# Complementi di Analisi Matematica

## Prove d'Esame

## A.A. 2012/2013

# Prima Prova parziale 23/11/2011

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 1, x - y)$$

**<A>** Stabilire se e dove l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $(z, y) = \phi(x)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ .

**<B>** Calcolare $\nabla\phi$

**<C>** Determinare esplicitamente una espressione di $\phi$ in termini di funzioni elementari precisandone la validità.

**<D>** Calcolare massimi e minimi assoluti di $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ vincolato a $f(x, y, z) = 0$
Sia

$$V = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \geq 2(x^2 + y^2) \ , \ z \geq 0 \ , \ z \leq x + 3\}$$

**<E>** Calcolare il volume di $V$

# Seconda Prova parziale 08/01/2013

Si consideri la curva $\gamma$, nel piano $(x, z)$, definita da

$$\begin{cases} z = \cos(t) \\ y = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

**<A>** Disegnare $\gamma$

**<B>** Stabilire se $\gamma$ è semplice, regolare, chiusa

**<C>** Calcolare $\int_\gamma xdy + ydx$

Sia $S$ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse $z$ della parte di $\gamma$ che giace nel semipiano delle ascisse positive

**<D>** Determinare una parametrizzazione di $S$

**<E>** Calcolare l'area della superficie $S$

# Esame Gennaio 08/01/2013

Si considerino

$$f(x,y) = x - 1 \qquad , \qquad g(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$$

**<A>** Calcolare

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

essendo $D$ definito dalla disuguaglianza $g(x,y) \leq 0$

**<B>** Determinare delle equazioni parametriche per la curva $\gamma$ definita da $z - f(x,y) = g(x,y) = 0$

**<C>** Determinare delle equazioni parametriche per la superficie ottenuta congiungendo ogni punto della curva $\gamma$ con l'origine.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{y - x^2}$$

**<D>** Disegnare le curve di livello di $f$

**<E>** Studiare la continuità di $f$ nell'origine

**<F>** Calcolare le derivate direzionali di $f$ nell'origine.

**<G>** Stabilire se $f$ è differenziabile nell'origine

# Esame Gennaio 29/01/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1 & x^2+y^2+z^2\geq 1\\ x^2+y^2+1 & x^2+y^2+z^2<1\end{cases}$$

**<A>** Determinare dove $f$ è definita e dove $f$ è continua.

**<B>** Calcolare le derivate parziali di $f$ nel punto $P=(0,0,1)$

**<C>** Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di $f$ sul suo campo di definizione.

**<D>** Calcolare $\int_V f(x,y,z)dxdydz$ essendo $V$ la parte del cubo con due vertici coincidenti con i punti $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ esterna alla sfera di centro l'origine e raggio 1.

Si consideri il campo vettoriale $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x,y,z)=(f(x,y,z),g(x.y,z),h(x,y,z))=(1/(x+10),1/(y+10),1/z)$$

**<E>** Determinare, se esistono tutti i potenziali di $F$

**<F>** Calcolare il lavoro fatto dal campo lungo la curva $\gamma$ definita da

$$\begin{cases}x=sin(t)\\ y=sin(2t)\\ z=\pi\end{cases}\qquad t\in[0,2\pi]$$

**<G>** Calcolare il flusso del campo attraverso la superficie della metà superiore della sfera unitaria centrata in $(2,2,2)$

# Esame Febbraio 19/02/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \min\{(y-x)(y-x^3), 0\}$$

**<A>** Studiare continuità e derivabilità di $f$

**<B>** Studiare la differenziabilità di $f$

**<C>** calcolare massimi e minimi assoluti e relativi di $f$.

**<D>** calcolare $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$.
Sia $G(f)$ il grafico di $f$ e

$$S = \{(x,y,z) \in G(f) \ : \ (x,y) \in [0,1]\times[0,1]\}$$

**<E>** Determinare una parametrizzazione di $S$.

**<F>** Calcolare l'area di $S$.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 6y'(x) + 6y(x) = x^2$$

**<G>** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

**<H>** Stabilire se l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.

**<I>** Determinare, se esistono, le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

# Esame Giugno 11/06/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \min\{yx, x^2 + y^2\}$$

**<A>** Studiare la differenziabilità di $f$

**<B>** calcolare massimi e minimi assoluti e relativi di $f$.
Sia $G(f)$ il grafico di $f$ e

$$S = \{(x,y,z) \in G(f) \ : 0 \leq \ z \leq 1\}$$

**<C>** Determinare una parametrizzazione di $S$.

**<D>** Calcolare l'area di $S$.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x)^2 = y'(x)^2 - y'(x)^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**<E>** Determinare le soluzioni del problema dato
sia poi

$$\begin{cases} y(x)y''(x)^2 = y'(x)^2 - y'(x)^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

**<F>** Determinare una soluzione del problema dato.

# Esame Giugno 25/06/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

**<A>** Calcolare $\int_A f(x,y)dxdy$ essendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2 \geq 1\ ,\ \rho < 1+\theta\}$$

essendo $\rho$ e $\theta$ le coordinate polari nel piano $x, y$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

**<B>** Calcolare $\int_A f(x,y)dxdy$ essendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \rho < 1+\theta\}$$

essendo $\rho$ e $\theta$ le coordinate polari nel piano $x, y$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$f_1(x,y) = \frac{4x(1-x^2)}{(y-x^2+1)(y+x^2-1)} \quad , \quad f_2(x,y) = \frac{2y}{(y-x^2+1)(y+x^2-1)}$$

**<C>** Stabilire se e dove il campo considerato è conservativo.

**<D>** Determinare tutte le primitive del campo.

**<E>** Calcolare $\int_\Gamma f_1dx + f_2dy$ essendo $\Gamma$ la parte di circonferenza di centro l'origine e raggio 1/2 che giace nel semipiano delle ascisse positive.

**<F>** Calcolare $\int_S (f_1)_x + (f_2)_y dxdy$ essendo $S$ la parte di cerchio di centro l'origine e raggio 1/2 che giace nel semipiano delle ascisse positive.

# Esame Luglio 09/07/2013

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 1 + xy$$

**<A>** Determinare l'area della superficie $S$ definita dalla parte del grafico di $f$ che si proietta sul cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1.

**<B>** Calcolare il volume del solido $V$ ottenuto considerando la parte di spazio delimitata da $S$ e dal piano $z = 0$

**<C>** Calcolare il flusso attraverso $\partial V$ del campo vettoriale di componenti $(0, 0, z)$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)(y(x) + y'(x))$$

**<D>** Determinare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 0$ , $y'(0) = a$

**<E>** Determinare la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = a$ , $y'(0) = 0$

# Esame Settembre 17/09/2013

Si consideri il solido $V$ definito in $\mathbb{R}^3$ dalle seguenti disequazioni

$$z \geq (x-1)^2 + y^2 \qquad x^2 + y^2 \leq 1 \qquad z \leq 5$$

**<A>** Calcolare il volume di $V$

**<B>** Determinare una rappresentazione parametrica di $\partial V$

**<C>** Calcolare il flusso attraverso $\partial V$ del campo vettoriale di componenti $(2x, y^2, z))$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|} + xy(x)$$

**<D>** Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 1$, studiando in particolare l'unicità.

**<E>** Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = -1$, studiando in particolare l'unicità.

**<F>** Determinare le soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione data con condizioni iniziali $y(0) = 0$, studiando in particolare l'unicità.