è costante sulle rette parallele ad una opportuna retta, determinandola.

<G> Scrivere le soluzioni dell'equazione data

<H> Trovare le soluzioni dell'equazione data che valgono x^2 sull'asse delle x

<I> Trovare le soluzioni dell'equazione data che valgono 1 sulla retta $2y = 3x$

Prima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln y & y > e^x \\ xye^{-x} & x \le y \le e^x \\ 0 & y < x \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare, se esiste $\nabla f(0,0)$ e $\nabla f(0,1)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$ e $(0,1)$

<D> Determinare se f è differenziabile in $(0,0)$ e $(0,1)$

Seconda Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = a(x^2 + y^2 - 2x) + xy$$

<A> Determinare tutti i punti di possibile massimo o minimo relativo per f

<B> Stabilire, al variare di a, se tali punti risultano effettivamente di massimo o di minimo relativo

<C> Per $a = 1$, Determinare minimi e massimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : |x-1| + |y| \leq 1\}$$

<D> Stabilire, al variare di a, se f è convessa.

Seconda Prova Parziale Bis 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + x^2y^2$$

<A> Determinare tutti i punti di possibile massimo o minimo relativo per f

<B> Stabilire se tali punti risultano effettivamente di massimo o di minimo relativo

<C> Determinare minimi e massimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : |x| \leq y^2 \leq 1\}$$

<D> Stabilire se f è convessa.

Terza Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x\ln(x^2+y^2) - y - 2$$

<A> Calcolare f_x f_y

<B> Studiare il segno di $\lim_{y\to+\infty} f(x,y)$ **e di** $\lim_{y\to-\infty} f(x,y)$**;**
Determinare inoltre il segno di f **sulla circonferenza** $x^2+y^2=1$**.**

<C> Studiare il segno di $f_y(x,y)$

<D> Studiare il segno di $f_x(x,y)$ **nella parte di piano esterna alla circonferenza** $x^2+y^2=1$**.**

<E> Disegnare il grafico della funzione $\phi(x)$ **definita implicitamente dall'equazione**

$$f(x,y) = 0$$

Quarta Prova Parziale 99/00

Si consideri al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la famiglia di piani

$$\pi_{(a,b)}: \qquad \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + z = 1 \qquad a, b \in \mathbb{R}_+$$

e si indichi con

- **$V(a,b)$ il volume della parte di spazio avente coordinate positive, delimitata dal piano $\pi_{(a,b)}$**
- **$S(a,b)$ l'area della parte del pianoo $\pi_{(a,b)}$ che è delimitata dal primo ottante.**

<A> Calcolare l'area di $S(a,b)$. (Può essere utile ricordare che l'area di un parallelogrammo è uguale alla norma del prodotto vettoriale dei suoi lati.)

<B> Calcolare il Volume di $V(a,b)$

<C> Scrivere l'enunciato del problema di minimizzare il volume $V(a,b)$ sotto la condizione che l'area $S(a,b) = s$ sia fissata.

<D> Determinare la soluzione del problema trovato

Quinta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V ottenuto facendo ruotare la parte di piano

$$D = \{(x, z) : 1 \leq x \leq 2 - z^2\}$$

attorno all'asse z, e la superficie S ottenuta facendo ruotare la parte di piano

$$L = \{(x, z) : 1 \leq x = 2 - z^2\}$$

attorno allo stesso asse z.

<A> Scrivere una formula di riduzione per l'integrale triplo che permette di calcolare il volume di V.

<B> Calcolare il Volume di V

<C> Scrivere una parametrizzazione di S. e una parametrizzazione di S è

<D> Scrivere una formula di riduzione per l'integrale di superficie che permette di calcolare l'area di S.

<E> Calcolare $\int_S \frac{d\sigma}{\sqrt{1+4z^2}}$.

Sesta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V ottenuto facendo ruotare la parte di piano

$$D = \{(x, z) : 1 \leq z \leq 2 - x^2\}$$

attorno all'asse x. ed il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$.

<A> Calcolare div F e $\int_V$ div $F dxdydz$

<B> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie S ottenuta facendo ruotare la parte di piano

$$D_1 = \{(x, z) : 1 = z \leq 2 - x^2\}$$

attorno all'asse x.

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie ∂V e attraverso la superficie T ottenuta facendo ruotare la parte di piano

$$D_2 = \{(x, z) : 1 \leq z = 2 - x^2\}$$

attorno all'asse x.

<D> Calcolare il rot F

<E> Calcolare il lavoro di F lungo la curva descritta dai punti $(x, 0, z)$ con $(x, z) \in D_1$

Settima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (8^n + 2^n)(x-3)^{3n}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza R della serie che definisce f e l'insieme di definizione D di f

<B> Stabilire se f è definita agli estremi dell'intervallo di convergenza.

<C> Calcolare $f(3-\frac{1}{4})$ con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1-x)y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e sia

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

<D> Determinare una legge di ricorrenza per i coefficienti a_n in corrispondenza della quale y sia soluzione del problema dato

<E> Determinare esplicitamente y

Ottava Prova Parziale 99/00

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)\left(\frac{y^2(x)-1}{y^2(x)}\right)$$

<A> Trovare, al variare di a la soluzione dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = 0$

<B> Trovare la soluzione dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = x$$

<C> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

<D> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

<E> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

Recupero Prima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2+y^2} & 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ 0 & x^2+y^2 > 4 \\ a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

<A> Determinare i valori di a e di R per i quali f è continua su $\mathbb{R}^2$

<B> Calcolare le derivare parziali di f in $(0,1)$

<C> Stabilire se f è differenziabile in $(1,1)$ e calcolarne il gradiente.

Recupero Seconda Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2+y^2} & 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ 0 & x^2+y^2 > 4 \\ 1 - \sqrt{1-x^2-y^2} & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

<A> Determinare tutti i punti di possibile massimo o minimo assoluti di f su $[1/2, 3] \times [0, 3]$

<B> Disegnare il grafico della funzione $g(x) = f(x, x)$

<C> Stabilire se f ha massimo e minimo assoluti sulla bisettrice primo-terzo quadrante

Recupero Terza Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = xy + y^2 e^y$$

<A> Stabilire se, in un intorno di $(0,0)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

<B> Stabilire se, in un intorno di $(1,0)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

<C> Stabilire se, in un intorno di $(-e,1)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

<D> Disegnare il luogo di punti del piano definito da

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

Recupero Quarta Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

ed il solido

$$T = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

<A> Stabilire se esistono massimi e minimi assoluti di f su T e determinarli

<B> Stabilire se esistono massimi e minimi relativi di f su T e determinarli

Recupero Quinta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$$

<A> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume di T e calcolarlo

<B> Determinare una parametrizzazione della superficie ∂T

<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area di ∂T e calcolarla

Recupero Sesta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$$

ed il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

<A> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie ∂T

<B> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z = 0\}$$

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z \geq 0\}$$

Recupero Settima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2n}$$

<A> Stabilire, nel campo complesso, l'insieme di definizione D della serie.

<B> Scrivere la serie che definisce $f'(z)$ e precisarne il campo di definizione

<C> Determinare esplicitamente f (in termini di funzioni elementari)

Recupero Ottava Prova Parziale 99/00

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + xy'(x) = x$$

<A> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

<B> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

<C> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

Prova d'Esame Gennaio 1999

Si consideri la funzione definita da

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n$$

<A> Determinare il campo di definizione D di y

<B> Stabilire se y è derivabile e calcolarne la derivata, precisandone il campo di definizione

<C> Calcolare $y(1)$, se è possibile.

<D> Determinare una espressione di $y(x)$ in termini di funzioni elementari

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 + 2x \geq z \geq x^2 + 4y^2\}$$

<E> Disegnare nel piano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in V\}$$

<F> Stabilire se V è limitato giustificando l'affermazione

<G> Determinare il trasformato di D attraverso il cambio di variabili

$$\begin{cases} x - 1 = \rho \cos \theta \\ 2y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

e disegnarlo nel piano (ρ, θ)

<H> Calcolare il volume di V, indicando le formule di riduzione usate per calcolare gli integrali usati a questo scopo.

Prova d'Esame Febbraio 1999

Si consideri la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \dfrac{2\theta}{\pi} \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

<A> Stabilire se γ è semplice e regolare e calcolare la lunghezza di γ

<B> Sia S_1 la superficie ottenuta congiungendo ogni punto di γ con l'origine; scrivere una parametrizzazione di S_1 e calcolarne l'area

<C> Sia S_2 la superficie ottenuta congiungendo ogni punto di γ con la sua proiezione sul piano $z = 0$; scrivere una parametrizzazione di S_2 e calcolarne l'area

<D> Calcolare il volume della parte di spazio compresa tra S_1, S_2, il piano $x = 0$ ed il piano $z = 0$.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + 1 & x^2 + y^2 \le 1 \\ x + y + x^2 + y^2 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

<E> Studiare la continuità di f

<F> Studiare la differenziabilità di f in $(1,1)$

<G> Studiare la derivabilità di f in $(-1,0)$ e calcolare le derivate direzionali di f in $(-1,0)$

<H> Determinare massimi e minimi assoluti di f sul quadrato di vertici $(0,0)$ ed $(1,1)$

Prova d'Esame Aprile 1999

Si consideri la superficie S generata, mediante rotazione attorno all'asse z dalla curva definita da $z = \sin y$ con $y \in [0, 2\pi]$

<A> Determinare l'equazione cartesiana della superficie S.

<B> Determinare una parametrizzazione di S.

<C> Calcolare il vettore normale alla superficie S nel punto $(0, \pi, 0)$.

<D> Calcolare l'area di S

<E> Calcolare il baricentro di S

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y^4(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema

<G> Disegnare il grafico della soluzione per $k = 0$

<H> Disegnare il grafico della soluzione per $k = 1$

<I> Disegnare il grafico della soluzione al variare di k

<J> Verificare che se y risolve il problema dato, allora $z(x) = y(x + 3)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} z''(x) = z^4(x) \\ z(-3) = 1 \\ z'(-3) = k \end{cases}$$

Prova d'Esame 11 Giugno 1999

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = z(t) + 1 \\ \dot{z}(t) = x(t) + z(t) \end{cases}$$

Determinare la soluzione del sistema omogeneo associato
Determinare la soluzione del sistema completo
Determinare le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $y(0) = 0$
Stabilire se costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinarne la dimensione.

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + x \leq z \leq 1 + x + y, y \geq 0\}$$

Disegnare nel piano la proiezione di V **cioè l'insieme**

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in V\}$$

Stabilire se V **è limitato giustificando l'affermazione**
Calcolare il volume di V
Determinare le equazioni parametriche della superficie ∂V

Prova d'Esame 25 Giugno 1999

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = (x, 2y, z)$$

Stabilire se, e dove, F ammette potenziale
Trovare un potenziale di F
Trovare tutti i potenziali di F
Determinare le superfici equipotenziali e descriverle.
Determinare le linee di forza di F, cioè le linee che hanno in ogni punto direzione parallela al campo, e descriverle.
Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 \leq 1, x > 0, y > 0\}$$

Determinare una parametrizzazione di A
Calcolare la misura di A

Sia

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0\}$$

Determinare una parametrizzazione di B
Calcolare la misura di B

Prova d'Esame 16 Luglio 1999

Si consideri

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$f(x, y) = 1 + E(\theta)$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

dove (x, y) **e** (ρ, θ) **sono le usuali coordinate cartesiane e polari nel piano ed** E **indica la parte intera.**

Calcolare

$$\int_D f(x, y)dxdy$$

Calcolare il volume di V

Calcolare l'area della frontiera ∂V **di** V

Scrivere una parametrizzazione della frontiera di V

Si consideri

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = x^2 \log(1 - x)$$

Determinare a, b **in modo che l'equazione omogenea associata abbia come soluzioni** x **ed** x^2**.**

Scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata precisandone il campo di definizione.

Determinare una soluzione dell'equazione completa della forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Scrivere l'integrale generale dell'equazione completa precisandone il campo di definizione.

Prova d'Esame 17 Settembre 1999

Si consideri

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$$

Calcolare il volume del solido definito da $f(x,y,z) \leq 0$, $g(x,y,z) \leq 0$, $z > 0$
Calcolare la misura della superficie definita da $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) \leq 0$, $z > 0$
Calcolare la misura superficie definita da $f(x,y,z) \leq 0$, $g(x,y,z) = 0$, $z > 0$
Calcolare la superficie definita da $f(x,y,z) \leq 0$, $g(x,y,z) \leq 0$, $z = 0$

Si consideri

$$y''(x) = xy(x) - x^2$$

Studiare l'esistenza delle soluzioni dell'equazione differenziale.
Determinare, per serie, la soluzione dell'equazione omogenea associata tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = 1$
Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea precisandone il dominio
Determinare un polinomio di secondo grado che risolve l'equazione completa e scriverne l'integrale generale

Prova d'Esame 17 Gennaio 2000

Si consideri la curva

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \arctan x, x \in [0, 1]\}$$

ed il solido ottenuto facendo ruotare la curva attorno all'asse y
Determinare le equazioni parametriche del solido ottenuto
Calcolare il vettore normale alla superficie ottenuta
Calcolare l'area della superficie ottenuta
Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$ attraverso la superficie ottenuta.

Si consideri

$$x^2 y''(x) + 2y(x) = x$$

Studiare l'esistenza delle soluzioni dell'equazione differenziale.
Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$
Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$
Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$

Prova d'Esame 02 Febbraio 2000

Si consideri la funzione

$$\int_0^{x^2} \frac{1}{\sin(x-t)} dt$$

Determinare il campo di definizione di f
Studiare la derivabilità di f
Calcolare la derivata di f
Calcolare una approssimazione di f sostituendo $\sin y$ con y .

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} (x - x^2)^{2n}$$

Determinare il campo di definizione di f
Studiare la derivabilità di f e calcolarne la derivata dove esiste.
Disegnare il grafico di f
Determinare una espressione di f in termini di funzioni elementari

Prova d'Esame 22 Febbraio 2000

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 \leq (z-1)^2, z \in [0, 1]\}$$

Calcolare il volume di V
Scrivere le equazioni parametriche di ∂V
Calcolare la superficie di ∂V
Calcolare le coordinate del baricentro di V

Si consideri l'equazione

$$y''' + (y'')^2 = 0$$

Stabilire esistenza ed unicita' per le soluzioni di un problema di Cauchy associato all'equazione data
Determinare tutte le soluzioni dell'equazione
Trovare le soluzioni tali che $y(0) = 0$ **ed** $y'(0) = 1$
Trovare le soluzioni tali che $y(0) = 0$ **ed** $y'(0) = 0$**,** $y''(0) = 0$

Prima Prova Parziale 00/01

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \max\{(y-x^2)(x-y^2), 0\}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ **e** $(0,1)$

<D> Calcolare $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$

Seconda Prova Parziale 00/01

Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = x^4 + y^2 \qquad , \qquad g(x,y) = y^2 + x^6 - 16$$

<A> Determinare i punti di massimo o minimo relativo ed assoluti per f

<B> Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq 0\}$$

<C> Determinare i punti di minimo o massimo relativo ed assoluto per f su

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$$

<D> Determinare i punti di minimo o massimo relativo ed assoluto per f su

$$D = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq 0\}$$

Terza Prova Parziale 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2, z \leq 1 - |y|\}$$

<A> Disegnare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$$

<B> Disegnare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 = 1 - |y|\}$$

<C> Disegnare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \leq 1 - |y|\}$$

<D> Calcolare il volume di A

Quarta Prova Parziale 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$$

<A> Determinare le equazioni parametriche di A

<B> Calcolare il vettore N **normale ad** A

<C> Calcolare la misura di A

<D> Scrivere una parametrizzazione di

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y = 0\}$$

<E> Calcolare la misura di

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y = 0\}$$

Quinta Prova Parziale 00/01

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y}{1+xy}, -\frac{x}{1+xy} \right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso (irrotazionale).

<B> Calcolare, se esiste, un potenziale di F, precisandone il campo di definizione

<C> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1/2$

<D> Calcolare tutti i potenziali di F

Sesta Prova Parziale 00/01

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n^2+2n}$$

<A> Determinare l'intervallo D in cui la serie converge

<B> Studiare la convergenza della serie negli estremi di D

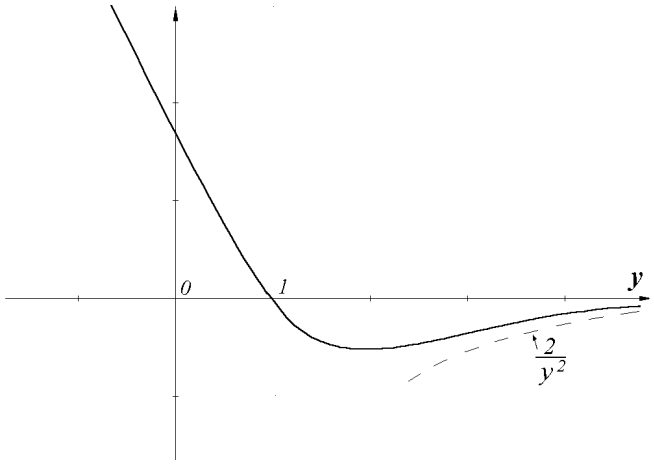
<C> Approssimare la somma della serie calcolata nel primo estremo di D, a meno di $1/10$

<D> Calcolare, dove esiste, la derivata di f.

Settima Prova Parziale 00/01

Si consideri il problema di Cauchy

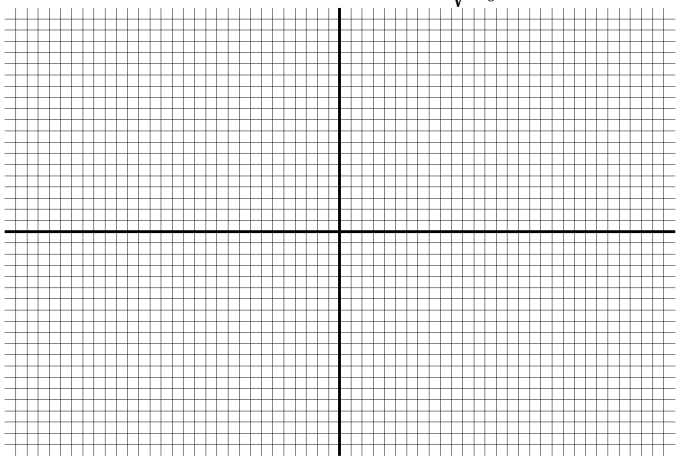
$$\begin{cases} 2y''(x) = g(y(x)) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$



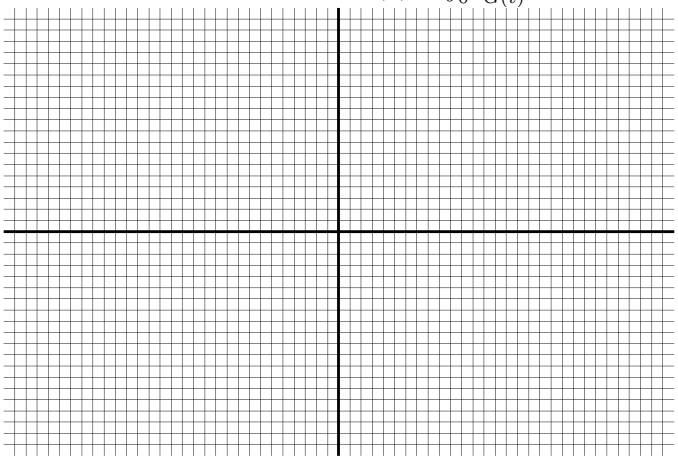
dove g è la funzione il cui grafico è indicato in figura.

e l'area $\int_0^{+\infty} g(s)ds > 0$

<A> Disegnare il grafico di $G(y) = \sqrt{\int_0^y g(t)dt}$,

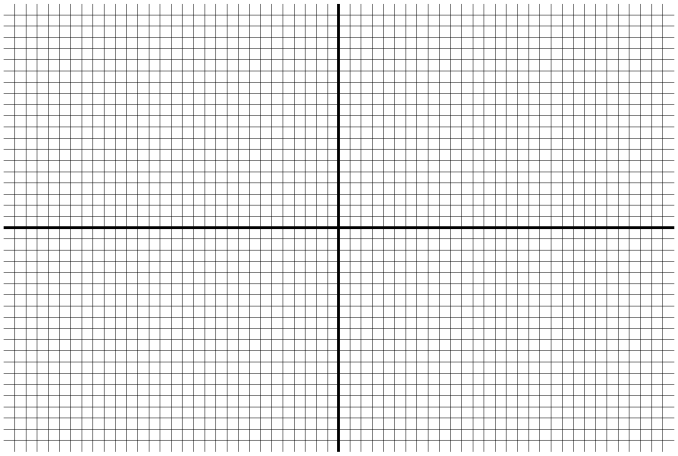


<B> Disegnare il grafico di $F(y) = \int_0^y \frac{1}{G(t)} dt$**,**

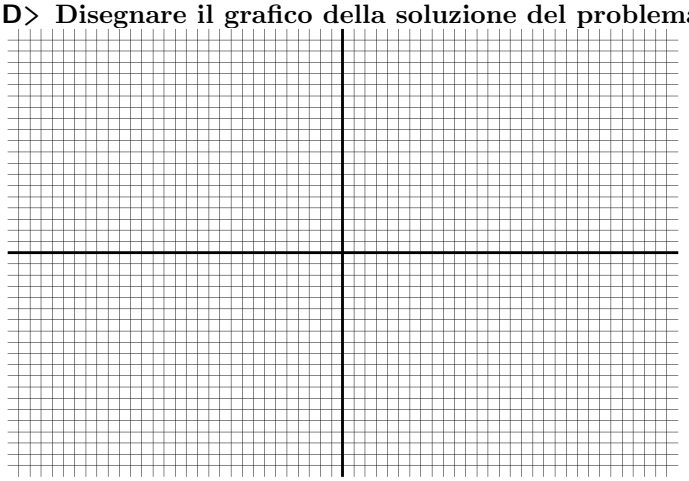


<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = G(y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



<D> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato



Recupero Prima Prova Scritta 00/01

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x & y \leq x \\ a(y-x) + b(y-x)^2 & y > x \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ e $(0,1)$

Recupero Seconda Prova Parziale 00/01

Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = by + y^2 + x^2 \qquad , \qquad g(x,y) = y^2 + x^2 - 2y$$

<A> Determinare i punti di massimo o minimo relativo ed assoluti per f

<B> Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq 0\}$$

<C> Determinare i punti di minimo o massimo relativo ed assoluto per f su

$$D = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq 0\}$$

Recupero Terza Prova Scritta 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di A

Recupero Quarta Prova Scritta 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

<A> Determinare le equazioni parametriche di A e calcolarne la superficie

<B> Scrivere una parametrizzazione di

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-y^2}, x^2 + y^2 = 1\}$$

e calcolarne la lunghezza.

Recupero Quinta Prova Scritta 00/01

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(2x\cos(x^2+y^2) - \frac{1}{x^2}, 2y\cos(x^2+y^2)\right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso (irrotazionale).

<B> Calcolare, se esiste, un potenziale di F, precisandone il campo di definizione

<C> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1/2$

Recupero Sesta Prova Scritta 00/01

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x^2)^n}{n!}$$

<A> Determinare l'insieme D in cui la serie converge

<B> Provare che

$$f'(x) = (1 - 2x)f(x)$$

Recupero Settima Prova Scritta 00/01

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y''(x) = 3y^2(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<A> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato

Prova d'esame 13 Giugno 2000

Si consideri la superficie S generata, mediante rotazione attorno all'asse z dalla curva definita da $z = 2y - y^2$ con $y \in [0, 2]$

<A> Determinare l'equazione cartesiana della superficie S.

<B> Determinare una parametrizzazione di S.

<C> Calcolare il vettore normale alla superficie S nel punto $(0, 1, 1)$.

<D> Calcolare l'area di S

<E> Calcolare il baricentro di S

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + y^4(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema

<G> Disegnare il grafico della soluzione per $k = 0$

<H> Disegnare il grafico della soluzione per $k = 1$

<I> Disegnare il grafico della soluzione al variare di k

Prova d'esame 27 Giugno 2000

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$S \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ \rho \in [1,2] \end{cases}$$

<A> Determinare la normale alla superficie S

<B> Determinare l'area della superficie S.

<C> Il flusso del campo vettoriale $(0,0,1)$ attraverso S

<D> La lunghezza di ∂S

<E> Calcolare il baricentro di S

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^4$$

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata su $\mathbb{R}_+$

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata su $\mathbb{R}$

<H> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione su $\mathbb{R}_+$

<I> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione su $\mathbb{R}$

Prova d'esame 14 Luglio 2000

Si consideri la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = -t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

<A> Disegnare la curva γ

<B> Verificare che è semplice

<C> Verificare che è regolare

<D> Stabilire se è chiusa

<E> Calcolarne la lunghezza

Si consideri il problema di trovare f tale che

$$f'(x) = x \int_0^x f(t)dt$$

<F> Determinare tutte le serie di potenze centrate in $x_0 = 0$ che risolvono il problema dato

<G> Determinare il raggio di convergenza delle serie trovate al punto precedente

<H> Stabilire se formano uno spazio vettoriale e trovarne la dimensione

<I> Determinare la soluzione tale che $f(0) = 0$

Prova d'esame 15 Settembre 2000

Si consideri la funzione

$$z = \ln(2 - x) \qquad x \in [0, 1]$$

e la superficie S ottenuta mediante una rotazione attorno all'asse z di $\pi/2$.

<A> Scrivere una parametrizzazione di S

<B> Calcolare il vettore normale alla superficie S

<C> Calcolare l'area della superficie S

<D> Calcolare il volume del solido delimitato da S e dai piani coordinati

<E> Calcolare

$$\max\{z : (x, y, z) \in S\}$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) + xy^2(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

<G> Trovare la soluzione al variare di x_0, y_0

<H> Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1$

<I> Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$

Prova d'esame 18 Dicembre 2000

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y & y \le x \\ y^2 + x & x > x \end{cases}$$

<A> Stabilire dove f è continua

<B> Stabilire dove f è differenziabile e calcolare il piano tangente al suo grafico in $(1,0)$

<C> Determinare massimi e minimi assoluti di f su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

<D> Calcolare il volume di

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le f(x,y), (x,y) \in D\}$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) = (y'(x))^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

<E> Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

<F> Disegnare il grafico di y'

<G> Disegnare il grafico della soluzione y

Prova d'esame 19 Gennaio 2001

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \sqrt{y} & y \le x \\ y + \sqrt{x} & y > x \end{cases}$$

<A> Stabilire dove f è continua

<B> Stabilire dove f è differenziabile e calcolare il piano tangente al suo grafico in $(1,2)$

<C> Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 1 - x, x \ge 0, y \ge 0\}$ Calcolare il volume di

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le f(x,y), (x,y) \in D\}$$

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(y+x^2)^2}, 1 + \frac{1}{(y+x^2)^2} \right)$$

<D> Determinare il campo di definizione di F

<E> Determinare, se esiste, un potenziale di F

<F> Determinare, se esistono, tutti i potenziali di F

<G> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro l'origine, raggio unitario, giacente nel semipiano positivo delle y orientata in senso antiorario.

Prova d'esame 12 Febbraio 2001

Si consideri la funzione

$$z = \sqrt{x+2} \qquad x \in [0,1]$$

e la superficie S ottenuta mediante una rotazione attorno all'asse z di $\pi/2$.

<A> Scrivere una parametrizzazione di S

<B> Calcolare il vettore normale alla superficie S

<C> Calcolare l'area della superficie S

<D> Calcolare il volume del solido delimitato da S e dai piani coordinati

<E> Calcolare

$$\max\{z : (x,y,z) \in S\}$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) + y^2(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

<G> Trovare la soluzione al variare di x_0, y_0

<H> Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1$

<I> Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$

Prova d'esame 23 Febbraio 2001

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-y)^n}{(n-1)}$$

<A> Disegnare il campo di definizione di f.

<B> Stabilire dove f è continua

<C> Stabilire dove f è differenziabile

<D> Tenendo conto dello sviluppo in serie di Taylor di $\ln t$, determinare un'espressione in termini di funzioni elementari di f

<E> Calcolare $f(0,1)$ a meno di $1/100$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases}(x-1)^2y''(x)+y(x)=1\\ y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y_1\end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del problema

<G> Trovare le soluzioni per $x_0=0$

<H> Trovare le soluzioni per $x_0=2$

<I> Trovare le soluzioni per $x_0=1$

Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (y - \arctan x)^2 & y > \arctan x \\ y - \arctan x & y \leq \arctan x \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\pi/4, 2)$

<D> Scrivere l'equazione del piano tangente in $(\pi/4, 2)$

<E> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\pi/4, 1)$

Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^2 + 4x^2(x^2-1)$$

<A> Determinare δ_1 tale che

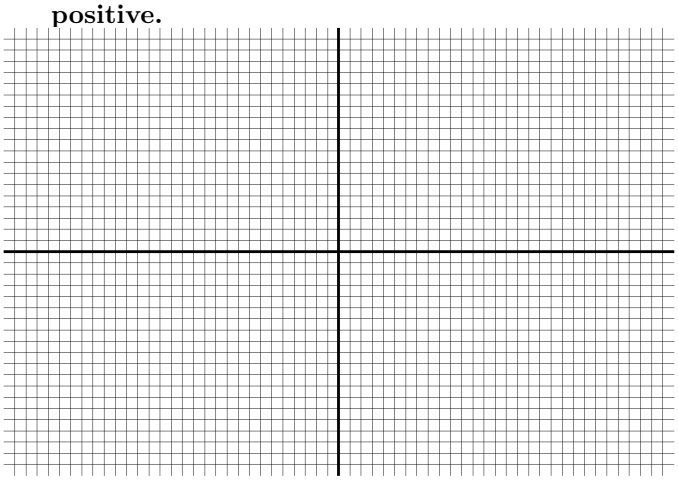
$$f(x,0) \leq 0 \qquad \forall x \in [0,\delta_1]$$

<B> Determinare δ_2 tale che

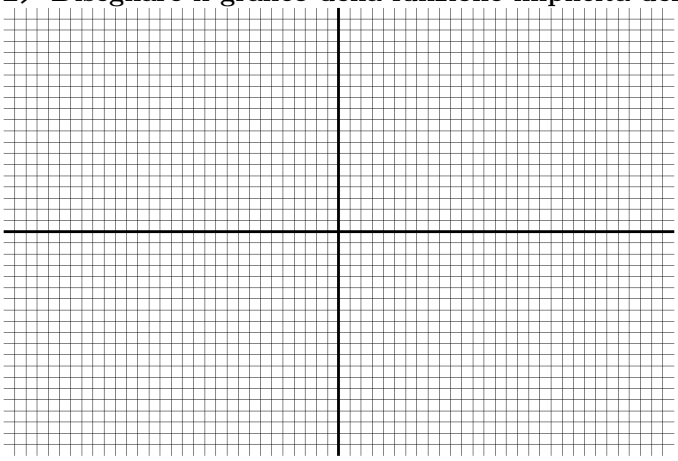
$$f(x,1) \geq 0 \qquad \forall x \in [0,\delta_2]$$

<C> Determinare δ tale che per ogni x fissato in $[0,\delta]$ l'equazione $f(x,y) = 0$ ammette una ed una sola soluzione in $[0,1]$

<D> Calcolare $f_x(x,y)$ ed $f_y(x,y)$ e disegnare l'insieme dei punti del piano in cui in cui sono positive.



<E> Disegnare il grafico della funzione implicita definita da $f(x,y) = 0$



Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la linea γ di equazioni

$$\begin{cases} z(t) = t^3 + t + 1 \\ y(t) = t\ln(t) - t \end{cases} \qquad t = \in [3, 4]$$

<A> Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse z

<B> Calcolare il vettore N normale alla superficie S

<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area della superficie S.

<D> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume delimitato da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$.

<E> Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse y

Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq z \geq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<A> Scrivere le equazioni parametriche della frontiera ∂V di V.

<B> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0, 0, 1)$ attraverso la superficie ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0, 0, 1)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 = z \geq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0, 0, 1)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Quinta Prova Parziale 01/02

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3+n}$$

<A> Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza.

<B> Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale.

<C> Disegnare il grafico della somma della serie sul suo intervallo di convergenza reale
Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-x^2)^n}{n^3+n}$$

<D> Stabilire dove f è continua, dove è derivabile e disegnare il grafico della somma della serie.

Sesta Prova Parziale 01/02

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x)\cos y(x) = (y'(x))^2 \sin y(x)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$ **,** $y'(x_0) = y_1$**.**

<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$**,** $y_0 = 0$**,** $y_1 = 1$

<C> Disegnare il grafico di una soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$**,** $y_0 = y_0$**,** $y_1 = 0$

<D> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$**.**

Recupero Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$

<D> Scrivere, se esiste, l'equazione del piano tangente in $(0,0)$

Recupero Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2$$

<A> Determinare δ_1 tale che

$$f(x,3) \leq 0 \qquad \forall x \in [2-\delta_1, 2+\delta_1]$$

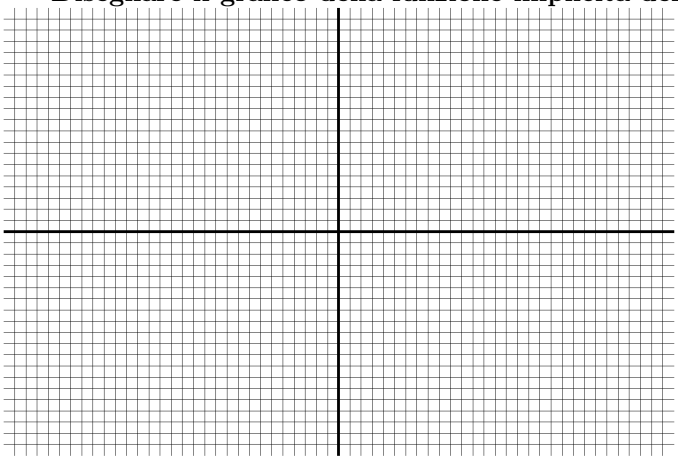
<B> Determinare δ_2 tale che

$$f(x,1) \geq 0 \qquad \forall x \in [2-\delta_2, 2+\delta_2]$$

<C> Determinare δ tale che per ogni x fissato in $[2-\delta, 2+\delta]$ l'equazione $f(x,y) = 0$ ammette una ed una sola soluzione.

<D>

Disegnare il grafico della funzione implicita definita da $f(x,y) = 0$



Recupero Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la linea γ di equazioni

$$\begin{cases} z(t) = t^3 \\ y(t) = t\ln(t) \end{cases} \qquad t =\in [1,2]$$

<A> Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse z

<B> Calcolare il vettore N normale alla superficie S

<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area della superficie S.

<D> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume delimitato da S e dai piani $z = 1$ e $z = 8$.

Recupero Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<A> Scrivere le equazioni parametriche della frontiera ∂V di V.

<B> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x, y, z)$ attraverso la superficie ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x, y, z)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Recupero Quinta Prova Parziale 01/02

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

<A> Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza.

<B> Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale.
Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{\sqrt{n^2+1}}$$

<C> studiare il campo di definizione di f la sua continuità e la sua derivabilità

Recupero Sesta Prova Parziale 01/02

Si consideri l'equazione differenziale

$$\ln(y(x))y''(x) - \frac{1}{x}y^2(x) = 0$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = -1$

<C> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$.

Prova d'Esame 14 Giugno 2001

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$S \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = \sqrt{1-(t^2+s^2)} \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}, t^2 + s^2 \leq 1.$$

<A> Determinare la normale alla superficie S

<B> Calcolare l'area della superficie S

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale $(0, 0, 1)$ attraverso S

<D> Calcolare il volume della parte di spazio delimitata da S e dal piano $z = 0$.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - \frac{3}{2}y^2(x) = 0$$

<E> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<F> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = -1$

<G> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

<H> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$.

Prova d'Esame 26 Giugno 2001

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ \beta & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Stabilire per quali α e β f è continua in $(0,0)$

<B> Stabilire per quali α e β f è differenziabile in $(0,0)$

<C> Sia $\alpha = 1$ e sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Calcolare il volume di

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in D\}$$

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{(y+x^2)}, 1 + \frac{1}{(y+x^2)} \right)$$

<D> Determinare il campo di definizione di F

<E> Determinare, se esiste, un potenziale di F

<F> Determinare, se esistono, tutti i potenziali di F

<G> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro l'origine, raggio unitario, giacente nel semipiano positivo delle y orientata in senso antiorario.

Prova d'Esame 13 Luglio 2001

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ \beta & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

<A> Stabilire se f è continua in $(1,0)$

<B> Stabilire se f è differenziabile in $(1,0)$

<C> Stabilire se f ammette in $(1,0)$ derivate direzionali ed in caso affermativo calcolarle

<D> Verificare che $f(x,y) \leq 1$ in $\mathbb{R}^2$

Si consider il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^3 \ln(y(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

<E> Stabilire per quali a, b il problema ammette soluzioni e studiarne l'unicità

<F> Disegnare il grafico della soluzione per $a = 0$, $b = 1$

<G> Disegnare il grafico della soluzione per, $b = 1$

Prova d'Esame 17 Settembre 2001

Si consideri l'equazione differenziale

$$\sqrt{y(x)}y''(x) - \frac{1}{2\sqrt{y(x)}x}(y'(x))^2 = 0$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$

<C> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$.

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{\ln(n^2+1)}$$

<D> Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza.

<E> Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale.
Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(x))^n}{2^n \ln(n^2+1)}$$

<F> studiare il campo di definizione di f, la sua continuità e la sua derivabilità

Prova d'Esame 19 Dicembre 2001

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - y^2(x) = 0$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

<C> Scrivere il Polinomio di Taylor di ordine 3 della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

Si consideri l'insieme definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \ , \ y \leq 1 - x \ , \ y \geq \sqrt{x}\}$$

ed il volume V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse y.

<D> Calcolare il Volume di V

<E> Determinare una parametrizzazione della superficie ∂V.

<F> Calcolare l'area della superficie ∂V.

<G> Calcolare

$$\int_{\partial V} x dy$$

Prova d'Esame 9 Gennaio 2002

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - x^2 y(x) = 0$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<B> Determinare una serie di potenze centrata in $x = 0$ che soddisfi l'equazione data e sia tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

<C> Determinare la serie di Taylor della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

<D> Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4 della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Si consideri l'insieme definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \ , \ y \leq 1 - x \ , \ y \geq \sqrt{x}\}$$

ed il volume V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse x.

<E> Calcolare il Volume di V

<F> Determinare una parametrizzazione della superficie ∂V.

<G> Calcolare l'area della superficie ∂V.

<H> Calcolare

$$\int_{\partial V} x dy$$

Prova d'Esame 30 Gennaio 2002

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 1 + y^3(x) = 0$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<B> Disegnare il grafico delle soluzioni tali che $y'(0) = 0$.

<C> Disegnare il grafico delle soluzioni tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

<D> Disegnare il grafico delle soluzioni tali che $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$.

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) = \left(\frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) + \cos^2(y)}, -\frac{\sin(2y)}{\sin^2(x) + \cos^2(y)} \right)$$

<E> Determinare l'insieme D in cui F é definito, precisando se D é connesso, convesso o semplicemente connesso.

<F> Stabilire se F é conservativo nel cerchio di centro $(2, 0)$ e raggio 1.

<G> Stabilire se F é conservativo in D.

<H> Determinare un potenziale di F in $(0, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$

Prova d'Esame 20 Febbraio 2002

Si consideri la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ x(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

<A> Disegnare il grafico delle funzioni $x(t)$ ed $y(t)$.

<B> Disegnare il grafico della curva γ.

<C> Provare che γ è una curva limitata

<D> Calcolare il vettore tangente a γ e la lunghezza della curva.
Si consideri l'insieme definito da

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x+y \leq 1\}$$

<E> Calcolare il Volume di V

Sia

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x+y = 1\}$$

<F> Determinare una parametrizzazione della superficie S.

<G> Calcolare il vettore normale alla superficie S.

<H> Calcolare l'area della superficie S.

Prova d'Esame 11 Giugno 2002

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = (1,x,y)$$

e l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 \leq 1 \ , 1 \geq z \geq 0\}$$

<A> Stabilire se F ammette potenziale ed, in caso affermativo, calcolarlo.

<B> Calcolare il flusso di F attraverso ∂V

<C> Verificare il teorema della divergenza per F e V.

<D> Calcolare il lavoro di F lungo la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \dfrac{2t}{\pi} \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2]$$

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + y(x) = x$$

<E> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<F> Determinare tutte le soluzioni definite su $x > 0$.

<G> Determinare tutte le soluzioni definite su $x < 0$.

<H> Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$.

<I> Scrivere un sistema differenziale del primo ordine equivalente all'equazione data e determinarne la matrice fondamentale su $x > 0$.

Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x-y) & xy(x-y) \geq 0 \\ 0 & xy(x-y) < 0 \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,1)$

<D> Calcolare massimi e minimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1-x\}$$

Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la curva

$$\gamma \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ z(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, 1/2]$$

<A> Disegnare la curva γ

<B> Calcolare la lunghezza di γ

<C> Calcolare l'area della superficie S ottenuta facendo ruotare γ di $\pi/2$ attorno all'asse z

<D> Calcolare il volume del solido delimitato da S, dai piani coordinati e dal piano $z = \sin(1)$

Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione definita dalla serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

<A> Determinare l'insieme su cui y è definita continua e derivabile 2 volte

<B> calcolare su tale insieme $y'(x)$ ed $y''(x)$

<C> Verificare che

$$y'(x) = -2xy(x)$$

<D> Calcolare $y(1/2)$ a meno di $1/100$

<E> Esprimere y in termini di funzioni elementari.

Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + (y'(x))^2 + (y(x)+1)y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

<B> Determinare la soluzione per $a = 0$

<C> Disegnare il grafico della soluzione per $a = \frac{1}{e} - 1$

Recupero Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \max\{xy(x-y), 0\}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,1)$

<D> Calcolare massimi e minimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$$

Recupero Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la curva

$$\gamma \begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = t^3 - t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

<A> Disegnare la curva γ

<B> Calcolare la lunghezza di γ

<C> Calcolare l'area della superficie S ottenuta facendo ruotare γ di 2π attorno all'asse z

<D> Calcolare il volume del solido delimitato da S, e dal piano $z = 0$

Recupero Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione definita dalla serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2^n)}}{n^2}$$

<A> Determinare l'insieme su cui y **è definita continua e derivabile** 2 **volte**

<B> calcolare su tale insieme $y'(x)$ **ed** $y''(x)$

<C> Calcolare $y(1/2)$ **a meno di** $1/100$

Recupero Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + (y(x))^4 + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

<B> Disegnare il grafico della soluzione per $a = 1$

<C> Disegnare il grafico della soluzione per $a = -1$

Prova d'Esame 25 Giugno 2002

Si consideri la funzione

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : z - xy = 1\}$$

<A> Determinare massimi e minimi relativi di f su $\mathbb{R}^3$

<B> Determinare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}^3$

<C> Determinare massimi e minimi assoluti di f su V

<D> Calcolare le derivate direzionali di f in $(1,1,1)$

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x$$

<E> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<F> Determinare tutte le soluzioni definite su $x > 0$.

<G> Determinare tutte le soluzioni definite su $x < 0$.

<H> Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$.

<I> Scrivere un sistema differenziale del primo ordine equivalente all'equazione data e determinarne la matrice fondamentale su $x > 0$.

Prova d'Esame 17 Luglio 2002

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right)$$

ed il cilindro C con asse parallelo all'asse z delimitato dai piani $z=0$ e $z=1$ e generato dalla circonferenza giacente nel piano $z=0$ di raggio 1 e centro $(0,0)$.

<A> Stabilire se il campo F ammette potenziale e, in caso affermativo, calcolarlo.

<B> Calcolare il flusso uscente dal cilindro C

<C> Calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro C

<D> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva di equazioni parametriche

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \\ z(t) = t \end{cases} \quad . \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'(x) + xy(x) = f(x)$$

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa per $f(x) = x$.

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa.

<H> Determinare la soluzione dell'equazione completa per la quale $y(0) = 0$.

Prova d'Esame 10 Settembre 2002

Si consideri l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ x \leq y \leq \sqrt{3}x \ , \ \sqrt{2} \leq 2z \leq \sqrt{3}\}$$

<A> Scrivere una parametrizzazione di S

<B> Calcolare l'area di S

<C> Calcolare il flusso attraverso S **del campo** $F(x, y, z) = (x, y, z)$
(a prescindere dall'orientamento)

<D> Calcolare il volume di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ x \leq y \leq \sqrt{3}x \ , \ \sqrt{2} \leq 2z \leq \sqrt{3}\}$$

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) + y(x) = 0$$

<E> Determinare la serie di potenze centrata in 0 **soluzione dell'equazione data tale che** $y(0) = 0$ **ed** $y'(0) = 1$**.**

<F> Determinare la serie di potenze centrata in 0 **soluzione dell'equazione data tale che** $y(0) = 1$ **ed** $y'(0) = 0$**.**

<G> Determinare tutte le serie di potenze centrate in 0 **soluzioni dell'equazione data.**

<H> Determinare la serie di potenze centrata in 0 **soluzione dell'equazione**

$$y''(x) + y(x) = x$$

Prova d'Esame 20 Settembre 2002

Si consideri l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2 \ , \ x \leq 3y \leq 3x \ , \ 1 \leq z \leq 2\}$$

<A> Scrivere una parametrizzazione di S

<B> Calcolare l'area di S

<C> Calcolare il flusso attraverso S **del campo** $F(x, y, z) = (x, y, z)$
(a prescindere dall'orientamento)

<D> Calcolare il volume di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq x^2 + y^2 \ , \ x \leq 3y \leq 3x \ , \ 1 \leq z \leq 2\}$$

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) - y(x) = 0$$

<E> Determinare la serie di potenze centrata in 0 **soluzione dell'equazione data tale che** $y(0) = 0$ **ed** $y'(0) = 1$**.**

<F> Determinare la serie di potenze centrata in 0 **soluzione dell'equazione data tale che** $y(0) = 1$ **ed** $y'(0) = 0$**.**

<G> Determinare tutte le serie di potenze centrate in 0 **soluzioni dell'equazione data.**

<H> Determinare la serie di potenze centrata in 0 **soluzione dell'equazione**

$$y'''(x) - y'(x) = 0$$

Prova d'Esame 18 Dicembre 2002

Si consideri la parte $S \subset \mathbb{R}^3$ di superficie cilindrica $x^2 + y^2 = 1$ delimitata dalle curve di equazioni parametriche

dove

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \theta \end{cases} \qquad \delta(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \theta + 1 \end{cases}$$

<A> Scrivere una parametrizzazione di S

<B> Calcolare il vettore normale ad S

<C> Calcolare l'area di S

<D> Calcolare il flusso attraverso S del campo $F(x, y, z) = (1, 1, 0)$
(a prescindere dall'orientamento)

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y^2 - x(\ln(x))^2$$

<E> Trovare campo di definizione continuità, differenziabilità di f

<F> Disegnare le curve di livello di f

<G> Determinare massimi e minimi assoluti

<H> Determinare massimi e minimi relativi

Prova d'Esame 8 Gennaio 2003

Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 2 \ , \ x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 2\}$$

<A> Scrivere una parametrizzazione di ∂V

<B> Calcolare il vettore normale ad ∂V

<C> Calcolare l'area di ∂V

<D> Calcolare il volume di V

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y}, 1\right)$$

<E> Trovare campo di definizione di F

<F> Stabilire se F **è conservativo ed, in caso affermativo, determinarne un potenziale.**

<G> Determinare tutti i potenziali di F

<H> Calcolare il lavoro svolto dal campo F **lungo la linea spezzata che passa per i punti** $(1, 1, 0)$**,** $(1, 3, 0)$ **e** $(3, 3, 0)$

Prova d'Esame 29 Gennaio 2003

Sia

$$\begin{cases} 2y''(x) = 4y^3(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

<B> Sia z è tale che $z(y(x)) = y'(x)$; determinare le condizioni che z deve soddisfare affinchè y risolva il problema dato.

<C> Disegnare il grafico di z

<D> Disegnare il grafico di y

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y^2 - x^3 + 1$$

<E> Determinare se è possibile esplicitare y in funzione di x in un intorno di $(0, 1)$ ed in caso affermativo disegnare il grafico di $y(x)$

<F> Determinare se è possibile esplicitare x in funzione di y in un intorno di $(0, 1)$

<G> Determinare se è possibile esplicitare x in funzione di y in un intorno di $(0, 0)$

<H> Determinare se è possibile esplicitare y in funzione di x in un intorno di $(0, 0)$

Prova d'Esame 19 Febbraio 2003

Si consideri la linea in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

<A> Determinare una parametrizzazione della linea

<B> Calcolarne vettore tangente e lunghezza.
Sia

$$\gamma \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

e si consideri la superficie S definita da

$$\gamma \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ quad \begin{cases} t \in [a, b] \\ s \in [0, z(t)] \end{cases} \\ z = s \end{cases}$$

<C> Calcolare il vettore normale ad S

<D> Calcolare l'area della superficie S

Si consideri la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(nz)^n}{n!}$$

<E> Determinare, nel piano complesso, l'insieme di convergenza della serie

<F> Disegnare il campo di definizione della funzione che si ottiene sostituendo alla variabile complessa z l'espressione $x^2 + y$

<G> Disegnare il campo di definizione della funzione $f(z^2)$

<H> Discutere continuità e derivabilità della Funzione di una variabile reale $f(x)$.

