

## Prima Prova Scritta 12/03/1998

---

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{x^2 + 3a}{x^2 + a} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Dove  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ .

$A_2 \bigcirc$  Determinare tutti i maggioranti di  $A$ .

$B_2 \bigcirc$  Determinare tutti i minoranti di  $A$ .

$C_1 \bigcirc$  Determinare  $\sup A$ .

$D_1 \bigcirc$  Determinare  $\inf A$ .

$E_1 \bigcirc$  Stabilire se  $A$  ammette massimo o ammette minimo ed in caso affermativo trovarli.  
Si consideri l'insieme

$$B = \left\{ \frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \right\}$$

$F_2 \bigcirc$  Determinare  $\sup B$ .

$G_1 \bigcirc$  Determinare  $\inf B$ .

## Seconda Prova Scritta 23/03/1998

---

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3} \quad g: [-4, 4] \rightarrow [-1, 1]$$

dove  $g$  si suppone strettamente crescente e surgettiva

$A_2 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f$  ed il grafico di una possibile  $g$ .

$B_2 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f(g(x))$ .

$C_1 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $g(f(x))$

$D_1 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $(f(x))^2$

$E_1 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f(x^2)$

$F_2 \bigcirc$  Calcolare l'inversa di  $f$  precisando dove  $f$  è invertibile.

$G_1 \bigcirc$  Provare per induzione che

$$\sum_{k=1}^n a = na$$

## Terza Prova Scritta 08/04/1998

---

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \cos(x) - x^2}{x^a} & x > 0 \\ \frac{e^x - b}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

$A_2 \bigcirc$  Al variare di  $a$ , calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

e stabilire se  $f$  è prolungabile per continuità in  $x = 0$  da destra

$B_2 \bigcirc$  Al variare di  $b$ , calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

e stabilire se  $f$  è prolungabile per continuità in  $x = 0$  da sinistra

$C_2 \bigcirc$  Al variare di  $a, b$ , stabilire se  $f$  è prolungabile per continuità in  $x = 0$   
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

$D_1 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f$

Si consideri poi la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = a \end{cases}$$

$E_3 \bigcirc$  Determinare al variare di  $a$  gli eventuali limiti della successione  $a_n$  (Non è necessario giustificare con calcoli le affermazioni, ma si richiede un risultato corretto supportato da considerazioni sul grafico di  $f$ )

## Quarta Prova Scritta 27/04/1998

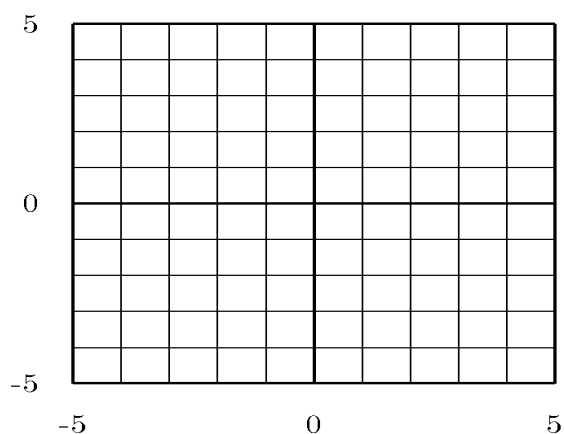
---

**ATTENZIONE:** la somma dei punti assegnati a ciascuna domanda è superiore a 10; pertanto non è necessario rispondere a tutte le domande per ottenere il massimo voto. È opportuno tenere presente che la domanda B dipende dalla A e che la D dipende dalla C. Inoltre la E non dipende da C e D.

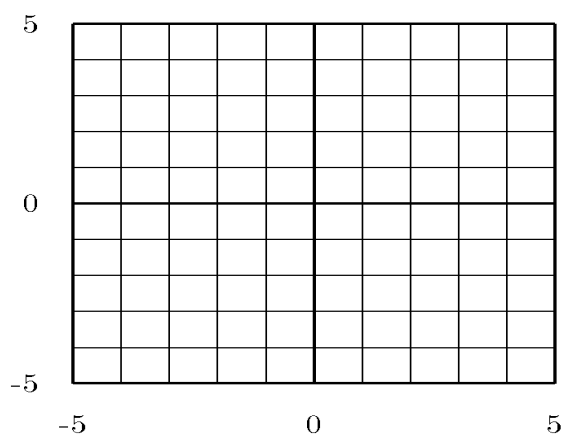
I punti ottenuti oltre il 10 non saranno calcolati nella media ma costituiranno elemento di valutazione positiva in sede d'esame.