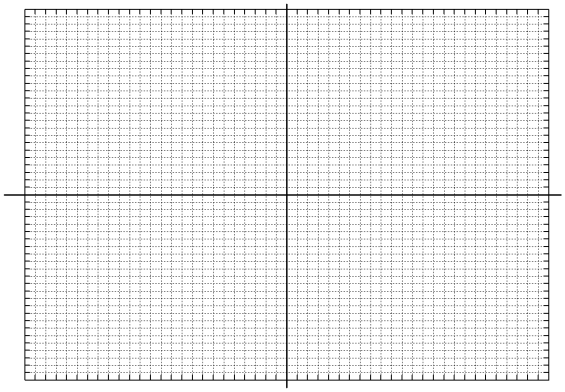
Prova d'Esame 28 Maggio 2003

Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 4y^2}{4(x^2+y^2)}$$

<A> Calcolare $\nabla f(x,y)$ e $f'((1,1),(a,b))$

<B> Disegnare le curve di livello di f



<C> Esprimere f usando le coordinate polari nel piano (x,y)

<D> Determinare massimi e minimi assoluti di f sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

<E> Calcolare il volume di V

<F> Determinare una parametrizzazione per

$$S_1 = \partial V \cap \{x=0\} \quad , \quad S_2 = \partial V \cap \{y=0\} \quad , \quad S_3 = \partial V \setminus \{S_1 \cup S_2\}$$

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,y,0)$$

<G> Calcolare il flusso di F attraverso S_1

<H> Calcolare il flusso di F attraverso S_2

<I> Calcolare il flusso di F attraverso S_3

Prova d'Esame 18 Giugno 2003

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = x$$

<A> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata definite su $x > 0$

<B> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata definite su $x < 0$

<C> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea completa definite su $x > 0$

<D> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea completa definite su $x < 0$

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea completa definite su $\mathbb{R}$

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(x - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}, x - \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}} \right) = (f(x,y), g(x,y))$$

<F> Disegnare il campo di definizione di F **e stabilire se il campo è chiuso**

<G> Stabilire se il campo è conservativo e determinarne un potenziale

<H> Determinare tutti i potenziali del campo

<I> Calcolare il lavoro di F **lungo l'arco di circonferenza** $x^2+y^2 = 1$ **situato nel primo quadrante, precorso in senso orario.**

<J> Calcolare, usando la formula di Gauss-Green

$$\int\int_D (f_y - g_x) dxdy$$

dove D **è il cerchio centrato in** $(10, 10)$ **di raggio** 1

Prima Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+1)^2 & y\geq x^2+1\\ y^2 & 0<y<x^2+1\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,0)$ e $\nabla f(0,1)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(1,0)$

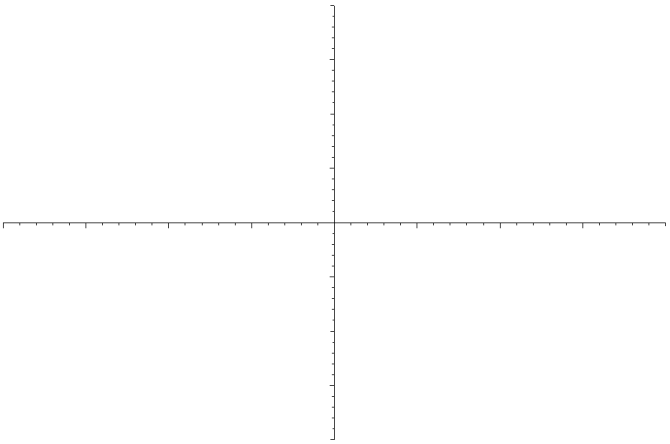
<D> Stabilire se f è differenziabile in f in $(0,1)$ ed in $(1,0)$

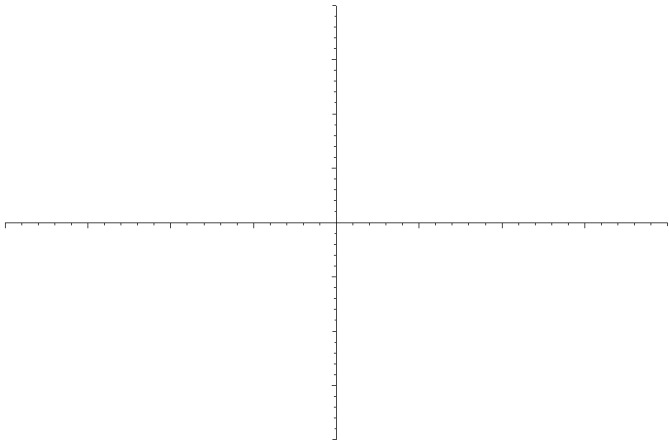
Seconda Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^2 + \ln(1 + x^2y^2) - 1$$

<A> Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y e disegnare nel piano gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative.





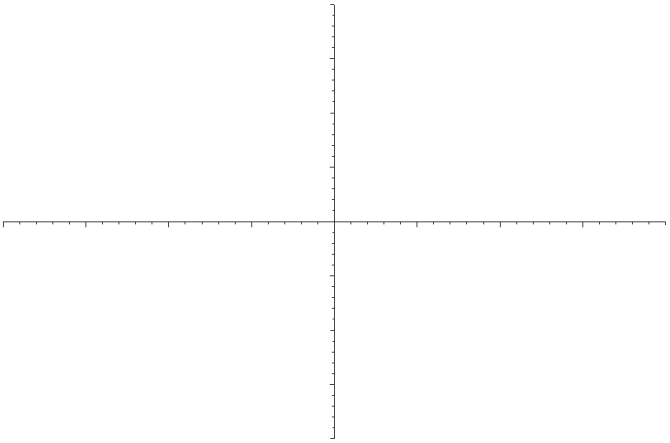
<B> Studiare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

<C> Studiare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm\frac{2}{x}$

<D> Disegnare nel piano le curve

$$y = \pm 1 \qquad . \qquad y = 0 \qquad , \qquad y = \pm\frac{2}{x}$$

riportando il segno di f ristretta a tali curve.

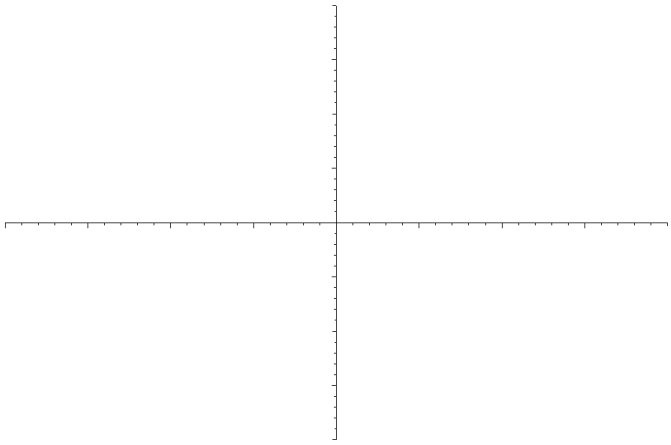


<E> Stabilire se $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assuma valori positivi, precisando il suo campo di definizione.

<F> Studiare crescenza e decrescenza di φ, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \qquad , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) =$$

e disegnare il grafico di φ



Terza Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

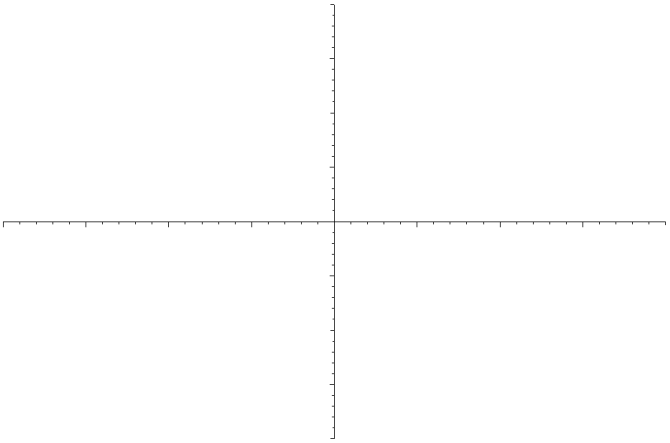
$$z = f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

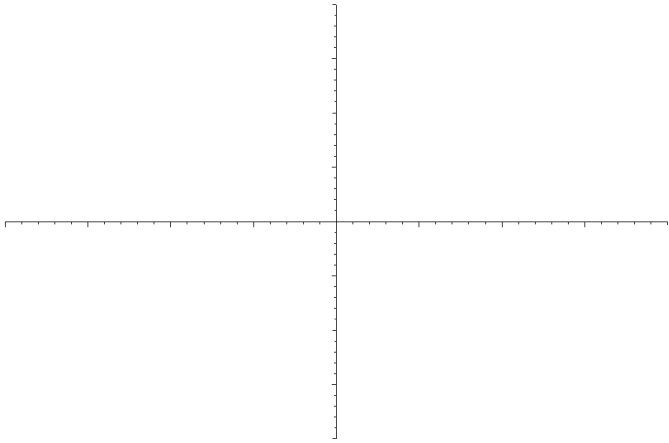
e sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 4x^2 + y^2 \leq z \leq 2 + 4x + 2y\}$$

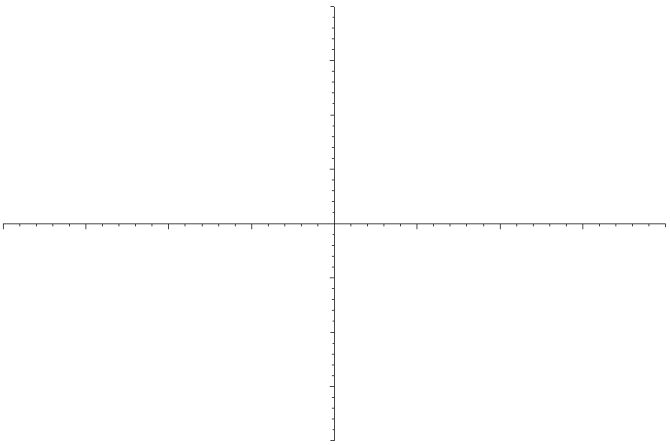
<A> Disegnare il grafico delle funzioni

$$z = f(x, 0) \qquad z = f(0, y)$$





<B> Disegnare la proiezione di V sul piano (x, y).



<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume di V

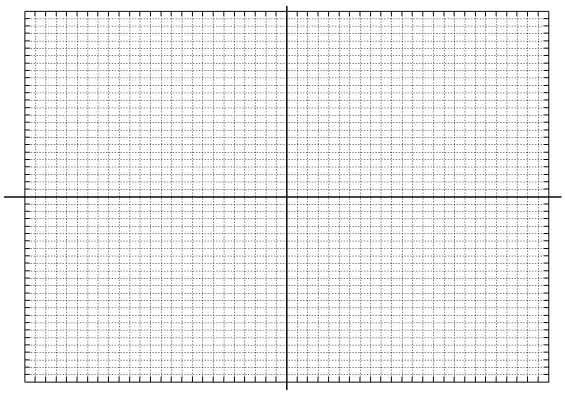
<D> Calcolare il volume di V

Quarta Prova Parziale 02/03

Si consideri l'insieme

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \ , \ x - 1 \leq z \leq 0\}$$

<A> Disegnare nel piano (x, z) l'insieme D e si consideri il volume V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse z di 2π



<B> Determinare le equazioni parametriche della superficie

$$S_1 = \partial V \cap \{z = 0\}$$

e della superficie

$$S_2 = \partial V \setminus S_1$$

<C> Determinare vettore normale ed area della superficie S_2
Si consideri inoltre il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

<D> Calcolare il flusso di F attraverso S_1 ed il flusso di F attraverso S_2

<E> Calcolare rot F ed il flusso di rot F attraverso S_2

<F> Calcolare il lavoro compiuto da F sul cerchio definito da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quinta Prova Scritta Parziale 02/03

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}(x-1)^{3n}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza della serie ed il suo intervallo di convergenza

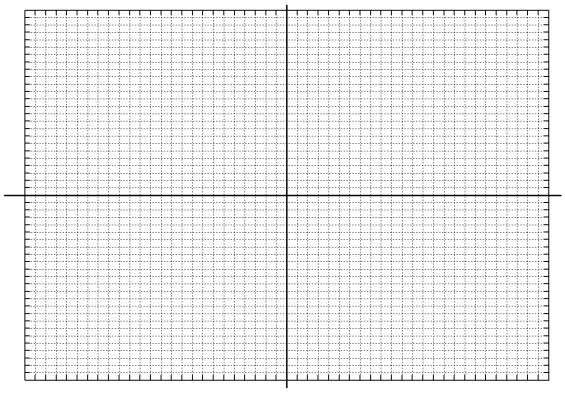
<B> Stabilire se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza

<C> Studiare la convergenza uniforme della serie

<D> Calcolare f'

<E> Studiare il segno di f'

<F> Disegnare il grafico di f



Sesta Prova Parziale 02/03

Si consideri il problema di Cauchy

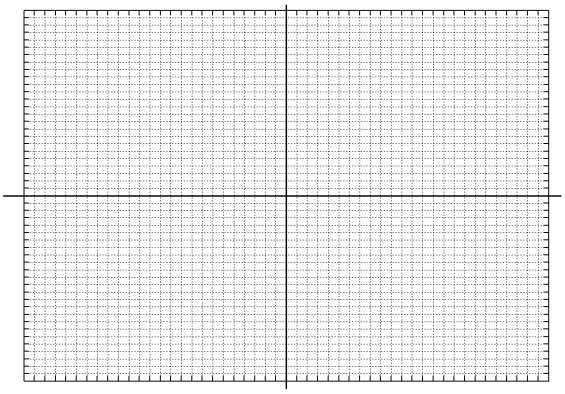
$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 - y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

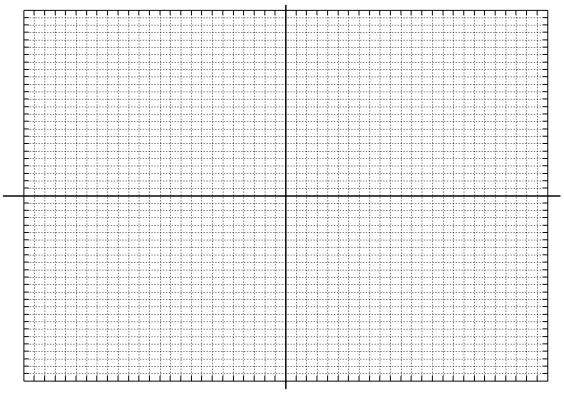
<A> Studiare esistemza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<B> Determinare le soluzioni costanti $y(x) = c$ e le soluzioni del tipo $y(x) = ax + b$ della sola equazione differenziale

<C> Per $a = 0$ e $b = 2$, determinare una funzione $z(y)$ tale che $z(y(x)) = y'(x)$ per le soluzioni della sola equazione differenziale.

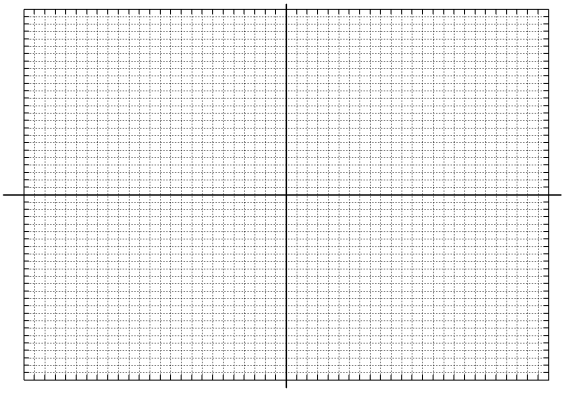
<D> Per $a = 0$ e $b = 2$, disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema di Cauchy, ed il grafico della soluzione del problema di Cauchy.

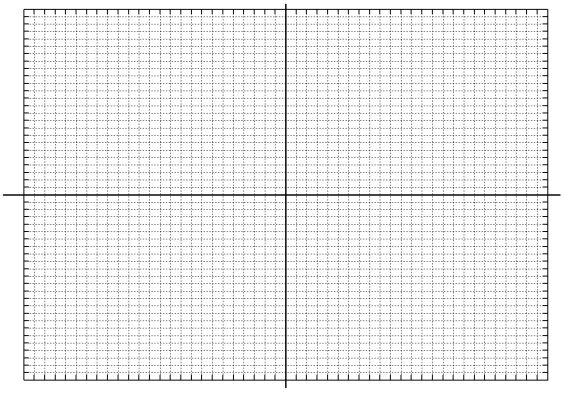




<E> Per $a = 0$ e $b = 2$, determinare una espressione esplicita di y (può essere utile integrare per sostituzione ponendo $e^s = u$)

<F> Per $a = 0$ e $b = -2$, Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy.





Recupero Prima Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & y \geq x^2+1 \\ x-y & 0 < y < x^2+1 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,0)$ e $\nabla f(0,1)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(1,0)$

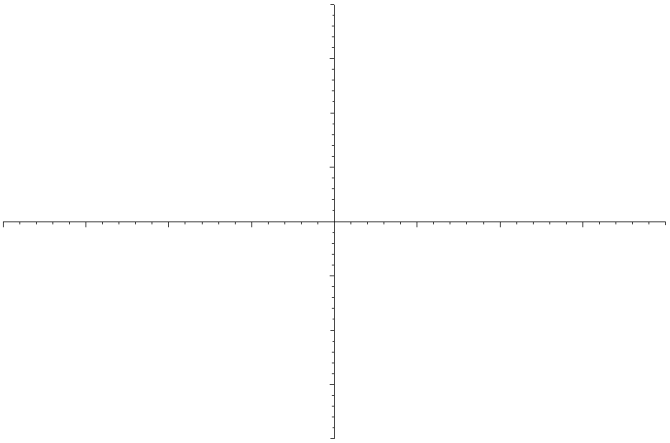
<D> Stabilire se f è differenziabile in f in $(0,1)$ ed in $(1,0)$

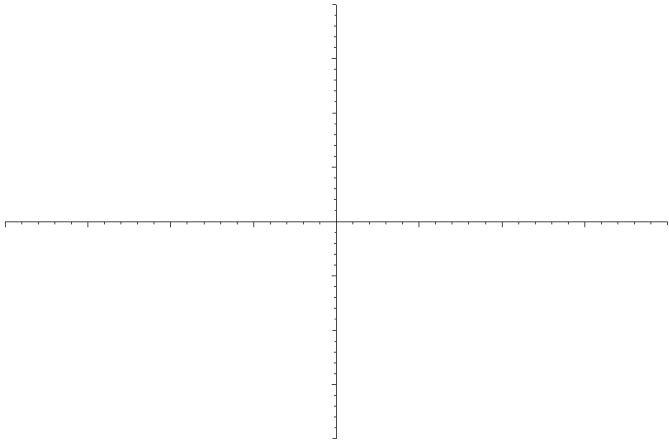
Recupero Seconda Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{y^2}(1+x^2y^2) - e$$

<A> Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y e disegnare nel piano gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative.



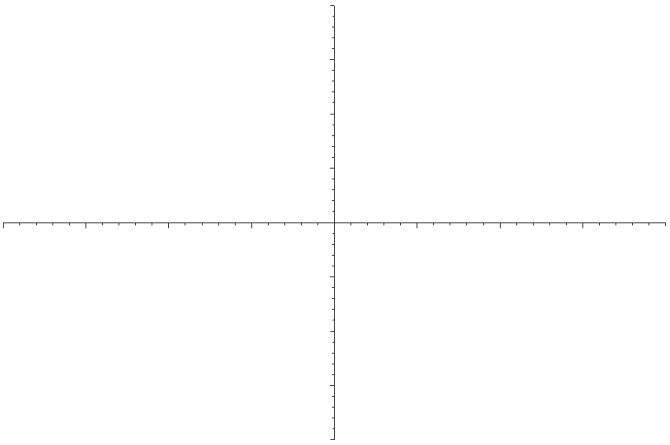


<B> Studiare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

<C> Disegnare nel piano le curve

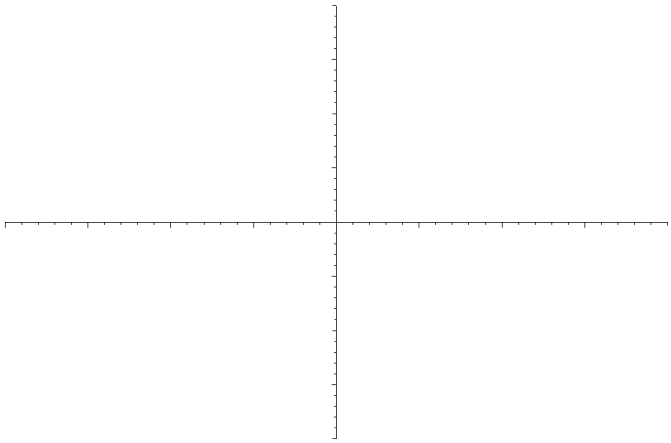
$$y = \pm 1 \qquad . \qquad y = 0$$

riportando il segno di f ristretta a tali curve.



<D> Stabilire se $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assuma valori positivi, precisando il suo campo di definizione.

<E> Studiare crescenza e decrescenza di φ, e disegnare un grafico approssimativo di φ



Recupero Terza Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

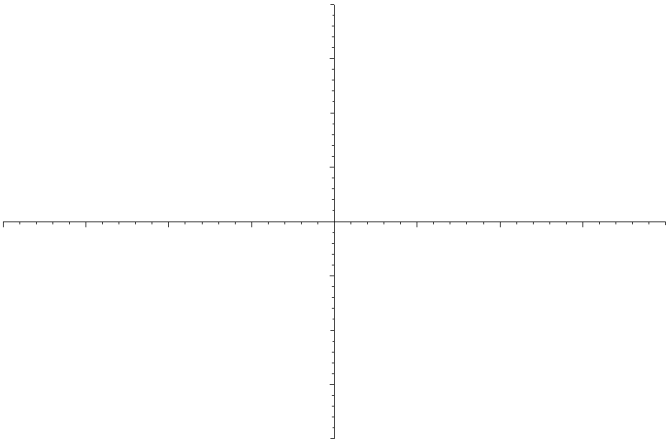
$$z = f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

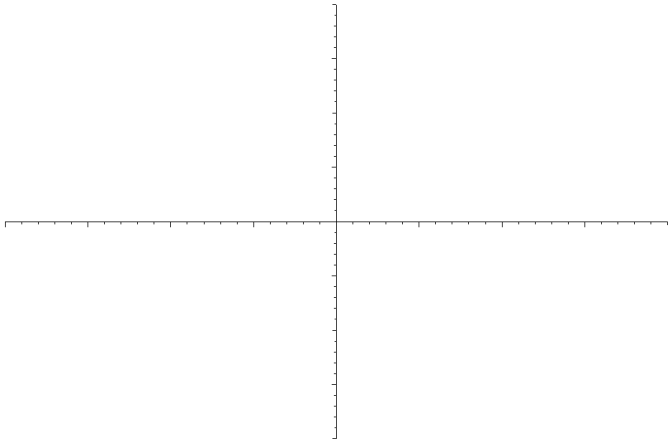
e sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq y\}$$

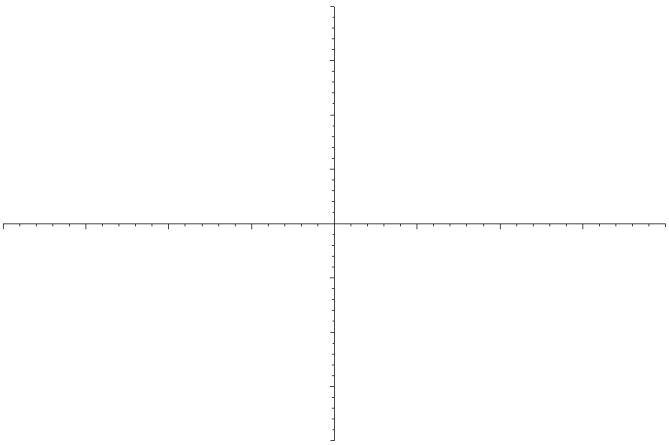
<A> Disegnare il grafico delle funzioni

$$z = f(x, 0) \qquad z = f(0, y)$$





<B> Disegnare la proiezione di V sul piano (x, y).



<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume di V

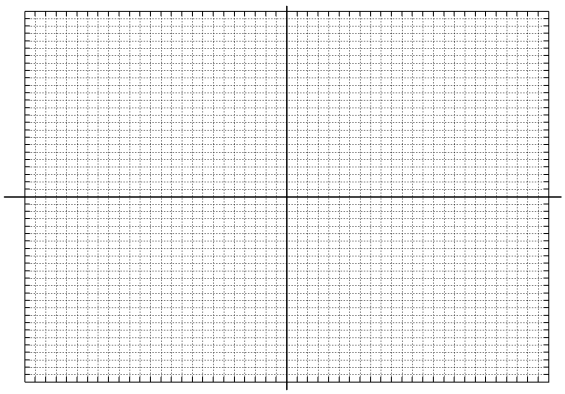
<D> Calcolare il volume di V

Recupero Quarta Prova Parziale 02/03

Si consideri l'insieme

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ -(x-1)^2 \leq z \leq 0\}$$

<A> Disegnare nel piano (x, z) l'insieme D e si consideri il volume V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse z di 2π



<B> Determinare le equazioni parametriche della superficie

$$S_1 = \partial V \cap \{z = 0\}$$

e della superficie

$$S_2 = \partial V \setminus S_1$$

<C> Determinare vettore normale ed area della superficie S_2
Si consideri inoltre il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

<D> Calcolare il flusso di F attraverso S_1

<E> Calcolare il lavoro compiuto da F sulla curva definita da

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad t \in [0, 2]$$

Recupero Quinta Prova Parziale 02/03

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^{3n}$$

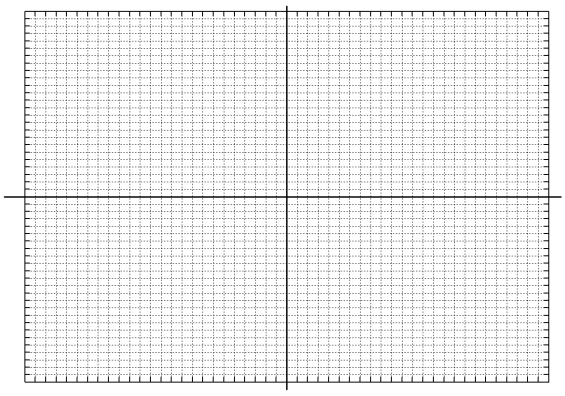
<A> Determinare il raggio di convergenza della serie ed il suo intervallo di convergenza

<B> Studiare la convergenza uniforme della serie

<C> Calcolare f'

<D> Studiare il segno di f'

<E> Disegnare il grafico di f



Recupero Sesta Prova Parziale 02/03

Si consideri il problema di Cauchy

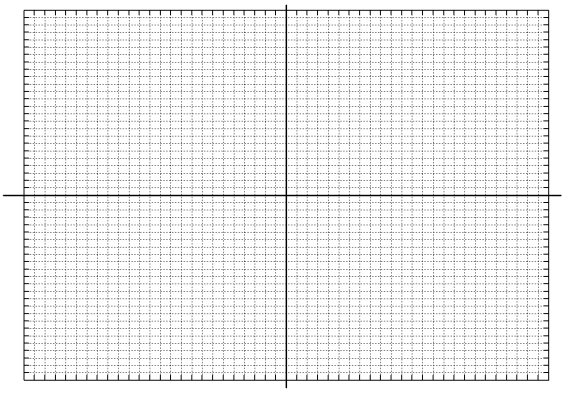
$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)e^{-y'(x)} \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

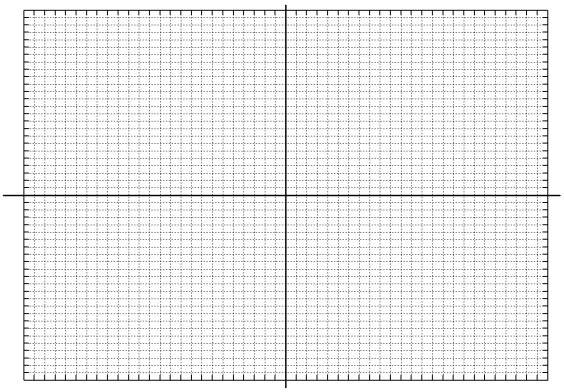
<A> Studiare esistemza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<B> Determinare le soluzioni costanti $y(x) = c$.

<C> Per $a > 0$ e $b = \ln(a)$, determinare una funzione $z(y)$ tale che $z(y(x)) = y'(x)$ per le soluzioni della sola equazione differenziale.

<D> Per $a = 2$ e $b = \ln(a)$, disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema di Cauchy, ed il grafico della soluzione del problema di Cauchy.





Prova d'Esame 16 Luglio 2003

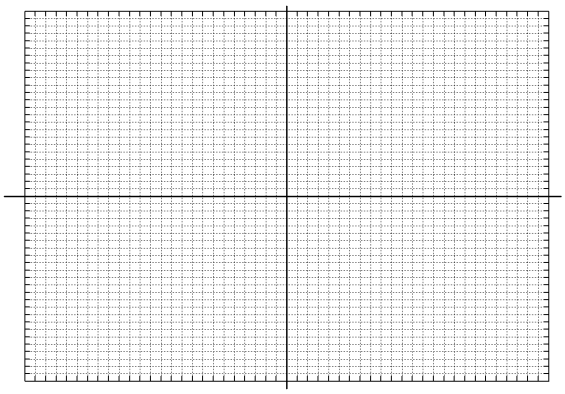
Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2+xy}$$

<A> Calcolare $\nabla f(x,y)$ **e** $f'((1,1),(a,b))$

<B> Esprimere f **usando le coordinate polari nel piano** (x,y)

<C> Disegnare le curve di livello di f



<D> Determinare massimi e minimi assoluti di f **sulla circonferenza di centro l'origine e raggio** 1

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 1 + x + y \geq z \geq x^2 + y^2 - x\}$$

<E> Calcolare il volume di V

<F> Determinare una parametrizzazione per

$$S = \partial V$$

<G> Calcolare l'area di S

<H> Determinare una parametrizzazione per

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 1 + x + y = x^2 + y^2 - x\}$$

<I> Calcolare la lunghezza di γ

Prova d'Esame 17 Settembre 2003

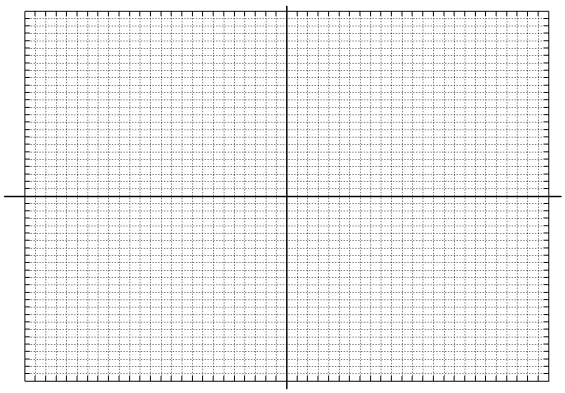
Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 \le 1 \\ 1-(x^2+y^2) & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

<A> Studiare la continuità e la differenziabilità di f, calcolare $\nabla f(x,y)$ e $f'((1,0),(a,b))$

<B> Esprimere f usando le coordinate polari nel piano (x,y)

<C> Disegnare le curve di livello di f



<D> Determinare massimi e minimi assoluti di f sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 1+2x+y \ge z \ge 0, x^2+y^2-x \le 1\}$$

<E> Calcolare il volume di V

<F> Determinare una parametrizzazione per

$$S = \partial V$$

<G> Calcolare l'area di S

<H> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x, x+y, 0)$$

attraverso la superficie ∂S

<I> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x, x+y, 0)$$

attraverso il cerchio di equazione $x^2+y^2-x \le 1$ che giace nel piano $z=0$

Prova d'Esame 22 Dicembre 2003

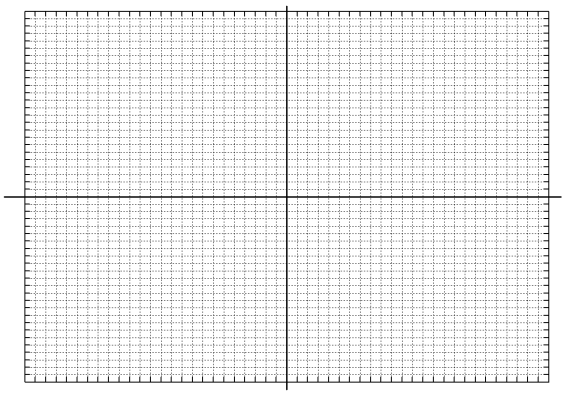
Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x \le y^2 \\ x^2 & x \ge y^2 \end{cases}$$

<A> Studiare la continuità e la differenziabilità di f,

<B> Calcolare $\nabla f(0,0)$ e $f'((0,0),(a,b))$

<C> Disegnare le curve di livello di f



<D> Determinare massimi e minimi assoluti di f sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$

<E> Calcolare il volume di V e l'area di ∂V

<F> Scrivere una parametrizzazione di ∂V
Sia F il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{1+x^2+y^2}, \frac{1}{1+x^2+y^2}, 0\right)$$

<G> Calcolare il Flusso di F attraverso

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

<H> Calcolare il flusso del campo F attraverso ∂V

<I> Verificare il teorema della divergenza per il campo F ed il solido V

Prova d'Esame 12 Gennaio 2004

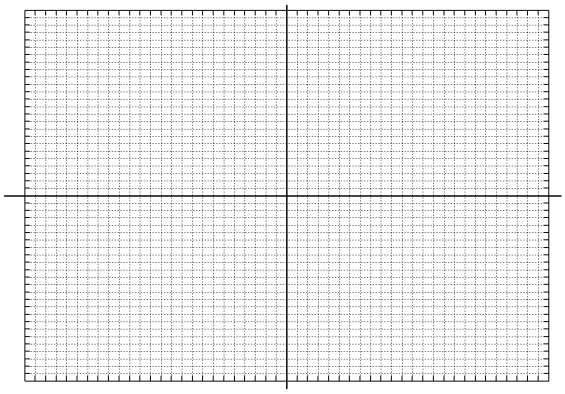
Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} ax + by & |y| \leq x^2 \\ cx + dy & |y| > x^2 \end{cases}$$

<A> Studiare la continuità e la differenziabilità di f,

<B> Calcolare $\nabla f(0,0)$ e $f'((0,0),(a,b))$

<C> Disegnare le curve di livello di f



<D> Determinare massimi e minimi assoluti di f sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x + y + 1 \leq z, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq 3\}$$

<E> Calcolare il volume di V

<F> Scrivere una parametrizzazione di ∂V
Sia F il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}, 0\right)$$

<G> Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la curva

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : z = \sqrt{x^2+y^2}, z = 3\}$$

<H> Calcolare il flusso del campo F attraverso la superficie

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : z = \sqrt{x^2+y^2}, z \leq 3\}$$

Prova d'Esame 2 Febbraio 2004

Si consideri la funzione definita da

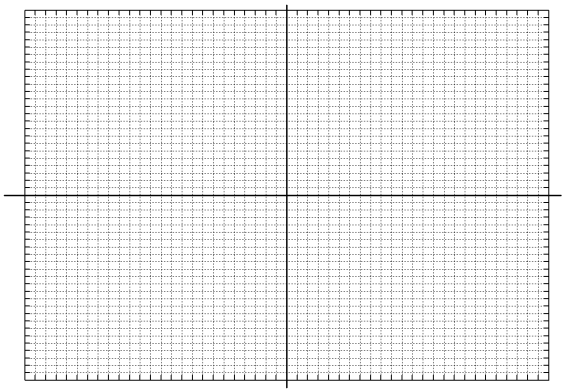
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}(x-1)^{3n}$$

<A> Stabilire se la serie che definisce f è una serie di potenze e, in caso affermativo, determinarne i coefficienti a_n ed il raggio di convergenza.

<B> Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme, totale della serie

<C> Studiare la derivabilità di f e calcolarne la derivata

<D> Disegnare il grafico di f



Si consideri l'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

<E> Determinare una parametrizzazione di A

<F> Calcolare l'area di A
Sia

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

ed F il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = (x, 2y, z)$$

<G> Calcolare il volume di V

<H> Calcolare il flusso del campo F attraverso ∂V

Prova d'Esame 23 Febbraio 2004

Si considerino le funzioni

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2$$
$$g(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 - 1$$
$$h(x,y,z) = z - 2 - x - y$$

<A> Determinare il massimo di f vincolato a $g = 0$ ed a $h = 0$.

<B> Determinare il minimo di f vincolato a $g = 0$ ed a $h = 0$.

<C> Determinare una parametrizzazione della curva definita da

$$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : z \geq \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, z \leq 2 + x + y, x \leq 0, y \leq 0\}$$

<D> Calcolare il volume di V

<E> Calcolare il baricentro di V
Sia F il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = (0,0,1)$$

<F> Calcolare il flusso del campo F attraverso ∂V

<G> Calcolare il lavoro di F lungo la curva definita da

$$\begin{cases} z^2 = 1 + x^2 + y^2 \\ z = 2 + x + y \end{cases}$$

Prova d' Esame 21 Giugno 2004

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Calcolare l'area di ∂V

<C> Determinare il flusso del Campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, y, 0)$$

attraverso ∂V

<D> Calcolare il lavoro del campo F lungo la curva

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$$

<E> Determinare la successione a_n in modo che

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

sia tale che

$$y'(x) = \int_0^x t y(t) dt$$

<F> Precisare il raggio di convergenza della serie di potenze y trovata al punto precedente.

<G> Verificare che le funzioni y dipendono da una costante e precisarne il significato. Stabilire se definiscono uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione.

<H> Trovare lo sviluppo di McLaurin di y di ordine 4.

Prima Prova Scritta 28/01/2004

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(1+(x-y)^3) & (x-y) > 0 \\ (x-y)^4 & (x-y) \leq 0, x \geq 0 \\ 0 & (x-y) \leq 0, x < 0 \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,1)$ e $\nabla f(0,0)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$

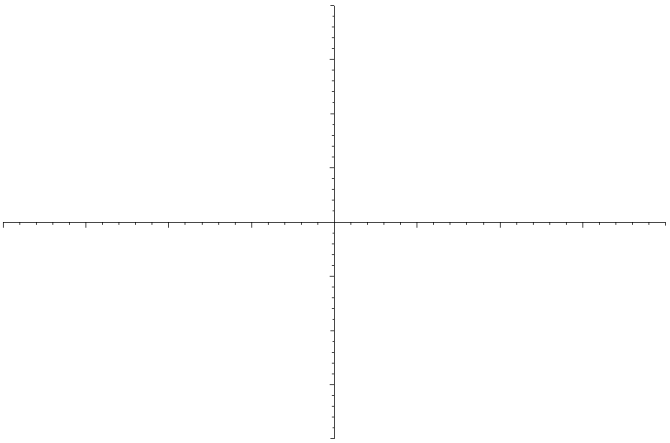
<D> Stabilire se f è differenziabile in f in $(1,1)$ ed in $(0,0)$

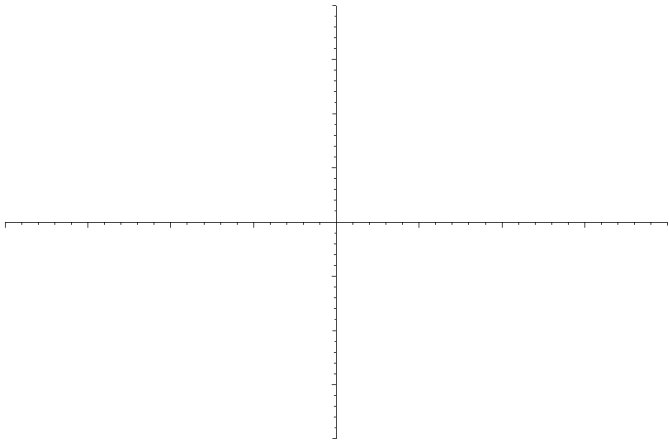
Seconda Prova Scritta 18/02/2004

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 3^{y^2}(1+x^2y^2) - 2$$

<A> Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y determinare gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative e disegnarli nel piano.





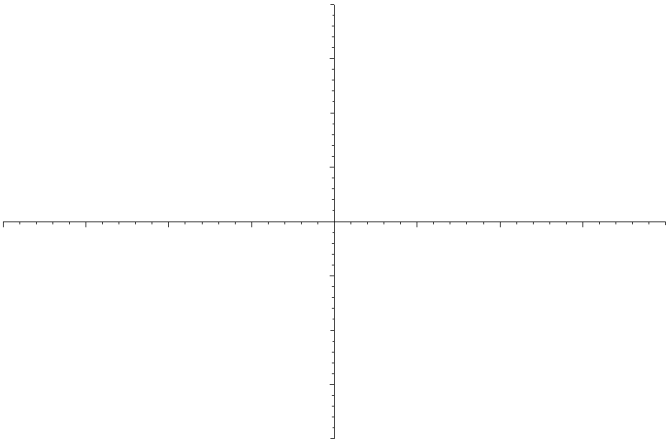
<B> Determinare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

<C> Determinare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ e $|x| > 1$

<D> Disegnare nel piano le curve

$$y = \pm 1 \quad . \quad y = 0 \quad , \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

riportando, ove possibile,il segno di f ristretta a tali curve.

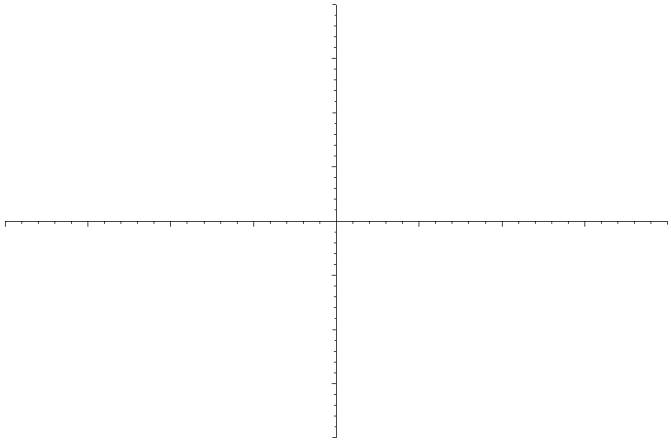


<E> Giustificare il fatto che $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assume valori negativi, definita su $\mathbb{R}$.

<F> Studiare crescenza e decrescenza di φ, calcolare

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \qquad , \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) =$$

e disegnare il grafico di φ



Terza Prova Scritta 10/03/2004

Si consideri

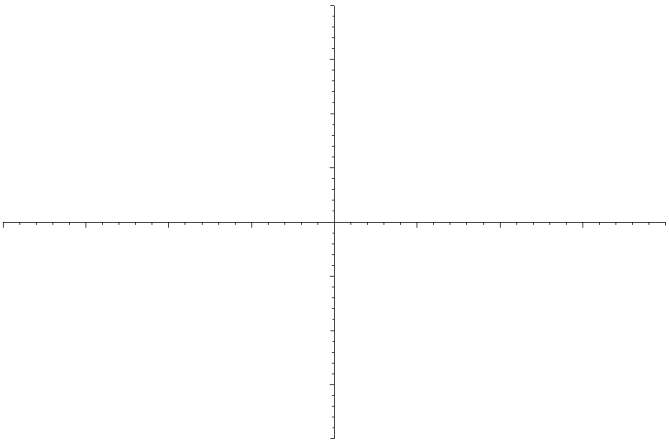
$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 - y \leq z \leq \sqrt{4 - x^2} \ , \ y \leq 3\}$$

e

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |1 - y| \leq z \leq \sqrt{4 - x^2} \ , \ y \leq 3\}$$

Parte 1

<A> Disegnare la proiezione di V_1 sul piano (x, y)



<B> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo di

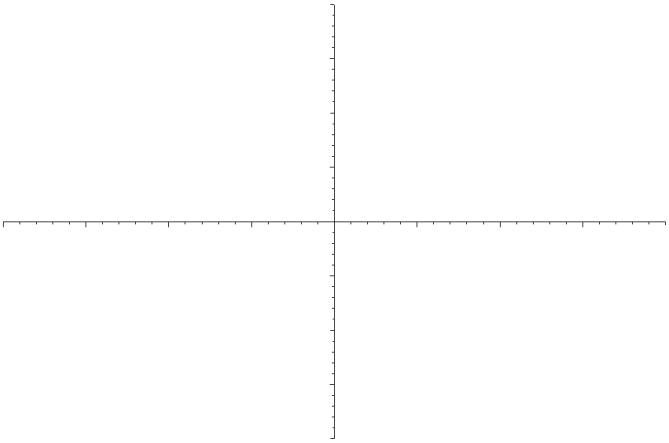
$$\int\int\int_{V_1} dxdydz$$

<C> Calcolare

$$\int\int\int_{V_1} dxdydz$$

Parte 2

<D> Disegnare la proiezione di V_2 sul piano (x, y)



<E> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo di

$$\int\int\int_{V_2} dxdydz$$

<F> Calcolare

$$\int\int\int_{V_2} dxdydz$$

Parte 3

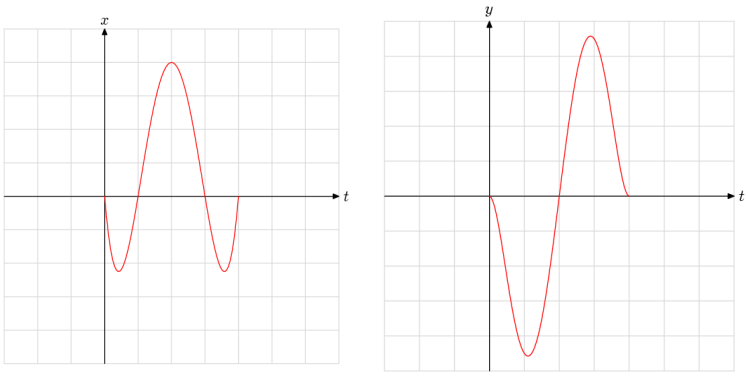
La Parte 1 e la Parte 2 valgono complessivamente 10 punti. Indicare a quale delle due parti si desidera attribuire 6 punti e a quale 4 punti

Correggere attribuendo 6 punti alla parte .....

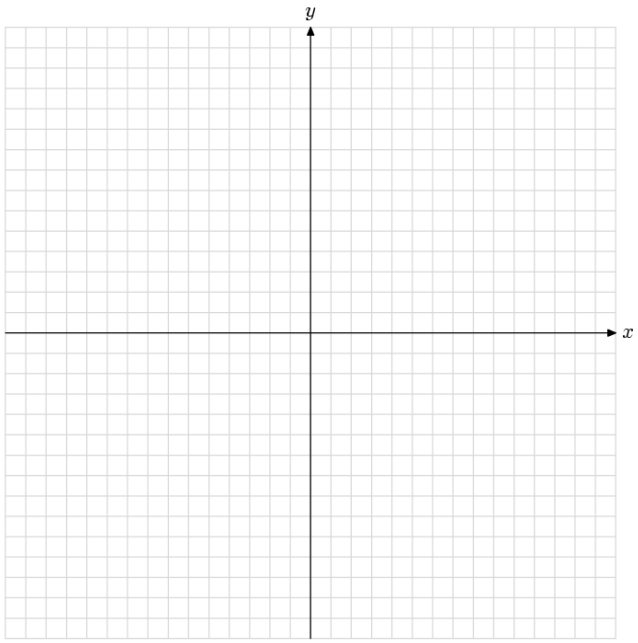
Quarta Prova Scritta 20/05/2004

Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = t(t-1)(t-3)(t-4) \\ y(t) = t^2(t-4)^2(t-2) \end{cases} \qquad t \in [0,4]$$



<A> Disegnare la curva γ



<B> Calcolare il vettore tangente alla curva in $(0,0)$ ed in $(4,0)$, ed utilizzare le informazioni per precisare il disegno di γ

<C> Calcolare la lunghezza di γ

<D> Verificare che γ è semplice, chiusa, regolare

Quinta Prova Scritta 14/06/2004

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$$

<A> Determinare i valori di x per i quali f è definita.

<B> Verificare che f soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x)(1-x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

<C> Determinare esplicitamente f

<D> Determinare lo sviluppo in serie di McLaurin di f

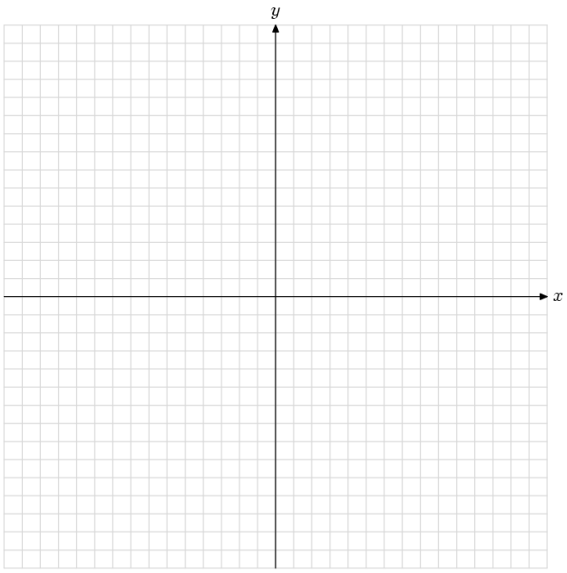
Sesta Prova Scritta 24/06/2004

Si consideri l'equazione differenziale

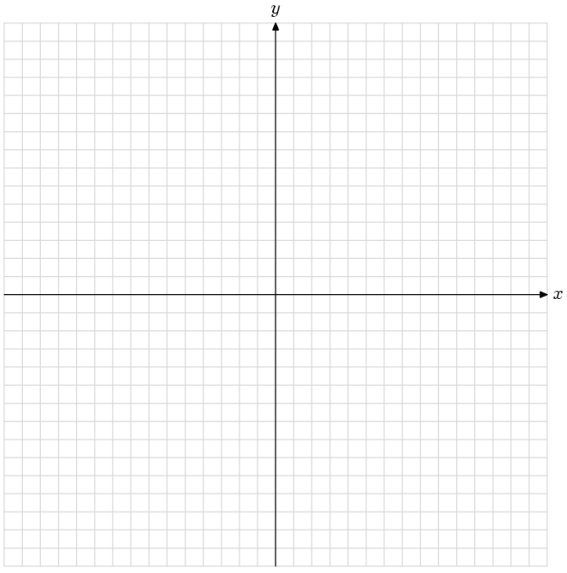
$$2y''(x) = y(x)(2 - 3y(x))$$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale della soluzione dell'equazione corrispondente ai dati iniziali. $y(0) = a$ **e** $y'(0) = b$

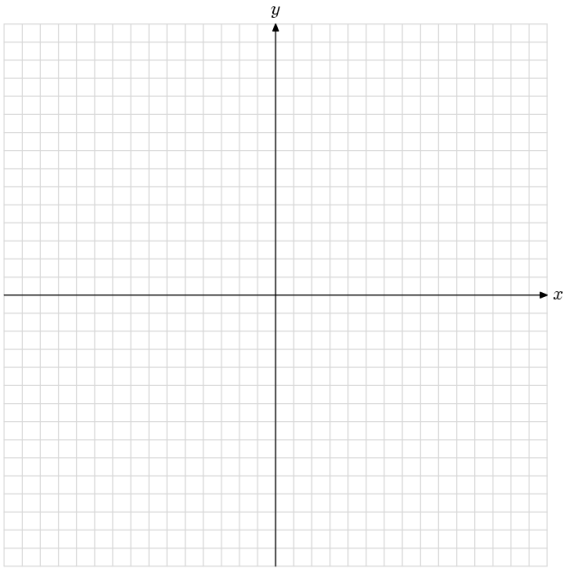
<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = 2$



<C> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = -2$



<D> Stabilire se la soluzione tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = 2$ **può essere prolungata e, in caso affermativo, disegnare il grafico del suo prolungamento.**


y
x

Recupero Prima Prova Scritta 28/01/2004

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln(1+(y-2x)(x-2y)) & (y-2x)(x-2y)>0\\ 0 & (y-2x)(x-2y)\leq 0\end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,2)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(1,2)$

<D> Stabilire se f è differenziabile in $(1,2)$

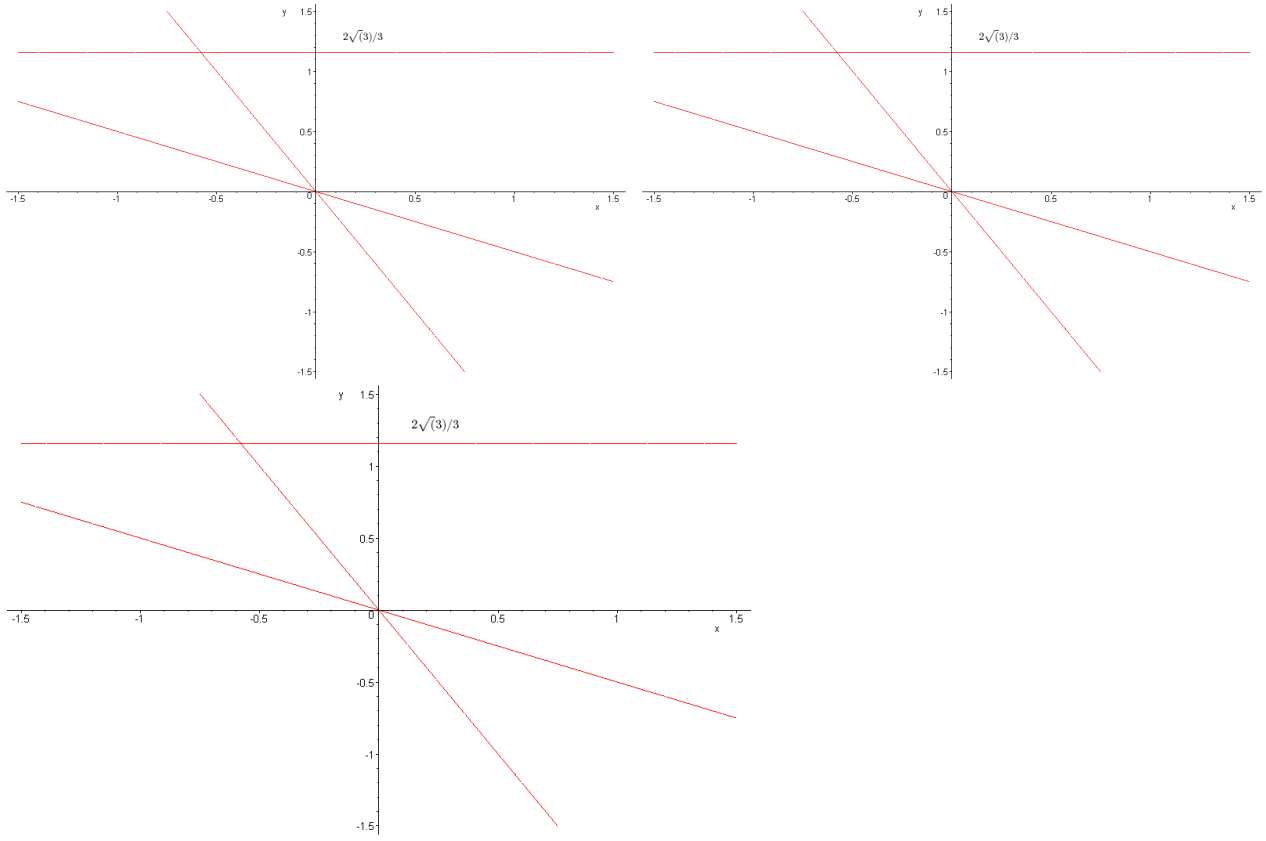
Recupero Seconda Prova Scritta 18/02/2004

Si consideri la funzione

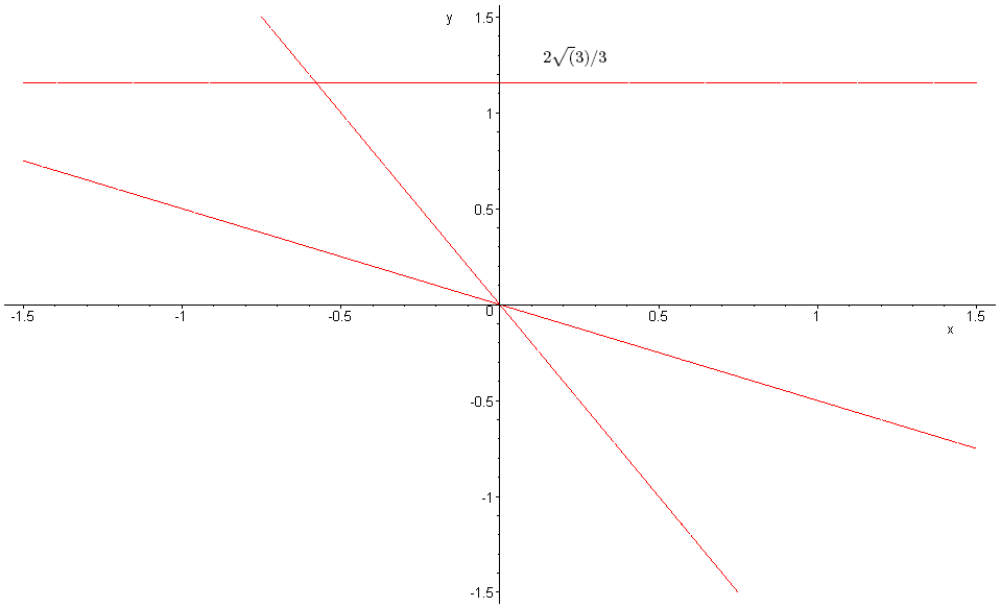
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$$

<A> Determinare nel piano gli insiemi in cui

$f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$, $f(x, 2\sqrt{(3)}/3) \geq 0$, $f(x, -x/2) \geq 0$.



<B> Disegnare la curva definita implicitamente da $f(x,y) = 0$

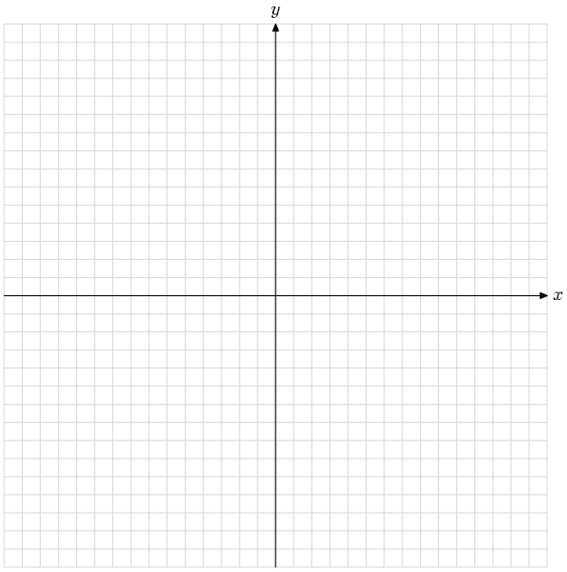

y
1.5
$2\sqrt{(3)}/3$
1
0.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x
-0.5
-1
-1.5

Recupero Terza Prova Scritta 10/03/2004

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1 - x \ , \ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1\}$$

<A> Disegnare la proiezione di V sul piano (x, y)



<B> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo di

$$\int\int\int_V dxdydz$$

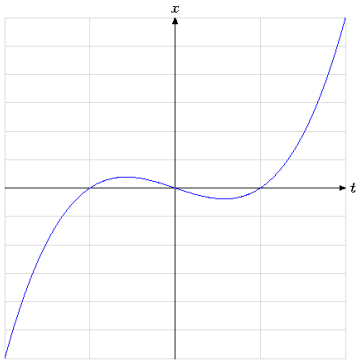
<C> Calcolare

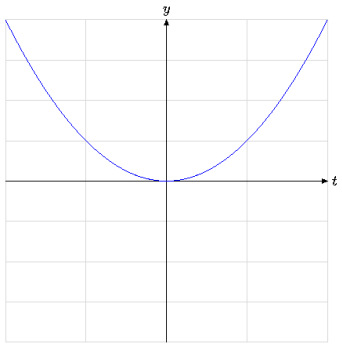
$$\int\int\int_V dxdydz$$

Recupero Quarta Prova Scritta 20/05/2004

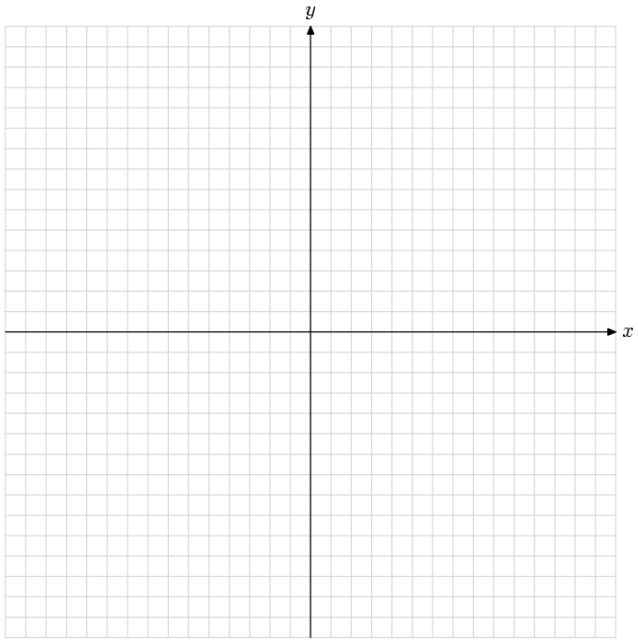
Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = t - t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-2, 2]$$





<A> Stabilire se γ è semplice, chiusa, regolare e disegnare la curva γ



<B> Calcolare il vettore tangente alla curva e la sua lunghezza

Recupero Quinta Prova Scritta 14/06/2004

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

<A> Determinare i valori di x per i quali f è definita.

<B> Verificare che f soddisfa l'equazione

$$y(x) = 1 + \int_0^x 2y(t)dt$$

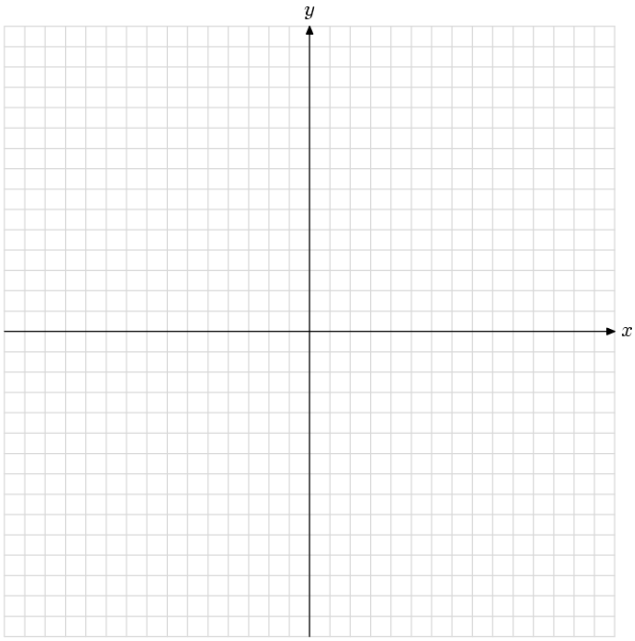
<C> Determinare esplicitamente f

Recupero Sesta Prova Scritta 24/06/2004

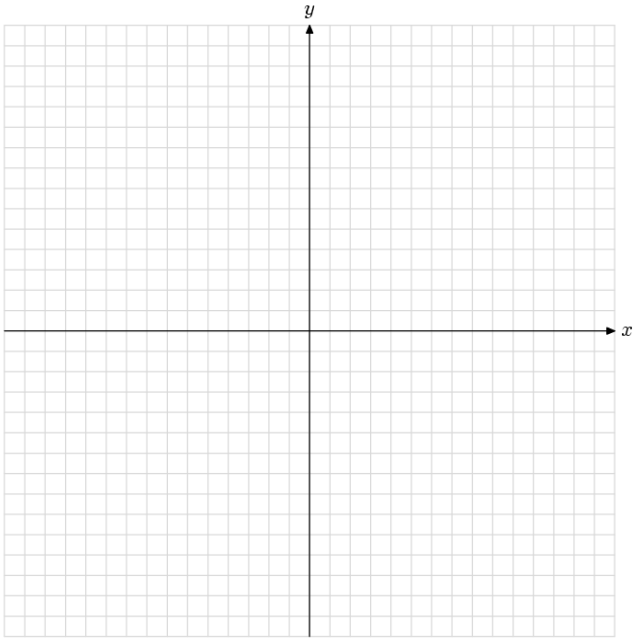
Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = y'(x)(2 - 3y(x))$$

<A> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = 2$



<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = -2$



Esame luglio 05/07/2004

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq 1 - |y| \ , \ z \leq 1 - |x| \ , \ z \geq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Calcolare l'area di ∂V

<C> Determinare il flusso del Campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, y, 0)$$

attraverso ∂V

<D> Calcolare il lavoro del campo F lungo la curva

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1 \ , z = 0 \ , \ 0 \leq x \leq 1\}$$

<E> Determinare la successione a_n in modo che

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

sia tale che

$$y'(x) = \int_0^x 2y(t)dt$$

<F> Precisare il raggio di convergenza della serie di potenze y trovata al punto precedente.

<G> Verificare che le funzioni y dipendono da una costante e precisarne il significato. Stabilire se definiscono uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione.

<H> Trovare lo sviluppo di McLaurin di y di ordine 4.

Esame luglio 22/07/2004

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + y(x) = x$$

<A> Determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}_+$

<B> Determinare le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}_-$

<C> Determinare, se esistono, le soluzioni del problema definite su $\mathbb{R}$

<D> Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ della soluzione dell'equazione differenziale tale che $y(1) = 0 = y'(1)$

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^{n(x^2+x)}}{n}$$

<E> Determinare il campo di definizione di f

<F> Determinare dove f è derivabile

<G> Disegnare il grafico di f

<H> Calcolare $f(-1/2)$ a meno di $1/10$

Esame Settembre 09/09/2004

Si consideri la superficie S ottenuta facendo ruotare la curva

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = t \ , \ y = 0 \ , \ z = 2\sqrt{t} \ , \ t \in [0, 2]\}$$

attorno all'asse z.

<A> Determinare una parametrizzazione di S

<B> Determinare il vettore normale ad S

<C> Calcolare l'area di S

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F = (0, 0, 1)$$

attraverso S

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + y^2$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<E> Per $a = 1$, $b = 3$, determinare massimi e minimi relativi di f su $\mathbb{R}^2$

<F> Per $a = 1$, $b = 3$, determinare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}^2$

<G> Per $a = 1$, $b = 3$, Stabilire se f è convessa in $\mathbb{R}^2$

<H> Discutere, al variare di a, b la convessità di f in $\mathbb{R}^2$

Esame Dicembre 01/12/2004

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ , \ y^2 + z^2 \leq 1\}$$

<A> Calcolare il volume di S

<B> Determinare una parametrizzazione di $S = \partial V$

<C> Calcolare l'area di S

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F = (1, 0, 0)$$

attraverso S

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + 3y(x) = \ln(x^2)$$

<E> Stabilire esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione differenziale al variare dei dati iniziali

<F> Determinare la soluzione dell'equazione differenziale tale che

$$y(1) = y'(1) = 0$$

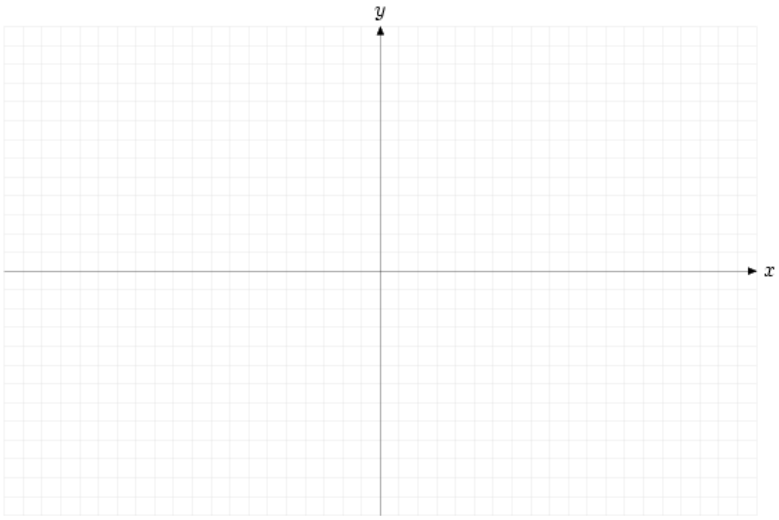
<G> Stabilire se la soluzione trovata al punto precedente è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$

Esame Gennaio 12/01/2005

Si consideri

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ x^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$$

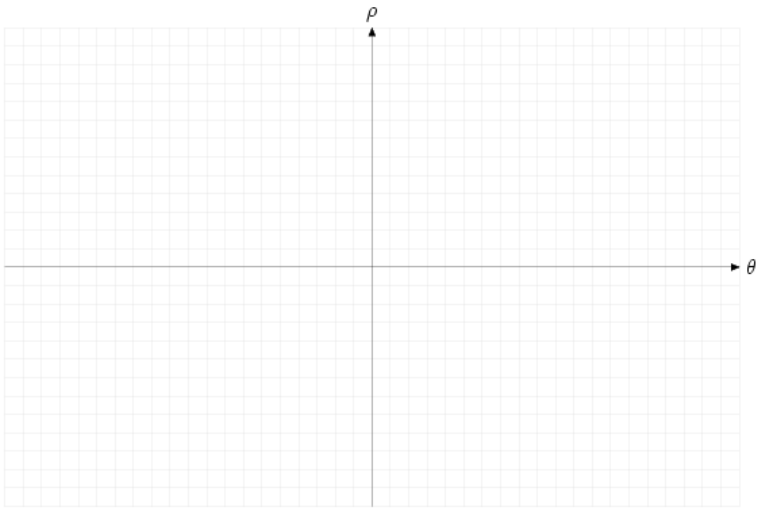
<A> Disegnare L



Si consideri la trasformazione di coordinate T definita da

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

<B> Disegnare il trasformato di L secondo il cambio di variabili T



<C> Scrivere le formule di riduzione per

$$\int\int_L f(x, y)dxdy$$

usando il cambio di variabili T

<D> Calcolare l'area di L

Si consideri

$$f(x,y) = x + xy^2 + y$$

<E> Stabilire in quali punti del piano l'equazione

$$f(x,y) = 0$$

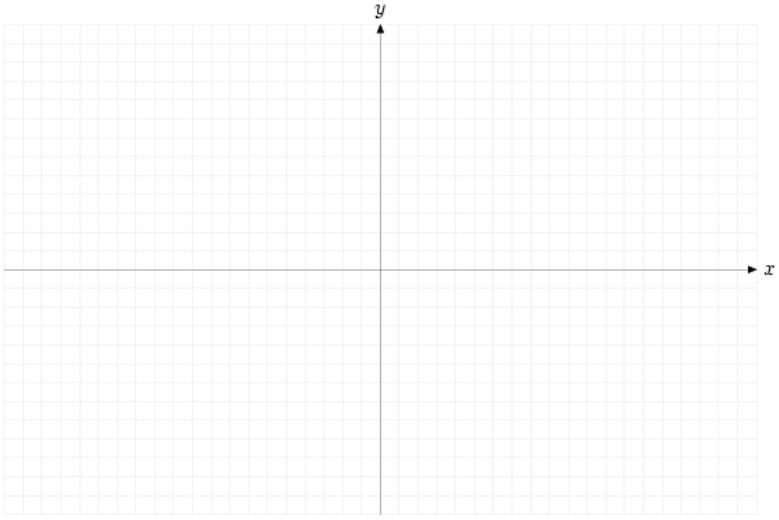
definisce y come funzione implicita di x

<F> Giustificare l'affermazione che l'equazione

$$f(x,y) = 0$$

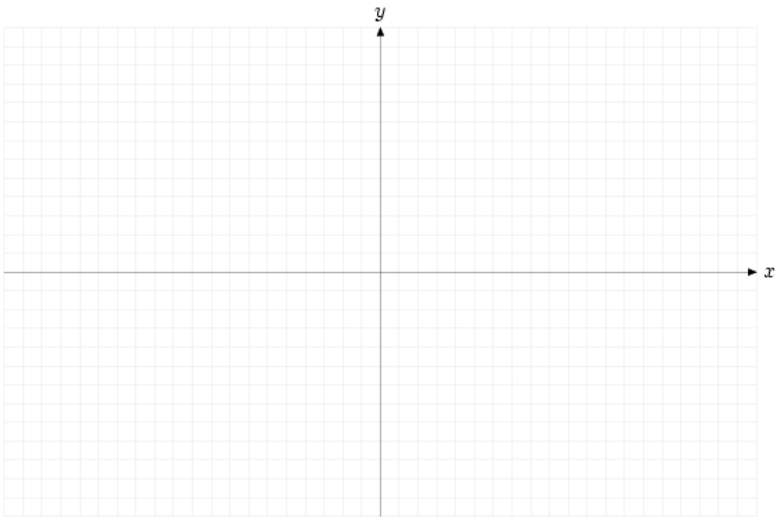
definisce y come funzione implicita di x in un intorno di $(0,0)$.

<G> Disegnare il grafico della funzione definita implicitamente da $f(x,y) = 0$ in un intorno dell'origine.



<H> Disegnare

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = 0\}$$


y
x

Esame Gennaio 26/01/2005

Si consideri

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq z \leq \frac{1}{x} \ , \ 1 \leq x \leq 2\}$$

e considerare il solido V ottenuto mediante rotazione di 2π attorno all'asse z

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una parametrizzazione di $S = \partial V$

<C> Calcolare l'area di S

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ attraverso ∂S

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + 2y(x) = x$$

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > 0$

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < 0$

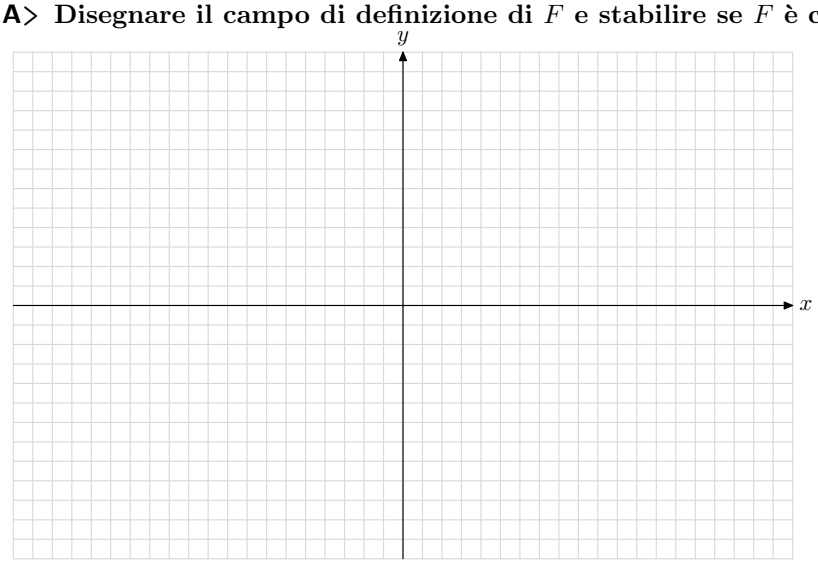
<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

Esame Febbraio 09/02/2005

Si consideri

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y}}, \frac{3z^2}{\sqrt{z^3}} \right)$$

<A> Disegnare il campo di definizione di F e stabilire se F è chiuso.



<B> Determinare se F è conservativo ed, in caso affermativo calcolarne tutti i potenziali

<C> Calcolare rot F

<D> Verificare il teorema del rotore per il campo F e la superficie S definita da $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$.

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!}$$

<E> Determinare i coefficienti della serie ed il suo raggio di convergenza.

<F> Trovare lo sviluppo di MClaurin di grado 10 di f

<G> Verificare che

$$\begin{cases} f'(x) + 4x^3 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

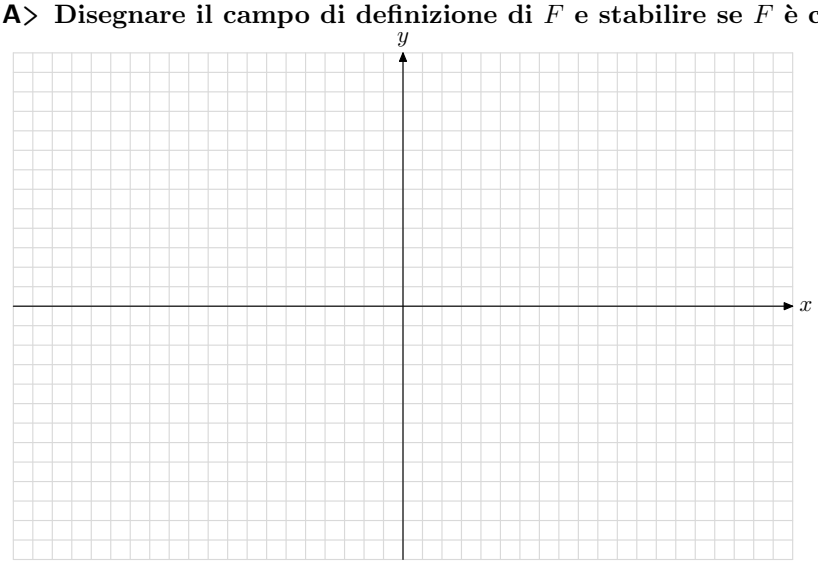
<H> Determinare esplicitamente $f(x)$

Esame Marzo 21/03/2005

Si consideri

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y}, \frac{1}{x^2+y}, \frac{3z^2}{z^3}\right)$$

<A> Disegnare il campo di definizione di F e stabilire se F è chiuso.



<B> Determinare se F è conservativo ed, in caso affermativo calcolarne tutti i potenziali

<C> Calcolare rot F

<D> Verificare il teorema del rotore per il campo F e la superficie S definita da $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n}$$

<E> Determinare i coefficienti della serie ed il suo raggio di convergenza.

<F> Trovare lo sviluppo di MClaurin di grado 10 di f

<G> Determinare esplicitamente $f(x)$

<H> Calcolare $f(.1)$ a meno di $\frac{1}{100}$

Esame Aprile 13/04/2005

Si consideri

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z \geq x \geq 0\}$$

e considerare il solido V ottenuto mediante rotazione di 2π attorno all'asse z

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una parametrizzazione di $S = \partial V$

<C> Calcolare l'area di S

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, 1, 1)$ attraverso ∂S

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) = x$$

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > 0$

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < 0$

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

Esame Giugno 27/06/2005

Si consideri

$$V = \{(x, , y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z \geq (x-1)^2 + y^2\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una parametrizzazione di $S = \partial V$

<C> Calcolare l'area di S

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ **attraverso** ∂S

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + \frac{3}{2}y^2(x) = 0$$

<E> Determinare la soluzione dell'equazione $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

<F> Determinare la soluzione dell'equazione $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

<G> Determinare la soluzione dell'equazione $y(0) = 0$, $y'(0) = a$.

<H> Determinare la soluzione dell'equazione $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = a$.

Prima Prova Scritta 03/02/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 - 5xy + 6y^2$$

<A> Stabilire se f è una forma quadratica e, in caso affermativo, determinarne la matrice di rappresentazione.

<B> Nel caso in cui la risposta alla domanda precedente sia affermativa, stabilire se f è definita.

<C> Se le risposte alle precedenti domande sono affermative, stabilire se f è definita positiva o negativa.
Siano

$$\begin{cases} A = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0\} \\ B = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x > 0\} \\ C = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

<D> Stabilire per ciascuno dei seguenti insiemi se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.
Sia $\phi_m(x)$ la restrizione di f alla retta $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$

<E> Determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ ϕ_m è sempre positiva.

Seconda Prova Scritta 17/02/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \min\{2e^{-x^2-y^2}, 1\}$$

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Determinare dove f è differenziabile e calcolare ∇f, ove possibile

<C> Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluto.

<D> Disegnare le curve di livello di f

<E> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 10)$.

<F> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, \sqrt{\ln(2)})$.

Terza Prova Scritta 11/03/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{(x^2)} - y^2 + 2y - 1$$

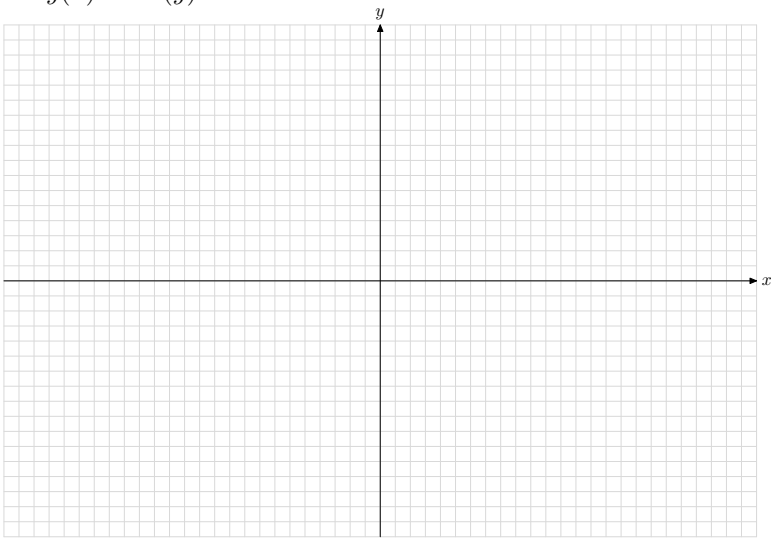
e l'insieme dei punti del piano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ f(x,y) = 0\}$$

<A> Stabilire se A è rappresentabile come grafico di una funzione $y(x)$ o $x(y)$ in un intorno dell'origine.

<B> Nel caso la risposta alla prima domanda sia affermativa, determinare prima un intorno e poi il pù grande intorno in cui è vero quanto affermato.

<C> Nel caso la risposta alla prima domanda sia affermativa, disegnare il grafico di quelle tra $y(x)$ ed $x(y)$ che esistono.



Quarta Prova Scritta 19/05/2005

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<C> Calcolare la superficie di ∂V

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F = (0, 0, z)$$

attraverso la superficie ∂V

Quinta Prova Scritta 09/06/2005

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\left(-\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}},-\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}},-\frac{z}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}}\right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F

<B> Stabilire se F è chiuso

<C> Stabilire se F è conservativo

<D> Determinare un potenziale per F

<E> Determinare tutti i potenziali per F

<F> Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x+y+z=0$$

<G> Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$x^2+y^2+z^2=1\ ,\ z\geq 0$$

Quinta Prova Scritta Xtra 10/06/2005

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\left(-\frac{x}{2-x^2-y^2-z^2},-\frac{y}{2-x^2-y^2-z^2}+1,-\frac{z}{2-x^2-y^2-z^2}\right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F

<B> Stabilire se F è chiuso

<C> Stabilire se F è conservativo

<D> Determinare un potenziale per F

<E> Determinare tutti i potenziali per F

<F> Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x+y+z=0\ ,\ z\geq 0$$

<G> Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x\geq 0$$

Sesta Prova Scritta 29/06/2005

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^5 y^{(5)}(x) + y(x) = f(x)$$

e la serie di potenze

$$z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

<A> Sia $f(x) = x^9$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

<B> Sia $f(x) = e^x$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

<C> Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.
Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n$.

<D> Determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

<E> Determinare al variare di α il raggio di convergenza della serie trovata.

<F> Sia $\alpha = 3$. Stabilire per quali dati iniziali il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^5 y^{(5)}(x) + y(x) = f(x) \\ y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_1 \ , \ y''(0) = y_2 \ , \ y'''(0) = y_3 \ , \ y^{(4)}(0) = y_4 \ , \end{cases}$$

ammette soluzione.

Prima Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri la forma quadratica

$$f(x,y) = 7x^2 - 2xy - 7y^2$$

<A> Determinare una matrice di rappresentazione di f.

<B> stabilire se f è definita.

<C> Stabilire se f è definita positiva o negativa.
Siano

$$\begin{cases} A = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0\} \\ B = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x > 0\} \\ C = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

<D> Stabilire per ciascuno dei seguenti insiemi se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.
Sia $\phi_m(x)$ la restrizione di f alla retta $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$

<E> Determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ ϕ_m è sempre positiva.

Seconda Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-\rho^2} & \rho < \sqrt{\ln 2} \\ 1 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dove con ρ, θ si intendono le usuali coordinate polari nel piano.

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Determinare dove f è differenziabile e calcolare ∇f, ove possibile

<C> Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluto.

<D> Disegnare le curve di livello di f

<E> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 10)$.

<F> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, \sqrt{\ln(2)})$.

Terza Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

e l'insieme dei punti del piano

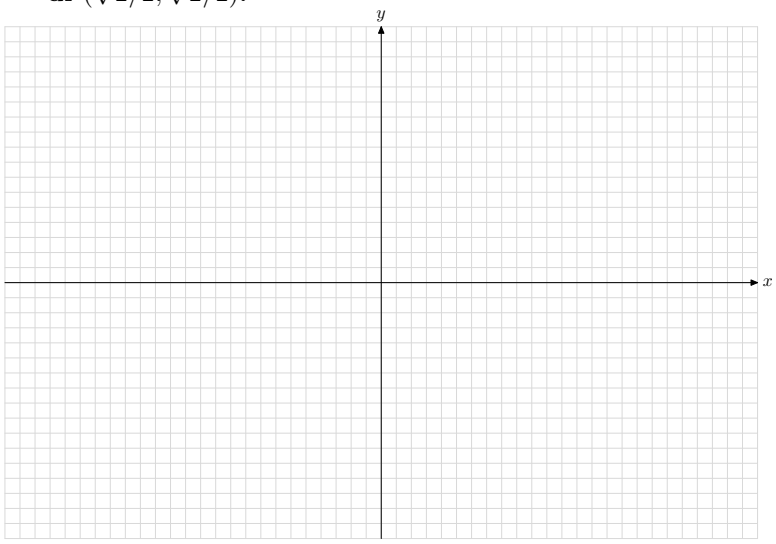
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ f(x,y) = 0\}$$

<A> Determinare un intorno $[\sqrt{2}/2 - a, \sqrt{2}/2, +a] \times [\sqrt{2}/2 - b, \sqrt{2}/2, +b]$ **di** $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ **in cui** f_x **si mantiene negativa.**

<B> Determinare a **tale che** $f(\sqrt{2}/2 - a, \sqrt{2}/2)$ **e di** $f(\sqrt{2}/2 + a, \sqrt{2}/2)$ **assumano segno discorde.**

<C> Determinare δ **tale che** $f(\sqrt{2}/2 - a, y)$ **e** $f(\sqrt{2}/2 + a, y)$ **abbiano segno costante nell'intervallo** $[\sqrt{2}/2 - \delta, \sqrt{2}/2, +\delta]$ **.**

<D> Giustificare il fatto che $f(x,y)$ **definisce implicitamente** x **come funzione di** y **in un intorno di** $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$**.**



Quarta Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<C> Calcolare la superficie di ∂V

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F = (y, x, z)$$

attraverso la superficie ∂V

Quinta Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \big(x\ln(x^2+y^2-1)-2, y\ln(x^2+y^2-1)+1\big)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F

<B> Stabilire se F è chiuso

<C> Stabilire se F è conservativo

<D> Determinare un potenziale per F

<E> Determinare tutti i potenziali per F

<F> Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2+y^2=4\ ,\ x+y\geq 0$$

Sesta Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2y(x) = 2x$$

<A> Risolvere per serie l'equazione assegnata.

<B> Determinare i dati iniziali in corrispondenza dei quali l'equazione differenziale ammette soluzioni che si possono scrivere come serie di potenze centrate in 0
Si consideri poi l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2y(x) = 2x$$

<C> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

Esame Luglio 11/07/2005

Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad , \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

<A> Determinare una parametrizzazione di γ e calcolarne il vettore tangente e lunghezza.

<B> Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (1, 2y, 1)$$

lungo la curva γ

<C> Determinare il potenziale di F che si annulla sulla retta definita da $y = 0$, $x + z = 0$

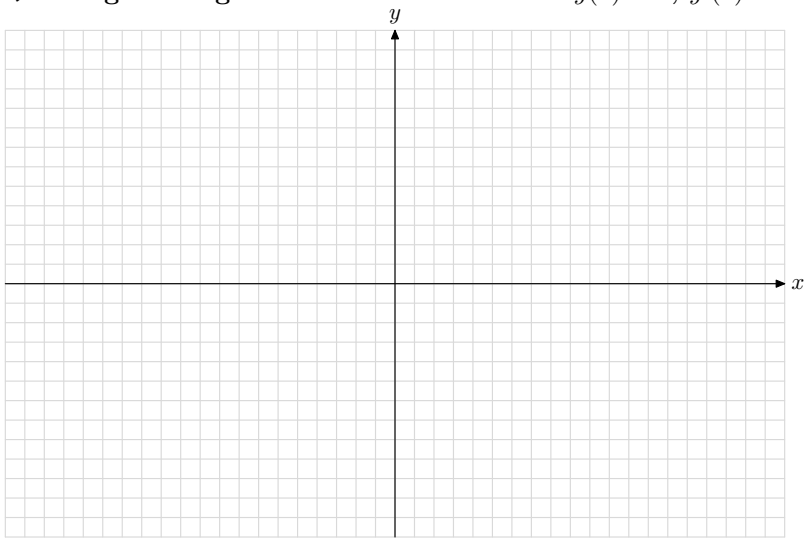
<D> Determinare i punti della curva γ in cui il potenziale è massimo.
Si consideri l'equazione differenziale autonoma

$$y''(x)\sin(y'(x)) = \frac{y'(x)}{y^2(x)}$$

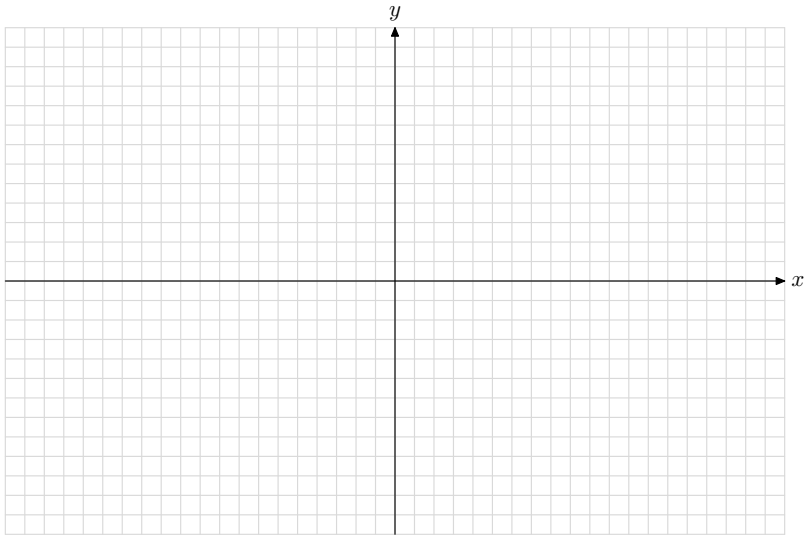
Sia z tale che

$$z(y(x)) = y'(x)$$

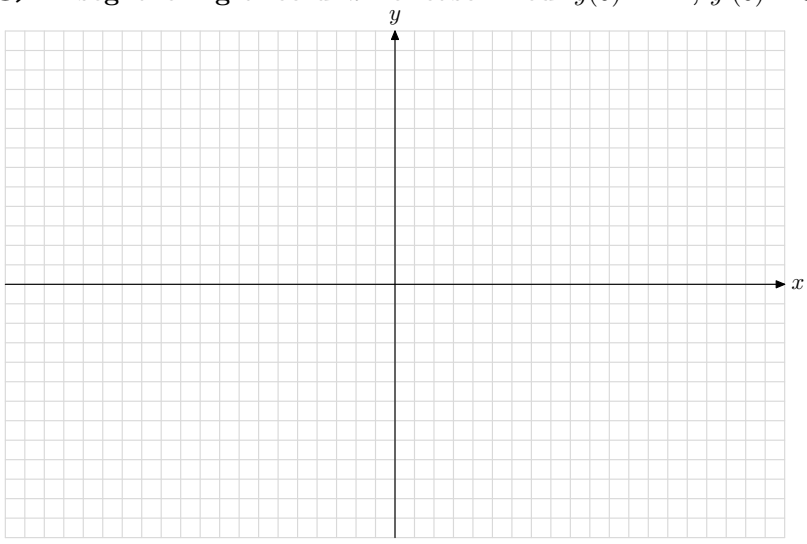
<E> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



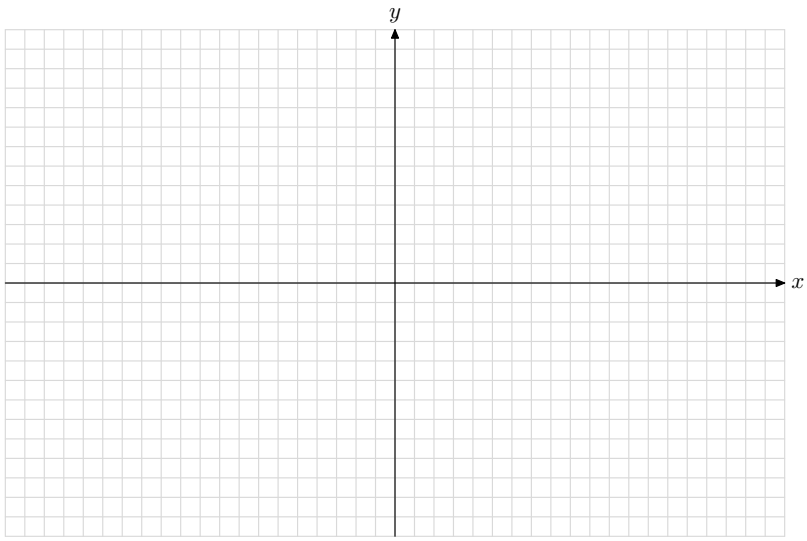
<F> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



<G> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.



<H> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.


y
x

Esame Luglio 25/07/2005

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \ , \ x^2 + y^2 + x \leq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare un parametrizzazione di ∂V **e calcolarne l'area**

<C> Determinare il flusso del campo vettoriale $(1, 0, 0)$ **attraverso la superficie**

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - x^2 - y^2 \ , \ x^2 + y^2 + x \leq 0\}$$

<D> Determinare il massimo ed il minimo di $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ **su** V
Si consideri la funzione

$$y(\omega) = \int_0^{\pi/\omega} 2e^{-x^2} \sin(\omega x) dx$$

<E> Calcolare la derivata $\frac{d}{d\omega} y(\omega)$

<F> Integrare per parti $\frac{d}{d\omega} y(\omega)$ **e ricavare una equazione differenziale per** y

<G> Determinare $y(\omega)$ **in funzione di** $y(1)$**.**

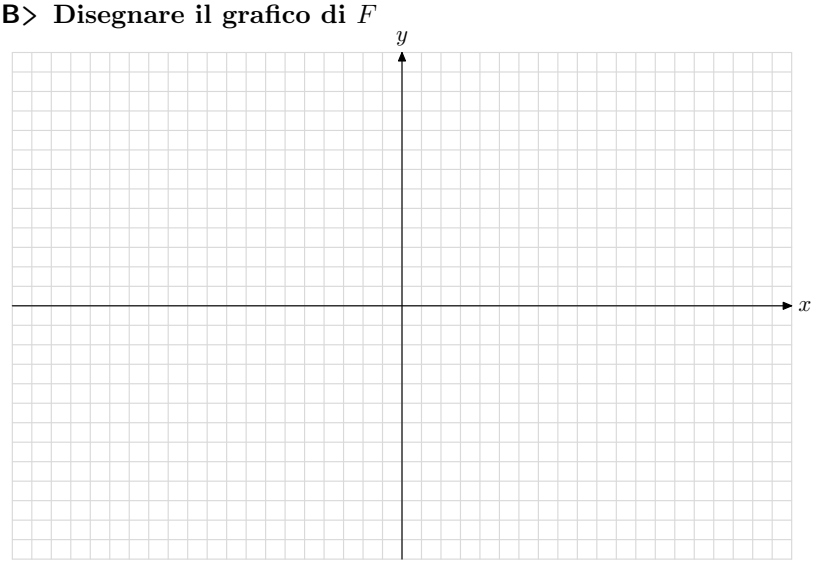
Esame Settembre 13/09/2005

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0] \\ x & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

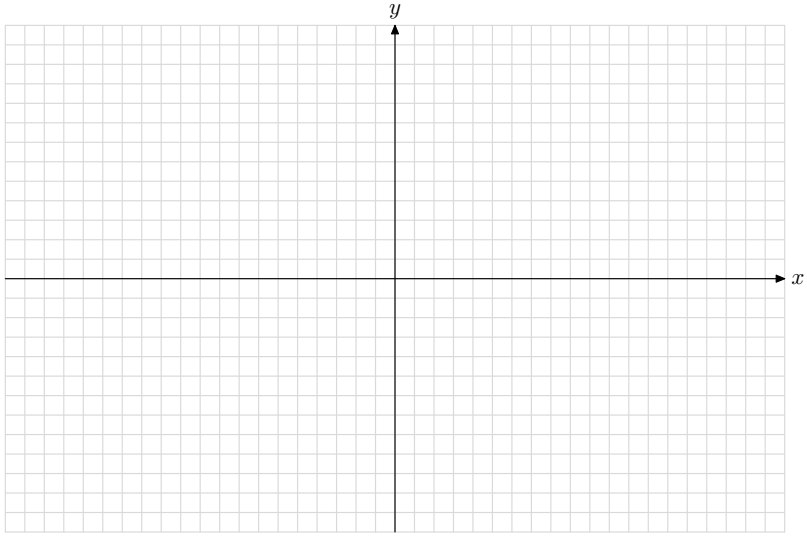
<A> Determinare lo sviluppo di Fourier F di f su $[-\pi, \pi]$

<B> Disegnare il grafico di F



<C> Calcolare $F(\pi)$

<D> Disegnare il grafico dello sviluppo di Fourier di F in serie di soli seni su $[0, \pi]$



Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + z(t) + 1 \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

<E> Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

<F> Determinare l'integrale generale del sistema completo

<G> Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

<H> Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

Esame Dicembre 06/12/2005

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

<A> Determinare lo sviluppo in serie di potenze di f precisandone il raggio di convergenza

<B> Stabilire se f è sviluppabile in serie di Taylor nell'origine ed in caso affermativo calcolarne lo sviluppo di Taylor.