---

- $A_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della funzione  $f(x) = \ln(|x|) + \frac{1}{x}$  determinando il punto  $x_m$  ed il valore  $f(x_m)$  di minimo relativo. Provare inoltre che  $f$  ammette un solo zero  $x_0$  e studiare il segno di  $f$

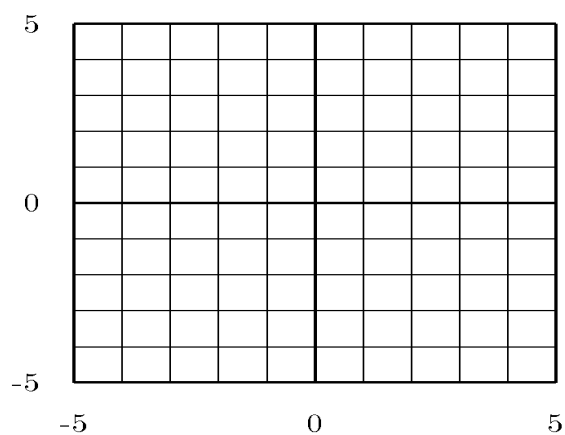


- $B_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $g(x) = e^x \ln(|x|)$  precisando il segno di  $g(x_0)$



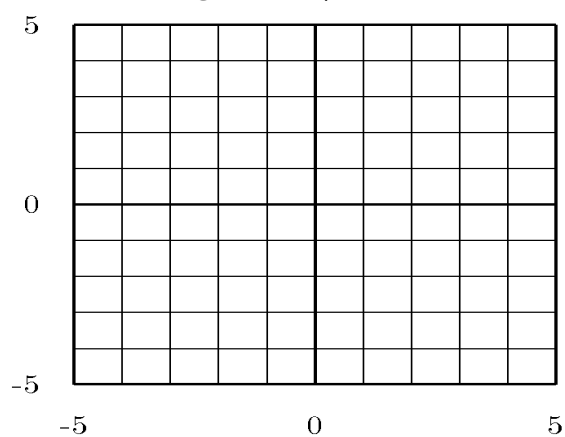
- $C_2 \bigcirc$  Disegnare nello stesso piano i grafici di  $\ln(x)$  e di  $\frac{x-1}{e-1}$  e giustificare il fatto che  $\ln(x) \geq$

$$\frac{x-1}{e-1} \quad \forall x \in [-2, -1] \text{ (interpretare adeguatamente le unità di misura)}$$



$D_3$ ○ Provare che  $x_0 \in [-2, -1]$  ( $x_0$  è lo zero di  $f$ )

$E_3$ ○ Studiare usando la derivata seconda, la convessità di  $g$  (Riportare nel riquadro i grafici che si ritengono utili).



## Quinta Prova Scritta 13/05/1998

**ATTENZIONE:** L'esercizio può essere svolto usando la funzione definita in (1) o la funzione definita in (2). Nel caso (2) il punteggio di ogni domanda è diminuito di 1.

I punti ottenuti oltre il 10 non saranno calcolati nella media ma costituiranno elemento di valutazione positiva in sede d'esame.

(1)○ Sia  $f$  una funzione derivabile infinite volte su  $\mathbb{R}$  tale che

$$f'(x) = \sin(f(x)) \qquad f(0) = \frac{\pi}{2}$$

**OPPURE**

(2)○ Sia  $f(x) = 2 \arctan(e^x)$

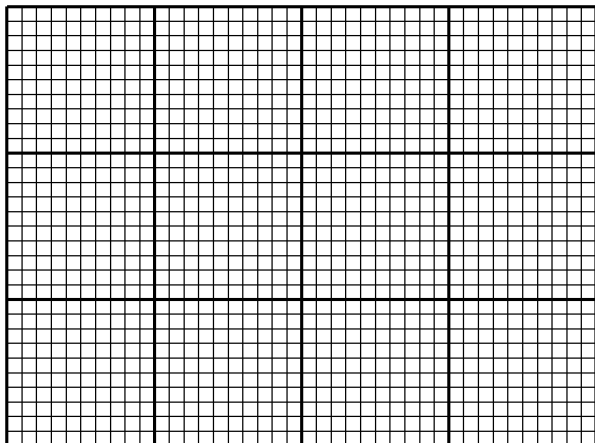
$A_3$ ○

(1) **PER IL CASO (1)** Derivare entrambi i membri della (1) e ricavare  $f''$  in funzione di  $f$  ed  $f'$  ed  $f'''$  in funzione di  $f$ ,  $f'$  ed  $f''$

(2) **PER IL CASO (2)** Calcolare  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$

$B_3$ ○ Calcolare  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'''(0)$  e scrivere il polinomio di Taylor  $P_2$  ed il polinomio di Taylor  $P_3$  di  $f$  centrato in 0 di grado 2 e 3, rispettivamente.