<C> Calcolare la derivata di ordine 8 di f in 0

<D> Disegnare il grafico di f e quello del suo sviluppo di Taylor.
Si consideri l'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \ , \ z = \frac{1}{2}x + 1\}$$

<E> Determinare i punti di A di massima e di minima distanza dall'origine.

<F> Determinare la misura di A

<G> Stabilire se A è chiuso, aperto, limitato, connesso per archi, semplicemente connesso.

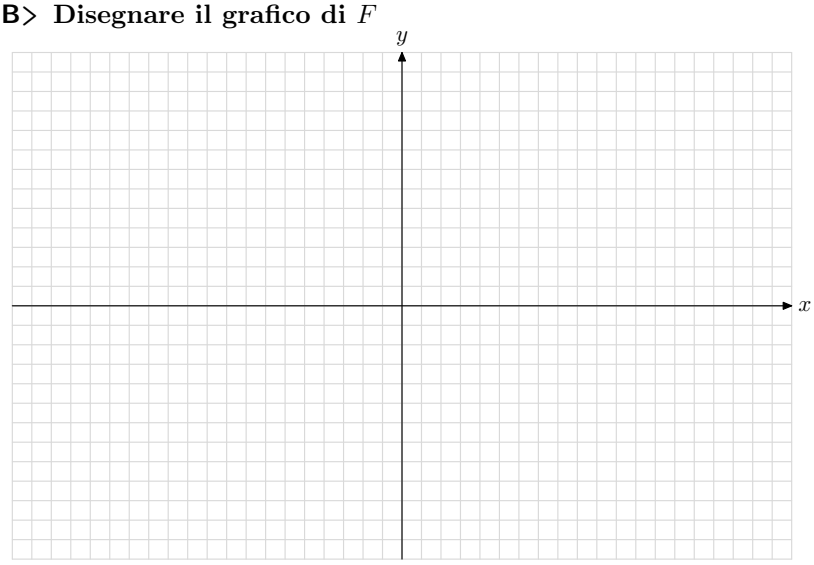
Esame Dicembre 20/12/2005

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x \in (-\pi, 0] \\ x & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

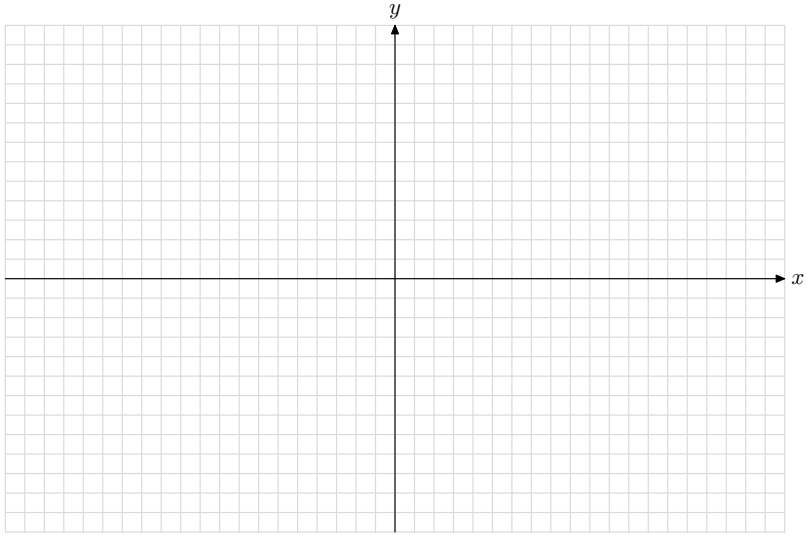
<A> Determinare lo sviluppo di Fourier F di f su $[-\pi, \pi]$

<B> Disegnare il grafico di F



<C> Calcolare $F(\pi)$

<D> Disegnare il grafico dello sviluppo di Fourier di F in serie di soli seni su $[0, \pi]$



Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + t \\ \dot{z}(t) = z(t) + 1 \end{cases}$$

<E> Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

<F> Determinare l'integrale generale del sistema completo

<G> Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

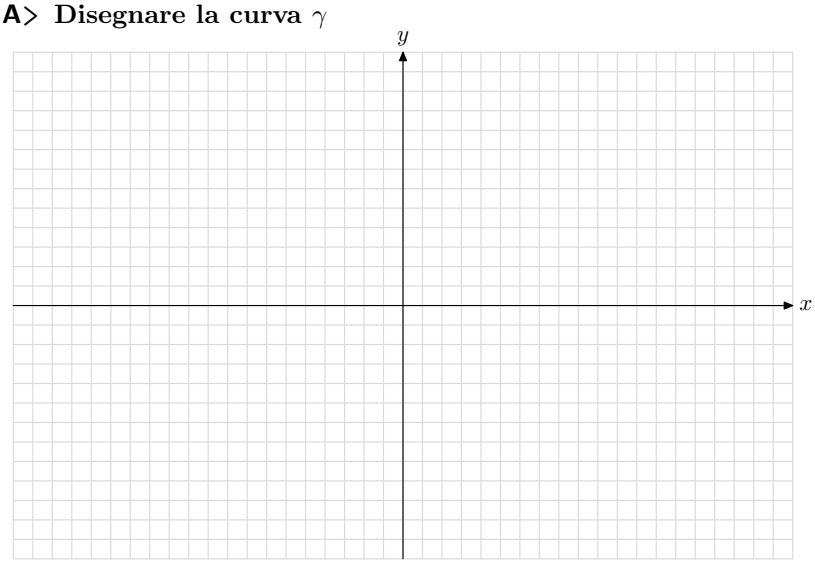
<H> Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

Esame Gennaio 11/01/2006

Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

<A> Disegnare la curva γ



<B> Sia S la superficie ottenuta facendo ruotare γ attorno all'asse y di 2π; Determinare una parametrizzazione di S.

<C> Calcolare l'area di S.

<D> Calcolare il volume del solido delimitato dalla superficie S
Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + sin(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + t \\ \dot{z}(t) = z(t) + 1 \end{cases}$$

<E> Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

<F> Determinare l'integrale generale del sistema completo

<G> Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

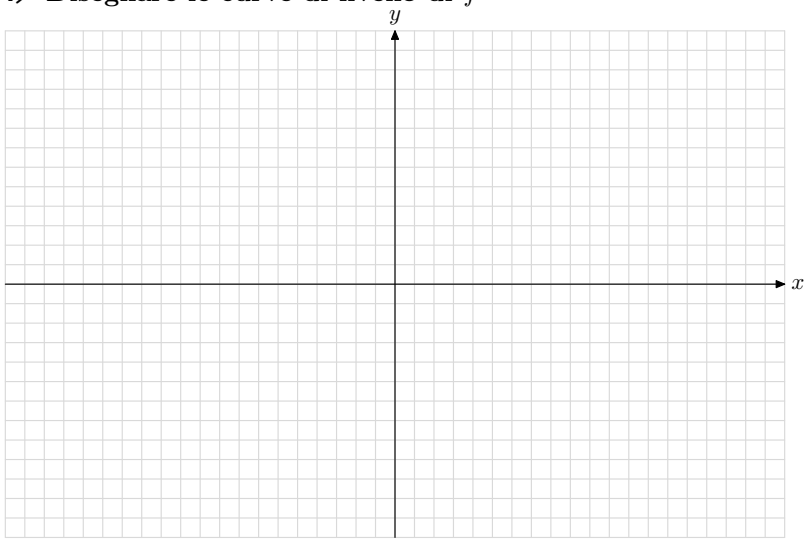
<H> Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.

Esame Gennaio 25/01/2006

Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y & x^2 + y - x \leq 0 \\ x & x^2 + y - x > 0 \end{cases}$$

<A> Disegnare le curve di livello di f



<B> Stabilire dove f è continua e dove è differenziabile.

<C> Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di f sul suo campo di definizione.

<D> Calcolare il Flusso del campo vettoriale

$$(x, y, 0)$$

attraverso la superficie definita da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y - x \ , \ x^2 + y^2 - x \leq 0\}$$

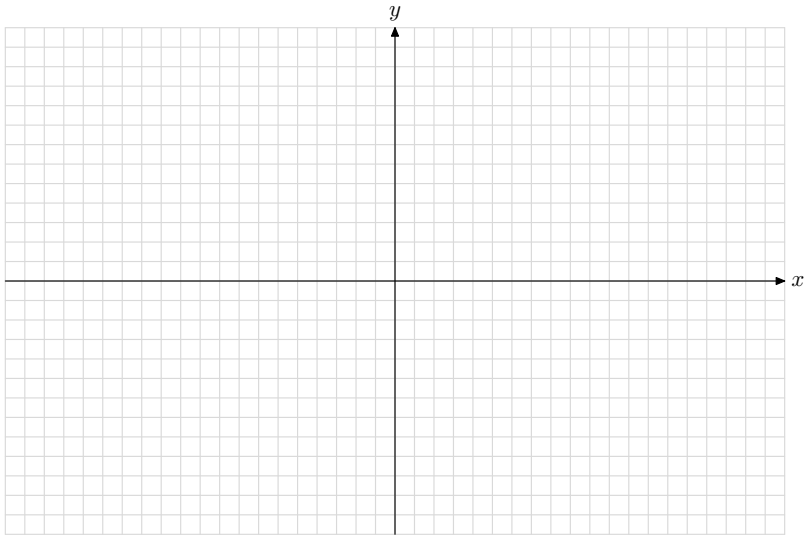
Si consideri l'equazione differenziale autonoma

$$y''(x)\tan(y'(x)) = \frac{y'(x)}{y^2(x)}$$

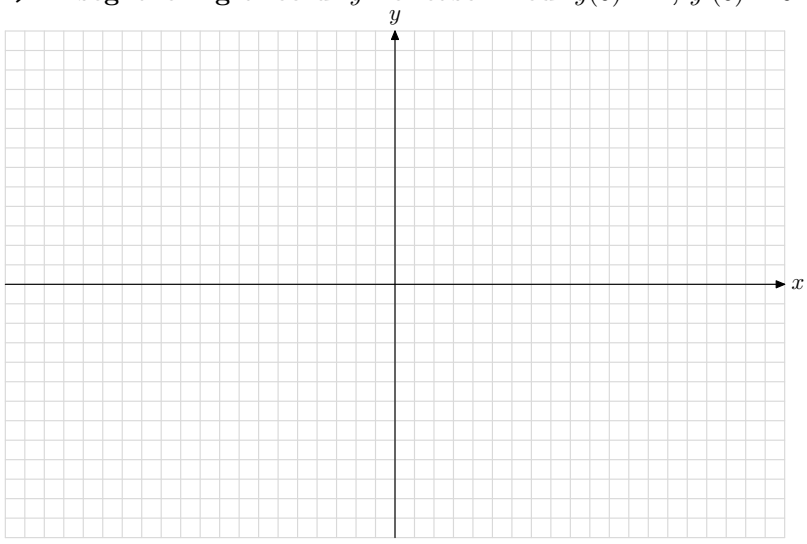
Sia z tale che

$$z(y(x)) = y'(x)$$

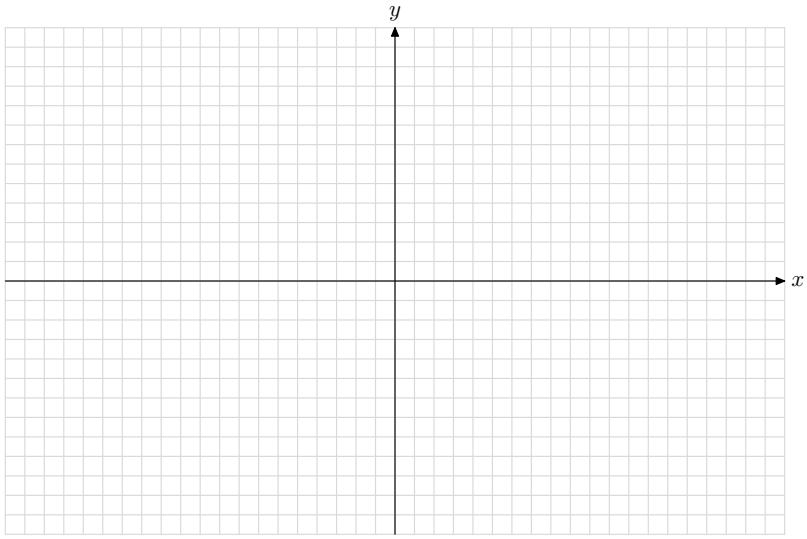
<E> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



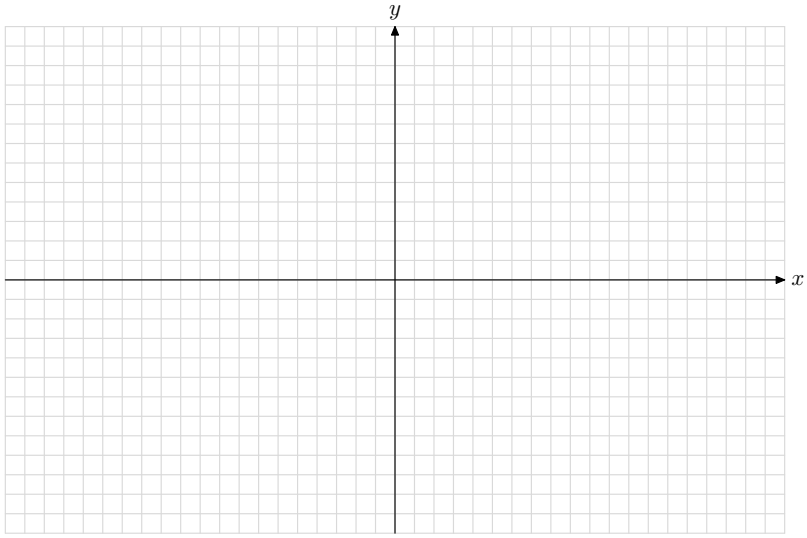
<F> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



<G> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \frac{\pi}{4}$.



<H> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \frac{\pi}{4}$.



Esame Febbraio 08/02/2006

Si consideri

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ |z| \geq |xy|\}$$

<A> Studiare eventuali simmetrie di V

<B> Calcolare il volume di V

<C> Determinare una parametrizzazione della frontiera di V ∂V

<D> Calcolare la Superficie di ∂V
Si consideri l'equazione differenziale

$$(x-1)^3 y''(x) + (x-1)(y'(x)) = (x-1)$$

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

<G> Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = a$, ed eventualmente trovarle.

<H> Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = a$, $y'(1) = b$ ed eventualmente trovarle.

Esame Marzo 22/03/2006

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = (f(x,yz), g(x,y,z), h(x,y,z)) = \left(\frac{1}{\sqrt{x-y+2}}, -\frac{1}{\sqrt{x-y+2}}, z \right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F

<B> Stabilire se F è chiuso

<C> Stabilire se F è conservativo

<D> Determinare il potenziale di F

<E> Calcolare $\int_\gamma f dx + g dy + h dz$ dove γ è il triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.
Si consideri l'equazione differenziale

$$xy''(x) + y'(x) = 0$$

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

<H> Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$ ed eventualmente determinarle.

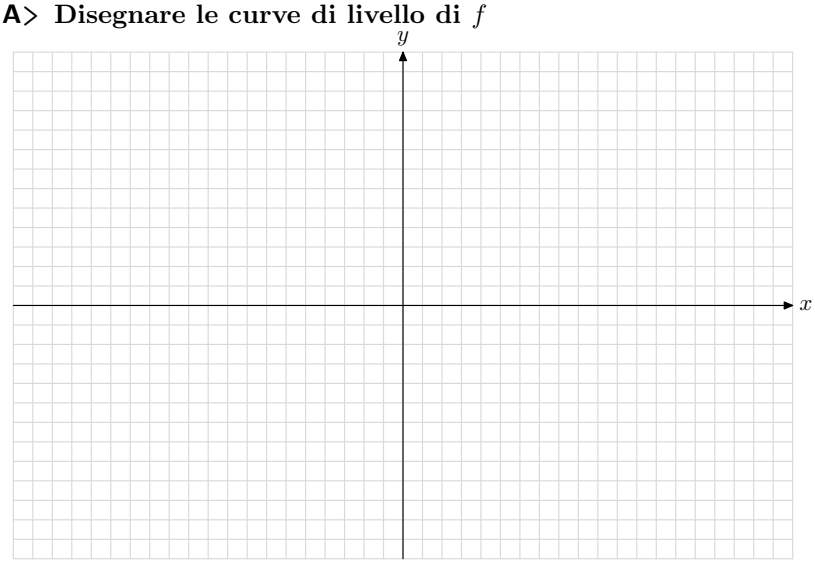
<I> Stabilire se esistono soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$ ed eventualmente determinarle.

Esame Aprile 06/04/2006

Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 + x & y^2 + y - x \leq 0 \\ y & y^2 + y - x > 0 \end{cases}$$

<A> Disegnare le curve di livello di f



<B> Stabilire dove f è continua e dove è differenziabile.

<C> Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di f sul suo campo di definizione.

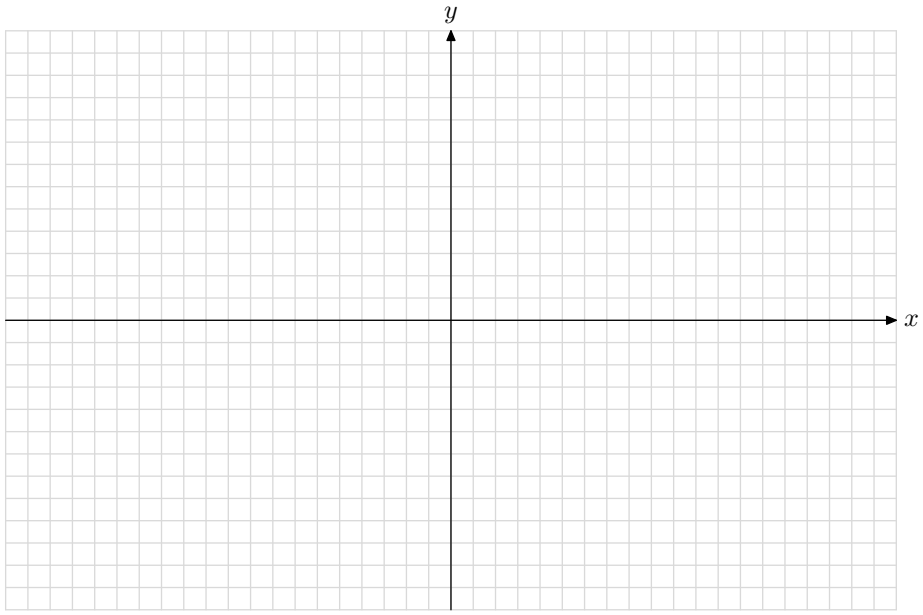
<D> Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine.
Si consideri l'equazione differenziale autonoma

$$y''(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

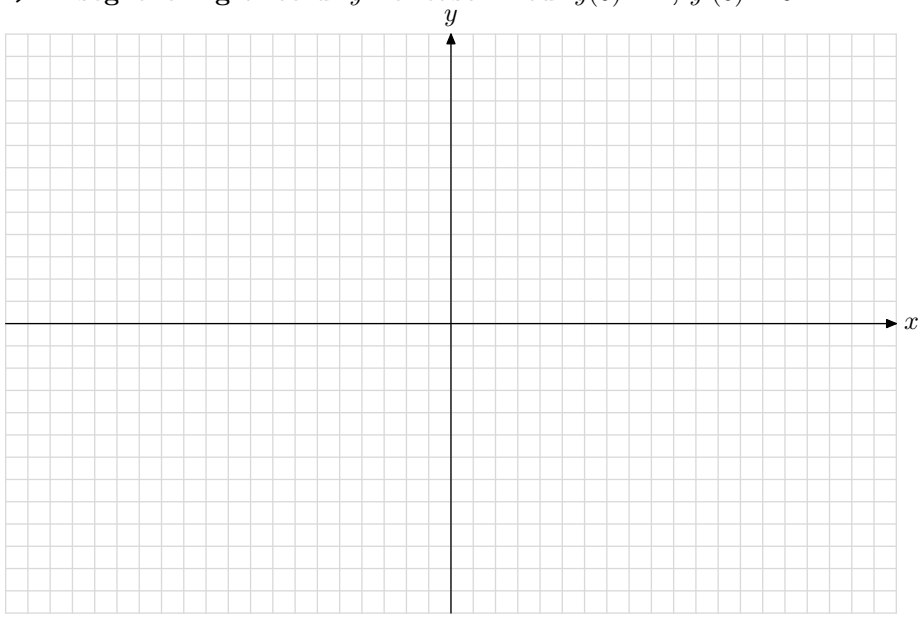
Sia z tale che

$$z(y(x)) = y'(x)$$

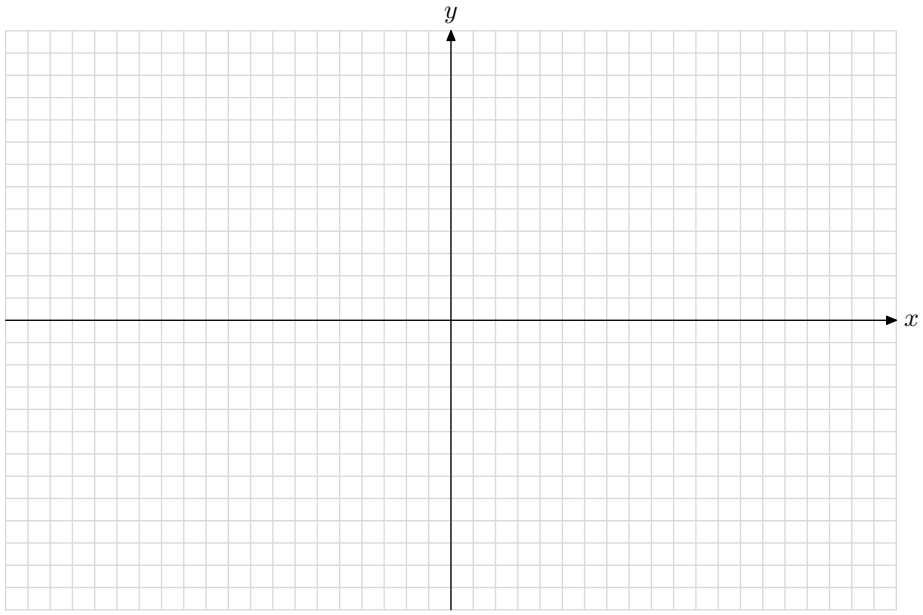
<E> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



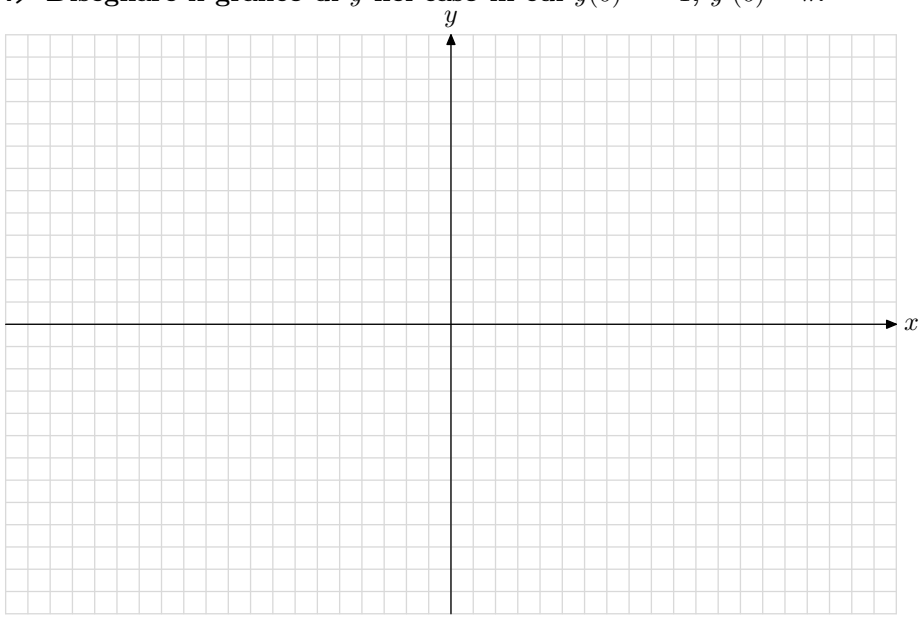
<F> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



<G> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.



<H> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.

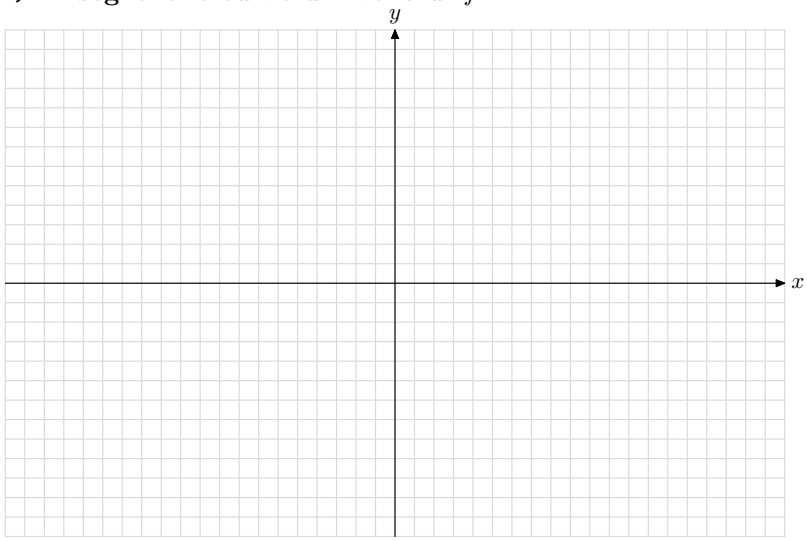


Esame Giugno 14/06/2006

Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y & x^2 - y^2 \leq 1 \\ y(1+y^2) & x^2 - y^2 < 1 \end{cases}$$

<A> Disegnare le curve di livello di f



<B> Stabilire dove f è continua e dove è differenziabile.

<C> Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti di f sul suo campo di definizione.

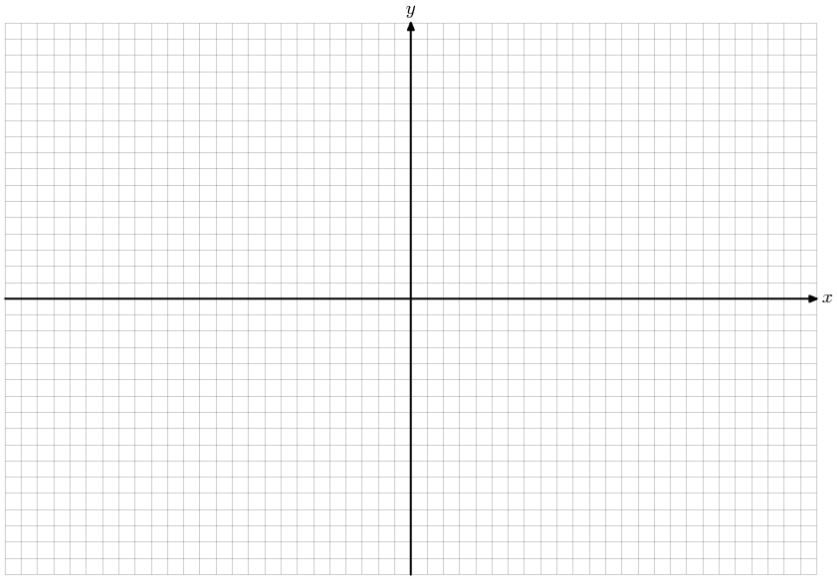
<D> Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine.
Si consideri l'equazione differenziale autonoma

$$y''(x) = y'(x)y(x)$$

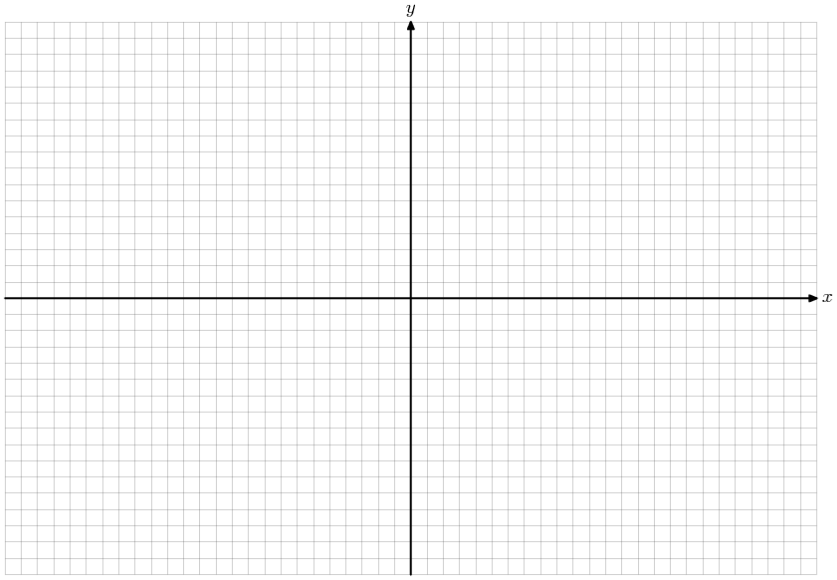
Sia z tale che

$$z(y(x)) = y'(x)$$

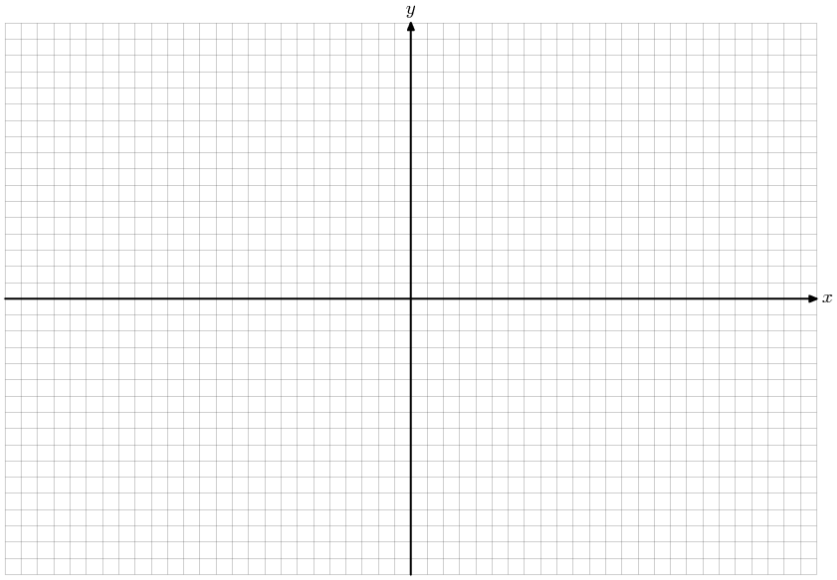
<E> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



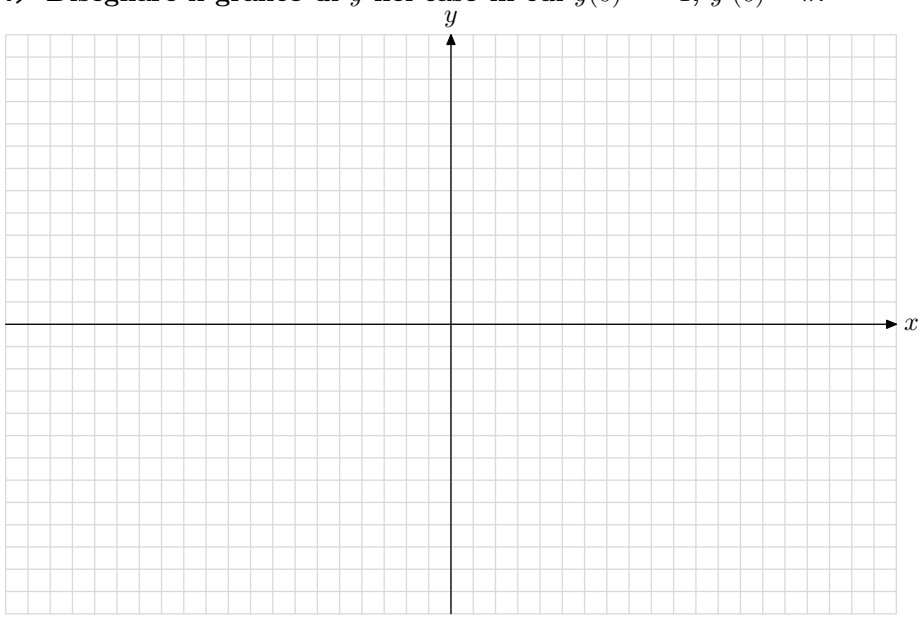
<F> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



<G> Disegnare il grafico di z nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.



<H> Disegnare il grafico di y nel caso in cui $y(0) = -1$, $y'(0) = \pi$.



Prima Prova Scritta 01/02/2006

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = ||x| + |y| - 1|$$

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Calcolare le derivate parziali di f nei punti $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

<C> Stabilire dove f è differenziabile.

<D> Calcolare le derivate direzionali di f nel punto $(0,1)$.

<E> Calcolare le derivate direzionali di f in $(2,2)$.

<F> Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(1/2,1/2)$, $(1,1)$, e $(2,2)$.

Seconda Prova Scritta 01/03/2006

Si consideri l'uguaglianza

$$f(x,y)=0 \qquad dove \qquad f(x,y)=x^3+y^5+y-x$$

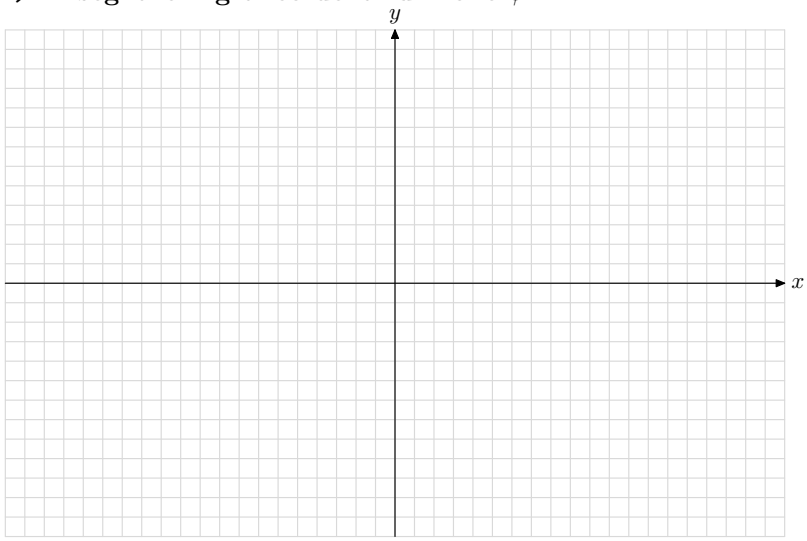
<A> Studiare la derivabilità di f e determinare il segno di $f_y(x,y)$

<B> Determinare il segno di $f(x,0)$ e di $\lim_{y\to\pm\infty} f(x,y)$

<C> Determinare il più grande intervallo della retta reale in cui $f(x,y)=0$ definisce y come funzione di $\phi(x)$

<D> Studiare crescenza e decrescenza di ϕ

<E> Disegnare il grafico della funzione ϕ



<F> Precisare il comportamento di ϕ agli estremi del campo di definizione

Terza Prova Scritta 14/03/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$\begin{cases} x(t,s,u) = t - su = t(1-u) + (t-s)u \\ y(t,s,u) = s + tu = s(1-u) + (t+s)u \\ z(t,s,u) = u \end{cases} \qquad per \quad t \in [0,1] \ , \ s \in [0,1] \ , \ u \in [0,1]$$

<A> Disegnare

$$\{(x,y,z) \in V \ : \ z = 0\}$$
$$\{(x,y,z) \in V \ : \ z = 1\}$$
$$\{(x,y,z) \in V \ : \ z = 1/2\}$$

<B> Calcolare l'area di

$$\{(x,y,z) \in V \ : \ z = k\}$$

<C> Calcolare il volume di V

<D> Calcolare lo Jacobiano $J(t,s,u)$ della trasformazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$(x(t,s,u), y(t,s,u), z(t,s,u))$$

<E> Sia $C = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, calcolare

$$\int\int\int_C |J(t,s,u)|dt$$

<F> Usando il teorema di cambio di variabili calcolare il volume di V

Quarta Prova Scritta 26/05/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \geq z \geq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di V.

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V
Si consideri poi il campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (x + 2y + z, z^2 + y, x + z)$$

<C> Calcolare il flusso del campo F attraverso ∂V

<D> Calcolare il lavoro che il campo compie lungo il cerchio di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 che giace nel piano $y = x$

Quinta Prova Scritta 15/06/2006

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2n+1} \frac{x^{3n}}{5n}$$

<A> Determinare i coefficienti ed il centro della serie.

<B> Determinare il raggio di convergenza della serie

<C> Studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

<D> Calcolare la somma della serie per $x = .1$ a meno di 0.001.

Sesta Prova Scritta 29/06/2006

Si consideri l'equazione

$$y(x) = \int_0^x ty(t)dt + \frac{x^2}{2}$$

<A> Determinare i coefficienti di una serie di potenze centrata nell'origine che risolva l'equazione data.

<B> Determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

<C> Verificare che la somma della serie trovata è

$$e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

<D> Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

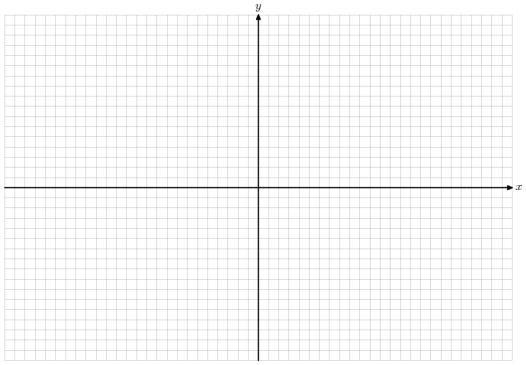
$$y'(x) = xy(x) + x$$

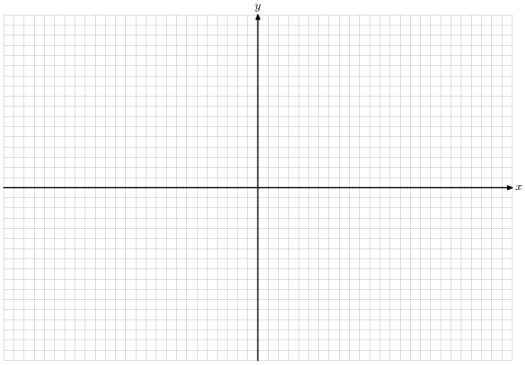
Esame Luglio 05/07/2006

Si consideri nel piano la curva γ definita da

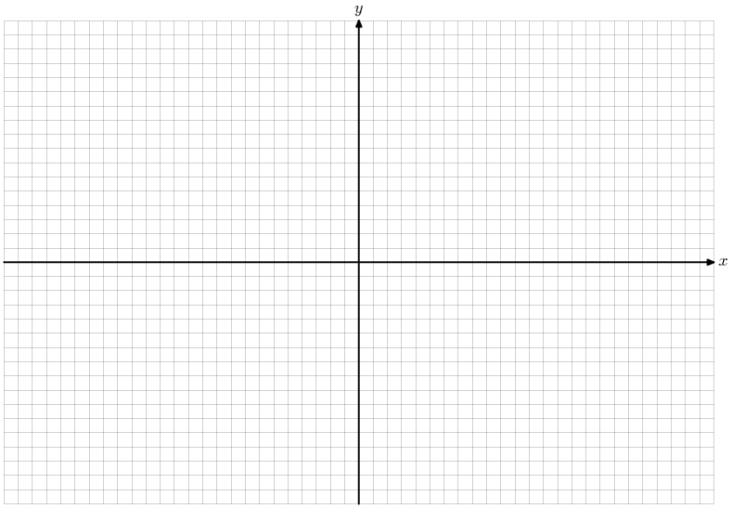
$$\begin{cases} x(t) = 2t - t^2 \\ y(t) = 3t^2 - t^3 - 2t \end{cases} \qquad per \quad t \in [0, 2]$$

<A> Disegnare il grafico di $x(t)$ e di $y(t)$





<B> Disegnare γ



<C> Calcolare l'area della parte di piano limitata definita da γ.

<D> Scrivere la parametrizzazione della superficie ottenuta traslando γ parallelamente all'asse z con $0 \leq z \leq 3$

Si consideri l'equazione

$$(x-1)^2 y''(x) + y(x) = |x-1|$$

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x > 1$.

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x < 1$

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

<H> Stabilire se esistono soluzioni derivabili 4 volte in $x = 1$

R - Prima Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \max\{1 - (|x| + |y|), 0\}$$

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Stabilire dove f è differenziabile.

<C> Calcolare le derivate direzionali di f nel punto $(0,1)$.

<D> Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(2,2)$ e $(1/3,1/3)$.

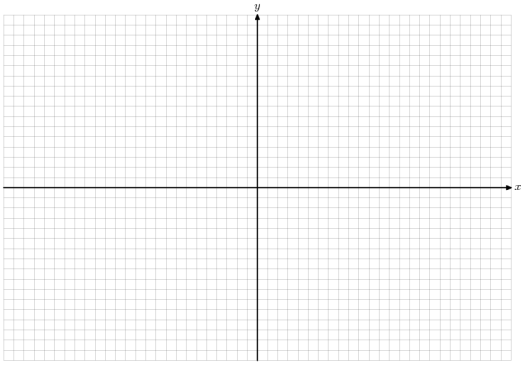
R -Seconda Prova Scritta 11/07/2006

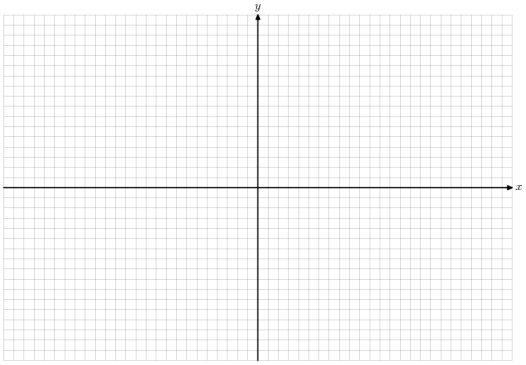
Si consideri la parte di piano γ definita dalla

$$f(x,y) = y^3 - y - x = 0$$

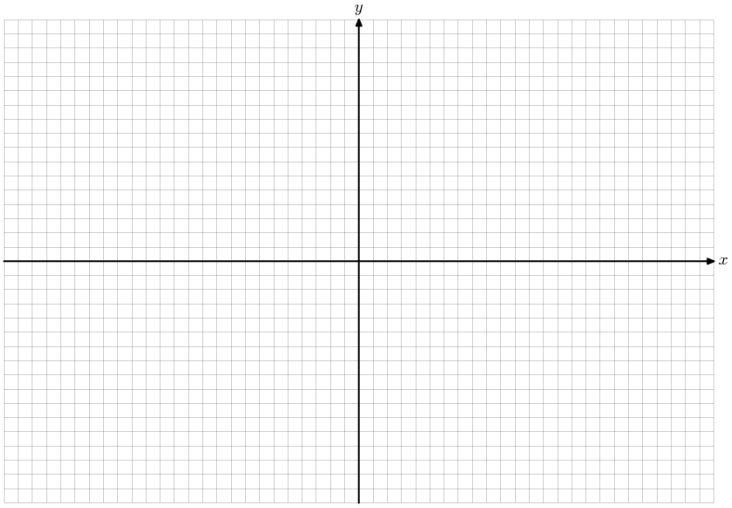
<A> Determinare le intersezioni $(x(m), y(m))$ di γ con la retta $y = mx$ al variare di m

<B> Disegnare i grafici di $x(m)$ e di $y(m)$.





<C> Disegnare γ



R - Terza Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$\begin{cases} x(t,s,u) = t\sin(s) \\ y(t,s,u) = t\cos(s) \\ z(t,s,u) = 2ut + (1-u)t \end{cases} \qquad per \quad t \in [1,2] \ , \ s \in [0,2\pi] \ , \ u \in [0,1]$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Scrivere una parametrizzazione di ∂V

<C> Descrivere i punti dello spazio definiti da V.

R - Quarta Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 1 - \sqrt{2x^2 + y^2} \geq z \geq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di V.

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V
Si consideri poi il campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

<C> Calcolare il flusso del campo F attraverso

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 1 - \sqrt{2x^2 + y^2} = z\}$$

R - Quinta Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{6n}$$

<A> Determinare i coefficienti ed il centro della serie.

<B> Determinare il raggio di convergenza della serie

<C> Studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

<D> Per $x = 0.5$, determinare n in modo che la ridotta di ordine n approssimi la somma della serie a meno di 0.01.

R - Sesta Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = xy'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<A> Determinare i coefficienti di una serie di potenze centrata nell'origine che risolva il problema di Cauchy assegnato.

<B> Determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

<C> Verificare che la somma della serie trovata è

$$y(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Esame Luglio 19/07/2006

Si consideri la parte di spazio definita da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ , \ x^2 + y^2 \geq 1\}$$

<A> Determinare il Volume di V

<B> Determinare l'area della superficie di ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, z)$$

attraverso ∂V

<D> Calcolare il vettore normale a ∂V.

Si consideri l'equazione

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

<E> Determinare una serie di potenze che rappresenti la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ precisandone il raggio di convergenza.

<F> Determinare una serie di potenze che rappresenti la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, precisandone il raggio di convergenza.

<G> Determinare l'integrale generale dell'equazione data

<H> Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2(y(x) - 1) = 0$$

Esame Settembre 14/09/2006

Si consideri la parte di spazio definita da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 - y^2 - x^2 \leq 4 \ , \ x^2 + y^2 + x \leq 1\}$$

<A> Determinare il Volume di V

<B> Determinare l'area della superficie di ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (1, 0, 1)$$

attraverso ∂V

<D> Calcolare il vettore normale a ∂V.

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = \int_0^x (t + y(t))dt + 3$$

<E> Studiare esistenza esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione data.

<F> Determinare una serie di potenze che rappresenti la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 0$.

<G> Precisare il raggio di convergenza della serie trovata al punto precedente.

<H> Determinare lo sviluppo di Taylor di $y(x)$ di ordine 5.

<I> calcolare l'ordine di infinitesimo di y in 0.

Esame Gennaio 16/01/2007

Si consideri la parte di spazio definita da

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -1 \le z \le 1 - \sqrt{y^2+x^2} \ , \ x^2+y^2+z^2 \ge 1/4 \ , \ x^2+y^2 \le 1\}$$

e sia

$$F(x,y,z) = (x,0,0)$$

<A> Determinare il Volume di V

<B> Calcolare

$$\int\int\int_V \textbf{div } F(x,y,z)dxdydz$$

<C> Calcolare il flusso di F attraverso ∂V

<D> Verificare il teorema della divergenza per il campo F sul volume V

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 2xy + y$$

<E> Stabilire se

$$f(x,y) = 0$$

definisce una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(0,0)$.

<F> Scrivere il polinomio di McLaurin di φ di ordine 2

<G> Disegnare il grafico locale di φ in 0.

<H> Determinare massimi e minimi di f in $[0,1] \times [0,1]$.

Esame Febbraio 20/02/2007

Si consideri un cilindro con generatrici parallele all'asse z che interseca il piano (x, y) lungo una circonferenza di centro l'origine e raggio 1 ed un piano passante per i punti $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 2)$.

<A> Determinare le equazioni del cilindro e del piano.

<B> Esprimere l'area $A(x)$ delimitata sulla superficie $S(x)$ del cilindro dalla curva intersezione di cilindro e piano e dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano (x, y), compresa tra i piani la cui equazione in coordinate cilindriche è $\theta = 0$ e $\theta = x$.

<C> Calcolare $A(\pi)$.

<D> Calcolare il flusso attraverso la superficie $S(2\pi)$ del campo vettoriale $(\sin(x), 0, 0)$

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{(1 - |x| - |y|)^3}{x^2 + y^2}$$

<E> Stabilire dove f è continua.

<F> Stabilire dove f è derivabile e dove è differenziabile.

<G> Disegnare il grafico della funzione definita implicitamente da

$$f(x, y) = 0$$

in un intorno di $(0.5, 0.5)$

<H> Determinare massimi e minimi assoluti di f in sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

Prima Prova parziale 08/03/2007

Per ognuna delle seguenti matrici scrivere la forma quadratica associata e stabilire se risulta definita, semidefinita, indefinita, positiva o negativa.

<A> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

<B> $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

<C> $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

<D> $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Per ciascuno dei seguenti insiemi stabilire se è aperto, chiuso, connesso per archi, convesso, limitato.

<E>

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$$

<F>

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(3, 3)\}$$

<G>

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y < 1\}$$

Per le seguenti successioni stabilire se sono convergenti ed in caso affermativo calcolarne il limite

<H>

$$P_n = (2\sin(\pi n), \cos(\pi n))$$

<I>

$$Q_n = (\frac{2}{n}\sin(\pi n), \frac{1}{n}\cos(\pi n))$$

<J>

$$R_n = (2n\sin(\pi n), n\cos(\pi n))$$

Seconda Prova parziale 22/03/2007

Sia

$$f(x,y) = \frac{x^{2n}}{y - e^x}$$

<A> Determinare il campo di definizione di f e stabilire dove è continua, derivabile e differenziabile.