$C_2$ ○ Disegnare il grafico di  $P_2$  e di  $P_3$  per  $|x| \leq 1$

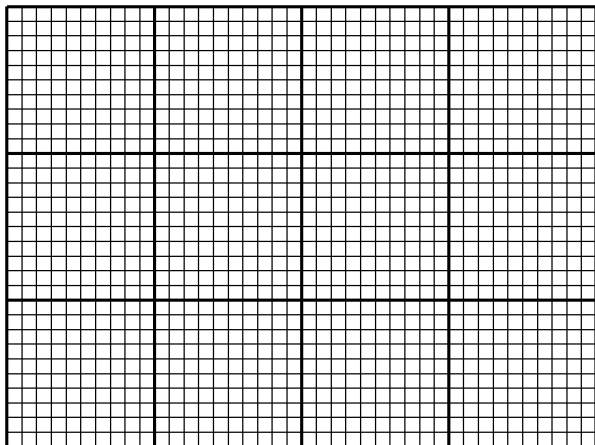


$D_3$ ○ **SCONSIGLIATA PER IL CASO (2)** Provare che  $|f'(x)| \leq 1$ ,  $|f''(x)| \leq 1$ ,  $|f'''(x)| \leq 2$

$E_3$ ○ Supponendo verificato che  $|f'''(x)| \leq 2$  stimare il resto di Lagrange relativo al polinomio di Taylor di grado 2 in funzione di  $x$

$F_3$ ○ Supponendo verificato che  $|f'''(x)| \leq 2$ , disegnare un maggiorante ed un minorante di  $f$  per

$$|x| \leq 1$$



$G_3 \bigcirc$  Supponendo verificato che  $|f'''(x)| \leq 2$ , determinare un maggiorante dell'errore commesso sostituendo  $f$  con  $P_2$  per  $|x| \leq 1/2$ .

$G_3 \bigcirc$  Trovare, se possibile,  $a$  in modo che  $f(x) - ax - \frac{\pi}{2}$  sia infinitesima in 0 di ordine superiore al secondo.

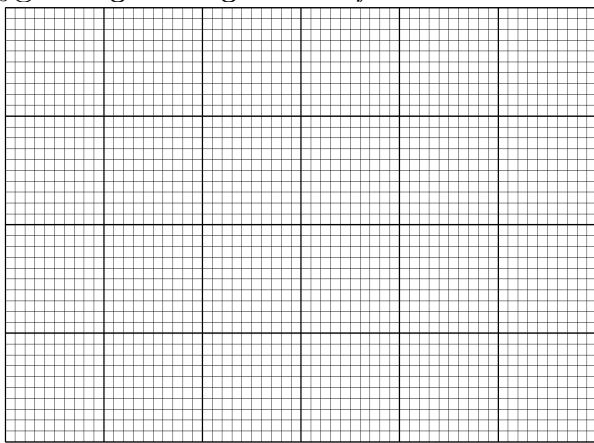
## Sesta Prova Scritta 22/05/1998

---

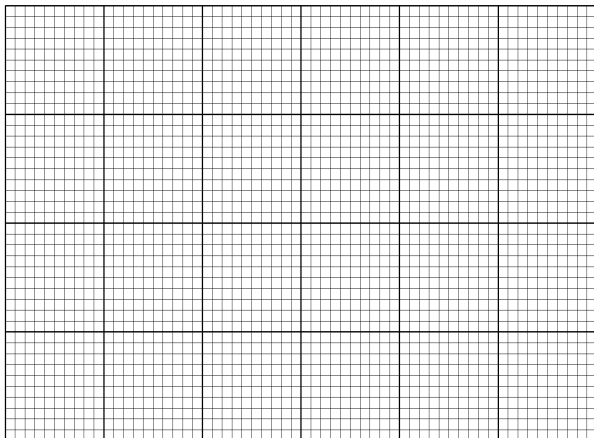
Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{|x|}} & -1 \leq x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^4} & x \geq 1 \end{cases}$$

$A_3$  ☐ Disegnare il grafico di  $f$ .

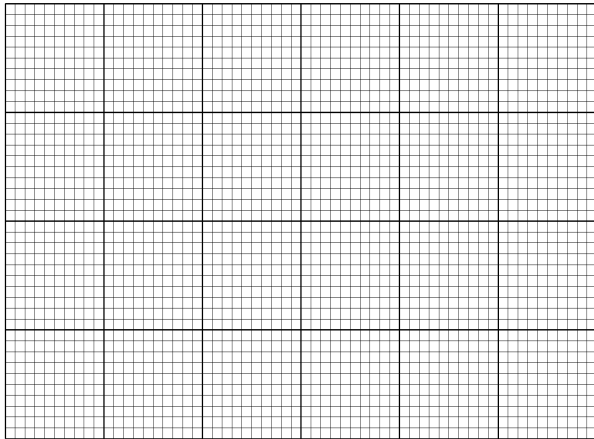


$B_2$  ☐ Disegnare il grafico di  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$



$C_2$  ☐ Calcolare gli eventuali asintoti, i punti di massimo e di minimo ed i punti di flesso per il grafico di  $F$ .

$D_2 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $\int_{-\infty}^x f(t)dt$



$E_2 \bigcirc$  Determinare una primitiva di  $f$  precisandone il campo di definizione.