<B> Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine.

<C> Determinare, se esiste il limite di f all'infinito.

<D> Stabilire se è possibile prolungare f per continuità in $(0,1)$

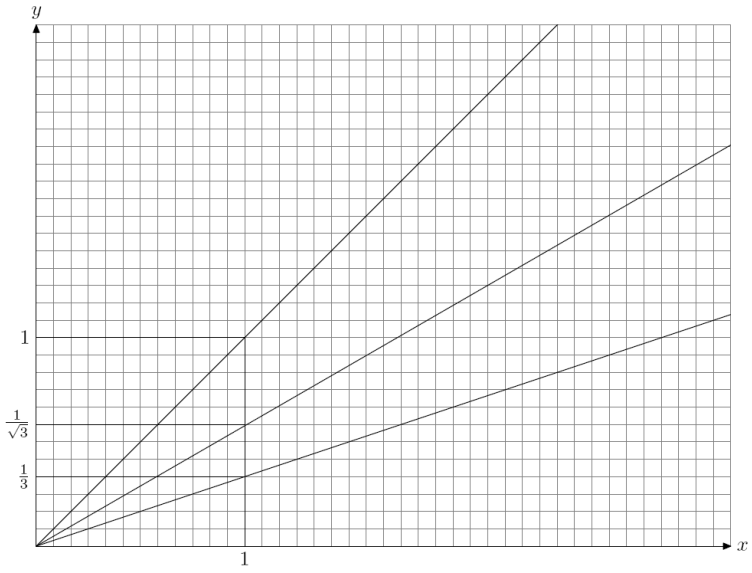
Terza Prova parziale 19/04/2007

Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = xy^3 - \frac{1}{3}x^3y \qquad , \qquad f_1(x,y) = f(x,y) - 1$$

<A> Individuare nel grafico sottostante il luogo dei punti Z del primo quadrante per cui

$$f(x,y) = 0$$

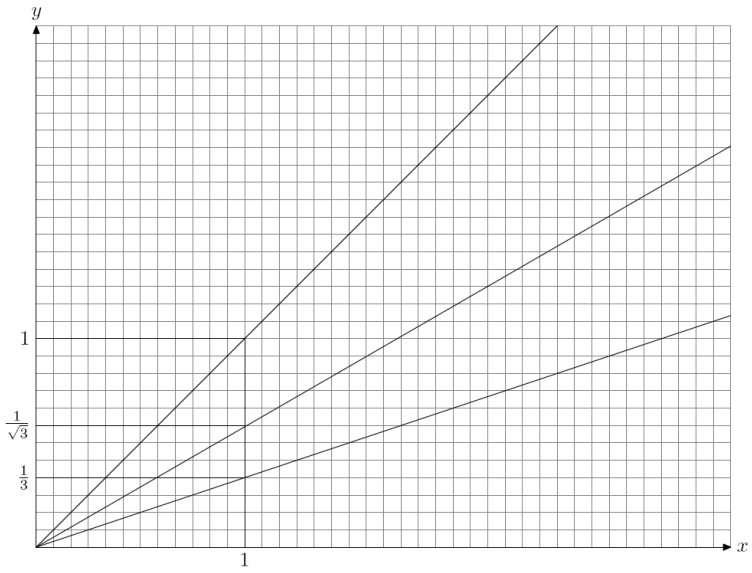


<B> Calcolare le derivate parziali di f.

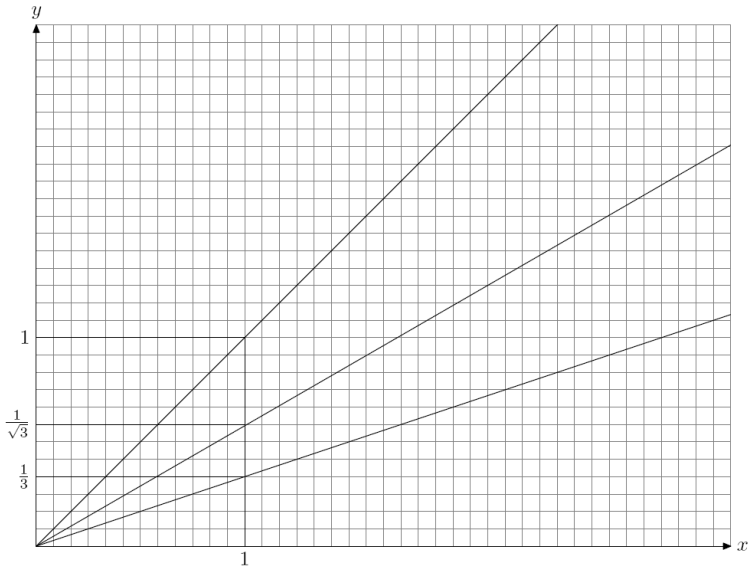
$f_x(x,y) =$

$f_y(x,y) =$

e studiarne il segno nel primo quadrante; determinare inoltre il luogo dei punti Z' del primo quadrante in cui f_x ed f_y si annullano.



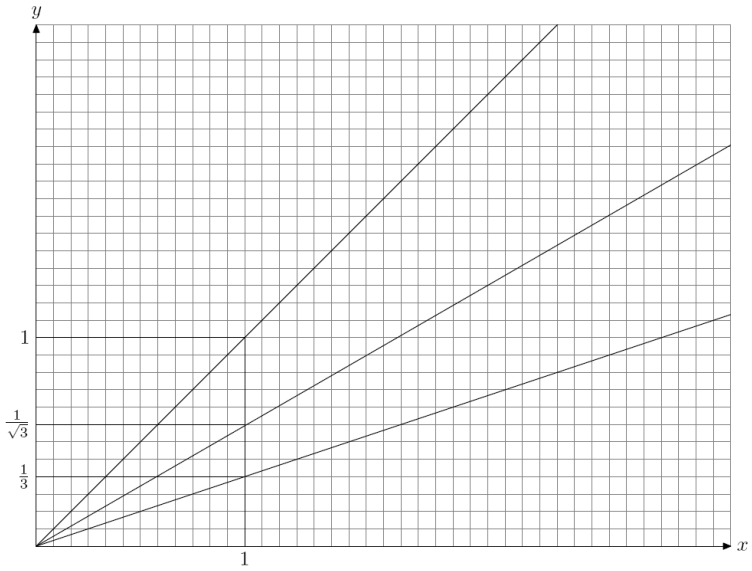
<C> Determinare il segno di f_1 su Z e su Z'.



<D> Disegnare il luogo dei punti del primo quadrante in cui

$$f_1(x, y) = 0$$

giustificando in maniera BREVE ed ESAURIENTE il disegno.



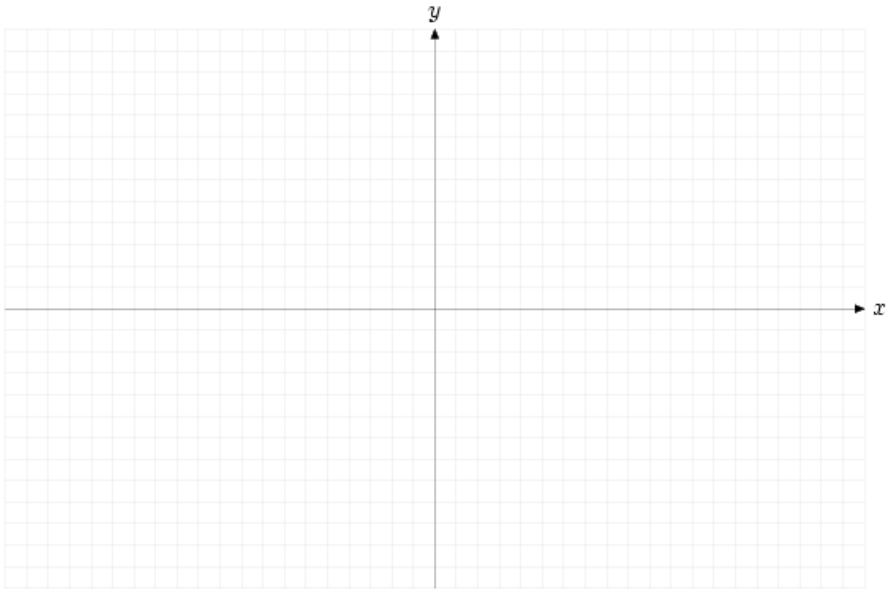
Quarta Prova parziale 03/05/2007

Si consideri la curva γ definita da

$$a(t) = \cos(3t)$$

$$\begin{cases} x(t) = a(t)\cos(t) \\ y(t) = a(t)\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

<A> Disegnare γ.



<B> Detta $\gamma/3$ la curva ottenuta considerando $t \in [-\pi/6, \pi/6]$ Stabilire se $\gamma/3$ è semplice regolare, chiusa.

<C> Si consideri la superficie piana D di cui $\gamma/3$ è frontiera nel piano. Determinare una parametrizzazione di D e calcolarne l'area

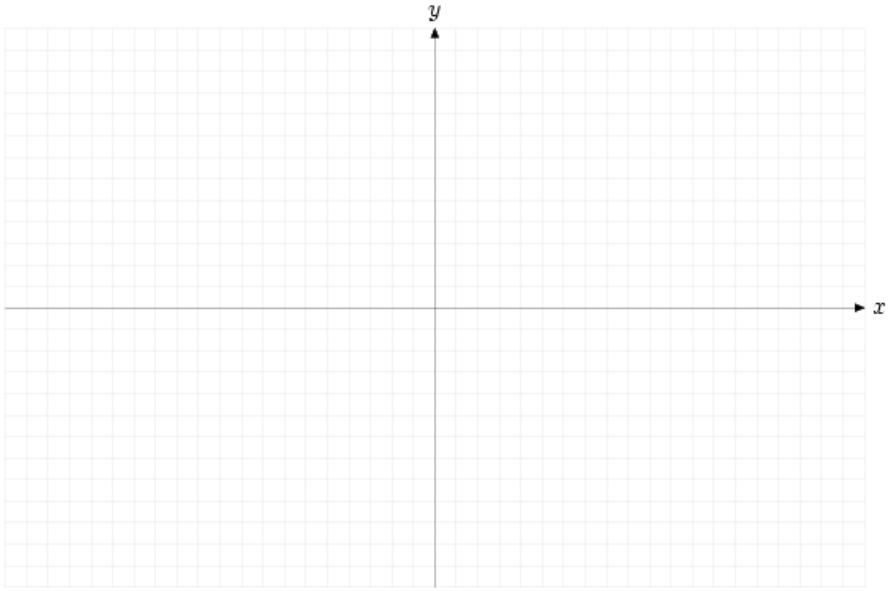
<D> Si consideri la superficie S costituita dai punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y) \in D$, e z giace sul grafico del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Determinare un parametrizzazione di S e calcolarne l'area.

<E> Calcolare il volume della parte di spazio delimitata dal piano $z = 0$ dal paraboloide $z = x^2+y^2$ e dal cilindro con asse parallelo all'asse z generato da D.

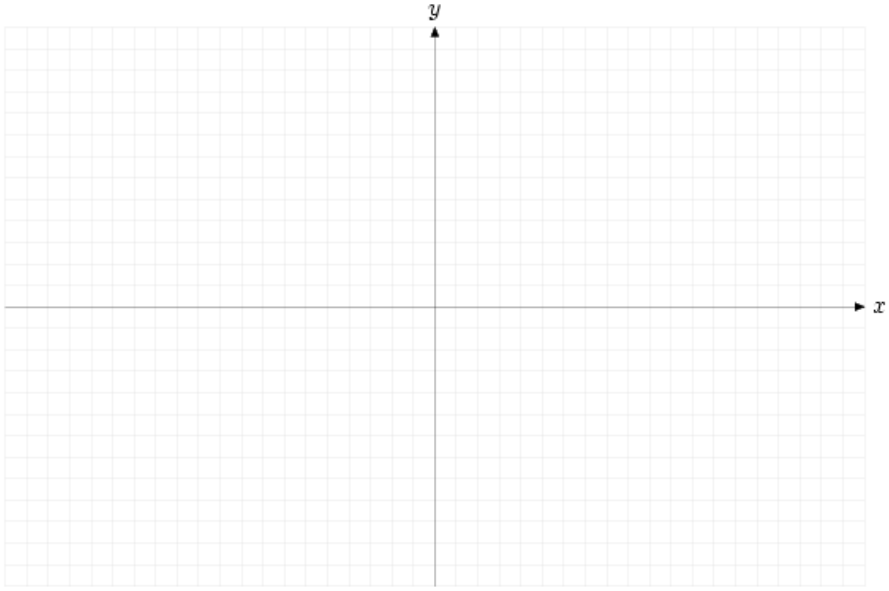
Quinta Prova parziale 17/05/2007

Si consideri la funzione $f(t) = e^t$

<A> Determinare lo sviluppo F di f in serie di Fourier di soli coseni su $[0, \pi]$ e disegnarne il grafico



<B> Determinare lo sviluppo G di f in serie di Fourier soli seni su $[0, \pi]$ e disegnarne il grafico



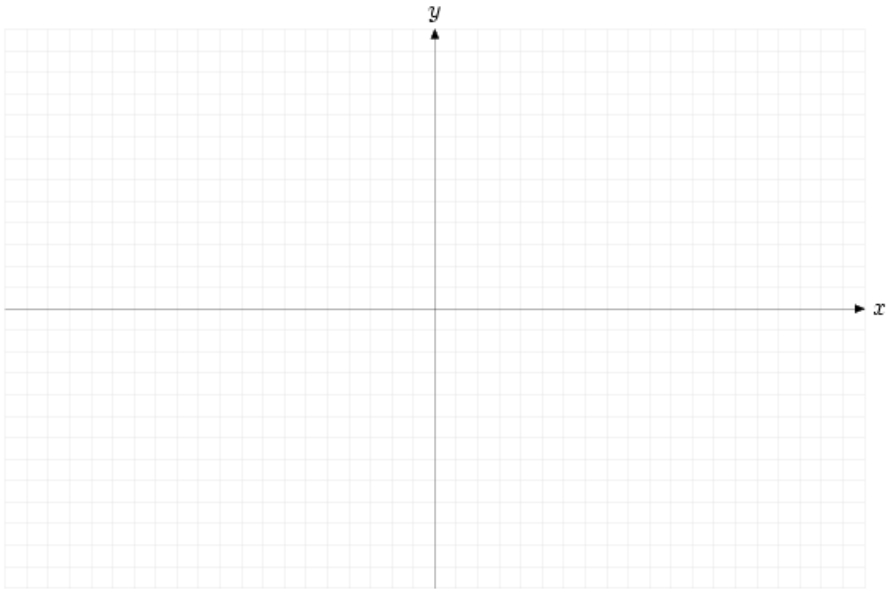
<C> Utilizzando gli sviluppi trovati verificare che $F' = G$ in $[0, \pi)$

Sesta Prova parziale 31/05/2007

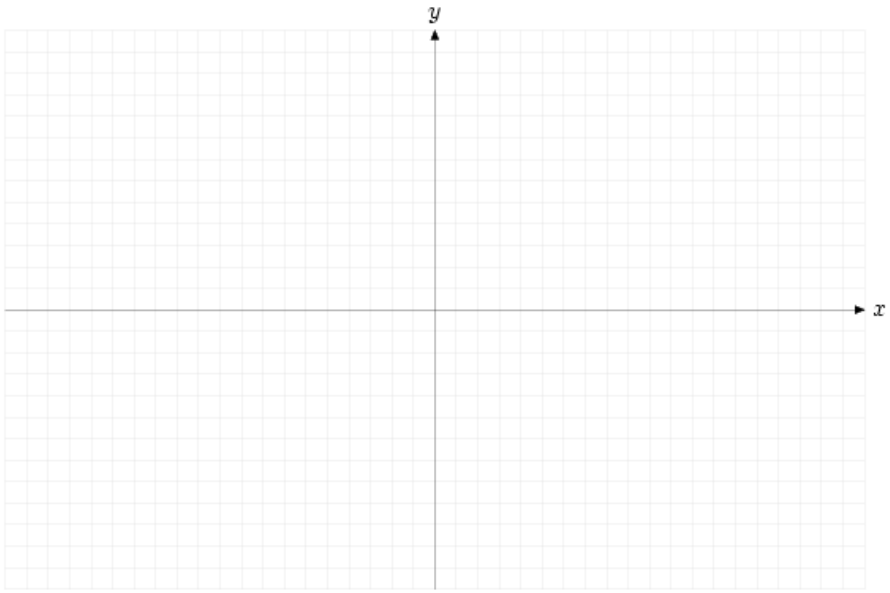
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = -\frac{y^2(x)}{\sqrt[3]{1-y^3(x)}}$$

<A> Disegnare il grafico della soluzione y dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$



<B> Disegnare il grafico della soluzione y dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1/2$.



Esame Giugno 13/06/2007

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-t^2} \sin(xt + 2)$$

<A> Verificare che f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$

<B> Calcolare la derivata prima di f

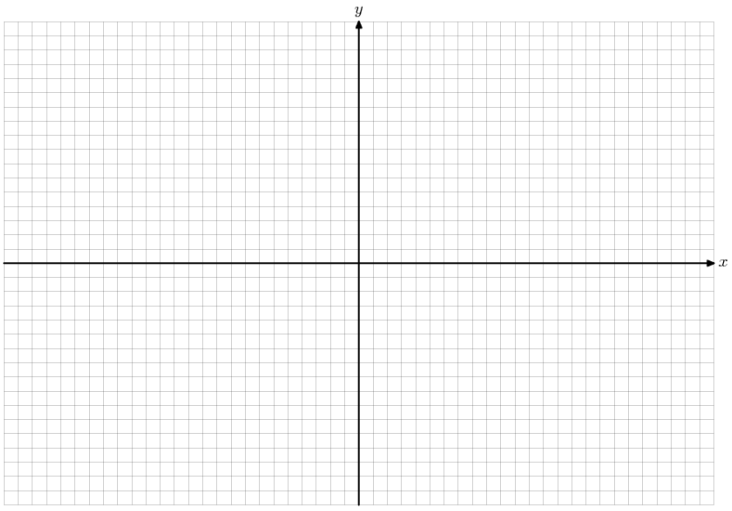
<C> Integrare per parti f' e dalla relazione ottenuta ricavare f

Si consideri l'equazione

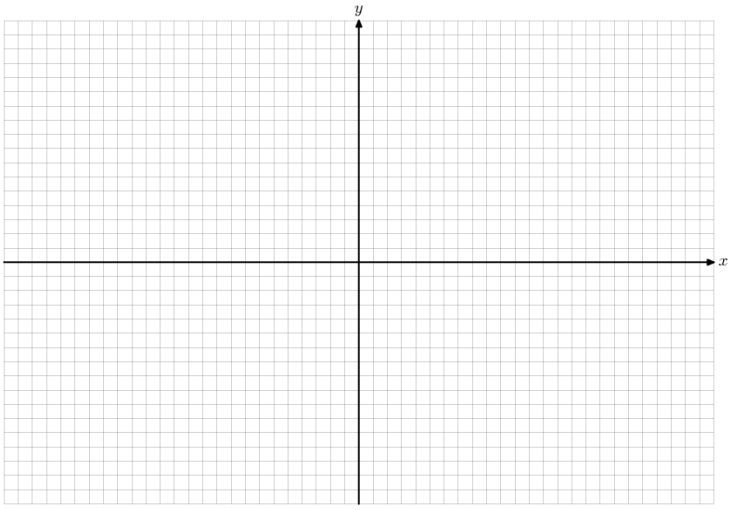
$$y'(x) = a + \int_0^{y(x)} e^{-t^2} dt$$

tale che $y(0) = 0$

<D> Per a=3 Disegnare il grafico di y



<E> Per a=1 Disegnare il grafico di y


y
x

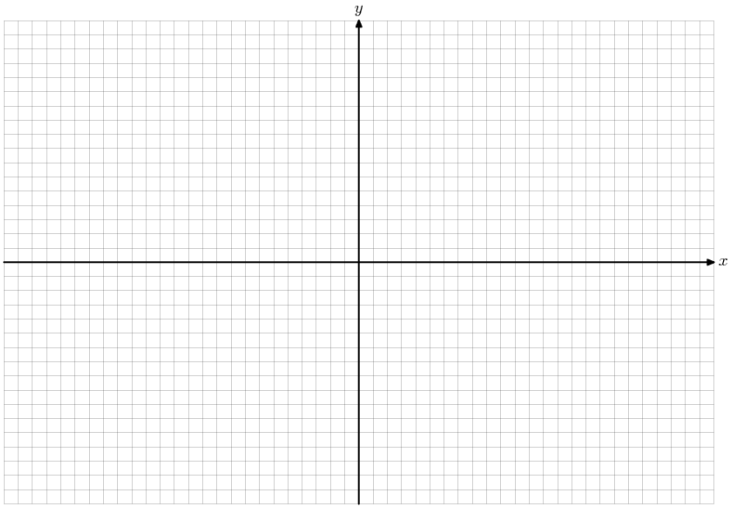
Esame Luglio 04/07/2007

Si consideri la curva γ definita da

$$\gamma : \begin{cases} t + \sin(t) \\ 1 + \cos(t) \end{cases} \qquad , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

<A> Verificare se γ è semplice e regolare

<B> Disegnare γ



<C> calcolare la lunghezza di γ

<D> Calcolare l'area delimitata dalla parte della curva γ che si ottiene per $t \in [0, \pi]$, e dagli assi coordinati.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

<E> Determinare tutte le soluzioni del sistema dato

<F> Studiare la stabilita' della soluzione nulla per il sistema dato.
Si consideri poi il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) - 2 \end{cases}$$

<G> Determinare tutte le soluzioni del sistema.

<H> Studiare la stabilita' della soluzione identicamente uguale a $(1,1)$ per il sistema.

Esame Luglio 25/07/2007

Si consideri l'insieme

$$D(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq a \ , \ y \geq b\}$$

e la funzione

$$f(a,b) = \int_{D(a,b)} \frac{xy}{4} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

<A> Stabilire per quali valori di (a,b) è definita f.

<B> Studiare f discutendo continuitá derivabilità e calcolandone una espressione esplicita .

<C> Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,0)$ rispetto alla direzione $(1,2)$.

<D> calcolare il limite di f all'infinito.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ \ddot{y}(t) = x(\dot{y}(t)) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$

<E> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema

<F> Determinare la soluzione del sistema dato.

<G> Disegnare il grafico delle soluzioni.

<H> Disegnare il grafico dell'orbita del sistema dato corrispondente alle condizioni iniziali fissate.

Esame Settembre 19/09/2007

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \sin(xy) dy$$

<A> Determinare il campo di definizione, la continuità, la derivabilià di f e calcolarne la sua derivata prima.

<B> Integrando per parti determinare una relazione tra f ed f' .

<C> Calcolare $f(0)$.

<D> Determinare esplicitamente f.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - 1 \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2x(t) + 2 \end{cases}$$

<E> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema

<F> Determinare le soluzioni del sistema dato.

<G> Disegnare il grafico delle orbite del sistema dato.

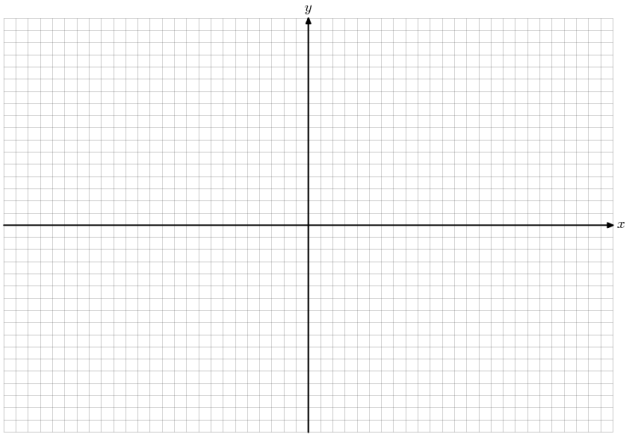
<H> Studiare la stabilità delle soluzioni costanti del sistema.

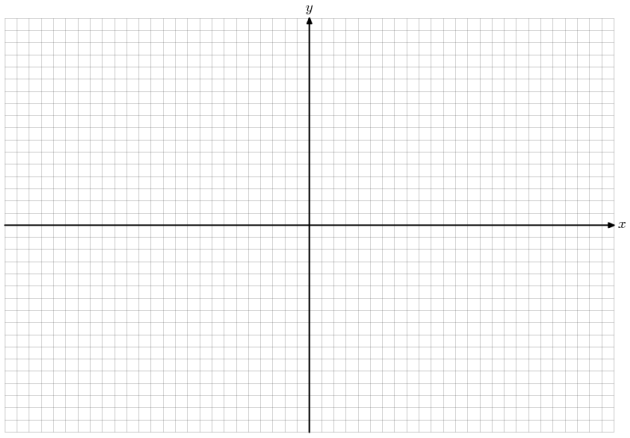
Esame Gennaio 16/01/2008

Si considerino le funzioni f e g definite su $\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ tali che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}_+$ e strettamente decrescente su $\mathbb{R}_-$,$f(0) = \frac{1}{2}$ $\lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty = \lim_{t\to+\infty} f(t)$; $\lim_{t\to-\infty} g(t) = \frac{3}{2}$, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\frac{1}{2}$, $g(-4) = \frac{1}{2}$ $g'(t) \neq 0$ per ogni t ed il luogo dei punti del piano

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = g(y)\}$$

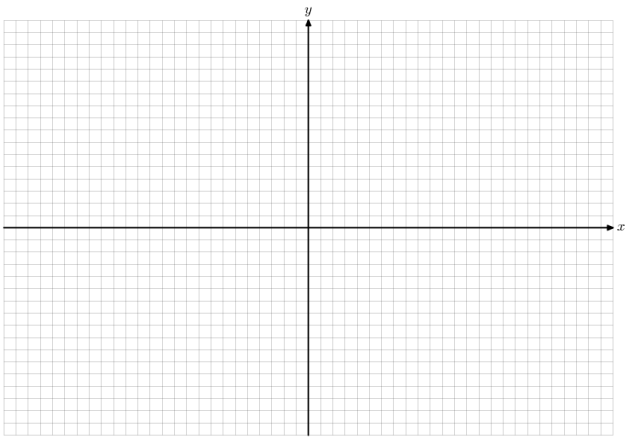
<A> Disegnare il grafico di f e di g.





<B> Verificare che G è non vuoto

<C> Verificare che G è il grafico di una funzione $y = \phi(x)$



<D> Disegnare il grafico di ϕ

Si consideri il volume definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq z \leq e^{-y^2}, 0 \leq z \leq e^{-x^2}, |x| + |y| \leq 1\}$$

<E> Verificare che V è limitato.

<F> Calcolare il volume di V

<G> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<H> Calcolare la superficie di ∂V

Esame Gennaio 30/01/2008

Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ t+1 & t > 0 \end{cases}$$

e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + f(y(x)) = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

<A> Determinarne la soluzione per $a = -1$ e $b = 0$

<B> Determinarne la soluzione per $a = 1$ e $b = 0$

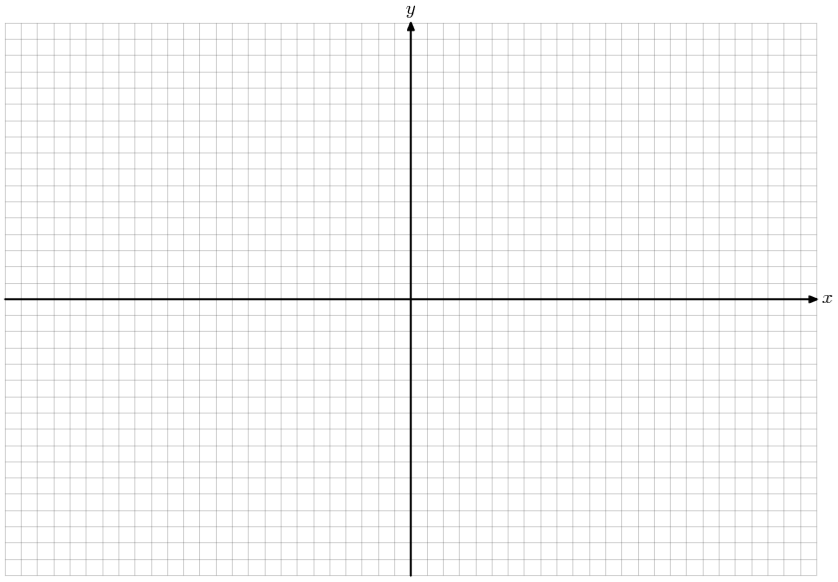
<C> Determinarne tutte le soluzioni

Si consideri la linea definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} t - t^3 \\ t^4 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

<D> stabilire se γ è semplice, chiusa, regolare.

<E> Disegnare γ



<F> Calcolare la lunghezza di γ

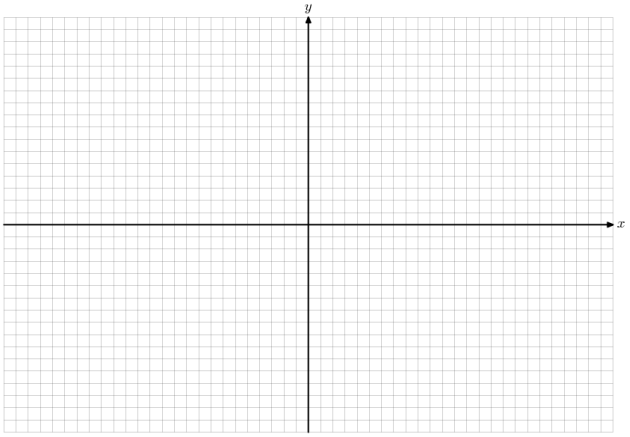
<G> Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x, y) = (x, y)$ lungo γ.

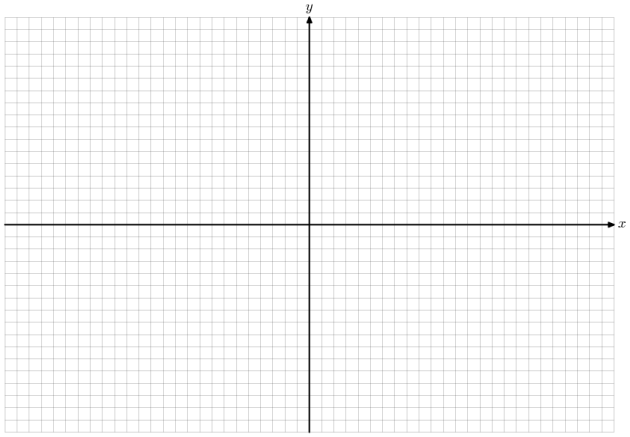
Esame Febbraio 13/02/2008

Si considerino le funzioni f e g definite su $\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}_-$ e strettamente decrescente su $\mathbb{R}_+$,$f(0) = 2$ $\lim_{t\to-\infty} f(t) = -1$, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$; $\lim_{t\to-\infty} g(t) = \frac{3}{2}$, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\frac{1}{2}$, $g(-4) = \frac{1}{2}$,s $g'(t) \neq 0$ per ogni t ed il luogo dei punti del piano

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = g(y)\}$$

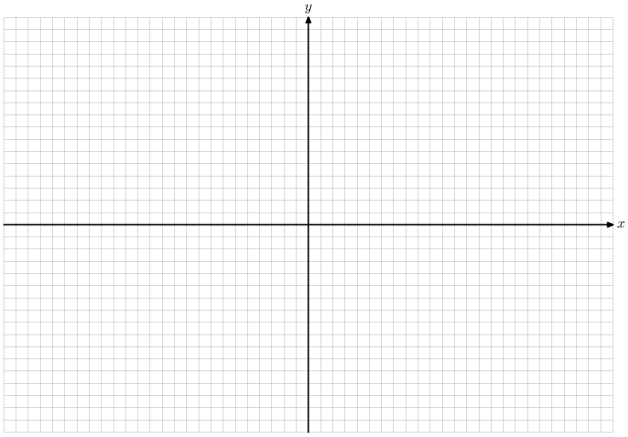
<A> Disegnare il grafico di f e di g.





<B> Verificare che G è non vuoto

<C> Verificare che G è il grafico di una funzione $y = \phi(x)$



<D> Disegnare il grafico di ϕ

Si consideri il volume definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq z \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq z \leq \frac{1}{1+y^2}, \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$

<E> Verificare che V è limitato.

<F> Calcolare il volume di V

<G> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<H> Calcolare la superficie di ∂V

Prima Prova parziale 13/03/2008

Si consideri la funzione $z = g(x)$ che assume, per $1 \leq x \leq 2$ i valori della retta per i punti $(0, 1)$ e $(3, 4)$ ed è nulla altrove.

<A> Determinare una espressione analitica della funzione $z = f(x, y)$ che si ottiene facendo ruotare g attorno all'asse z.

<B> Studiare la continuità di f.

<C> Studiare la differenziabilità di f.

Per ciascuno dei seguenti insiemi stabilire se è aperto, chiuso, connesso per archi, convesso, limitato.

<D>

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$$

<E>

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 + 3y^2 \leq 1\} \cup \{(13, 3)\}$$

<F>

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y^2 < 1\}$$

Seconda Prova parziale 03/04/2008

Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

<A> Stabilire se il sistema definisce una delle tre variabili come funzione delle altre due.

<B> Stabilire se il sistema definisce due delle tre variabili come funzione dell' altra.

<C> Stabilire se è vero che $f(x, y, z) = x + y + z$ ammette massimo e minimi assoluti su A.

<D> Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di f su A

Terza Prova parziale 17/04/2008

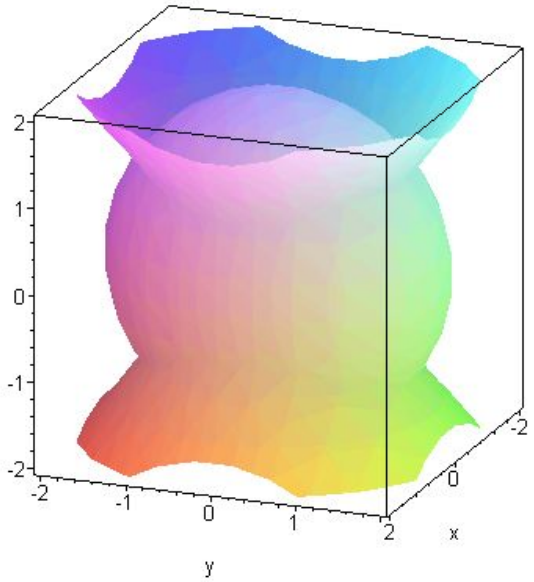
Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

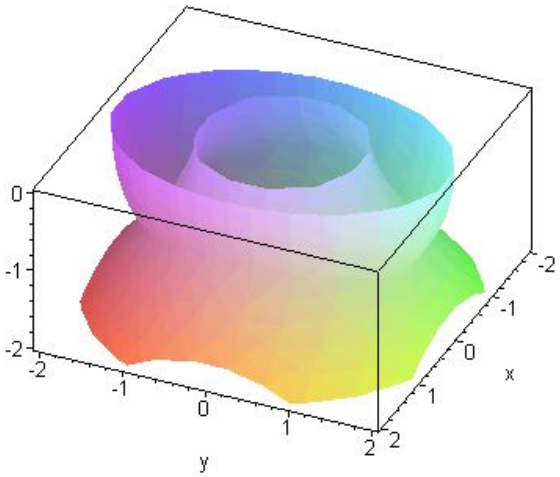
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 \leq 1 \\ 2x^2+y^2+z^2 \leq 4 \end{cases}$$

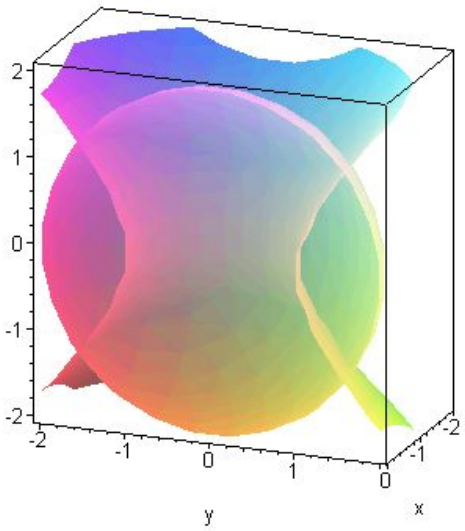
<A> Calcolare la misura di A.
Si consideri la parte B di $\mathbb{R}^3$ definita da

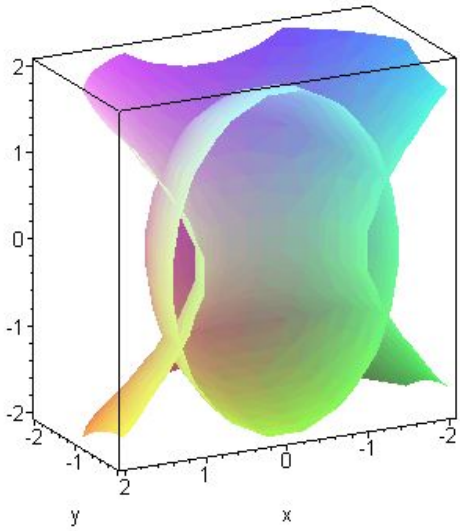
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 = 1 \\ 2x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

<B> Calcolare la misura di B






2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
0
-1
-2
y
x


2
1
0
-1
-2
-2
-1
2
1
0
-1
-2
y
x

Quarta Prova parziale 08/05/2008

Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \end{cases}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z)$$

<A> Calcolare il flusso di F attraverso ∂A.

<B> Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la curva.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases}$$

<C> Stabilire se F ammette potenziale ed, in caso affermativo, calcolare tutti i potenziali precisandone il campo di definizione.

Quinta Prova parziale 22/05/2008

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = x^4 y(x)$$

e si consideri

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$$

<A> Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data.

<B> Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data ed inoltre sia $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

<C> Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data ed inoltre sia $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

<D> Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ ed $y'(0) = 1$

Sesta Prova parziale 04/06/2008

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

<A> Determinare la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = 1$**.**

<B> Determinare la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 0$ **e** $y'(0) = 0$**.**

<C> Determinare a **in modo che la soluzione dell'equazione differenziale data tale che** $y(0) = a$ **e** $y'(0) = 0$ **sia costante.**

<D> Determinare il polinomio di McLaurin di terzo ordine delle soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ **ed** $y'(0) = 1$

Esame Giugno 11/06/2008

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-t^2} \cos(xt + \pi)$$

<A> Verificare che f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$

<B> Calcolare la derivata prima di f

<C> Integrare per parti f' e dalla relazione ottenuta ricavare f

Si consideri il problema di trovare una funzione y tale che

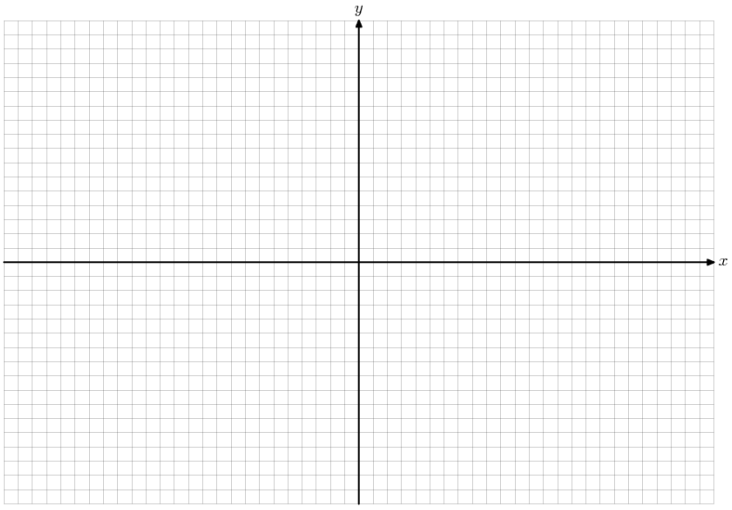
$$y'(x) = 3 + \int_0^{y(x)} \ln(1 + t^2)dt \qquad , \qquad y(0) = 0$$

<D> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato.

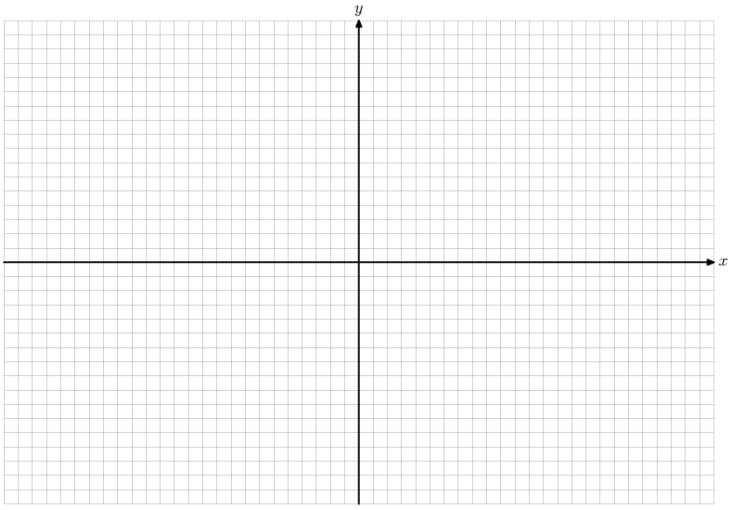
<E> Disegnare il grafico di

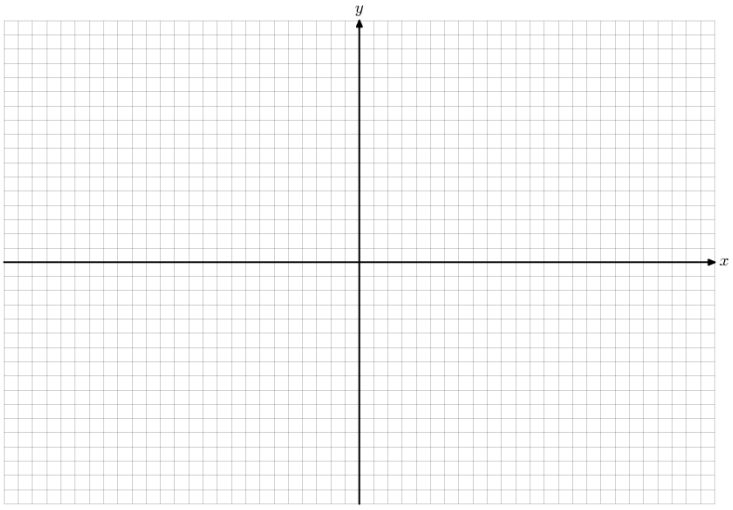
$$3 + \int_0^{y} \ln(1 + t^2)dt$$

.



<F> Disegnare il grafico delle soluzioni y del problema dato.


y
x


y
x

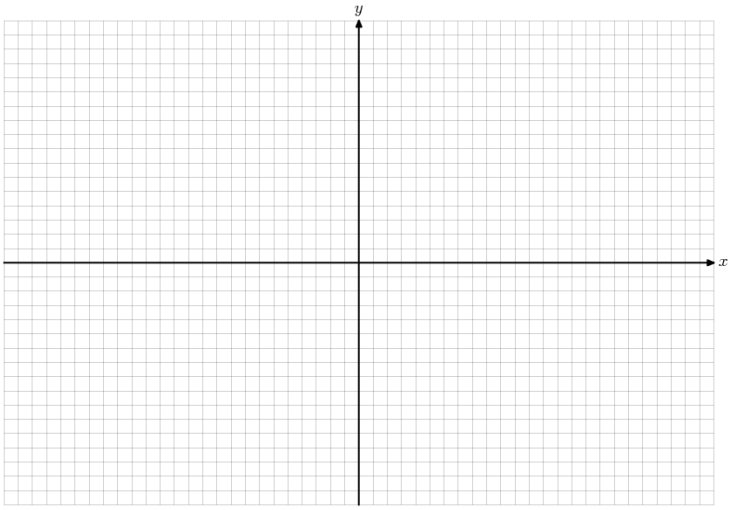
Esame Luglio 02/07/2008

Si consideri la curva γ definita da

$$\gamma : \begin{cases} t^2 - t^4 \\ t^3 \end{cases} \quad , \qquad t \in [0,1]$$

<A> Verificare se γ è semplice e regolare

<B> Disegnare γ



<C> calcolare la lunghezza di γ

<D> Calcolare l'area delimitata dalla parte della curva γ che si ottiene per $t \in [0,1]$, e dagli assi coordinati.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

<E> Determinare tutte le soluzioni del sistema dato

<F> Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema dato
Si consideri poi il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) - 1 \end{cases}$$

<G> Determinare tutte le soluzioni del sistema.

Esame Luglio 23/07/2008

Si consideri l'insieme $D(a,b)$ definito da

$$D(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \geq a^2 \ , \ 0 \leq y \leq b^2 x\}$$

e la funzione

$$f(a,b) = \int_{D(a,b)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$$

<A> Stabilire per quali valori di (a,b) e di α è definita f.

<B> Studiare f discutendo continuitá derivabilità e calcolandone una espressione esplicita.

<C> Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,0)$ rispetto alla direzione $(1,2)$.

<D> calcolare il limite di f all'infinito.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = a$, $y(0) = b$.

<E> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema

<F> Determinare la soluzione del sistema dato.

<G> Disegnare il grafico delle soluzioni.

<H> Disegnare la curva definita da $(x(t), y(t))$

Esame Settembre 17/09/2008

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x y^2 \sin(xy) dy$$

<A> Determinare il campo di definizione, la continuità, la derivabilià di f e calcolarne la sua derivata prima.

<B> Integrando per parti determinare f.

<C> Calcolare f'.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = y(t) + 2x(t) + 2 \end{cases}$$

<D> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del sistema

<E> Determinare le soluzioni del sistema dato.

<F> Disegnare il grafico della curva γ le cui equazioni parametriche sono date da $(x(t), y(t))$.

<G> Stabilire se la curva γ è semplice e se è regolare.

Esame Gennaio 14/01/2009

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2 & |x|+|y|\le 1\\ 1 & |x|+|y|>1\end{cases}$$

<A> Stabilire dove f è continua

<B> Stabilire dove f è derivabile o differenziabile

<C> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0,1)$

<D> Stabilire se f ammette massimi e minimi assoluti.

<E> Calcolare

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$$

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)=\dot{x}(t)+\dot{x}(t)^3\\ x(0)=a\\ \dot{x}(0)=b\end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

<G> Determinare le soluzioni del problema dato per $a=2$ e $b=0$.

<H> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $a=0$ e $b=2$.

<I> Disegnare il grafico delle soluzioni del problema dato.

Esame Gennaio 28/01/2009

Si consideri l'insieme A definito da

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq 1\}$$

ed il punto $P = (4, 4, 4)$.

<A> Stabilire se esistono in A punti di massima o minima distanza dal punto P

<B> Determinare, se esistono, i punti dello spazio che soddisfano

$$x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = 1$$

aventi massima o minima distanza dal punto P

<C> Determinare, se esistono, i punti dello spazio che soddisfano

$$x^2 + y^2 = 1 \ , \ 0 \leq z \leq 1$$

aventi massima o minima distanza dal punto P

<D> Determinare, se esistono, i punti di A aventi massima o minima distanza dal punto P

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \displaystyle\int_0^t \dot{x}(s)^3 ds + a \\ x(0) = b \end{cases}$$

<E> Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema dato

<F> Determinare le soluzioni del problema dato per $a = 2$ e $b = -2$.

<G> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $a = 0$ e $b = 2$.

<H> Disegnare il grafico delle soluzioni del problema dato.

Esame Febbraio 18/02/2009

Si consideri l'insieme $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq \ell\}$$
$$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z \leq 0\}$$
$$A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z - \ell)^2 \leq 1 \ , \ z \geq \ell\}$$

<A> Calcolare il volume di A

<B> Calcolare la superficie di ∂A

<C> Studiare il valore del rapporto tra Volume di A ed area di ∂A al variare di ℓ

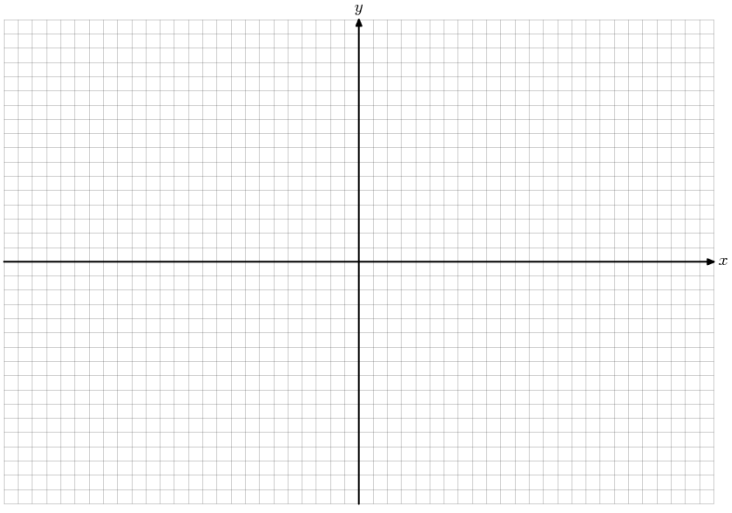
<D> Determinare, se possibile il massimo e il minimo del valore del rapporto tra Volume di A ed area di ∂A al variare di ℓ

Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

<E> Studiare la prolungabilità per continuità di f in $(0, 0)$

<F> Disegnare le curve di livello di f



<G> Posto $f(0, 0) = 6/25$, determinare in quali direzioni è derivabile f in $(0, 0)$.

<H> Calcolare massimi e minimi assoluti di f su

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \ , \ x^2+y^2 \geq 1, \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$$

<I> Calcolare $\int \int_D f(x,y)dxdy$ su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ , \ x^2+y^2 \leq 1\}$$

.

Prima Prova parziale 12/03/2009

Si consideri la funzione $\phi(t,s) = (f(t,s), g(t,s))$ definita da

$$\phi(t,s) = \begin{cases} 2t+s \\ 2t-s \end{cases}$$

<A> verificare che ϕ è lineare.

<B> Disegnare l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \exists (t,s) \in [0,1] \times [0,1] \ , \ \phi(t,s) = (x,y)\}$$

<C> Studiare la differenziabilità di ϕ e calcolarne il gradiente.

<D> Determinare e disegnare l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2 \ , \ t^2+s^2 = 1 \ , \ \phi(t,s) = (x,y)\}$$

<E> Determinare i punti tali che $f(t,s) = 0$

$$A = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(t,s) = (0,0)\}$$

<F> Determinare i punti ortogonali all'insieme A

Seconda Prova parziale 02/04/2009

Si consideri il luogo V dei punti dello spazio definiti da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2x \\ z + x = 2 \end{cases}$$

<A> Determinare il luogo P dei punti del piano $z = 0$ proiezione di V.

<B> Verificare che $(2, 0) \in P$ e scrivere l'equazione delle rette del piano (x, y) che passano per $(2, 0)$ ed hanno coefficiente angolare m.

<C> Determinare, al variare di m l'intersezione delle rette con P diversa da $(2, 0)$;

<D> Descrivere V identificando i suoi punti in funzione di m

<E> Determinare il punto di V che ha quota massima.

Terza Prova parziale 30/04/2009

Si consideri il luogo V dei punti dello spazio definiti da:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$$

<A> Verificare che se $(x_0, y_0, z_0) \in V$ allora anche $(x_0 + t, y_0, z_0 - t) \in V$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

<B> Disegnare la sezione determinata da V sui piani $x = \pm 1$.

<C> Determinare una parametrizzazione della frontiera di

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2xz \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$$

<D> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo dell'area della frontiera di W

<E> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (z, x, y)$ attraverso la frontiera di W.

Quarta Prova parziale 21/05/2009

Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^2 e^{-n(1+t^2)} dt$$

<A> Verificare che f è definita in $x = 0$.

<B> verificare che la serie delle derivate dei termini $n-$esimi è uniformemente convergente su I, e precisare I.

<C> Verificare che f è continua e derivabile su I.

<D> Determinare una espressione di f in termini di funzioni elementari.

Quinta Prova parziale 04/06/2009

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = y(x)(y'(x))^2 + y(x)y'(x)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = a$**,** $y'(0) = b$**.**

<B> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = \pi$ **e** $b = 0$**.**

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 0$ **e** $b = 1$**.**

Esame Giugno 11/06/2009

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = y(x)y'(x)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

<B> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 4$ e $b = 0$.

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 0$ e $b = -1$.
Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (\ln(1 + y), \frac{x}{1 + y}, 1)$$

<D> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso.

<E> Calcolare, dove esiste, un potenziale di F

<F> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva γ definita dalla circonferenza di centro $(10, 10, 1)$ e raggio 2 giacente nel piano $z = 1$

<G> Calcolare il flusso del campo F attraverso il cerchio giacente nel piano $z = 1$ di cui γ è frontiera.

Esame Luglio 01/07/2009

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = -y^2(x)$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale del problema dato.

<B> Determinare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ **che rappresenti la soluzione del problema dato in un intorno di** $x_0 = 0$**, precisandone il raggio di convergenza.**

<C> Determinare lo sviluppo di McLaurin di y **centrato nell'origine.**

<D> Determinare l'errore che si commette sostituendo alla soluzione del problema il suo polinomio di McLaurin di ordine 10**.**

Si consideri il luogo A **dei punti dello spazio tali che**

$$x^8 + y^8 + z^8 = 1$$

ed il punto

$$P_0 = (1, 1, 1)$$

<E> Determinare il punto di A **che ha minima distanza da** P_0

<F> Determinare il punto di A **che ha massima distanza da** P_0

<G> Stabilire, giustificando l'affermazione, se A **è un punto, una linea, una superficie o un volume in** $\mathbb{R}^3$

<H> Calcolare la misura di A**. (È sufficiente indicare le formule di riduzione che consentono di eseguire il calcolo).**

Esame Luglio 22/07/2009

Si consideri l'equazione

$$y(x) = \int_0^x y(x-t)dt$$

<A> Determinare, se esiste una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che rappresenti la soluzione del problema dato in un intorno di $x_0 = 0$, precisandone il raggio di convergenza.

<B> Determinare lo sviluppo di McLaurin di y centrato nell'origine.
Si consideri poi l'equazione

$$y(x) = \int_1^x y(x-t)dt$$

<C> supponendo che una soluzione del problema esiste, determinare il polinomio di McLaurin di ordine 2. di y

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x(y-x) - 1$$

<D> Disegnare nel piano il livello zero di f

<E> Determinare massimi e minimi relativi di f su $\mathbb{R}$

<F> Determinare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}$

<G> Calcolare le derivate direzionali nell'origine di $g(x,y) = \max\{f(x,y), 0\}$

Esame Settembre 16/09/2009

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy associato all'equazione data relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

<B> Studiare esistenza ed unicità in grande del problema di Cauchy associato all'equazione data relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

<C> Disegnare il grafico della soluzione per $a = 0$, $b = 1$.

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

<D> Disegnare nel piano le curve di livello di f

<E> Studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

<F> Studiare

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$$

<G> Stabilire se esistono ed in caso affermativo calcolare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}$

<H> Calcolare le derivate direzionali nell'origine di $g(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$

Esame Gennaio 13/01/2010

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} x^n n^x$$

<A> Determinare il campo di definizione di f

<B> Dimostrare che la serie che definisce f converge totalmente per $|x| < 0.5$

<C> Dimostrare che f è continua in $(-1/2, 1/2)$

<D> Dimostrare che f è derivabile in $(-1/2, 1/2)$ e calcolarne la derivata.

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = :\ x^2 + y^2 - z^2 \leq -1\ ,\ |z| \leq 4\}$$

<E> Calcolare il volume di V

<F> Calcolare l'area di ∂V

<G> Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ attraverso ∂V

<H> Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = :\ x^2 + y^2 - z^2 = -1\ ,\ |z| \leq 4\}$$

Esame Febbraio 03/02/2010

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 4y(x) - z(x) + f(x) \\ z'(x) = 2y(x) + z(x) + g(x) \end{cases}$$

<A> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo .

<B> Disegnare le traiettorie del sistema Omogeneo.

<C> Studiare la stabilità della soluzione nulla per il sistema omogeneo.

<D> Trovare tutte le soluzioni del sistema completo per $f(x) = 1$ e $g(x) = |x|$

<E> Calcolare la massima e la minima distanza di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z = x + 1\}$$

dall'origine.

<F> Calcolare la massima e la minima distanza di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z = x + 1\}$$

dall'origine.

<G> Calcolare la massima e la minima distanza di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z \geq x + 1\}$$

dall'origine.

<H> Calcolare la misura di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z \geq x + 1\}$$

Esame Febbraio 18/02/2010

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) - z(x) + f(x) \\ z'(x) + z(x) = g(x) \end{cases}$$

<A> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo .

<B> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo che sono limitate su $\mathbb{R}_+$.

<C> Trovare tutte le soluzioni del sistema completo per $f(x) = 1$ e $g(x) = e^x$

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , x^2 + z^2 \leq 1 \ , y^2 + z^2 \leq 1\}$$

<D> Calcolare il volume di V

<E> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<F> Calcolare l'area di ∂V

<G> Dimostrare che V è contenuto nel cubo $[0, 1]^3$

Prima Prova parziale 12/05/2010

Si considerino le funzioni

$$\begin{cases} f(x,y,z) = z^2 - (1 + x^2 + y^2) \\ g(x,y,z) = x^2 + z^2 - 2 \end{cases}$$

Rispondere a (almeno) 4 delle seguenti domande.

<A> Calcolare il volume del solido V definito in $\mathbb{R}^3$ dalle disuguaglianze

$$f(x,y,z) \geq 0 \quad , \quad g(x,y,z) \leq 0$$

<B> Calcolare l'area della superficie S definita da

$$f(x,y,z) = 0 \quad , \quad g(x,y,z) \leq 0$$

<C> Calcolare l'area della superficie T definita da

$$f(x,y,z) \geq 0 \quad , \quad g(x,y,z) = 0$$

<D> Calcolare la lunghezza della linea γ definita da

$$f(x,y,z) = 0 \quad , \quad g(x,y,z) = 0 \quad , \quad x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0$$

<E> Studiare l'esplicitabilità dell'equazione

$$f(x,y,z) = 0$$

<F> Studiare l'esplicitabilità del sistema di equazioni

$$f(x,y,z) = 0 \ , \ g(x,y,z) = 0$$

<G> Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (2x, -y, -z)$ attraverso S

<H> Calcolare il lavoro del campo $F(x,y,z) = (2x, -y, -z)$ lungo γ

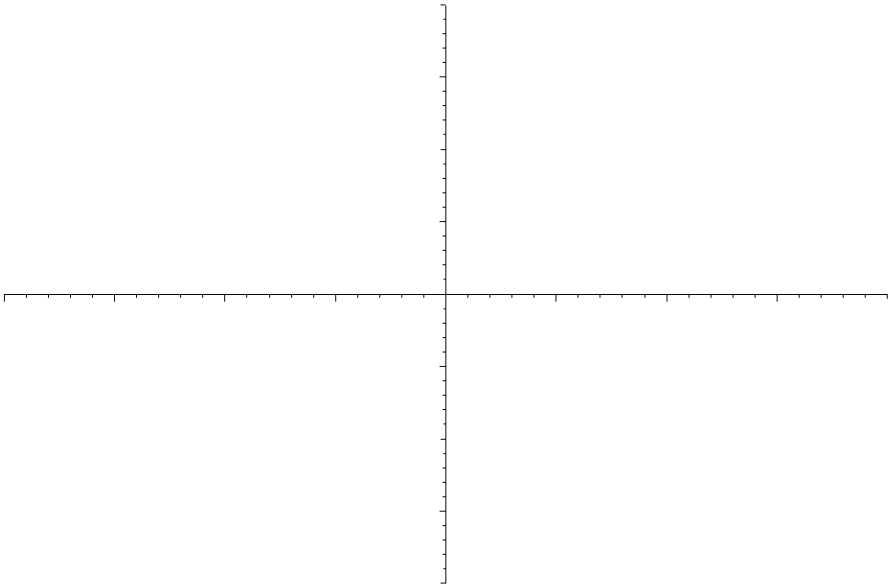
<I> Calcolare, se esiste un potenziale di F

Seconda Prova parziale 07/06/2010

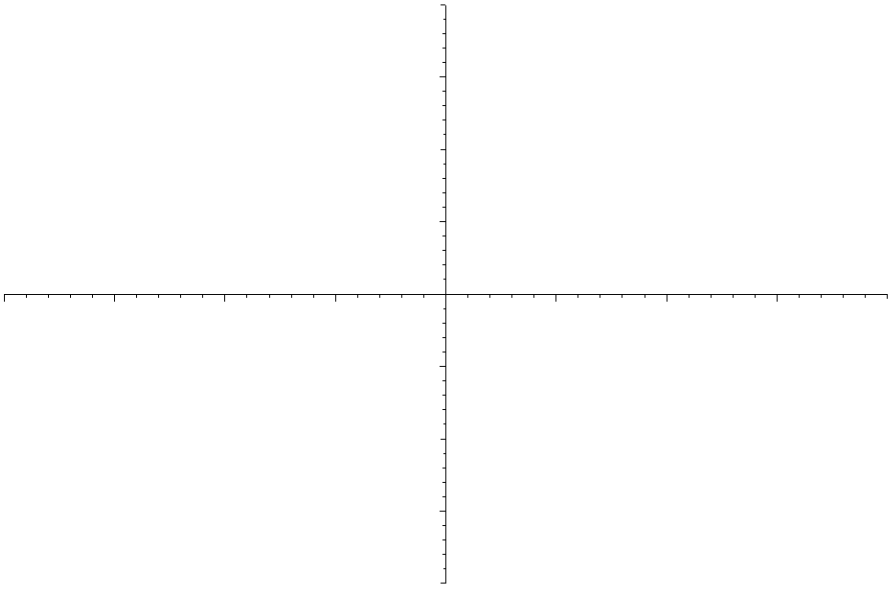
Si considerino il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)(y(x) + y'(x)) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = z_0 \end{cases}$$

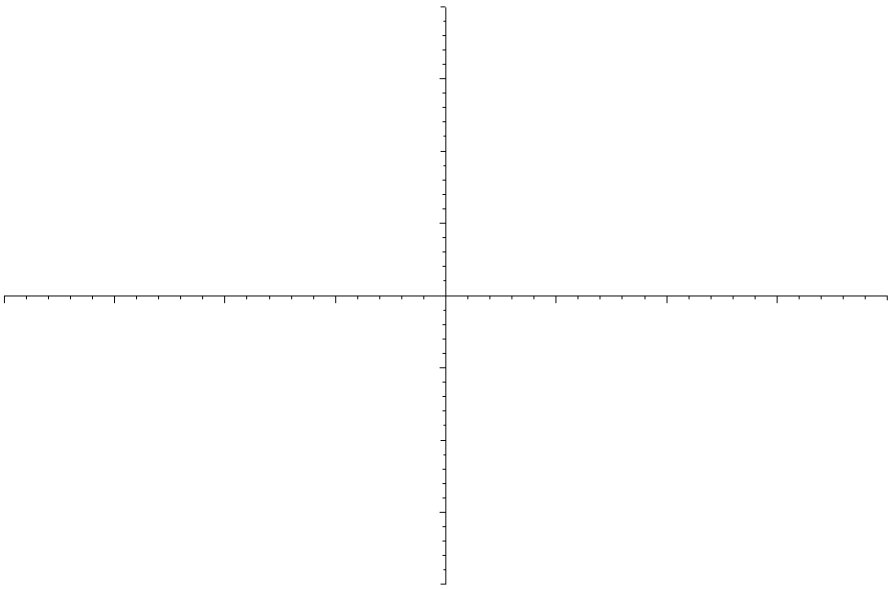
<A> Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 0$ e $z_0 = 3$



<B> Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 0$ e $z_0 = -3$



<C> Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 1$ e $z_0 = 0$



Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = |x| y'(x) - y(x)$$

<D> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x > 0$.

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x < 0$.

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x \in \mathbb{R}$.
Si consideri

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 \leq y\} \qquad , \qquad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y^2 + z^2 \leq x\}$$

<G> Calcolare il volume di $V_1 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : y \leq 4\}$

<H> Determinare una parametrizzazione di $\partial \left(V_1 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : y \leq 4\} \right)$
Si Consideri poi

$$V = V_1 \cup V_2$$

<I> Calcolare il volume di V

<J> Dimostrare che V è contenuto nel cubo $[0, 1]^3$

Esame Giugno 29/06/2010

Si consideri il problema

$$y''(x) = b + \int_a^x y'(t)dt$$

<A> Determinare tutte le soluzioni del problema per $a = 3$, $b = 0$.

<B> Determinare tutte le soluzioni del problema al variare di a e b.

<C> Detta $y(x, a, b)$ la soluzione del problema; verificare che y è una funzione lineare nelle variabili (a, b)

Si consideri

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1\} \qquad , \qquad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, x, x)$$

<D> Calcolare il flusso di F attraverso ∂V dove $V = V_1 \cap v_2$

<E> Calcolare il lavoro di F lungo la linea definita da $\partial V_! \cap \partial V_2$

<F> Dimostrare che V è contenuto nel cubo $[0, 1]^3$

Esame Luglio 20/07/2010

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''''(x) = y(x)$$

<A> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

<B> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

<C> Verificare che la soluzione y dipende linearmente dai dati iniziali.

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 \leq 1 \ : \ 0 \leq z \leq 1\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, z + x)$$

<D> Calcolare il flusso di F attraverso ∂V

<E> Calcolare il lavoro di F lungo la linea definita da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \ : \ z = 1\}$$

<F> Verificare il teorema della divergenza per F su V.

Esame Settembre 14/09/2010

<A> Determinare l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di grado minimo che abbia come soluzioni $\sin x$ **ed** e^x

<B> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione trovata al punto precedente.

<C> Determinare l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di grado minimo che abbia come soluzioni $\sin x$ **,** e^x **e** $\cos x$

<D> Determinare un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, diversa dalla precedente, che abbia come soluzioni $\sin x$ **,** e^x **e** $\cos x$

Si consideri

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{4n}$$

<E> Determinare il campo di definizione di f**.**

<F> Determinare N **in modo che** $\sum_0^N \frac{(-1)^{3n}}{4n}$ **approssimi** $f(-1)$ **a meno di** 0.01

<G> Sviluppare f **in serie di potenze con centro in** $x = 0$

<H> Determinare una espressione di f **in termini di funzioni elementari.**

Esame Gennaio 11/01/2011

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y) = \left(\alpha x + \frac{\beta x + \gamma y}{x^2 + y^4 - 1}, \alpha y + \frac{2\beta y^3}{x^2 + y^4 - 1}\right)$$

<A> Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ F è conservativo.

<B> Determinare, ove possibile, un potenziale di F

<C> Determinare, ove possibile, tutti i potenziali di F

<D> Calcolare $\int_\gamma F$ essendo γ la curva definita da $x^2 + 2y^2 = 20$

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^n}{n}\right)$$

<E> Determinare il campo di definizione di f.

<F> Studiare la continuità di f

<G> Studiare la derivabilità di f

<H> Studiare convergenza puntuale uniforme e totale della serie che definisce f

Esame Gennaio 25/01/2011

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-1)^2 y''(x) = 3(x-1)y'(x) - 5y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

<A> Stabilire se e dove la soluzione esiste ed è unica

<B> Determinare tutte le soluzioni.

<C> Studiare la prolungabilità delle soluzioni trovate

Si consideri la superficie $S = S_1 \cup S_2$ definita da

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = a \ , \ 0 \le z \le a\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0 \ , \ a \le z\}$$

<D> Calcolare l'area di S_1

<E> Calcolare l'area di S_2

<F> Calcolare le coordinate del baricentro di S.

Esame Febbraio 08/02/2011

Si consideri la funzione

$$f(x,a)=\int_0^a e^{-x^2t^2}dt$$

<A> Stabilire il campo di definizione di f

<B> Stabilire per quali $a\in\mathbb{R}$, $\phi(\cdot)=f(\cdot,a)$ è sviluppabile in serie di Taylor centrata in $x_0=0$

<C> Approssimare $f(x,1)$ con un polinomio di grado 5

<D> Stimare l'errore commesso nella precedente approssimazione per $|x|<1|$

Si consideri l'insieme

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 1\ ,\ x^2+y^2-2x\le 0\}$$

<E> Disegnare l'insieme A e determinarne, disegnandolo altresì , il suo trasformato nel piano (θ,ρ) essendo (θ,ρ) le usuali coordinate polari.

Siano P e Q le intersezioni delle due circonferenze che definiscono A e siano r ed s le semirette che partono dall'origine e passano per P e Q. Si consideri l'insieme B definito dalla parte di A che é interna all'angolo (minore tra i due) che formano le semirette r ed s.

<F> Disegnare B nel piano (x,y) e nel piano (θ,ρ).

<G> Calcolare l'area di B.

<H> Calcolare le coordinate del baricentro di B.

Prima Prova parziale 12/05/2011

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 \geq x^2 + y^2 - 1 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

Rispondere a (almeno) 4 **delle seguenti domande.**

<A> Determinare la proiezione di V **sul piano** $z = 0$

<B> Determinare la proiezione di V **sul piano** $y = 0$

<C> Determinare la proiezione di V **sul piano** $x = 0$

<D> Calcolare il volume di V

<E> Calcolare l'area della superficie ∂V

<F> Determinare massimi e minimi assoluti di $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ **su** V

<G> Determinare una parametrizzazione della linea

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = x^2 + y^2 - 1 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

<H> Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, 0, z)$ **attraverso** ∂V

Seconda Prova parziale 06/06/2011

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} t\dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = tx(t) + ty(t) \end{cases}$$

<A> Determinare una regola di ricorrenza per a_n, b_n in modo che

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad e \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

siano soluzioni per il sistema dato

<B> Determinare condizioni in grado di identificare completamente a_n, b_n in modo che x e y siano soluzioni del sistema dato

<C> Determinare il raggio di convergenza delle serie che definiscono x e y

<D> Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema che possono essere scritte come serie di potenze centrate in 0.

Esame Giugno 14/06/2011

Si consideri l'equazione

$$xy'(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{t} dt$$

<A> Ridurre l'equazione ad una equazione differenziale lineare del secondo ordine.

<B> Verificare che $y(x) = x$ è soluzione dell'equazione.

<C> Determinare una seconda soluzione dell'equazione nella forma $y(x) = xz(x)$.

<D> Scrivere l'integrale generale dell'equazione per $x > 0$

<E> Determinare le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t,s) = s\cos(t) + 2(1-s)\cos(t) \\ y(t,s) = s\sin(t) + 2(1-s)\sin(t) \\ z(t,s) = \dfrac{t}{2\pi} \end{cases}$$

per $t \in [0, 2\pi]$ ed $s \in [0, 1]$,

<F> Calcolare il vettore normale alla superficie S

<G> Calcolare l'area di S

<H> Calcolare la lunghezza di di ∂S

<I> Calcolare il volume del solido V delimitato pal piano $z = 0$, dai cilindri $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 4$ e da S

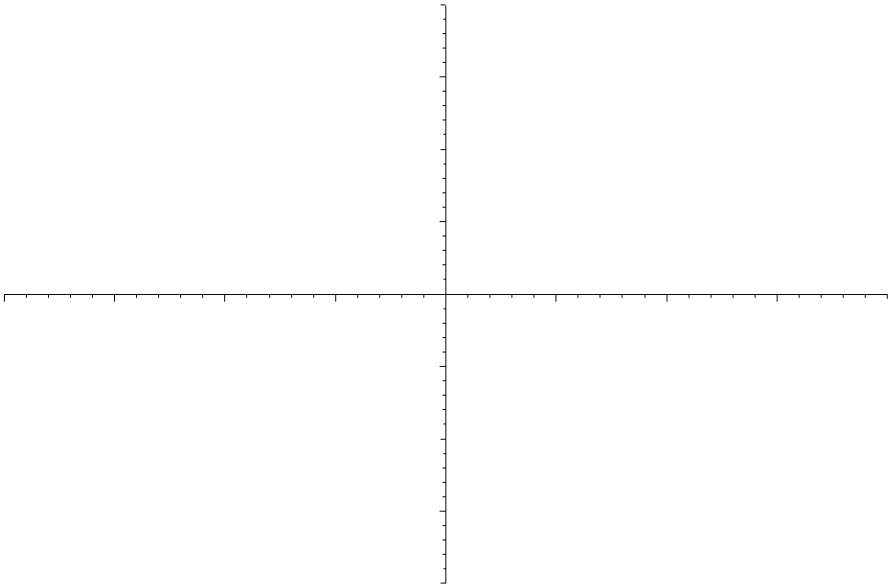
<J> Dimostrare che V è contenuto nel cubo $[-2, 2]^3$

Esame Giugno 28/06/2011

Si consideri la curva γ definita dalle

$$\begin{cases} x(t) = (t^2-1) \\ y(t) = (t^2-1)(t^2-4)t \end{cases} \qquad t \in [-2,2]$$

<A> Disegnare la traccia di γ



<B> Verificare che γ è chiusa e calcolare l'area delimitata da γ

<C> Determinare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si annulli in tutti e soli i punti di γ

<D> Determinare le equazioni di una curva giacente sul piano $z = x + y$ la cui proiezione sul piano $z = 0$ sia γ

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} w'(x) = z(x) \\ w''(x) = u(x) \\ w'''(x) = v(x) \\ w^{iv}(x) = 2u(x) - w(x) \end{cases}$$

<E> Determinare tutte le soluzioni del sistema dato

<F> Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni e scrivere una matrice fondamentale per il sistema.

<G> Determinare una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti equivalente al sistema dato

<H> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione trovata.

Esame Luglio 12/07/2011

Si consideri la funzione

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

<A> Decomporre φ in fratti semplici.

<B> Determinare tutte le primitive di φ

<C> Determinare lo sviluppo in serie di potenze centrata nell'origine di φ

<D> Determinare lo sviluppo in serie di potenze centrata nell'origine di $\int_0^x \varphi(t)dt$ e studiarne il raggio di convergenza.

<E> Usando lo sviluppo trovato al punto precedente determinare un numero razionale che approssimi $\ln(10)$.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) \\ \dot{y}(t) = y(t)x(t) \end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità delle soluzioni del sistema dato

<G> Sia $x(t)$ ed $y(t)$ la soluzione del sistema dato tali che $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$; verificare che se x_0 ed y_0 non sono nulli allora x ed y sono localmente invertibili.

<H> Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che definisce y in funzione di x, cioè sia

$$y = \varphi(x)$$

in modo che si abbia

$$y(t) = \varphi(x(t))$$

Usando la regola di derivazione della funzione composta, calcolare $\dot{y}(t)$ in funzione di $\varphi'(x)$ e di $\dot{x}(t)$

<I> Usando il risultato precedente e le equazioni del sistema dato determinare un problema di Cauchy per φ e risolverlo.

Esame Settembre 13/09/2011

Si consideri la superficie S le cui equazioni parametriche sono date da

$$\begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = 2s(1-t^2) + t^2 - 1 \\ z(t,s) = 2s - 1 \end{cases} \qquad t \in [-1,1] \ , \ s \in [-1,1]$$

<A> Stabilire se S è limitata ed in caso affermativo determinare una sfera che contiene S

<B> Calcolare l'area della superficie di S

<C> Stabilire se é vero che S è il grafico di una funzione f rispetto alle variabili (x, y).

<D> Nel caso in cui la risposta al punto precedente sia affermativa, calcolare il massimo di f
Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n + \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{b}{x}\right)^n$$

<E> Determinare il campo di definizione di f

<F> Determinare una funzione razionale fratta g che coincida con f dove f è definita

<G> Per $a = 2$ e $b = 1$ Calcolare $f(1.5)$ a meno di 10^{-100}

Esame Gennaio 10/01/2012

Si consideri il volume V definito dalle seguenti disuguaglianze in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} z \leq 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq (x-1)^2 + y^2 \end{cases}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Calcolare l'area della superficie di ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x,y,0)$ attraverso ∂V

<D> Determinare tutti i potenziali di F precisando dove sono definiti.
Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = e^{xy} - y + x$$

<E> Studiare il campo di definizione, la continuità e la differenziabilità di f.

<F> Scrivere, se esiste, il piano tangente al grafico di f nell'origine.

<G> Scrivere, se possibile, il polinomio di McLaurin di f nell'origine.

<H> Determinare massimi e minimi assoluti e relativi di f

<I> Calcolare $\int_D f(x,y)dxdy$ essendo D il triangolo di vertici $(0,0),(0,1),(1,0)$

<J> Calcolare $\int_E f(x,y)dxdy$ essendo E definito da $x \in [1+\infty)$ $y \leq 1/x^2$

Esame Gennaio 24/1/2012

Si consideri il volume V definito dalle seguenti disuguaglianze in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} |y| \leq \max\{1, 1/x^2\} \\ |z| \leq 1 \end{cases}$$

<A> Stabilire se V è limitato e se è chiuso.

<B> Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x, y, z) = z$ su V.

<C> Calcolare il volume di V

<D> Calcolare l'area della superficie di ∂V

Si considerino le funzioni definite da

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad , \quad g(x, y) = x^3 + y^3 \quad , \quad h(x, y) = x^6 + y^6 - 1$$

<E> Determinare massimi e minimi assoluti di f vincolati ad $h = 0$

<F> Determinare massimi e minimi assoluti di g vincolati ad $h = 0$

<G> Disegnare nel piano il luogo dei punti definito da $h(x, y) = 0$

<H> Determinare una rappresentazione parametrica della curva definita da $h(x, y) = 0$

Esame Febbraio 07/02/2012

Si consideri l'insieme

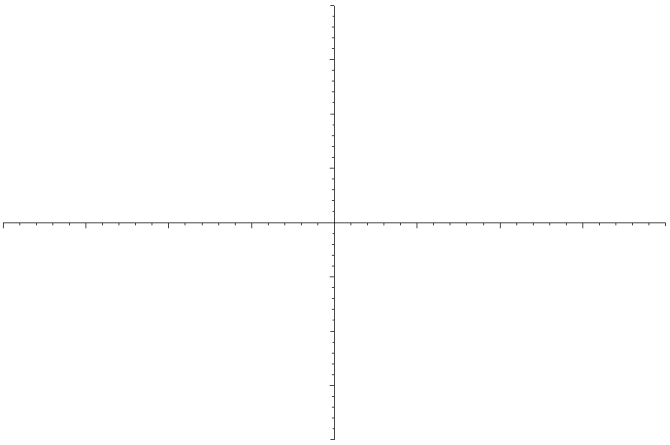
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy = 1\}$$

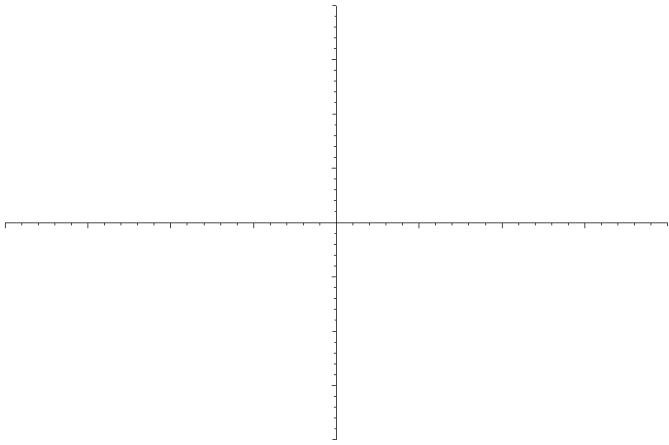
<A> Stabilire se si tratta di un volume. di una superficie, di una curva o di altro, se V è limitato e se è chiuso.

<B> Determinare la sua proiezione W sul piano $z = 0$

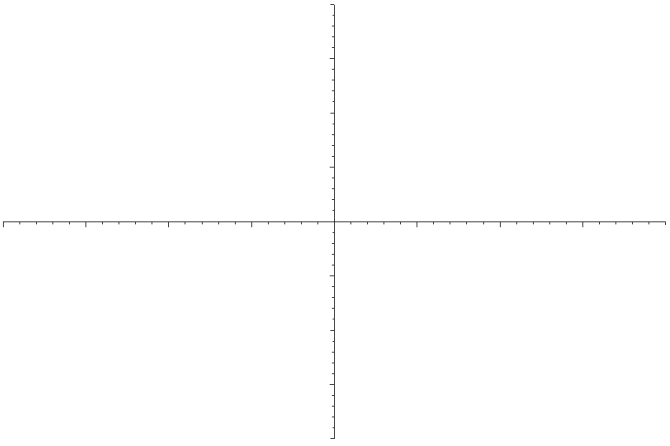
<C> Determinare le intersezioni della retta $y = m(x-1)$ con W verificando che sono sempre due una delle quali coincidente con $(1, 0)$

<D> Disegnare il grafico delle due funzioni che forniscono le coordinate del punto di intersezione non costante al variare di m





<E> Disegnare la curva che ha per equazioni parametriche le due funzioni di cui al punto precedente.



Si considerino la funzione lineare definita da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ mediante la

$$F(x,y) = (x - \frac{1}{2}y, y)$$

<F> Determinare una matrice A 2×2 tale che $F(x,y) = A \cdot (x,y)^t$ (indichiamo con ^{t} l'operazione di trasposizione)

<G> Determinare $F(1,0)$, $F(0,1)$, $F(1,1)$

<H> Determinare $F(Q)$ dove Q è il quadrato $[0,1] \times [0,1]$
Si consideri poi

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - xy - 1 = 0\}$$

<I> Determinare $F(E)$ (si consiglia di completare i quadrati e tener conto di quanto precedentemente visto

<J> Descrivere E

Prima Prova parziale 23/11/2011

Si consideri l'insieme

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : \ (x+1)(x^2+y^2) = 4x^2\}$$

Rispondere a (almeno) 4 **delle seguenti domande.**

<A> Determinare al variare di t **le intersezioni** $x(t), y(t))$ **di** G **con la retta** $y = tx$

<B> Disegnare il grafico di x **e di** y **in funzione di** t

<C> Disegnare la traccia della curva γ **definita da** $x(t), y(t))$

<D> Calcolare l'area della parte di piano limitata da G

<E> Studiare l'esplicitabilità di G **rispetto ad** x

<F> Determinare una o più funzioni di x **l'unione dei grafici delle quali descriva completamente** G

<G> Calcolare la derivata seconda della funzione definita implicitamente da G **il un intorno di** $(1, 1)$

<H> Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 **della funzione definita implicitamente da** G **il un intorno di** $(1, 1)$**, in** $x = 1$

Seconda Prova parziale 09/01/2012

Si consideri il problema di trovare una funzione y che sia soluzione della seguente equazione integrodifferenziale.

$$y''(x) = \int_0^x ty(t)dt$$

<A> Determinare, derivando ambo i membri, un'equazione differenziale che sia necessaria per una soluzione dell'equazione integrodifferenziale

<B> Scrivere un problema di Cauchy equivalente all'equazione integrodifferenziale data.

<C> Determinare, mediante una relazione di ricorrenza, una successione a_n tale che $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ soddisfi l'equazione integrodifferenziale data

<D> Determinare, mediante una relazione di ricorrenza, una successione a_n tale che $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ soddisfi l'equazione integrodifferenziale data

<E> Determinare, tutte le soluzioni dell'equazione integrodifferenziale data.

Esame Giugno 12/06/2012

Sia consideri la funzione

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad , \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

<A> Scrivere lo sviluppo di Taylor di $\sinh$

<B> Determinarne il raggio di convergenza.

<C> Calcolare $\sinh(0.1)$ **a meno di** 0.01

<D> Verificare che $\sinh$ **e** $\cosh$ **soddisfano l'equazione differenziale lineare**

$$y''(x) - y(x) = 0$$

<E> Determinare una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione precedente.

Si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \geq 1 + x^2 + y^2 \ , \ z \in [1, 2] \ , \ \frac{1}{\sqrt{3}} x \leq y \leq \sqrt{3} x\}$$

<F> Verificare che A **è limitato.**

<G> Calcolare la misura di A

<H> Determinare un parametrizzazione di ∂A

<I> Calcolare la misura di ∂A

Esame Giugno 26/06/2012

Si consideri la superficie S generata da un segmento di lunghezza 1, inizialmente posto sull'asse delle x con un estremo nell'origine, che ruota attorno all'asse z salendo di una quota proporzionale all'angolo di rotazione.

<A> Determinare una parametrizzazione della superficie S

<B> Determinare una parametrizzazione della frontiera ∂S di S

<C> Calcolare l'area di S

<D> Calcolare la lunghezza di ∂S

<E> Calcolare il flusso del campo vettoriale di componenti $(0,0,1)$ attraverso S

Si consideri l'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1 \ , \ z \in [-1,0]\}$$

<F> Determinare il punto di A che ha distanza minima dal punto$(1,1,1)$

<G> Determinare il punto di A che ha distanza massima dal punto$(1,1,1)$

Esame Luglio 10/07/2012

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = f(x)$$

Dove f è una funzione sviluppabile in serie di MacLaurin su $\mathbb{R}$.

<A> Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data.

<B> Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione data definite su $\mathbb{R}$.

<C> Determinare, se esiste, una serie di potenze centrata in $x = 0$ che soddisfi l'equazione omogenea

<D> Determinare, se esiste, una serie di potenze centrata in $x = 0$ che soddisfi l'equazione completa

<E> Determinare un campo vettoriale $F_1(x, y, z) = (f_1(x, y, z), g_1(x, y, z), h_1(x, y, z))$ in modo che

$$\textbf{rot } F_1(x, y, z) = 0$$

<F> Calcolare il flusso di rot $F_1(x, y, z)$ attraverso una semisfera centrata nell'origine e di raggio 1.

<G> Determinare un campo vettoriale $F_2(x, y, z) = (f_2(x, y, z), g_2(x, y, z), h_2(x, y, z))$ in modo che

$$\textbf{rot } F_2(x, y, z) = (x, -y, 0)$$

<H> Calcolare il flusso di rot $F_2(x, y, z)$ attraverso una semisfera centrata nell'origine e di raggio 1.

Esame Settembre 18/09/2012

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

con i dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

<A> Studiare esistenza ed unicità locale e globale dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati.

<B> Verificare che se f **è soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati allora** g **definita da** $g(x) = f(x)+2\pi$ **è soluzione della stessa equazione ma con i dati iniziali** $y(0) = 2\pi$, $y'(0) = 1$

<C> Verificare che se f **è soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati allora** g **definita da** $g(x) = f(x - \pi)$ **è soluzione della stessa equazione ma con i dati iniziali** $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$

<D> Trovare il polinomio di McLaurin di ordine 4 **della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali assegnati.**

<E> Stimare l'errore che si commette usando il polinomio di McLaurin di ordine 3 **in luogo della soluzione nell'intervallo** $[-0.5, 0.5]$

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \Big(\frac{x^3}{x^4 + y^4 - 2}, \frac{y^3}{x^4 + y^4 - 2}, \ln(|z|)\Big)$$

<F> Stabilire se F **ammette potenziale ed in caso affermativo calcolarlo precisandone il campo di definizione.**

<G> Determinare tutti i potenziali di F

<H> Calcolare $\int_\gamma < F, T_\gamma > ds$ **essendo** T_γ **il vettore tangente alla curva** γ **costituita dalla circonferenza di raggio** 1 **centrata nell'origine e giacente nel piano** $z = 1$.

<I> Calcolare il flusso di $F(x, y, z)$ **attraverso il cerchio di cui** γ **è frontiera.**

Esame Gennaio 08/01/2013

Si considerino

$$f(x,y) = x - 1 \qquad , \qquad g(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$$

<A> Calcolare

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

essendo D definito dalla disuguaglianza $g(x,y) \leq 0$

<B> Determinare delle equazioni parametriche per la curva γ definita da $z - f(x,y) = g(x,y) = 0$

<C> Determinare delle equazioni parametriche per la superficie ottenuta congiungendo ogni punto della curva γ con l'origine.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{y - x^2}$$

<D> Disegnare le curve di livello di f

<E> Studiare la continuità di f nell'origine

<F> Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine.

<G> Stabilire se f è differenziabile nell'origine

Esame Gennaio 29/01/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & x^2+y^2+z^2 \geq 1 \\ x^2+y^2+1 & x^2+y^2+z^2 < 1 \end{cases}$$

<A> Determinare dove f è definita e dove f è continua.

<B> Calcolare le derivate parziali di f nel punto $P = (0,0,1)$

<C> Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di f sul suo campo di definizione.

<D> Calcolare $\int_V f(x,y,z)dxdydz$ essendo V la parte del cubo con due vertici coincidenti con i punti $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ esterna alla sfera di centro l'origine e raggio 1.

Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x.y,z), h(x,y,z)) = (1/(x+10), 1/(y+10), 1/z)$$

<E> Determinare, se esistono tutti i potenziali di F

<F> Calcolare il lavoro fatto dal campo lungo la curva γ definita da

$$\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \\ z = \pi \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

<G> Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie della metà superiore della sfera unitaria centrata in $(2,2,2)$

Esame Febbraio 19/02/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \min\{(y-x)(y-x^3), 0\}$$

<A> Studiare continuità e derivabilità di f

<B> Studiare la differenziabilità di f

<C> calcolare massimi e minimi assoluti e relativi di f.

<D> calcolare $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$.
Sia $G(f)$ il grafico di f e

$$S = \{(x,y,z) \in G(f) \ : \ (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$$

<E> Determinare una parametrizzazione di S.

<F> Calcolare l'area di S.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 6y'(x) + 6y(x) = x^2$$

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

<H> Stabilire se l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.

<I> Determinare, se esistono, le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

Prima Prova parziale 23/11/2012

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 1, x - y)$$

<A> Stabilire se e dove l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $(z, y) = \phi(x)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

<B> Calcolare $\nabla\phi$

<C> Determinare esplicitamente una espressione di ϕ in termini di funzioni elementari precisandone la validità.

<D> Calcolare massimi e minimi assoluti di $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ vincolato a $f(x, y, z) = 0$
Sia

$$V = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \geq 2(x^2 + y^2) \ , \ z \geq 0 \ , \ z \leq x + 3\}$$

<E> Calcolare il volume di V

Seconda Prova parziale 08/01/2013

Si consideri la curva γ, nel piano (x, z), definita da

$$\begin{cases} z = \cos(t) \\ y = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

<A> Disegnare γ

<B> Stabilire se γ è semplice, regolare, chiusa

<C> Calcolare $\int_\gamma x dy + y dx$
Sia S la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della parte di γ che giace nel semipiano delle ascisse positive

<D> Determinare una parametrizzazione di S

<E> Calcolare l'area della superficie S

Esame Gennaio 08/01/2013

Si considerino

$$f(x,y) = x - 1 \qquad , \qquad g(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$$

<A> Calcolare

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

essendo D definito dalla disuguaglianza $g(x,y) \leq 0$

<B> Determinare delle equazioni parametriche per la curva γ definita da $z - f(x,y) = g(x,y) = 0$

<C> Determinare delle equazioni parametriche per la superficie ottenuta congiungendo ogni punto della curva γ con l'origine.
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{y - x^2}$$

<D> Disegnare le curve di livello di f

<E> Studiare la continuità di f nell'origine

<F> Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine.

<G> Stabilire se f è differenziabile nell'origine

Esame Gennaio 29/01/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & x^2+y^2+z^2 \geq 1 \\ x^2+y^2+1 & x^2+y^2+z^2 < 1 \end{cases}$$

<A> Determinare dove f è definita e dove f è continua.

<B> Calcolare le derivate parziali di f nel punto $P = (0,0,1)$
Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x.y,z), h(x,y,z)) = (1/(x+10), 1/(y+10), 1/z)$$

<C> Determinare, se esistono tutti i potenziali di F

<D> Calcolare il lavoro fatto dal campo lungo la curva γ definita da

$$\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \\ z = \pi \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

<E> Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie della metà superiore della sfera unitaria centrata in $(2,2,2)$

Esame Febbraio 19/02/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \min\{(y-x)(y-x^3), 0\}$$

<A> Studiare continuità e derivabilità di f

<B> Studiare la differenziabilità di f

<C> calcolare massimi e minimi assoluti e relativi di f.

<D> calcolare $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$.
Sia $G(f)$ il grafico di f e

$$S = \{(x,y,z) \in G(f) \ : \ (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$$

<E> Determinare una parametrizzazione di S.

<F> Calcolare l'area di S.
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 6y'(x) + 6y(x) = x^2$$

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

<H> Stabilire se l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.

<I> Determinare, se esistono, le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

Esame Giugno 11/06/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \min\{yx, x^2 + y^2\}$$

<A> Studiare la differenziabilità di f

<B> calcolare massimi e minimi assoluti e relativi di f.
Sia $G(f)$ il grafico di f e

$$S = \{(x,y,z) \in G(f) \ : 0 \leq \ z \leq 1\}$$

<C> Determinare una parametrizzazione di S.

<D> Calcolare l'area di S.
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x)^2 = y'(x)^2 - y'(x)^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<E> Determinare le soluzioni del problema dato
sia poi

$$\begin{cases} y(x)y''(x)^2 = y'(x)^2 - y'(x)^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<F> Determinare una soluzione del problema dato.

Esame Giugno 25/06/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

<A> Calcolare $\int_A f(x,y)dxdy$ **essendo**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2+y^2 \geq 1 \ , \ \rho < 1+\theta\}$$

essendo ρ **e** θ **le coordinate polari nel piano** x, y **e** $\theta \in [0, 2\pi]$**.**

<B> Calcolare $\int_A f(x,y)dxdy$ **essendo**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \rho < 1+\theta\}$$

essendo ρ **e** θ **le coordinate polari nel piano** x, y **e** $\theta \in [0, 2\pi]$**.**
Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$f_1(x,y) = \frac{4x(1-x^2)}{(y-x^2+1)(y+x^2-1)} \quad , \quad f_2(x,y) = \frac{2y}{(y-x^2+1)(y+x^2-1)}$$

<C> Stabilire se e dove il campo considerato è conservativo.

<D> Determinare tutte le primitive del campo.

<E> Calcolare $\int_\Gamma f_1 dx + f_2 dy$ **essendo** Γ **la parte di circonferenza di centro l'origine e raggio** $1/2$ **che giace nel semipiano delle ascisse positive.**

<F> Calcolare $\int_S (f_1)_x + (f_2)_y dxdy$ **essendo** S **la parte di cerchio di centro l'origine e raggio** $1/2$ **che giace nel semipiano delle ascisse positive.**

Esame Luglio 09/07/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 1 + xy$$

<A> Determinare l'area della superficie S definita dalla parte del grafico di f che si proietta sul cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1.

<B> Calcolare il volume del solido V ottenuto considerando la parte di spazio delimitata da S e dal piano $z = 0$

<C> Calcolare il flusso attraverso ∂V del campo vettoriale di componenti $(0,0,z)$
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)(y(x) + y'(x))$$

<D> Determinare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = a$

<E> Determinare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = 0$

Esame Settembre 17/09/2013

Si consideri il solido V definito in $\mathbb{R}^3$ dalle seguenti disequazioni

$$z \geq (x-1)^2 + y^2 \qquad x^2 + y^2 \leq 1 \qquad z \leq 5$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una rappresentazione parametrica di ∂V

<C> Calcolare il flusso attraverso ∂V del campo vettoriale di componenti $(2x, y^2, z)$)
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|} + xy(x)$$

<D> Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 1$, studiando in particolare l'unicità.

<E> Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = -1$, studiando in particolare l'unicità.

<F> Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 0$, studiando in particolare l'unicità.

Prima Prova parziale 04/11/2013

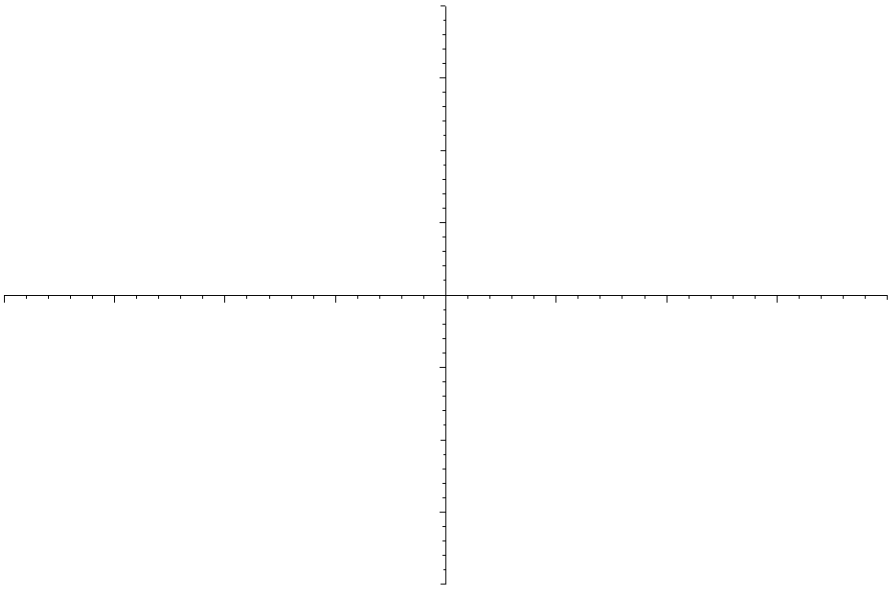
Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\Big(-\frac{1}{|x|}\Big)^n$$

<A> Determinare l'insieme di definizione di f

<B> Studiare la derivabilità di f e studiare il segno di f'.

<C> Disegnare il grafico di f.