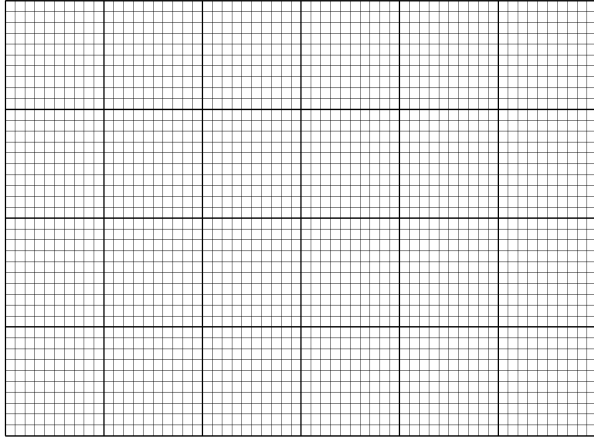
## Settimana Prova Scritta 02/06/1998

---

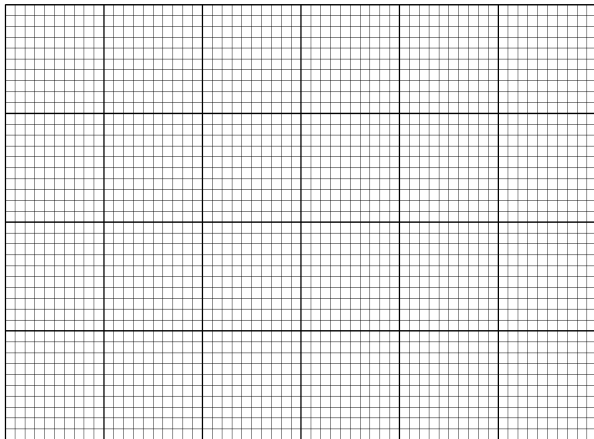
Sia

$$y'(x) = \frac{\sin(y(x))}{\sin(x)}$$

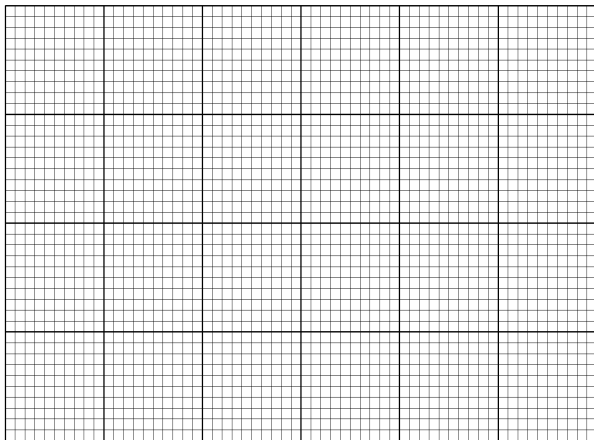
$A_2$  ☐ Disegnare il grafico della soluzione  $y$  relativa al dato iniziale  $y(\pi/4) = \pi/4$ .



$B_3$  ☐ Disegnare il grafico della soluzione  $y$  relativa al dato iniziale  $y(\pi/4) = \pi/2$ .

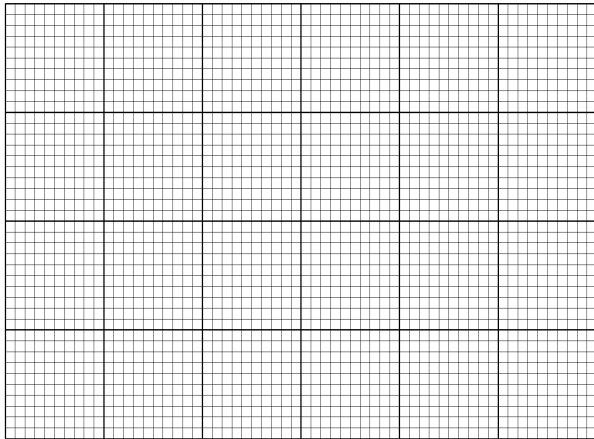


$C_3$  ☐ Disegnare il grafico della soluzione  $y$  relativa al dato iniziale  $y(\pi/4) = 5\pi/4$ .



$D_3 \bigcirc$

Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.



## Ottava Prova Scritta 02/06/1998

---

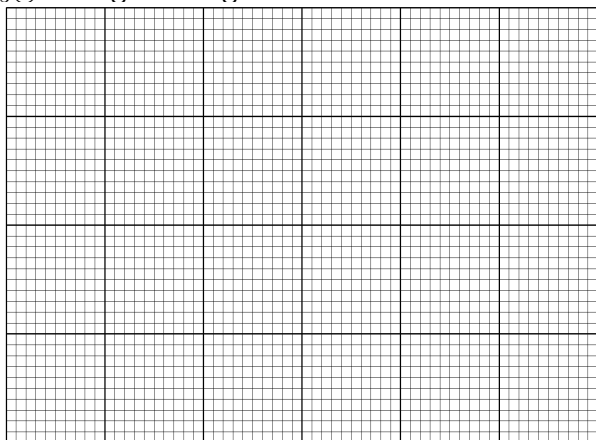
Si consideri l'equazione

$$x^3 y'(x) = y(x)$$

$A_2 \bigcirc$  Determinare la soluzione dell'equazione data tale che  $y(1) = 1$

$B_3 \bigcirc$  Stabilire, per quali  $a \in \mathbb{R}$  esistono soluzioni dell'equazione data tali che  $y(0) = a$ , e determinarle.