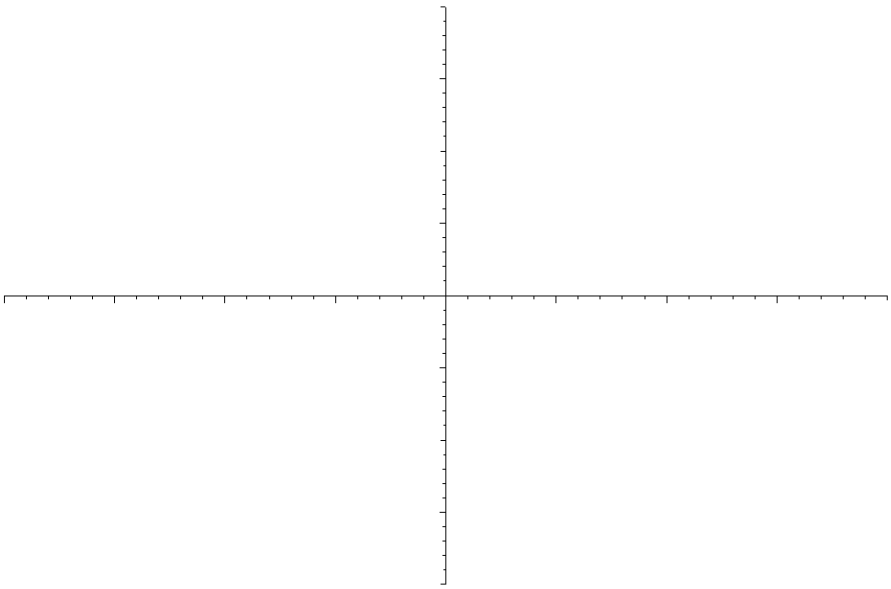


Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

<D> Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di g su $[-\pi, \pi]$

<E> Disegnare il grafico della somma delle serie di Fourier ottenuta.



Seconda Prova parziale 09/12/2013

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq \frac{1}{2}(x+1) \ , \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Calcolare la superficie di ∂V.
Si consideri

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq 1 \ , \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

e

$$\omega_2 = z dx dy$$

<C> Verificare che

$$\int_C d\omega_2 = \int_{\partial C} \omega_2$$

Terza Prova parziale 07/01/2014

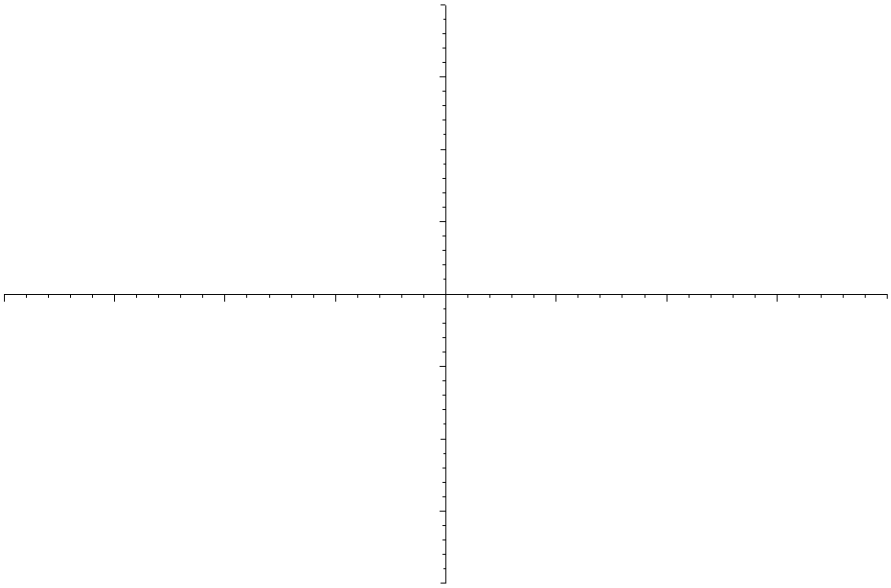
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 + y(x)y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

<A> Ridurre l'equazione ad un sistema differenziale del primo ordine e studiarne esistenza ed unicità .

<B> Determinare la soluzione del problema per $a = 3$ e $b = 0$

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $a = 0$ e $b = 1$



Esame Gennaio 07/01/2014

Si consideri il solido V definito in $\mathbb{R}^3$ dalle seguenti disequazioni

$$(x-1)^2+y^2+z^2\leq 4 \qquad x^2+y^2\leq 1$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una rappresentazione parametrica di ∂V

<C> Calcolare il flusso attraverso ∂V del campo vettoriale di componenti $(2x, y, z)$)
Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+6y(x)=0$$

<D> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

<E> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

<F> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

Esame Gennaio 28/01/2014

Si consideri il solido V definito in $\mathbb{R}^3$ dalle seguenti disequazioni

$$(x-1)^2+y^2+z^2 \leq 2 \qquad x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una rappresentazione parametrica di ∂V

<C> Calcolare il flusso attraverso ∂V del campo vettoriale di componenti $(x, 0, z)$)
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) - 4xy(x) + 6\sqrt{y(x)} = 0$$

<D> Determinare le soluzioni dell'equazione data

<E> Determinare il polinomio di Taylor di y centrato in $x_0 = 1$ di ordine 3

Esame Febbraio 18/02/2014

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \Big(\frac{x}{(x^2-y^2)+1} + yz, \frac{-y}{(x^2-y^2)+1} + xz, xy\Big)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se è connesso e se è semplicemente connesso.

<B> Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne un potenziale

<C> Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne tutti i potenziali

<D> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva γ definita da:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\cos(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

<E> Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie del cerchio giacente nel piano (x,y) di centro l'origine e raggio 1
Si consideri

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

<F> Determinare una espressione di f in fratti semplici.

<G> Esprimere ciascuno dei fratti semplici trovati mediante una serie geometrica, precisando l'insieme in cui l'espressione è valida.

<H> Esprimere f mediante una serie di potenze, precisando l'insieme in cui l'espressione è valida.

<I> Approssimare $\int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx$.

Esame Giugno 10/06/2014

Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \Big(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}} + 1, \frac{1}{\sqrt{z}}\Big)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se è connesso e se è semplicemente connesso.

<B> Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne un potenziale

<C> Stabilire se il campo ammette potenziale ed in caso affermativo determinarne tutti i potenziali

<D> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva γ definita da:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases} \qquad t \in [0,2]$$

<E> Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie del quadrato giacente nel piano $z = 0$ di centro $(2,2)$ e lato 2
Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$(x+1)^2 y''(x) + y(x) = x$$

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

<G> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

Esame Giugno 24/06/2014

Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 - x^2 - y^2 = 1 \ , \ x^2 - 2x \leq 0\}$$

<A> Determinare una parametrizzazione di D

<B> Calcolare l'area di D
Sia

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 - x^2 - y^2 \leq 1 \ , \ x^2 - 2x \leq 0 \ , \ z \geq 0\}$$

<C> Calcolare il volume di E
Si consideri

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

<D> Decomporre f in fratti semplici.

<E> Determinare la serie di McLaurin di ciascuno dei fratti semplici trovati precisandone il raggio di convergenza

<F> Determinare la serie di McLaurin S di f

<G> Determinare il raggio di convergenza di S

<H> Calcolare la derivata di ordine 10 di S nell'origine.

Esame Luglio 08/07/2014

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} + \frac{\cos(nx)}{n^4}$$

<A> Stabilire dove f è definita, continua e derivabile.

<B> Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di f, precisandone il campo di validità

<C> Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di f, in serie di soli seni, precisandone il campo di validità
Si consideri l' ellissoide E di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si consideri inoltre l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\epsilon^2}{c^2}, \quad \text{nel piano} \quad z = \epsilon \quad \epsilon > 0$$

e siano
- **N il vettore normale di E**
- **T il vettore tangente di γ**

Si consideri inoltre il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \big(0, a \arctan\big(\frac{x/a}{\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}\big), 0\big)$$

<D> Determinare una parametrizzazione di E e calcolare N.

<E> Calcolare rot F

<F> Calcolare

$$\int_E \langle \mathbf{rot}\ F, N/\|N\| \rangle d\sigma$$

<G> Determinare una parametrizzazione di γ e calcolare T.

<H> Calcolare

$$\int_\gamma \langle F, T/\|T\| \rangle ds$$

Esame Settembre 16/9/2014

Si consideri la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & x < 0 \end{cases}$$

ed il campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (\varphi(x + y + z), \varphi(x + y + z), \varphi(x + y + z))$$

<A> Determinare A in modo che F sia chiuso su A.

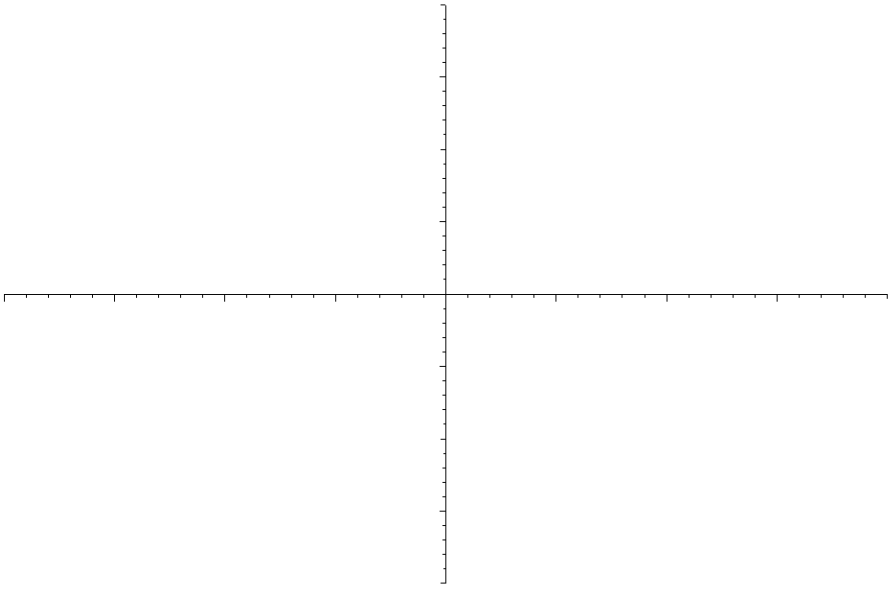
<B> Stabilire se e dove F è conservativo e determinarne il potenziale precisandone il campo di definizione.

<C> Calcolare $\int_S F ds$, dove S è sfera di centro l'origine e raggio 1

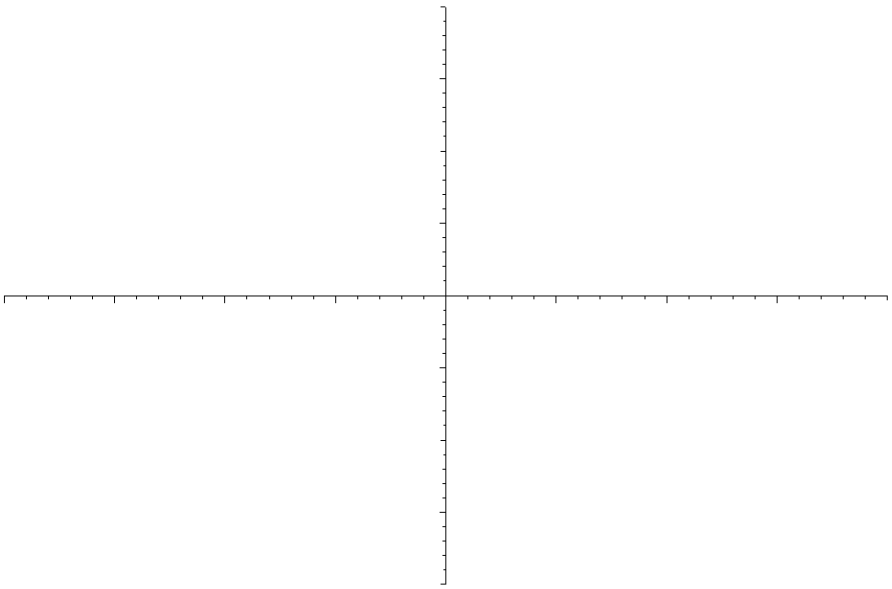
<D> Calcolare $\int_\gamma F ds$, dove γ è la circonferenza intersezione di S con il piano $z = 0$
Si consideri il [problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<E> Disegnare il grafico di y'



<F> Disegnare il grafico di y



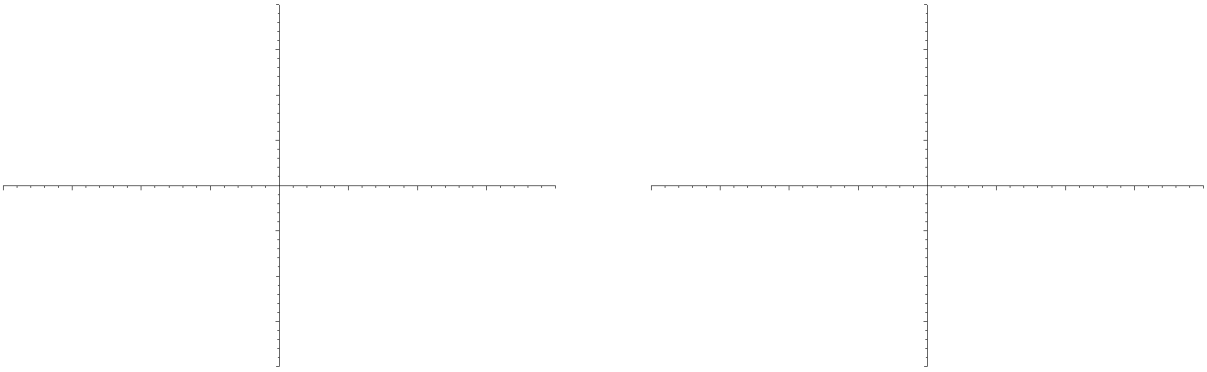
Prima Prova parziale 11/11/2014

Si consideri

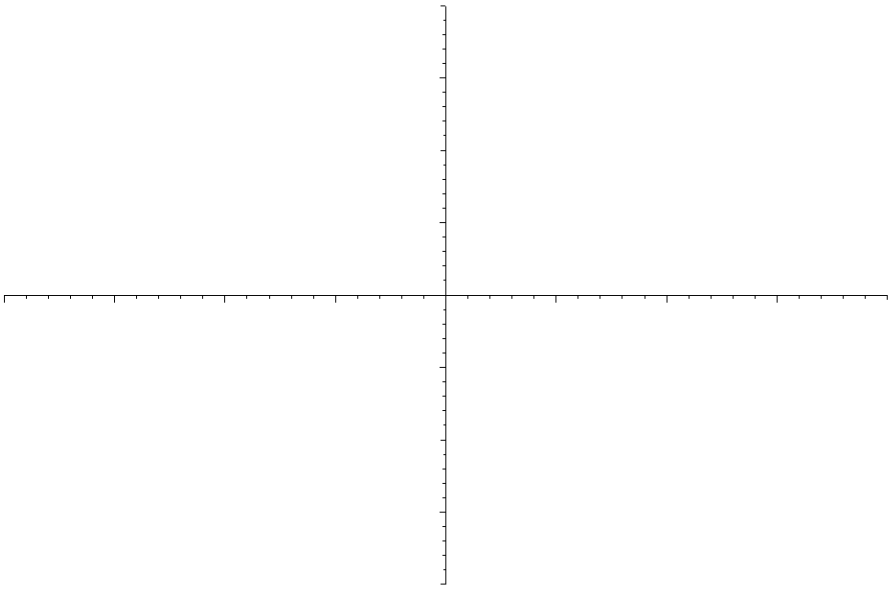
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 + xy = 1\}$$

<A> Determinare l'intersezione $(x(m), y(m))$ **di** A **con una generica retta** $y = mx + 1$ **per** $(0, 1)$**.**

<B> Disegnare i grafici di $x(\cdot)$ **e di** $y(\cdot)$



<C> Disegnare A**.**



<D> Calcolare

$$\int_S dx \wedge dy$$

dove S **è la regione di piano limitata delimitata da** A**.**

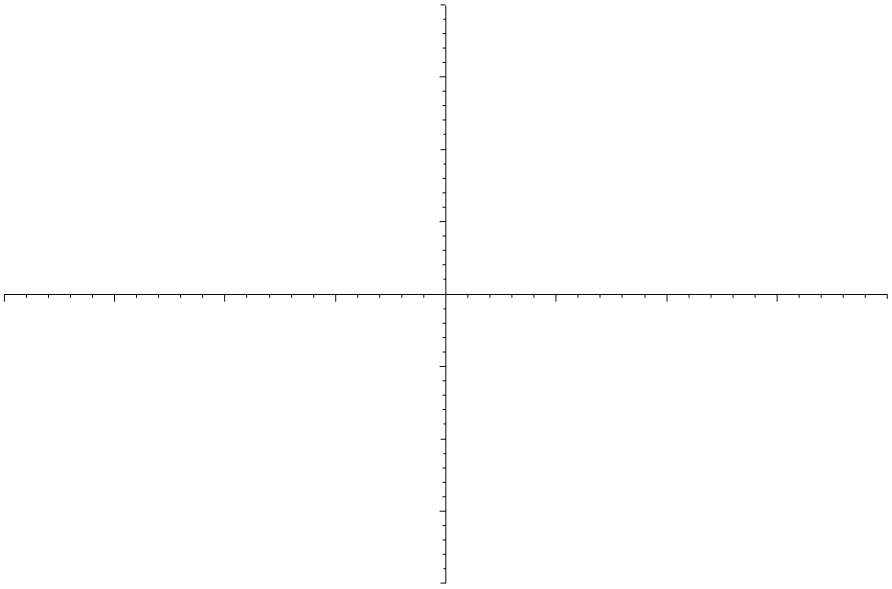
Seconda Prova parziale 12/12/2014

Si consideri

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} ne^{-n}x^{2n}$$

<A> Determinare dove f è definita, continua e derivabile

<B> Disegnare il grafico di f



<C> Calcolare $f(-1)$ a meno di $1/100$

<D> Determinare il polinomio di McLaurin di f di ordine 5

<E> Calcolare $f^{(22)}(0)$.

<F> Determinare esplicitamente f

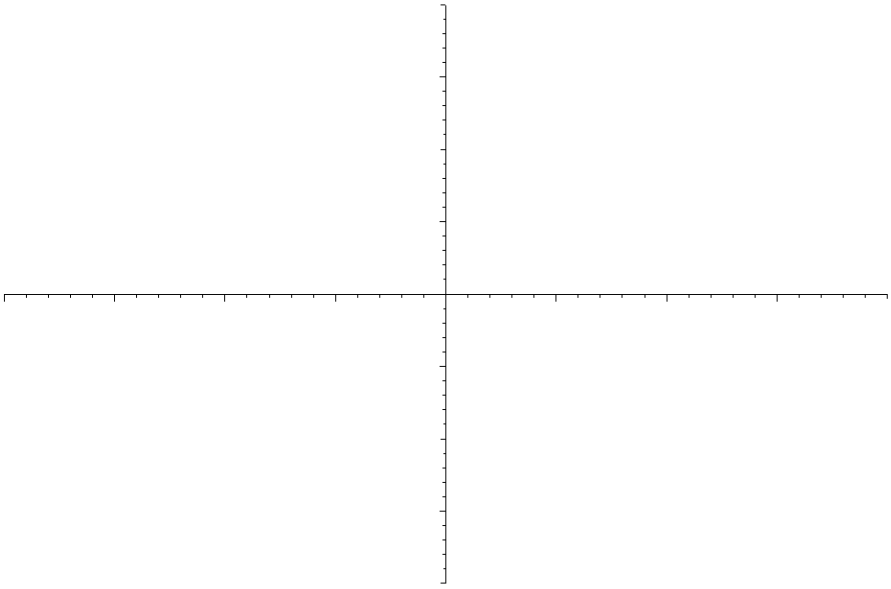
Terza Prova parziale 08/01/2015

Si consideri l'equazione differenziale

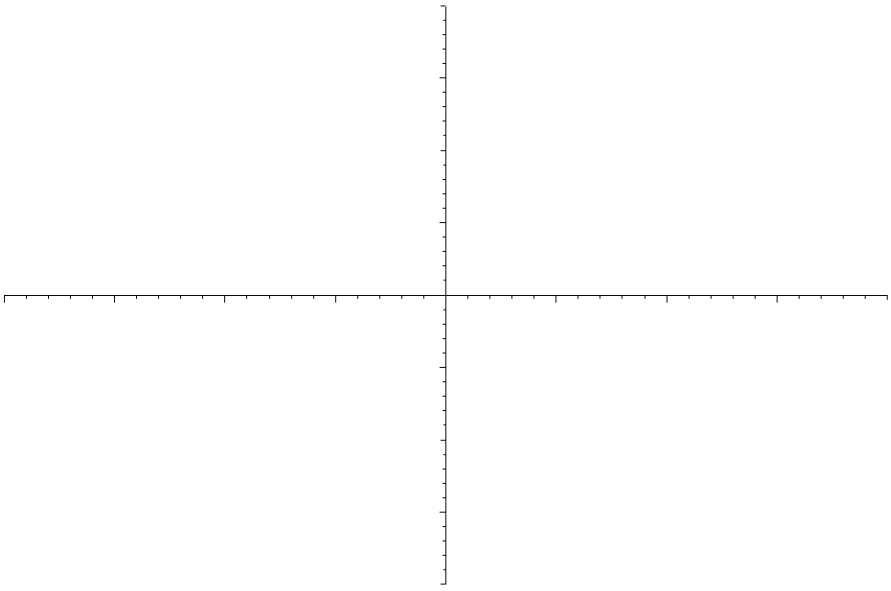
$$2y''(x)(1+y^2(x))=1$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione per il problema di Cauchy associato ai dati iniziali $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$

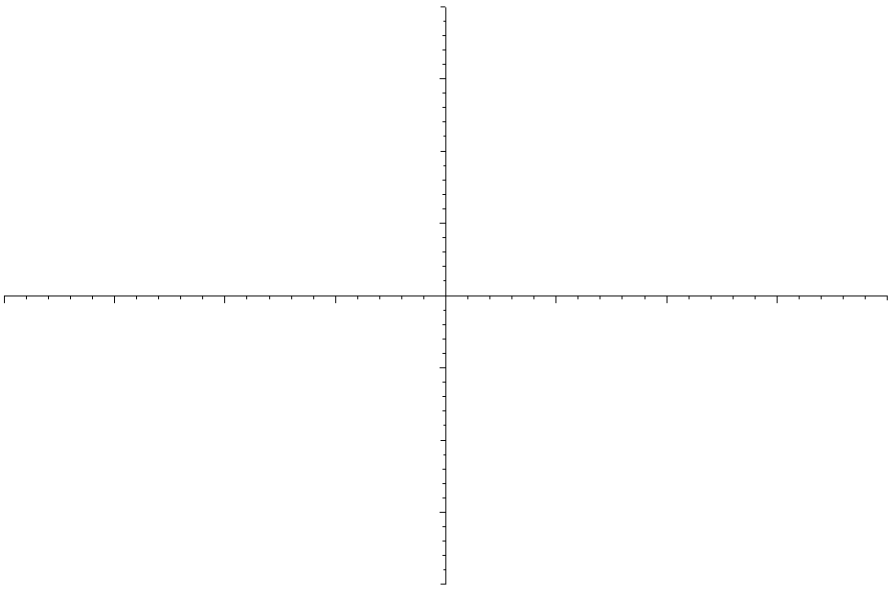
<B> Disegnare il grafico di y per $x_0=y_0=0, z_0=1$



Disegnare il grafico di y per $x_0=y_0=0, z_0=-1$



<C> Disegnare il grafico di y per $x_0=y_0=0, z_0=0$



Esame Gennaio 13/01/2015

Si consideri l'equazione differenziale

$$x(1+x)y'(x) = (1+x)y(x) + x^2$$

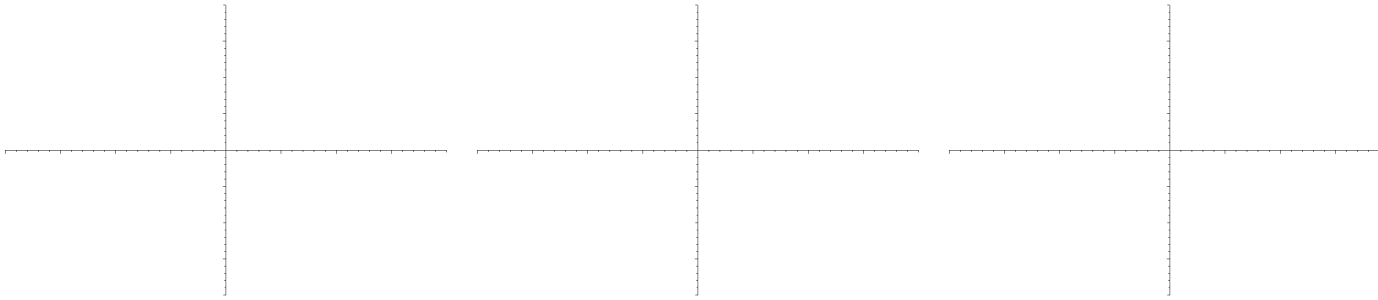
<A> Studiare esistenza ed unicità del problema di Cauchy associato all'equazione differenziale data e al dato iniziale $y(x_0) = a$.

<B> Determinare, se esistono, le soluzioni relative al dato iniziale $y(0) = a$

<C> Determinare, se esistono, le soluzioni relative al dato iniziale $y(0) = 0$ sviluppabili in serie di McLaurin.
Si consideri la funzione

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 \leq 0 \ , \ |z| \leq 1\}$$

<D> Disegnare le intersezioni di V con i piani coordinati.



<E> Calcolare

$$\int_V z dx dy dz$$

<F> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<G> Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (1, 1, 1)$ attraverso ∂V

Esame Gennaio 27/01/2015

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + xy'(x) = x^2$$

<A> Studiare esistenza ed unicità del problema di Cauchy associato all'equazione differenziale data e al dato iniziale $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$.

<B> Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$

<C> Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$

<D> Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$
Si consideri la funzione

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi)$$

<E> Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che

$$F(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a - b\sin(x) - c\cos(x))^2 dx$$

sia minima.

<F> Calcolare Il valore minimo di F.

Esame Febbraio 17/02/2015

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| \leq \sin(xy) \ , \ 0 \leq x \leq \pi \ , \ 0 \leq y \leq \pi, \ xy \leq \pi\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Calcolare il flusso del campo F di componenti (x, y, z) attraverso ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo F attraverso la superficie

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| = \sin(xy) \ , \ 0 \leq x \leq \pi \ , \ 0 \leq y \leq \pi, \ xy \leq \pi\}$$

<D> Determinare una parametrizzazione della supercficie

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |z| = \sin(xy) \ , \ 0 \leq x \leq \pi \ , \ 0 \leq y \leq \pi, \ xy \leq \pi\}$$

Si consideri la funzione

$$f(x) = \cos(\ln(1 + x))$$

<E> Stabilire se f è sviluppabile in serie di McLaurin, precisando l'insieme in cui lo sviluppo vale.

<F> Determinare la ridotta di ordine 3 dello sviluppo di di McLaurin di f

<G> Determinare una maggiorazione del corrispondente resto.

Esame Giugno 16/06/2015

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + 2 \\ \dot{y}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = 3z(t) - 2y(t) + \sin^2(t) \end{cases}$$

<A> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

<B> Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato

<C> Trovare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $y(0) = 0$

<D> Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

Si consideri l'insieme V **generato dai cerchi di raggio** 1**, paralleli al piano** yz **e centrati in ciascuno dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio** 2 **giacente nel piano** xy **e compresa tra i piani** $y = x/\sqrt{3}$ **e** $y = \sqrt{3}x$**.**

<E> Determinare una parametrizzazione di V **e calcolarne il volume**

<F> Determinare una parametrizzazione di ∂V **e calcolarne la superficie**

<G> Determinare il flusso attraverso ∂V **del campo vettoriale** $F(x, y, z) = (x, y, z)$

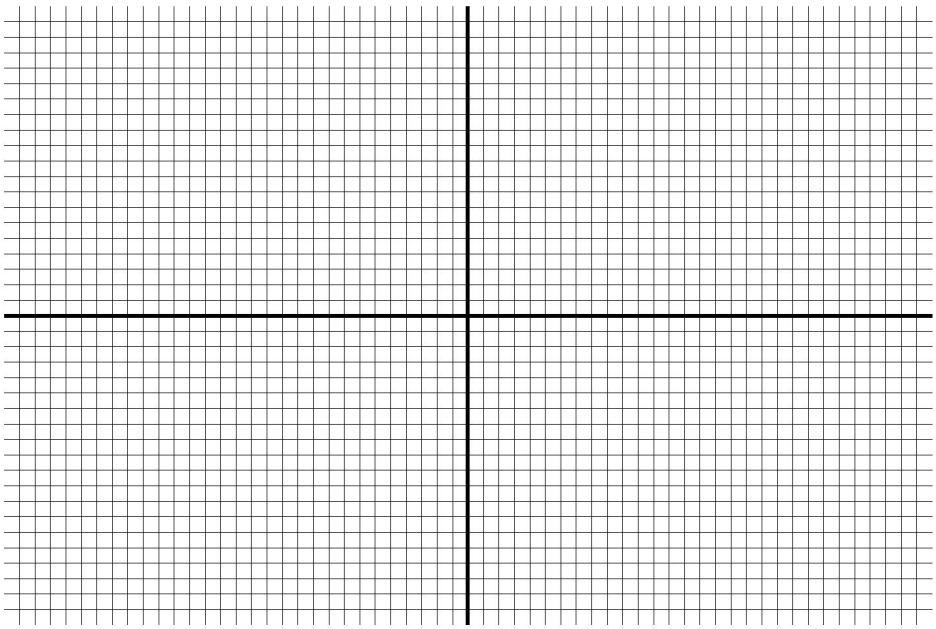
Esame Giugno 30/06/2015

Si consideri l'equazione integro-differenziale

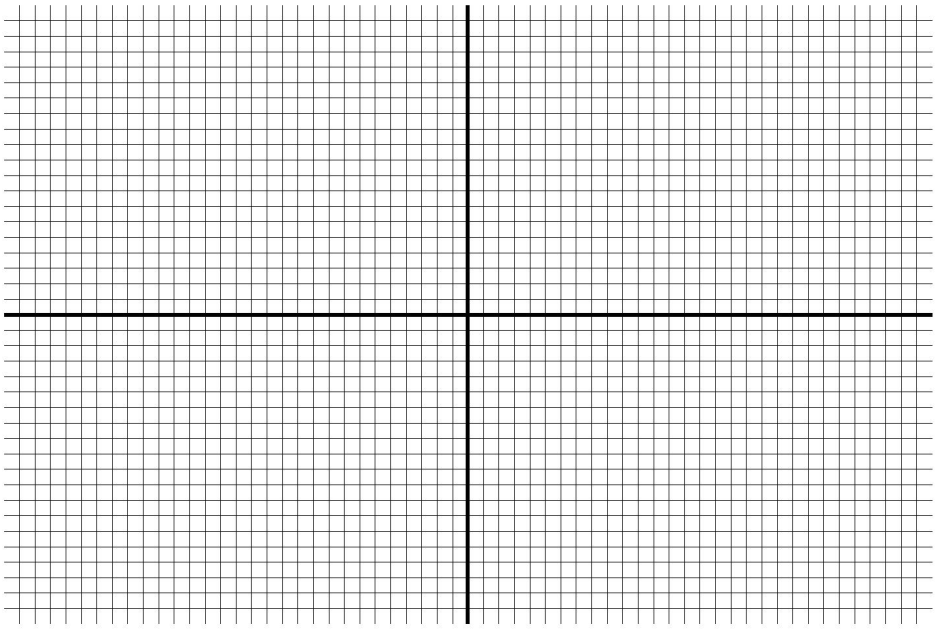
$$2y'(x) = a + \int_0^x y(t)\ln(y(t)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione.

<B> Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 1$



<C> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni.



Si supponga che un punto nel piano sia attratto dai punti $P_0 = (1, 0)$ e $Q_0 = (-1, 0)$ con intensità inversamente proporzionale alla distanza da ciascun punto.

<D> Determinare il campo vettoriale della forza cui è sottoposto ogni punto del piano.

<E> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P - P_0\| \leq 1/2$

<F> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P - Q_0\| \leq 1/2$

<G> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la circonferenza $\|P\| \leq 3$

<H> Determinare un potenziale del campo vettoriale, se esiste.

Esame Luglio 14/07/2015

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = (2 + 4x^2)y(x)$$

con i dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione.

<B> Determinare una regola di ricorrenza per a_n **in modo che** $\sum_0^n a_n x^n$ **soddisfi le condizioni assegnate**

<C> Verificare che

$$c_n = a_{2n+1} = 0$$

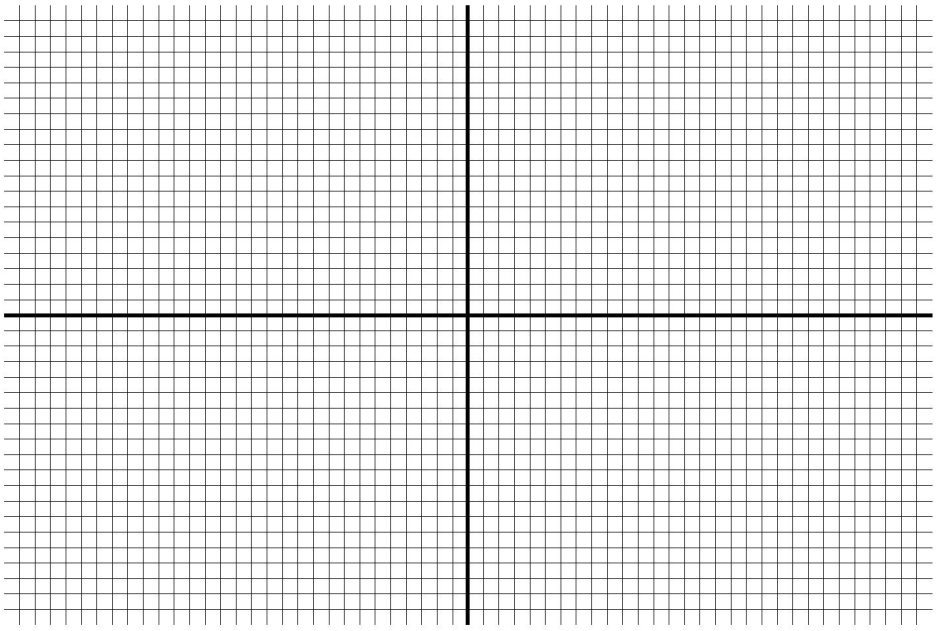
<D> Verificare che

$$b_n = a_{2n} = \frac{1}{n!}$$

<E> Determinare y **in termini di funzioni elementari.**
Si consideri la curva γ **definita da**

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t(t^2 - 1) \\ y(t) = t(t^2 - 1)(t^2 - 1/4) \end{cases}$$

<F> Disegnare γ



<G> Stabilire se γ **è semplice, regolare, chiusa, limitata .**

<H> Calcolare l'area della parte di piano delimitata da γ**.**

Settembre 15/09/2015

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = 2 + y(x)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione.

<B> Determinare le soluzioni dell'equazione per $x > 0$

<C> Determinare le soluzioni dell'equazione per $x < 0$

<D> Determinare le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$
Si consideri Il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}, \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}}, \ln |z| \Big)$$

<E> Determinare il campo di definizione di F

<F> Determinare se F **è chiuso.**

<G> Determinare se F **è conservativo**

<H> Determinare, se e dove esistono tutti i potenziali di F

<I> Calcolare il lavoro svolto da F **lungo la circonferenza di centro** $(0, 2, 1)$ **e di raggio** 1 **giacente nel piano** $z = 1$

Prima Prova parziale 11/11/2015

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq 2 \ , \ z \geq y - x\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, z)$$

<A> -[5] Calcolare

$$\int_A \textbf{div } F dx dy dz$$

<B> -[5] Determinare una parametrizzazione di ∂A

<C> -[4] Calcolare

$$\int_{\partial A} \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

<D> -[6] Calcolare

$$\int_S \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ z = 0 \ , \ y \leq x\} \cup$$
$$\cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ z = y - x \geq 0\} \cup$$
$$\cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ z = 2\}$$

Seconda Prova parziale 12/14/2015

Si consideri

$$f(x) = \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)$$

<A> -[5] Determinare lo sviluppo in serie di McLaurin di f

<B> -[5] Determinare n in modo che la ridotta $n-$esima della serie trovata approssimi $\ln(5)$ a meno di 0.01

<C> -[6] Determinare lo sviluppo in serie di Fourier $F(x)$ di $f(x) = x$ su $[0, \pi]$ in serie di soli coseni.

<D> -[2] Calcolare $F(0)$.

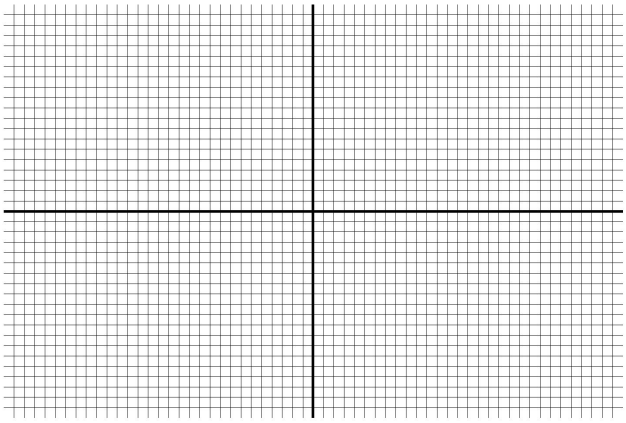
<E> -[2] Dedurre dal calcolo precedente una espressione in serie per π^2
Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^n + 1)x^{3n}$$

<F> -[3] Determinare il campo di definizione di f

<G> -[3] Calcolare $f'(x)$ precisando dove e' definita.

<H> -[4] Disegnare il grafico di f

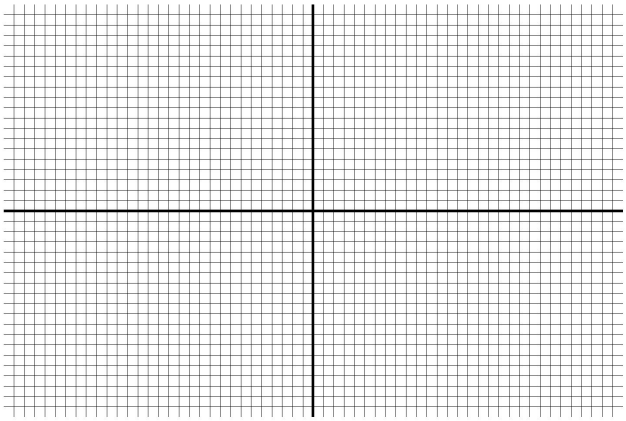


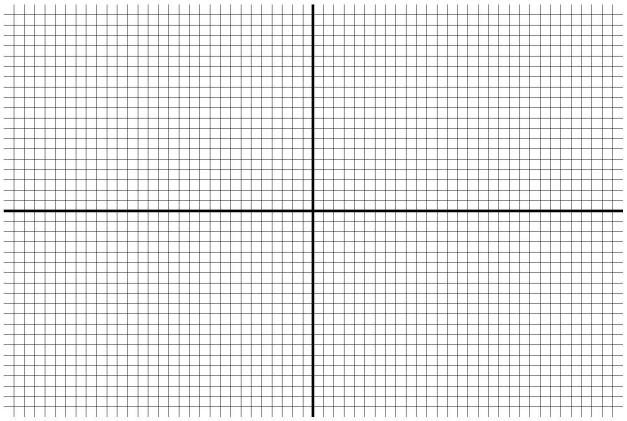
Terza Prova parziale 07/01/2016

Si consideri

$$\begin{cases} (y''(x))^2 = \dfrac{1}{y(x)} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<A> -[10+10] Disegnare il grafico delle soluzioni del problema





Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = 0$$

<B> -[4] Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$

<C> -[4] Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$

<D> -[5] Determinare tutte le funzioni continue su $\mathbb{R}$ soluzioni dell'equazione data su $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$

Esame Gennaio 12/01/2016

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = 2(y'(x))^2 + y'(x)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità del problema di Cauchy associato all'equazione differenziale data e al dato iniziale $y(x_0) = a$.

<B> Determinare, se esistono, le soluzioni relative al dato iniziale $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

<C> Determinare, il polinomio di McLaurin di ordine 3 della soluzione . relativa al dato iniziale $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Si consideri la funzione

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x/2 \leq y \leq 2x \ , \ 1 - x \leq z \leq 1 - x/2, x \geq 2\}$$

<D> Disegnare la proiezione di V sul piano $z = 0$.

<E> Calcolare

$$\int_V dxdydz$$

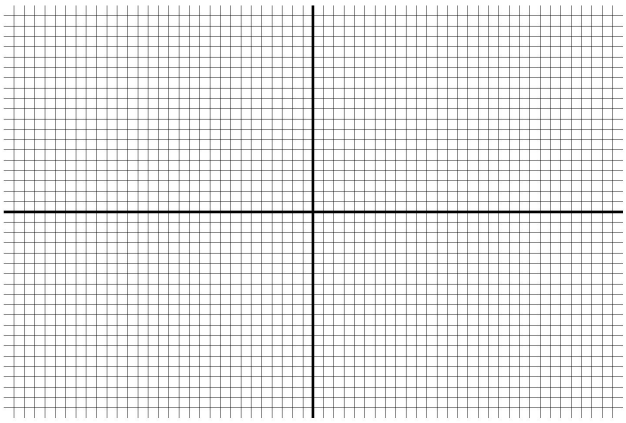
<F> Determinare una parametrizzazione di ∂V

Esame Gennaio 26/01/2016

Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} (x(\theta) = (\theta - sin(\theta)) \\ y(\theta) = (1 - cos(\theta)) \end{cases} \theta \in [0, 2\pi]$$

<A> Disegnare la curva γ



<B> Calcolare la lunghezza di γ

<C> Calcolare l'area delimitata da γ e dall'asse x

<D> Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta facendo ruotare γ attorno all'asse x di 2π
Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \int_0^x t^4 y(t) dt \\ y(0) = a \end{cases}$$

<E> Determinare una serie di potenze centrata in $x = 0$ soluzione del problema

<F> Determinare il raggio di convergenza della serie trovata..

<G> Determinare a in modo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione data sia uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione ed una base.

Esame Febbraio 16/02/2016

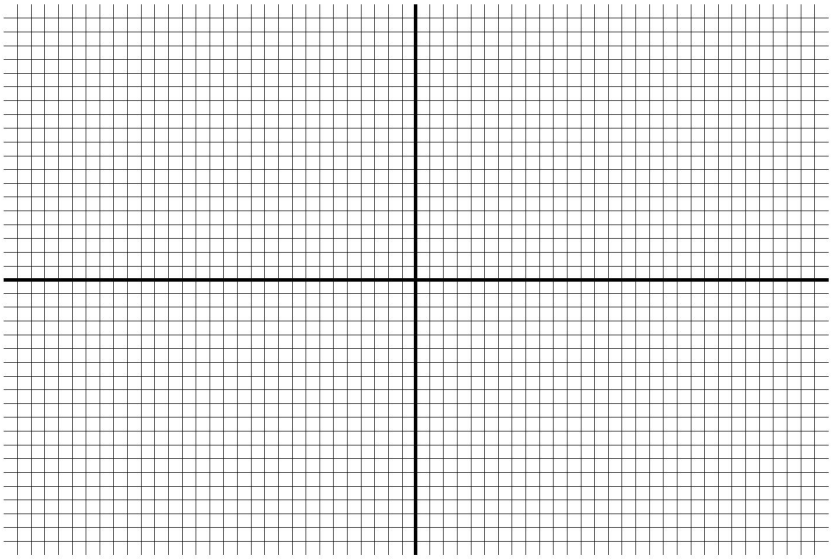
Si consideri il punto $P = (0, 0, 2)$ e la circonferenza γ di centro $C = (a, b, 1)$ e raggio 1 giacente nel piano $z = 1$ Si consideri inoltre la curva δ definita dai punti che si ottengono come intersezione delle rette che passano per P e per un generico punto di γ con il piano $z = 0$

<A> Determinare le equazioni parametriche della curva γ

<B> Determinare le equazioni parametriche delle rette che passano per P e per un generico punto di γ

<C> Determinare le equazioni parametriche della curva δ

<D> Disegnare nel piano $z = 0$ la curva δ



<E> Calcolare la lunghezza di δ
Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \sin(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + e^{-t} \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t \end{cases}$$

<F> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

<G> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo completo

<H> Determinare tre soluzioni del sistema omogeneo linearmente indipendenti

<I> Determinare una matrice fondamentale del sistema.

Esame Giugno 14/06/2016

Si consideri la serie numerica

$$S = \sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^5}$$

<A> Determinare il carattere della serie.

<B> Approssimare S a meno di $1/100$

<C> Enunciare i risultati usati per rispondere alle domande precedenti.
Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) = (2 + 4x^2)y(x)$$

con i dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e si consideri la serie di potenze $\sum_n a_n x^n$

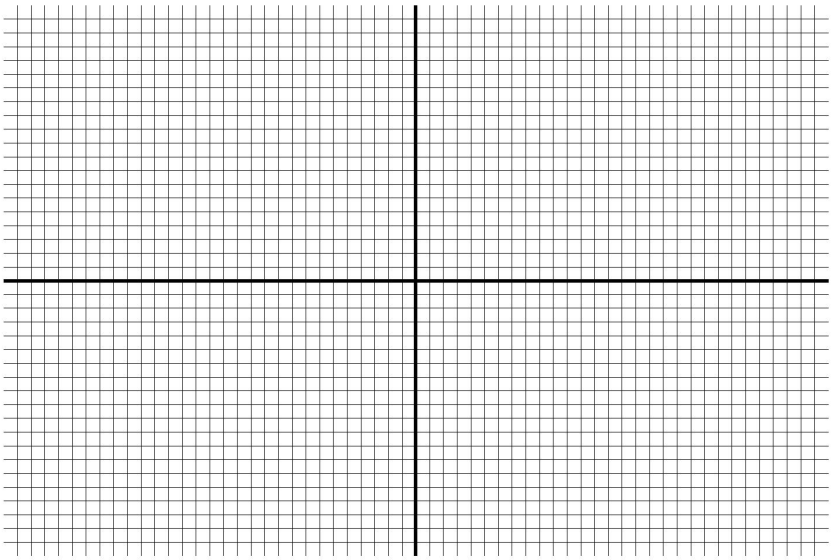
<D> Determinare a_0, a_1, a_2, a_3 ed una regola di ricorrenza che consenta di calcolare a_{n+2} in funzione di a_n e di a_{n-2} per $n \geq 2$

<E> Dimostrare che $a_{2n} = \frac{1}{n!}$

<F> Determinare lo sviluppo di McLaurin della soluzione del problema assegnato

<G> Calcolare $y(1)$ a meno di $1/1000$

<H> Disegnare il grafico di y



Esame Giugno 28/06/2016

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \int_0^x e^{-t^2} dt$$

<A> Determinare lo sviluppo in serie di potenze centrato in $x_0 = 0$ di f

<B> Determinare lo sviluppo in serie di McLaurin di f.

<C> Approssimare $f(1)$ a meno di $1/100$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^2 + y(x)^2}{xy(x)}$$

con il dato iniziale $y(1) = 1$,

<D> Determinare $z(x)$ in modo che $y(x) = xz(x)$ sia soluzione del problema dato.

<E> Studiare le soluzioni dell'equazione data in un intorno dell'origine.

Esame Luglio 12/07/2016

Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a-kp)(1-p)^{k-1}$$

<A> Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ in modo che la serie sia convergente

<B> Determinare la somma della serie per i valori trovati al punto precedente.