$C_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.



Si consideri l'equazione

$$y''(x) + 4y'(x) + 2y(x) = e^{2|x|}$$

$D_2 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

$E_3 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa su  $\mathbb{R}_+$ .

$F_3 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa su  $\mathbb{R}$ .

## Recupero Prima prova scritta 18/06/1998

---

Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n > 1 \right\}$$

$A_3 \bigcirc$  **Determinare tutti i maggioranti di  $A$ .**

$B_3 \bigcirc$  **Determinare tutti i minoranti di  $A$ .**

$C_2 \bigcirc$  **Determinare  $\sup A$ .**

$D_2 \bigcirc$  **Determinare  $\inf A$ .**

## Recupero Seconda prova scritta 18/06/1998

---

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione strettamente decrescente, convessa e continua su  $[-1, 1)$ , periodica di periodo 2, tale che  $f(-1) = 0$

$A_2 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f$ .

$B_2 \bigcirc$  Stabilire se  $f$  deve essere o può essere continua in  $\mathbb{R}$ .

$C_2 \bigcirc$  Stabilire se  $f$  è invertibile su  $[-1, 3]$ .

$D_2 \bigcirc$  Stabilire se  $f$  è invertibile su  $[2, 3]$ .

$E_2 \bigcirc$  Stabilire se esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

## Recupero Terza prova scritta 18/06/1998

---

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - b - \cos(x)}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

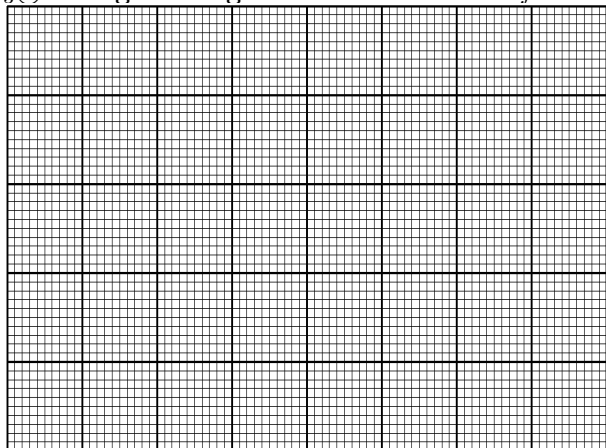
- $A_3 \bigcirc$  Determinare  $a, b, c$ , in modo che  $f$  sia prolungabile per continuità in 0
- $B_3 2 \bigcirc$  Determinare  $a, b, c$ , in modo che  $f$  sia derivabile in 0
- $C_2 \bigcirc$  Calcolare  $f'(x)$
- $D_2 \bigcirc$  Scrivere, se esiste, la retta tangente al grafico della funzione  $f$  nel punto  $(0, c)$

## Recupero Quarta prova scritta 18/06/1998

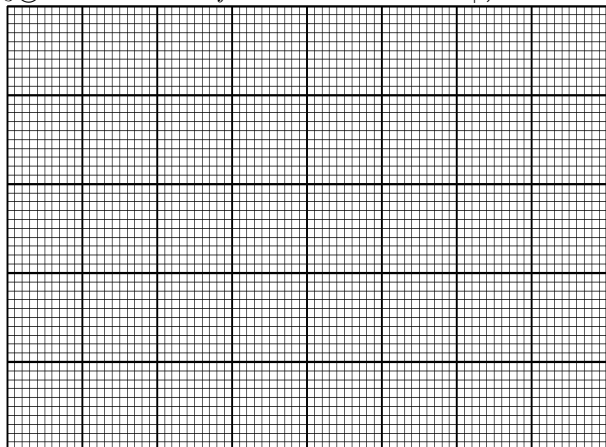
---

Si consideri la funzione  $f(x) = \arctan(x) + \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$

$A_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della funzione  $f$



$B_3 \bigcirc$  Stabilire se  $f$  è invertibile in  $\mathbb{R}_+$ , ed in caso affermativo disegnare il grafico dell'inversa



$C_2 \bigcirc$  Scrivere la retta tangente al grafico della funzione  $f$  nel punto  $(1, \pi/4)$

$D_2 \bigcirc$  Calcolare  $(f^{-1})'(\frac{\pi}{4})$

## Recupero Quinta prova scritta 18/06/1998

---

Sia  $f(x) = x + x^2 + 2x^3 + (2\sin(x^5))^2$

$A_3 \bigcirc$  Scrivere il polinomio di Taylor di  $f$  centrato in  $x = 0$  di grado 2

$B_3 \bigcirc$  Calcolare  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f^{(7)}(0)$ ,  $f^{(10)}(0)$