<C> Determinare $a \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ in modo che la serie abbia somma nulla
Si consideri la superficie S ottenuta facendo ruotare di 2π radianti attorno all'asse z un triangolo di vertici $(0,1,0)$, $(0,1+\sqrt{3}/2,1/2)$,$(0,1+\sqrt{3}/2,-1/2)$

<D> Determinare le equazioni parametriche di S

<E> Calcolare l'area di S

<F> Calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale $F(x,y,z) = (0,0,1)$

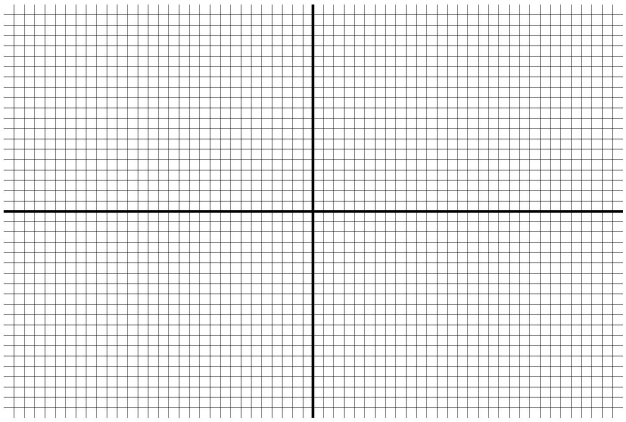
Esame Settembre 13/09/2016

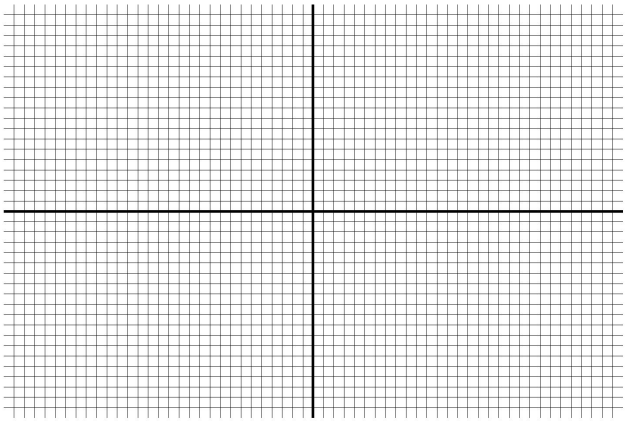
Si consideri il luogo γ dei punti del piano tali che

$$y^2 = x^2 - x^4$$

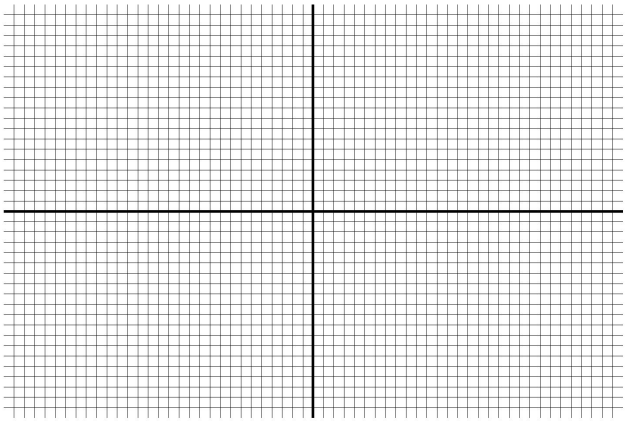
<A> Determinare le intersezioni $P(m) = (x(m), y(m))$ di γ con una generica retta $y = mx$ passante per l'origine

<B> Disegnare il grafico di $x(m), y(m)$





<C> Disegnare nel piano γ



<D> Calcolare l'area della parte di piano delimitata da γ
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 - 3x + x^2}$$

<E> Decomporre f in fratti semplici

<F> Sviluppare in serie di McLaurin ciascuno dei fratti semplici trovati precisando il raggio di convergenza della serie

<G> Sviluppare in serie di McLaurin f precisando il raggio di convergenza della serie

<H> Sviluppare in serie di McLaurin $\int_0^x f(t)dt$ precisando il raggio di convergenza della serie

Prima Prova parziale 10/11/2016

Si consideri

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| = z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (-x,y,z)$$

<A> -[6] Calcolare

$$\int_A \textbf{div}\ F dxdydz$$

<B> -[7] Determinare una parametrizzazione di ∂A

<C> -[4] Calcolare

$$\int_{\partial A} \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

<D> -[4] Calcolare

$$\int_B \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

<E> -[4] Calcolare

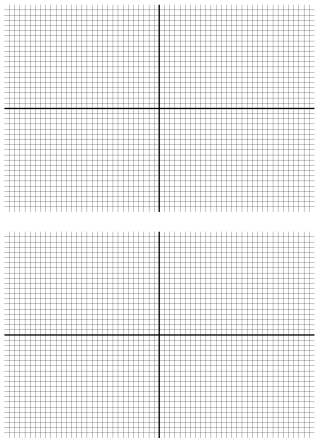
$$\int_{\partial B} \langle F, \frac{T}{||T||} \rangle ds$$

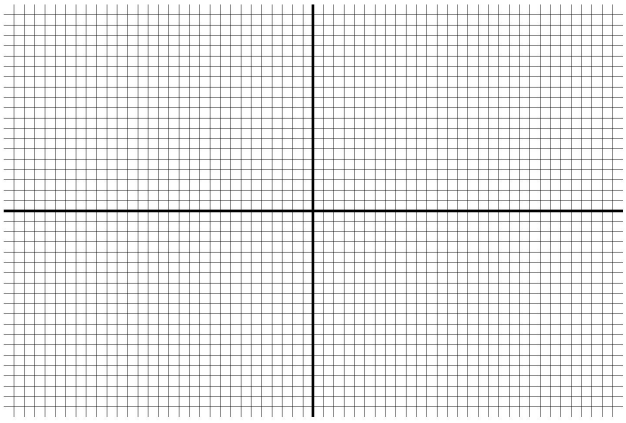
Si consideri la curva γ definita da

$$2y^3 + 6x^2y + 3x^2 - 3y^2 = 0$$

<F> - [6] Determinare al variare di m le intersezioni $(x(m), y(m))$ di γ con la retta $y = mx$

<G> - [10] Disegnare il grafico di $x(m)$ di $y(m)$ e la curva γ





<H> - [9] Calcolare l'area della parte limitata di $\mathbb{R}^2$ di cui è frontiera la parte di γ che giace nel semipiano positivo delle ordinate.

Seconda Prova parziale 19/12/2016

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

<A> -[6] Studiare la convergenza puntuale di f_n

<B> -[9] Studiare la convergenza uniforme di f_n
si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} x^{n^2}$$

<C> -[3] Determinare il raggio di convergenza ρ

<D> -[4] Studiare la convergenza agli estremi dell'intervallo di convergenza

<E> -[4] approssimare a meno di 0.01 $f(-\rho)$

<F> -[4] approssimare a meno di 0.01 $f(\rho)$
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y(x)$$

<G> - [4] Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ **che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali** $y(0) = 1$, $y('0) = 1$.

<H> - [4] Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ **che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali** $y(0) = 0$, $y('0) = 0$.

<I> - [7] Trovare tutte le soluzioni della serie data che si possano esprimere come serie di potenze centrate in $x_0 = 0$

Terza Prova parziale 09/01/2017

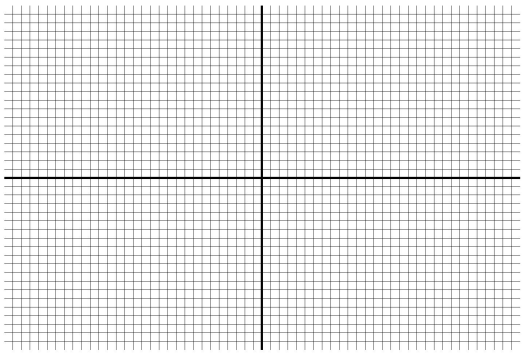
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)(y'(x) + y^2(x))$$

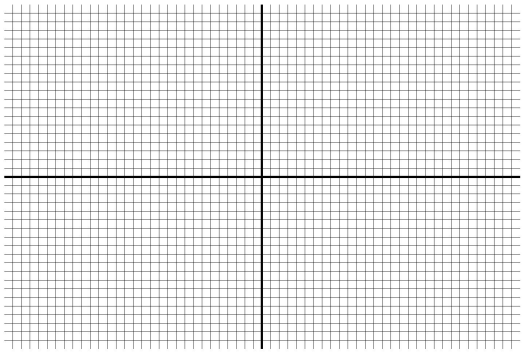
<A> -[2] Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali.

<B> -[2] Scrivere il Polinomio di McLaurin di ordine 3 della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

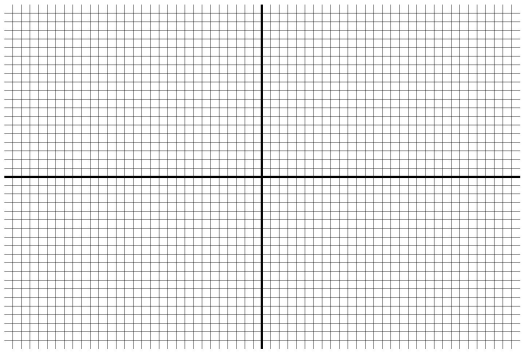
<C> -[10] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.



<D> -[10] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



<E> -[10] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.



Esame Gennaio 10/01/2017

Siano γ e S la curva e la superficie definite da

$$\begin{cases} z^2 = 1 + x^2 + y^2 \\ z = 1 + 1/2x \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2 = 1 + x^2 + y^2 \\ z \leq 1 + 1/2x \end{cases}$$

<A> -[]Determinare una parametrizzazione di γ e verificare se γ è semplice, regolare e chiusa.

<B> -[] Calcolare la lunghezza di γ

<C> -[] Calcolare $\int_\gamma xdy - ydx$

<D> -[]Determinare una parametrizzazione di S

<E> -[] Calcolare l'area di S
Si consideri l'equazione differenziale

$$(2x+1)^2 y''(x) + (2x+1)y'(x) + y(x) = x$$

<F> -[] Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali.

<G> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > -1/2$

<H> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < -1/2$

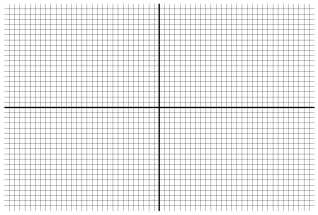
<I> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

Esame Gennaio 24/01/2017

Si consideri la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

<A> -[]Disegnare il grafico di f_n al variare di n



<B> -[] Determinare il limite puntuale f di f_n su $\mathbb{R}$

<C> -[] Stabilire se la convergenza di f_n ad f è uniforme su $\mathbb{R}$.

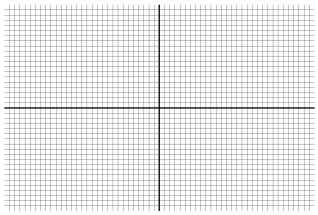
<D> -[] Stabilire se la convergenza di f_n ad f è uniforme su $[0, 10]$.
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = (y'(x))^2 + (y'(x))^3$$

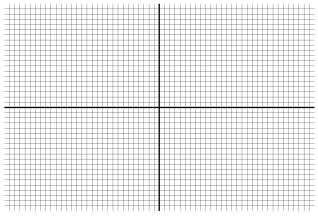
<E> -[] Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali.

<F> -[] Scrivere il Polinomio di McLaurin di ordine 3 della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

<G> -[] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.



<H> -[] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



Esame Febbraio 14/02/2017

Si consideri la superficie S generata dalle circonferenze di raggio $\sin(t)$, centrate in $(0,0,t)$ per $t \in [0,\pi]$ e giacenti nel piano parallelo al piano (x,y).

<A> -[]Determinare una parametrizzazione di S e verificare se S è semplice, regolare.

<B> -[] Calcolare l'area di S

<C> -[] Calcolare $\int_S x dy dx$

<D> -[]Calcolare il volume del solido V delimitato da S
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = x^3 y(x)$$

<E> -[] Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali.

<F> -[] Determinare a_n in modo che $\sum_0{}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

<G> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione (espresse come serie di potenze)

<H> -[] Determinare la soluzione dell'equazione

$$y'''(x) = x^3 y(x) + x^5$$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

Esame Giugno 13/06/2017

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq \ 2 - x \leq 2 \ , \ z \leq \ 2 - y \leq 2, x \leq 1 \ , \ y \leq 1\}$$

e $S = \partial V$

<A> -[]Calcolare la misura di V

<B> -[]Determinare una parametrizzazione di S **e verificare se** S **è semplice, regolare.**
Si consideri

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq 1 - x \leq z \leq \ 2 - x \leq 2 \ , \ 0 \leq 1 - y \leq z \leq \ 2 - y \leq 2\}$$

e $T = \partial W$

<C> -[]Calcolare la misura di W

<D> -[]Determinare una parametrizzazione di T **e verificare se** T **è semplice, regolare.**
Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + -\frac{5}{4}z(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = z(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) + t \end{cases}$$

<E> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

<F> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

<G> -[3] Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

<H> -[3] Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

<I> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$**.**

<J> -[3] Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$**.**

<K> -[4] Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$**.**

Esame Giugno 27/06/2017

Si consideri il cilindro C le cui generatrici sono parallele al vettore $(1,1,1)$ che interseca il piano $z=0$ lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

<A> -[] Determinare le equazioni parametriche di C

<B> -[]Calcolare l'area della parte di C delimitata dai piani $z=0$ e $z=1$

<C> -[]Calcolare Il volume della parte di spazio delimitata da C e dai piani $z=0$ e $z=1$

<D> -[]Calcolare il flusso attraverso la frontiera della parte di spazio delimitata da C e dai piani $z=0$ e $z=1$ del campo vettoriale $(x^2,0,0)$

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 + (y(x))^3$$

<E> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

<F> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(1)=0$, $y'(1)=1$.

<G> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

<H> -[] Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione.

Esame Luglio 11/07/2017

Si consideri la superficie S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t,s) = \cos(t) + s \\ y(t,s) = \sin(t) + s \\ z(t,s) = s \end{cases} \qquad t \in 0, 2\pi] \ , \ s \in [0,1]$$

<A> -[] Stabilire se S è semplice , regolare, limitata ,chiusa.

<B> -[]Calcolare l'area di S

<C> -[]Calcolare Il volume della parte di spazio delimitata da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$

<D> -[]Calcolare il flusso attraverso la frontiera della parte di spazio delimitata da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$ del campo vettoriale $(x^2, 0, 0)$

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \\ a_0 = 5 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

e la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$$

<E> -[] Trovare i k per i quali $a_n = k$ soddisfa la regola di ricorrenza

<F> -[] Trovare gli h per i quali $a_n = hn$ soddisfa la regola di ricorrenza

<G> -[] Trovare, se possibile k ed h per i quali $a_n = k + hn$ soddisfa la regola di ricorrenza

<H> -[] Determinare il raggio di convergenza ρ della serie

<I> -[]Studiare la convergenza della serie per $x = \pm\rho$

Esame Settembre 12/09/2017

Si consideri la superficie S generata congiungendo, mediante una semicirconferenza, i punti che si trovano sulla stessa retta parallela all'asse z di due circonferenze centrate in $(0,0,-1)$ e $(0,0,1)$ aventi raggio 1 e giacenti in piani paralleli al piano x,y

<A> -[] Determinare una parametrizzazione di S e stabilire è semplice , regolare, limitata ,chiusa.

<B> -[] Calcolare l'area di S

<C> -[] Calcolare Il volume della parte di spazio delimitata da S e dai piani $z=0$ e $z=1$
Si consideri il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z)=(\frac{1}{x},\tan(y),2z)$$

<D> -[] Determinare il campo di definizione di F e stabilire se f è conservativo.

<E> -[] Determinare un potenziale di F precisando il campo di definizione..

<F> -[] Determinare tutti i potenzial1 di F precisando il campo di definizione..

<G> -[]Calcolare il lavoro compiuto da F lungo il segmento di retta che congiunge i punti $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$

Prima Prova parziale 10/11/2017

Siano $R, H > 0$ e si consideri la curva definita da

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = R\cos(\theta) \\ x(\theta) = R\sin(\theta) \\ x(\theta) = H\theta \end{cases} \quad , \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

<A> -[4] Parametrizzare γ mediante la lunghezza d'arco.

<B> -[3] Determinare il versore tangente T

<C> -[3] Determinare il versore normale N

<D> -[3] Determinare il versore binormale B

<E> -[2] Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ lungo la curva γ.

<F> -[9] Determinare una parametrizzazione della superficie generata da una circonferenza centrata in un punto di γ di raggio proporzionale alla lunghezza d'arco, giacente in un piano ortogonale alla curva γ.

Si consideri la superficie definita da

$$S = \begin{cases} x = (t)\cos(s) \\ y = (t)\sin(s) \\ z = s \end{cases} \qquad s \in [0, 2\pi] \ , \ t \in [0, 1]$$

<G> -[2] Calcolare il versore N normale alla superficie S

<H> -[4] Calcolare l'area della superficie S

<I> -[4] Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie S

<J> -[6] Descrivere la superficie studiata

Seconda Prova parziale 01/12/2017

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$$

<A> -[4]Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

<B> -[3] Dimostrare che deve essere $a_{2n+1} = 0$ per ogni n naturale.

<C> -[3] Determinare i valori che possono assumere a_0 ed a_1

<D> -[3] Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

<E> -[3] Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione data che si possono esprimere come serie di potenze centrate in $x_0 = 0$

<F> -[4] Determinare una espressione esplicita per a_n

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$x2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 16)y(x) = 0$$

<G> -[4]Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

<H> -[3] Dimostrare che deve essere $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

<I> -[3] Dimostrare che deve essere $a_{2n-1} = 0$ per ogni n naturale.

<J> -[3] Determinare i valori che può assumere a_4

<K> -[3] Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

<L> -[4] Determinare l'ordine di infinitesimo di y in $x_0 = 0$

Terza Prova parziale 08/01/2018

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2t \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + z(t) + e^t \\ \dot{u}(t) = x(t) + y(t) + 1 \end{cases}$$

-○ [6] Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

<A> -[6] Determinare tutte le soluzioni del sistema

<B> -[6] Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo.

<C> -[6] Determinare una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo.

<D> -[6] Determinare l'insieme W di tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che

$$x(0) = u(0)$$

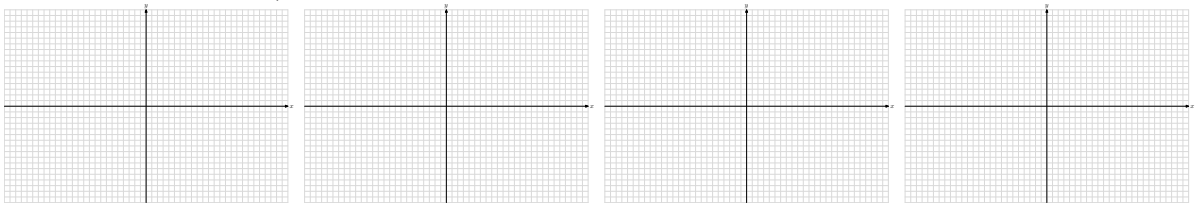
<E> -[9] Stabilire se W è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione ed una base

Terza Prova parziale 09/01/2018

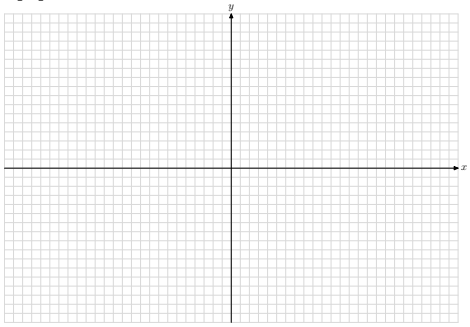
-○ [20] Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 + \sqrt{(y(x)}$$

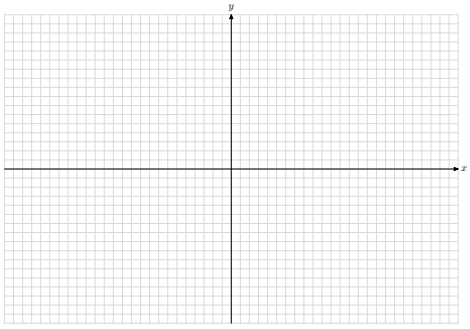
relative ai dati iniziali $[y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{5/3}]$ **,** $[y(0) = 1, y'(0) = -\sqrt{5/3}]$ **,** $[y(0) = 1, y'(0) = 1]$ **,** $[y(0) = 1, y'(0) = 2]$ **. (Può essere utile svolgere questo punto dopo aver risposto alle domande successive.)**



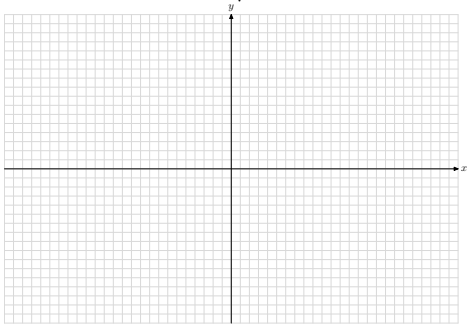
<A> -[8]Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x + 2/3x\sqrt{x} - a - 2/3a\sqrt{a} + b$ **al variare di** $a, b \in \mathbb{R}_+$



<B> -[6] Disegnare il grafico della funzione $F(x) = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt$



<C> -[6] Calcolare $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{t}}} dt$ **e disegnarne il grafico**



Esame Gennaio 09/01/2018

Si consideri

$$V = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \ , \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ , \ \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \ , \ z \geq 0\}$$

e $S = \partial V$

<A> -[]Calcolare la misura di V

<B> -[]Determinare una parametrizzazione di S

<C> -[]Calcolare la misura di S

<D> -[]Calcolare il flusso uscente da S **del campo vettoriale** F **di componenti**

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y - e^t \\ \dot{y}(t) = z(t) + t \\ \dot{z}(t) = z(t) + y(t) + 1 \end{cases}$$

<E> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

<F> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

<G> -[3] Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

<H> -[3] Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

<I> -[3] Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$**.**

Esame Gennaio 23/01/2018

Si consideri

$$V = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \ , \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ , \ 1/2 \leq z \leq 3/2\}$$

e $S = \partial V$

<A> -[]Calcolare la misura di V

<B> -[]Determinare una parametrizzazione di S

<C> -[]Calcolare la misura di S

<D> -[]Calcolare il flusso uscente da S **del campo vettoriale** F **di componenti**

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = z(t) + \sin(t) \\ \dot{z}(t) = z(t) + x(t) + 1 \end{cases}$$

<E> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

<F> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

<G> -[3] Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

<H> -[3] Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

<I> -[3] Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $y0) = \dot{y}(0)$**.**

Esame Febbraio 13/02/2018

Si consideri la superficie S generata dai segmenti di retta aventi un estremo P sulla circonferenza di centro $(0,0,0)$ e raggio 1 giacente nel piano $z=0$ ed il secondo estremo Q sulla circonferenza di centro $(0,0,1)$ e raggio 1 giacente nel piano $z=1$ scelti in modo che, detta Q' la proiezione di Q sul piano $z=0$ e indicata con O l'origine, l'angolo $\widehat{POQ'}$ sia $\pi/4$

<A> -[]Determinare una parametrizzazione di S

<B> -[] Calcolare l'area di S

<C> -[]Calcolare il volume del solido delimitato da S e dai piani $z=0$ e $z=1$

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x,y)=\sum_{0}^{+\infty}\frac{y^n}{x^n}$$

<D> -[3] Determinare il campo di definizione di f

<E> -[3] Stabilire dove è continua e dove è parzialmente derivabile e differenziabile

<F> -[3] Approssimare $f(2,1)$ a meno di 0.001

<G> -[3] Determinare una espressione esplicita di f.

Esame Giugno 12/06/2018

Si consideri la superficie S che si ottiene congiungendo i punti del segmento di retta S_1 avente estremi $(0,0,0)$ e $0,1,1)$ con i punti del segmento di retta S_2 avente estremi $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$

<A> -[]Determinare una parametrizzazione di S

<B> -[]Calcolare la misura di S

<C> -[] Determinare l'espressione di un campo vettoriale che, fissato $P_0 \in \mathbb{R}^3$, associa ad ogni punto P dello spazio un vettore avente direzione $P-P_0$ ed intensità proporzionale all'inverso del quadrato della distanza $||P - P_0||$

<D> -[]Calcolare il flusso attraverso S del campo vettoria F

Si consideri l'equazione differenziale

$$(1-x)^2 y'' = 2y(x)$$

<E> -[3] Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

l

<F> -[3] Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data tale che

$$y(0) = 1 \qquad , y'(0) = 1$$

<G> -[3] Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data tale che

$$y(0) = 1 \qquad , y'(0) = 0$$

<H> -[3] Stabilire se le soluzioni trovate sono linearmente indipendenti e determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

Esame Giugno 26/06/2018

Si consideri la superficie S mediante una rotazione completa attorno all'asse z la parte del piano (x, z) definita dalle disuguaglianze

$$2x + z \leq 4 \quad , \quad 2x - x^2 - z \leq 0 \quad , \quad z \geq 0 \ , \ x \geq 0$$

<A> -[]Determinare una parametrizzazione di S

<B> -[]Calcolare la misura di S

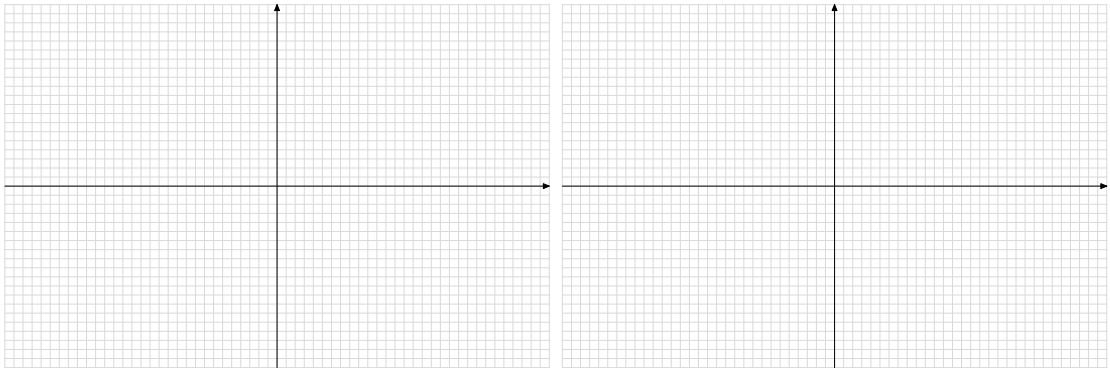
<C> -[] Calcolare il volume del solido delimitato da S

<D> -[]Determinare una parametrizzazione del volume del solido delimitato da S
Si consideri il luogo dei punti del piano L definito da

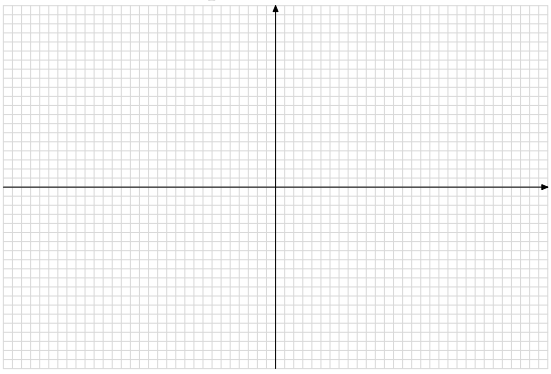
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

<E> -[3] Determinare, al variare di m le intersezioni $(x(m), y(m))$ di L con la retta per l'origine che ha coefficiente angolare m

<F> -[] Disegnare i grafici di x ed y in funzione di m



<G> -[3] Disegnare L e dimostrare che L è una curva chiusa non semplice.



<H> -[3] Calcolare l'are delimitata da L (può essere utile considerare $m = \tan(\theta)$) o considerare l'equazione polare della curva)

Esame Luglio 10/09 /2018

Si consideri la parte di corona sferica S delimitata dalle sfere di centro l'origine e raggi 1 e 2 e giacente nel primo ottante ed il campo vettoriale F che associa ad ogni punto dello spazio un vettore diretto verso l'origine di lunghezza proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dall'origine.

<A> -[]Determinare una parametrizzazione di S

<B> -[]Calcolare la misura di S

<C> -[] Determinare l'espressione di F

<D> -[]Calcolare il flusso di F attraverso S

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

<E> -[3] Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

l

<F> -[3] Determinare la successione esplicitamente a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data tale che

$$y(0) = 1 \qquad , y'(0) = 1/2$$

<G> -[3] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

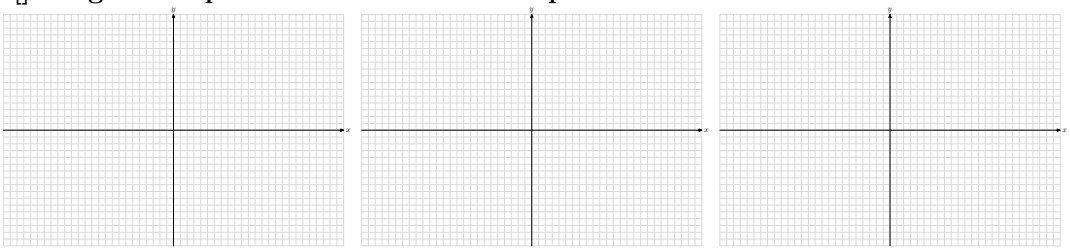
Esame Settembre 11/09/2018

Si consideri la curva γ definita sulla superficie di una sfera di centro l'origine e raggio 1 imponendo la condizione $\theta = \phi$ e considerando $\theta \in [0, 2\pi]$

<A> -[] Determinare una parametrizzazione di γ

<B> -[] Calcolare la lunghezza di γ

<C> -[]Disegnare le proiezioni della curva sui piani coordinati



<D> -[] Calcolare l'area delle parti di superficie sferica in cui γ divide l'intera sfer.a
Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 4y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 4y(t) + t \\ \dot{z}(t) = 2y(t) + 3z(t) + 1 \end{cases}$$

<E> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

<F> -[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema completo.

<G> -[3] Determinare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

<H> -[3] Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

<I> -[3] Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato tali che $x(0) = 0$.

Prima Prova parziale 02/11/2018

Si consideri la parte di spazio definita da

$$V = \{(x, y, z) \ : \ 0 \leq z \leq \theta \ , \ 1 \leq \rho \leq 2 \ , \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Dove (ρ, θ) sono le coordinate polari nel piano (x, y).

<A> -[6] Parametrizzare ∂V
Siano

$$S_0 = \{(x, y, z) \ : \ z = 0, \ 1 \leq \rho \leq 2 \ , \theta \in [0, 2\pi]\} \qquad , \qquad S_1 = \{(x, y, z) \ : \ z = \theta, \ 1 \leq \rho \leq 2 \ , \ , \theta \in [0, 2\pi]\}$$

<B> -[4] Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso S_0 e attraverso S_1

<C> -[6] Determinare una parametrizzazione di ∂S_1

<D> -[4] Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ lungo la curva ∂S_1
vspace2cm Siano

$$\gamma_1 = \{(x, y, z) \ : \ z = \theta, \ \rho = 1 \ , \theta \in [0, 2\pi]\} \qquad , \qquad \gamma_2 = \{(x, y, z) \ : \ z = \theta, \ \rho = 2 \ , \ , \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e si consideri la superficie P generata dalle parabole giacenti nel piano definito da $y = x \tan(\theta)$ passanti che si annullano nei punti $\gamma_1(\theta)$ e $\gamma_2(\theta)$

<E> -[2] Parametrizzare γ_1

<F> -[2] Parametrizzare γ_2

<G> -[8] Parametrizzare P

<H> -[4] Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie S

<I> -[4] Descrivere la superficie studiata

Seconda Prova parziale 03/12/2018

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad , \quad x \geq 0$$

<A> -[4] Determinare il limite puntuale della successione f_n precisando il suo campo di definizione.

<B> -[7] Determinare dove la convergenza puntuale di f_n è anche uniforme..
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

<C> -[2]Determinare il campo di definizione di f

<D> -[4] Determinare i coefficienti di Fourier di f su $[-\pi, \pi]$

<E> -[4] Verificare che f è limite uniforme della serie su $\mathbb{R}$
vspace2cm
Si consideri la serie definita , per $a, b \in \mathbb{R}_+$, da

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} \Big(\Big(\frac{x}{a}\Big)^n + \Big(\frac{b}{x}\Big)^n \Big)$$

<F> -[2] Determinare se si tratta di una serie di potenze ed in caso affermativo indicarne i coefficienti

<G> -[7] Studiare la convergenza uniforme della serie al variare di a, b

<H> -[4] Indicare se esistono a, b per i quali la serie non converge puntualmente per nessun valore di x reale.

<I> -[6] Esprimere, nel caso in cui la serie sia convergente, la sua somma in termini di funzioni elementari

Terza Prova parziale 07/01/2019

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)\cos^2(y'(x))$$

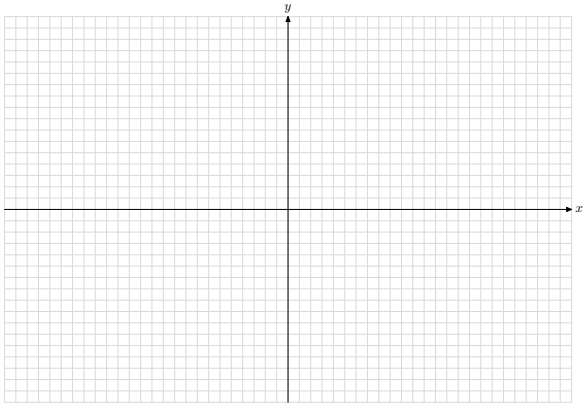
ed i dati iniziali
$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

<A> -[2] Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo e determinare eventuali soluzioni costanti.

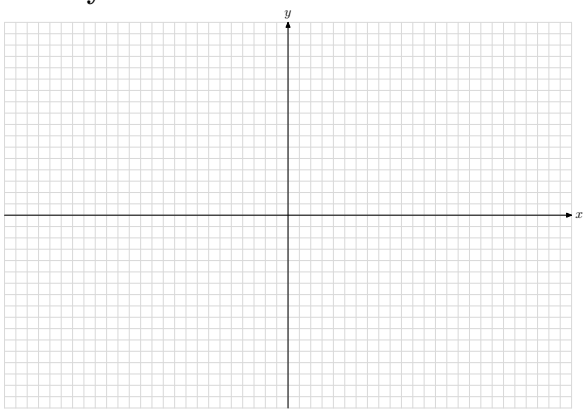
<B> -[2] Verificare che se y è soluzione dell'equazione data allora anche $z(x) = y(x+\bar{x})$ è soluzione.

<C> -[2] Verificare che se y è soluzione dell'equazione data allora anche $z(x) = y(x)+\bar{y}$ è soluzione.

<D> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = \pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo

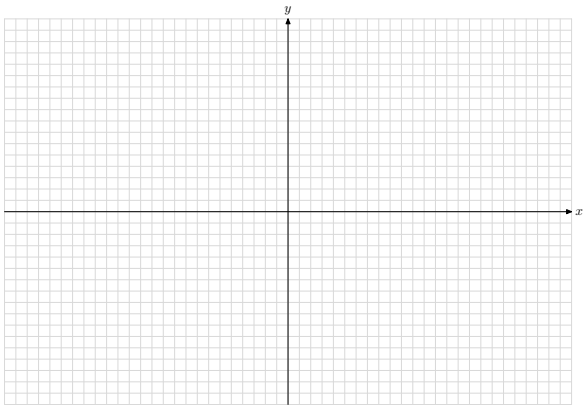


<E> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = -\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo

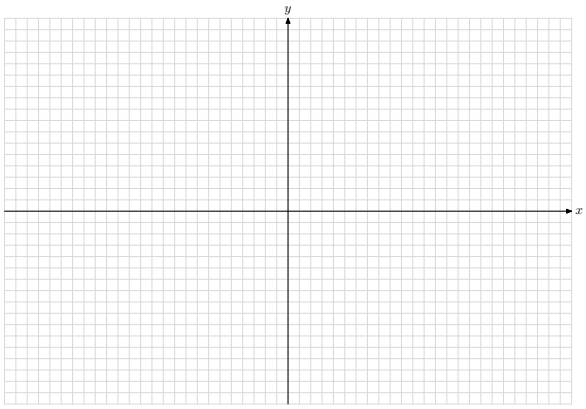


vspace2cm

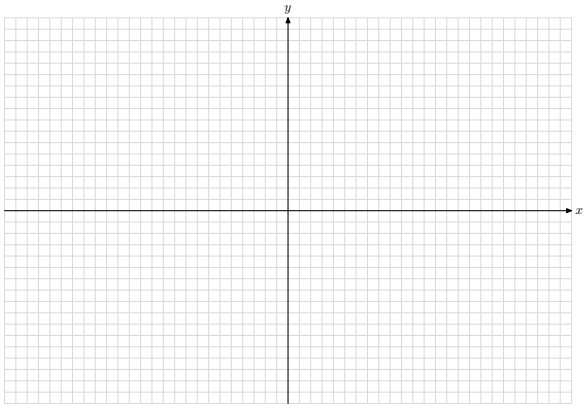
<F> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = 3\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo



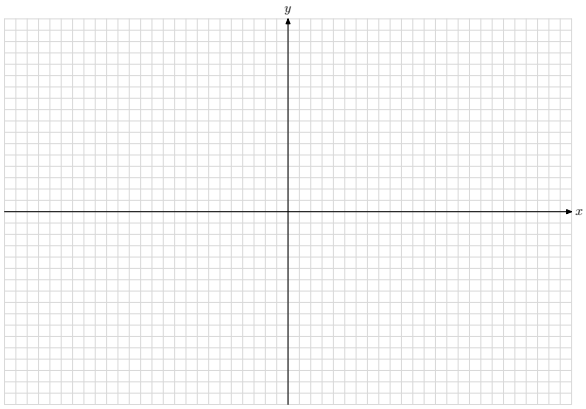
<G> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = -3\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo



<H> -[5] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo al variare di y_1



<I> -[5] Siano $y_1 = \pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo al variare di x_0, y_0

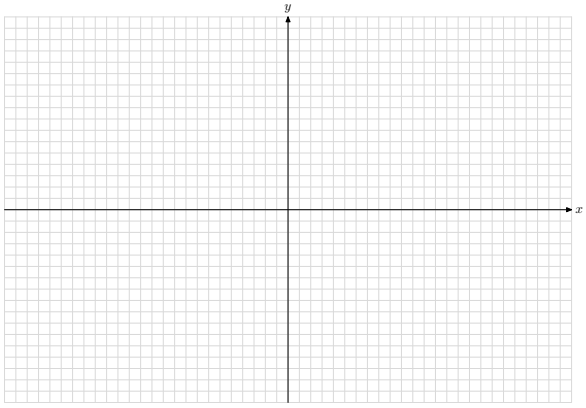

y
x

Esame Gennaio 08/01/2019

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 + z^2 \ , \ y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

<A> -[] Studiare la proiezione di V sul piano (x, y)



<B> -[6] Parametrizzare ∂V

<C> -[5]Calcolare l'area di ∂V

<D> -[4] Calcolare il flusso attraverso ∂V del campo vettoriale di componenti $(0, 0, 1)$
vspace2cm
Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0$$

<E> -[4]Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

<F> -[3] Dimostrare che deve essere $a_{2n+1} = 0$ per ogni n naturale.

<G> -[4] Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

<H> -[4] Determinare se esistono soluzioni dell'equazione nella forma considerata, se formano uno spazio vettoriale e qualè la sua dimensione.

Esame Gennaio 22/01/2019

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 = 1 + y^2 \ , \ y^2 + z^2 = 1 + x^2, z \geq 0, |x| \leq 1\}$$

<A> -[] Studiare V indicando se si tratta di un volume, una superficie o una curva.

<B> -[] Parametrizzare V in accordo con quanto affermato precedentemente.

<C> -[] Calcolare la misura di V.

<D> -[] Calcolare la misura di ∂V

vspace2cm

Si consideri l'equazione differenziale

$$(x-1)^2 y''(x) = y(x)$$

<E> -[] Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali.

<F> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

<G> -[] Determinare tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze su $\mathbb{R}$

<H> -[] Determinare tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Esame Febbraio 19/02/2019

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, 0 \leq z \leq 1, z \leq 1 + y\}$$

<A> -[] Determinare una parametrizzazione di ∂V

<B> -[] Calcolare l'area di di ∂V

<C> -[] Calcolare il flusso del campo vettoriale di componenti $(0, 0, 1)$ **attraverso** ∂V

<D> -[] Calcolare il flusso del campo vettoriale di componenti $(0, 0, 1)$ **attraverso**

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1 + z^2, 0 \leq z \leq 1, z \leq 1 + y\}$$

vspace2cm

Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = \cos(y(x))$$

<E> -[4] Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali.

<F> -[3] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$**,** $y'(0) = \pi/4$

<G> -[3] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0) = 0$**,** $y'(0) = -\pi/4$

<H> -[3] Disegnare il grafico della soluzione al variare dei dati iniziali.

Esame Giugno 11/06/2019

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\Big(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)$$

<A> -[]Studiare l'insieme di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso

<B> -[] Stabilire se F è conservativo ed in caso affermativo determinarne tutti i potenziali

<C> -[] Descrivere la superficie precisando se è semplice regolare e chiusa

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-2x+2=0\}$$

e calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso V

<D> -[]Descrivere la linea definita da

$$L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-2x+2=0\ ,x+y+z=3\ \}$$

precisando se è semplice regolare e chiusa e calcolare il lavoro del campo vettoriale F lungo la linea L

vspace2cm

Si consideri l'equazione differenziale

$$4\sqrt{|y(x)|}y''(x)=1$$

<E> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0)=1$, $y'(0)=1$

<F> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

<G> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0)=-1$, $y'(0)=1$

<H> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y(0)=-1$, $y'(0)=-1$

Esame Giugno 25/06/2019

Si consideri l'equazione differenziale

$$(1+x)y'(x) = \frac{y(x)}{2}$$

<A> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x > -1$

<B> -[] Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite per $x < -1$

<C> -[] Determinare tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze centrate in 0

<D> -[] Determinare lo sviluppo di McLaurin di tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze centrate in 0

vspace2cm

Si consideri la curva definita da

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} \\ y(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

<E> -[] Disegnare la curva nel piano;

<F> -[] Stabilire se è semplice, regolare , chiusa.

<G> -[] Determinare i punti della curva aventi massima e minima distanza dall'origine.

<H> -[] Scrivere le equazioni parametriche della superficie ottenuta facendo ruotare la curva attorno all'asse x **di** 2π **radianti.**

Esame Luglio 09/07/2019

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x^2+2y^2)^{3n}}{2n}$$

<A> -[] Determinare il campo di definizione di f e disegnarlo nel piano.

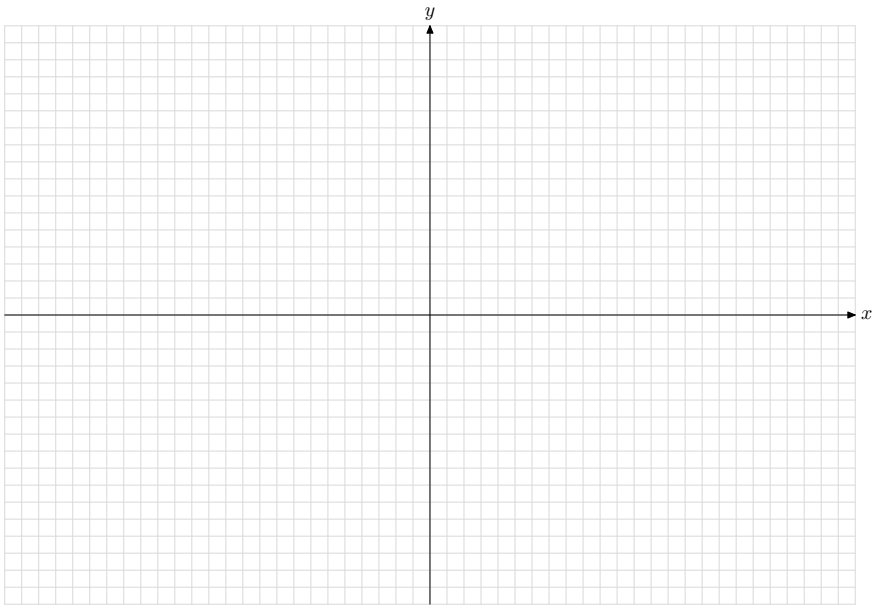
<B> -[] Studiare la continuità di f

<C> -[] Studiare la differenziabilità di f

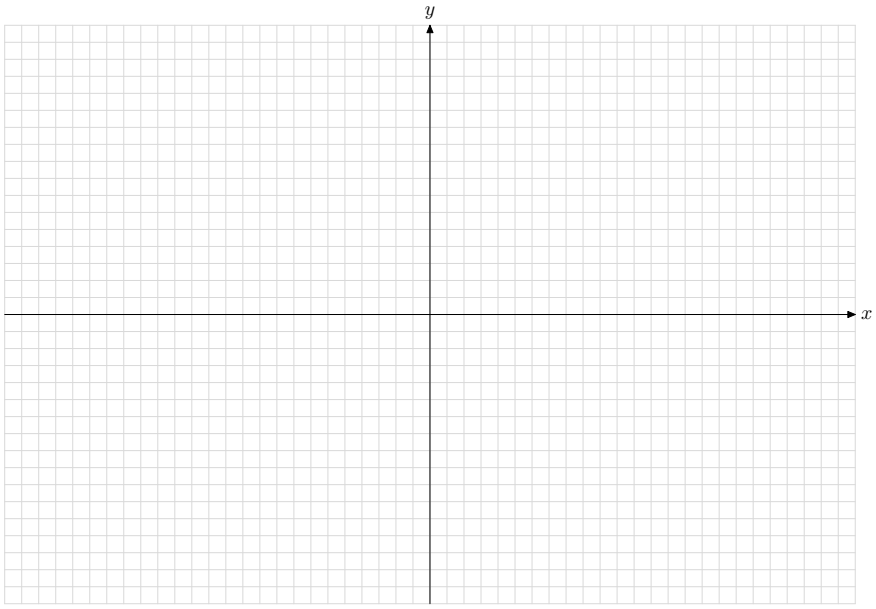
<D> -[] Esprimere f mediante funzioni elementari
vspace2cm
Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases}4\sqrt{|y(x)|}y''(x)=1\\ y(0)=y_0\\ y'(0)=y_1\end{cases}$$

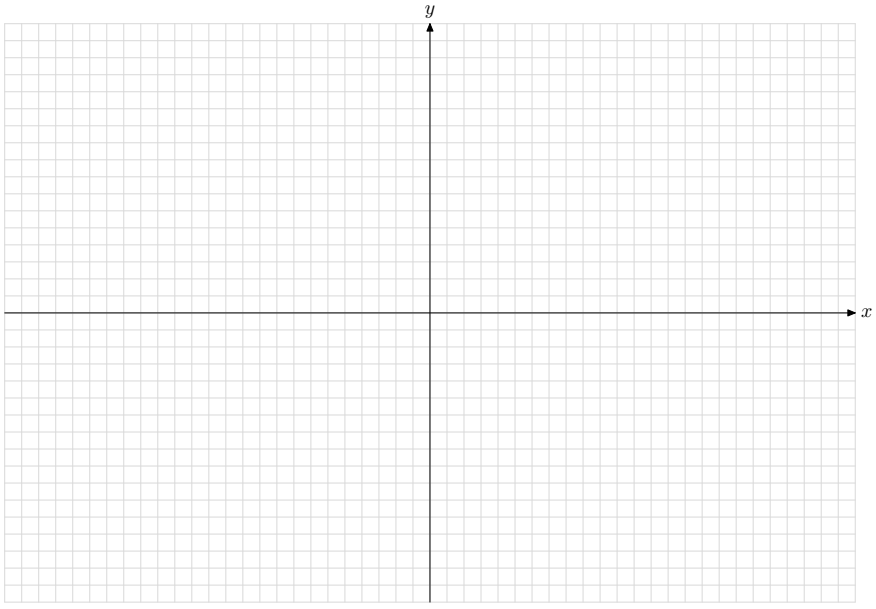
<E> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0=1$, $y_1=1$ e calcolarla.



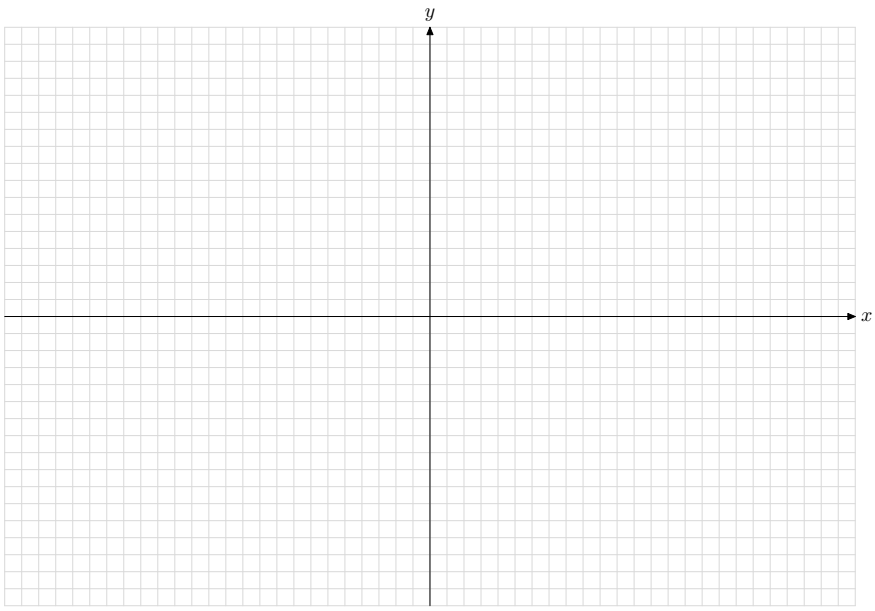
<F> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0=1$, $y_1=-1$ e calcolarla.



<G> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = -1$, $y_1 = 1$ e calcolarla.



<H> -[] Disegnare il grafico della soluzione tale che $y_0 = -1$, $y_1 = -1$ e calcolarla.


y
x

Esame Settembre 10/09/2019

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 5xy'(x) + 5y(x) = 0$$

<A> -[] Studiare esistenza ed unicità della soluzione

<B> -[] Determinare tutte le soluzioni che sono rappresentabili come serie di potenze centrate in 0

<C> -[] Verificare che l'insieme delle soluzioni definite su $\mathbb{R}$ **costituisce uno spazio vettoriale e determinarne la dimensione**

<D> -[] Determinare una base per lo spazio delle soluzioni definite su $\mathbb{R}$

vspace2cm

Si consideri la curva definita da

$$\begin{cases} x(t) = t + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$

<E> -[] Disegnare la curva nel piano;

<F> -[] Stabilire se è semplice, regolare , chiusa.

<G> -[] Calcolare la lunghezza della curva .

<H> -[] Scrivere le equazioni della curva descritta da un punto che si muove in senso antiorario su una circonferenza di raggio 1 **con moto circolare uniforme e velocità** v_1 **,** $\|v_1\| = 1$ **il cui centro si sposta con velocità** v_2 **lungo l'asse delle** x**,** $\|v_2\| = 1$

<I> -[] Calcolare la velocità v **del punto e determinarne il modulo.**