$C_4 \bigcirc$  Calcolare  $f(0.1)$  a meno di .0001

## Recupero Sesta prova scritta 18/06/1998

---

Sia

$$f(x) = \frac{1}{(t-1)\sqrt[3]{(t+2)}}$$

e sia  $F(x) = \int_x^{\frac{5x}{|x|+1}} f(t)dt$

- $A_3 \bigcirc$  Determinare il campo di definizione di  $F$
- $B_3 \bigcirc$  Studiare i limiti agli estremi del campo di definizione.
- $C_4 \bigcirc$  Stabilire dove  $F$  è derivabile e calcolare la derivata di  $F$

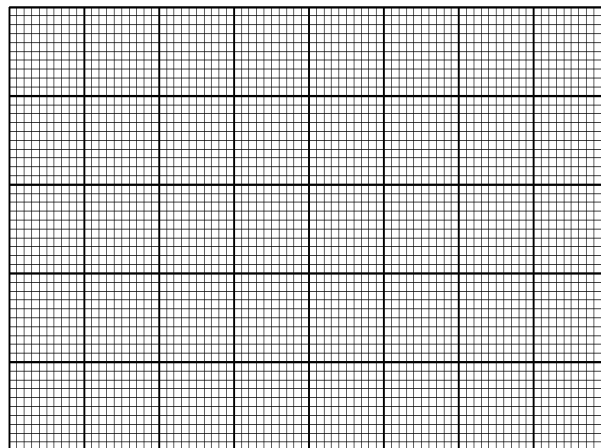
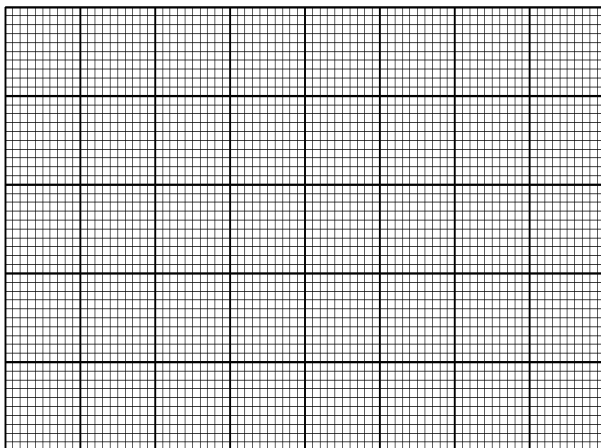
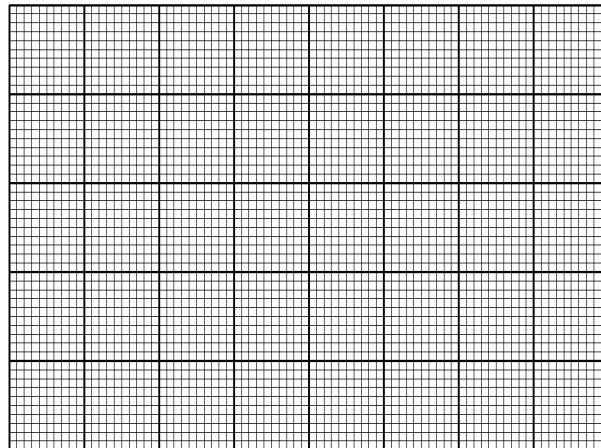
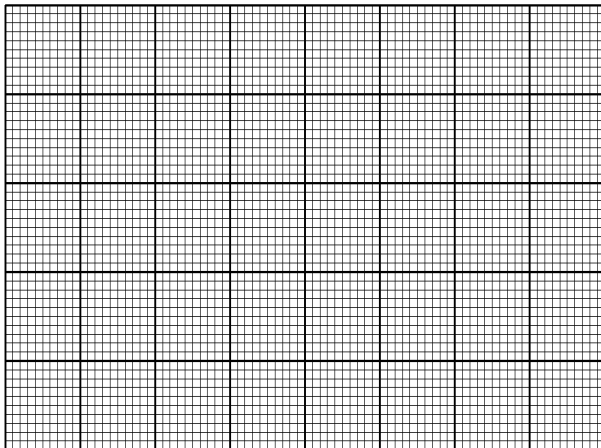
## Recupero Settima prova scritta 18/06/1998

---

Sia

$$y'(x) = y^2(x) - 1$$

$A_10$ ○ Disegnare il grafico della soluzione  $y$  relativa al dato iniziale  $y(0) = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(0) = -2$ .



## Recupero Ottava prova scritta 18/06/1998

---

Si consideri l'equazione

$$2\sqrt{|x|}y'(x) = y(x)$$

$A_3 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su  $\mathbb{R}_+$

$B_3 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite su  $\mathbb{R}$   
Si consideri l'equazione

$$y'''(x) + y(x) = e^x$$

$D_2 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

$E_2 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa.

## Esame giugno 19/06/1998

---

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-kx} + (1-k)x$$

$A_3 \bigcirc$  Studiare il grafico della funzione per  $k = 1/2$

$B_3 \bigcirc$  Studiare il grafico della funzione per  $k = 4$

$C_3 \bigcirc$  Studiare il grafico della funzione per  $k = -1$

$D_3 \bigcirc$  Studiare il grafico della funzione al variare di  $k$

---

Si consideri l'equazione

$$y(x) = a + \int_0^x \frac{2t}{2y(t) - 1} dt$$

$E_3 \bigcirc$  Determinare le soluzioni dell'equazione data per  $a = 0$

$E_3 \bigcirc$  Determinare le soluzioni dell'equazione data per  $a = 4$

$F_3 \bigcirc$  Determinare le soluzioni dell'equazione data per  $a = -1$

$G_6 \bigcirc$  Determinare le soluzioni dell'equazione data al variare di  $a$

# Esame luglio 17/07/1998

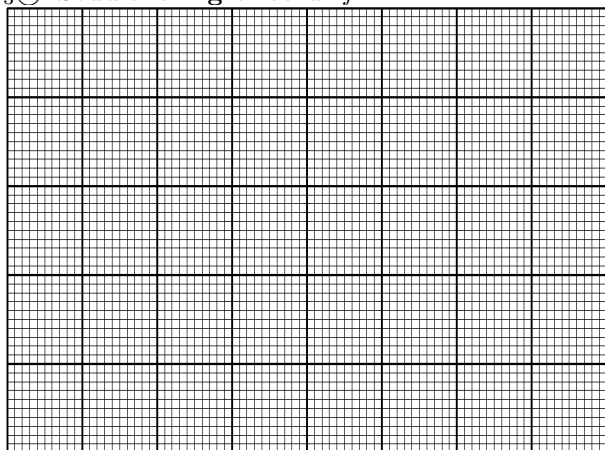
---

Si consideri la funzione

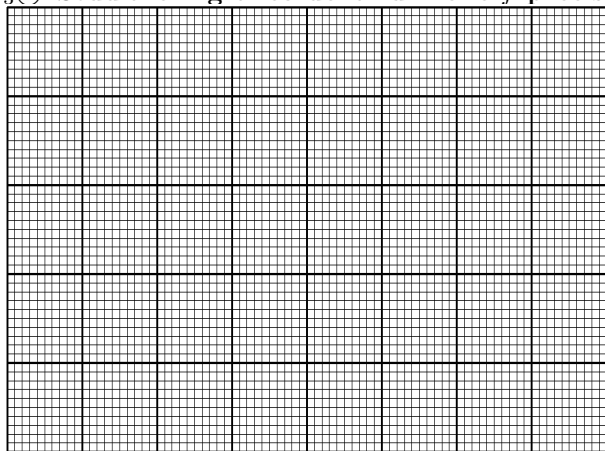
$$f(x) = x + xe^x$$

$A_3$  ☐ Calcolare  $f'$  ed  $f''$  precisando il loro campo di definizione

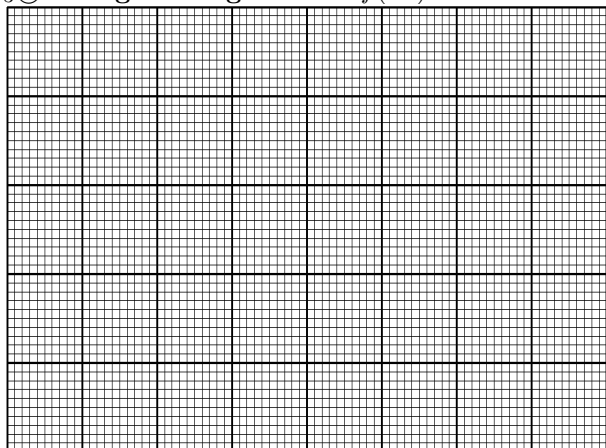
$B_3$  ☐ Studiare il grafico di  $f'$



$C_3$  ☐ Studiare il grafico della funzione  $f$  precisando monotonia e convessità



$D_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f(x^n)$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$



$E_3 \bigcirc$  Calcolare, se esiste,  $(f^{-1})'(2 + 2e^2)$   
Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + \sin(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

$F_3 \bigcirc$  Studiare esistenza ed unicità del problema dato

$G_4 \bigcirc$  Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per  $a = 0$

$H_4 \bigcirc$  Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per  $a = 2\pi$

$I_4 \bigcirc$  Determinare tutte le primitive di

$$\frac{1}{1 + \sin(t)}$$

Esame ottobre 09/10/1998

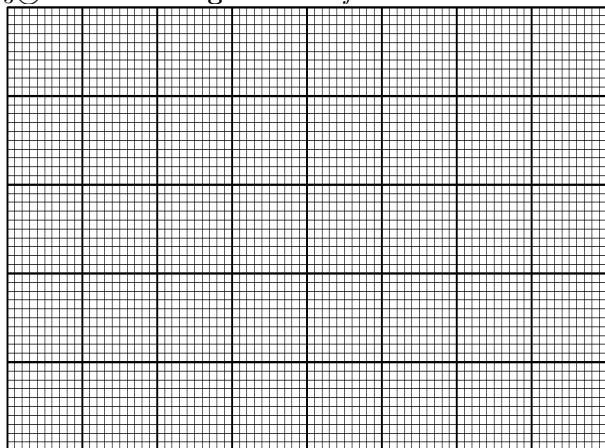
---

Si consideri la funzione

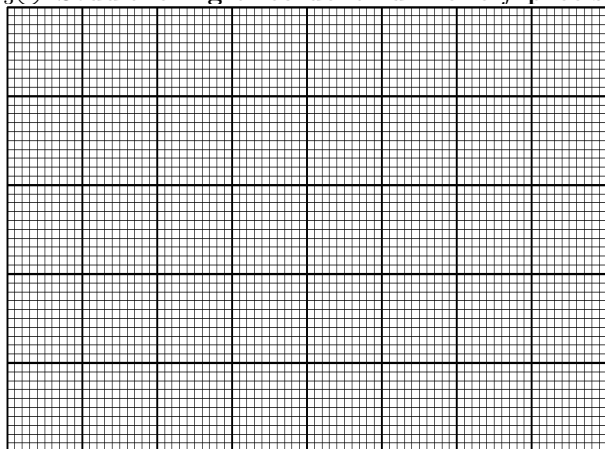
$$f(x) = x - 1 - \frac{x^2}{a} + e^{-x} \quad a > 0$$

$A_3 \bigcirc$  Calcolare  $f'$  ed  $f''$  precisando il loro campo di definizione

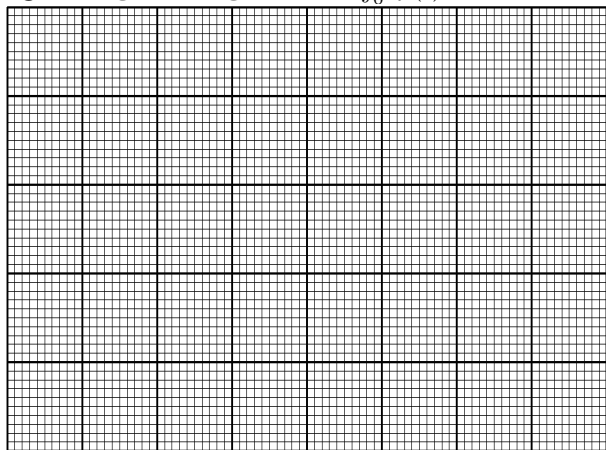
$B_3 \bigcirc$  Studiare il grafico di  $f'$



$C_3 \bigcirc$  Studiare il grafico della funzione  $f$  precisando monotonia e convessità



$D_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $\int_0^x f(t)dt$



$E_3 \bigcirc$  Per  $a = 1$ , calcolare, se esiste,  $(f^{-1})'(-1 + \frac{1}{e})$   
Si consideri l'equazione

$$\begin{cases} y'(x) = y^4(x) + y(x) \\ y(0) = a \end{cases}$$

$F_3 \bigcirc$  Studiare esistenza ed unicità del problema dato

$G_4 \bigcirc$  Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per  $a = 1$

$H_4 \bigcirc$  Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione data per  $a = 0$

$I_4 \bigcirc$  Studiare al variare di  $a$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$

esame 12/02/1999

---

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^3(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- $F_3 \bigcirc$  Discutere esistenza ed unicità locale della soluzione del problema dato.
- $G_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione per  $x_0 = 0$  ed  $y_0 = 0$ , precisandone il campo di definizione
- $H_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione al variare di  $x_0$  per  $y_0 = 0$ , precisandone il campo di definizione
- $I_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione per  $x_0 = 0$  al variare di  $y_0$ , precisandone il campo di definizione
- $J_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione al variare di  $x_0, y_0$ , precisandone il campo di definizione
- Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt - x$$

- $E_3 \bigcirc$  Calcolare  $f'$  e scrivere una equazione differenziale lineare del primo ordine, omogenea di cui  $f$  sia soluzione.
- $F_3 \bigcirc$  Determinare tutte le soluzioni dell'equazione trovata al punto precedente
- $G_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f$
- $I_3 \bigcirc$  Stabilire se  $f$  è integrabile su  $\mathbb{R}$

esame 09/04/1999

---

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \sin y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- $F_3 \bigcirc$  Discutere esistenza ed unicità locale della soluzione del problema dato.
- $G_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione per  $x_0 = 0$  ed  $y_0 = 1$ , precisandone il campo di definizione
- $H_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione al variare di  $x_0$  per  $y_0 = 1$ , precisandone il campo di definizione
- $I_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione per  $x_0 = 0$  al variare di  $y_0$ , precisandone il campo di definizione
- $J_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico della soluzione al variare di  $x_0, y_0$ , precisandone il campo di definizione
- Siano  $a, b$  funzioni derivabili con derivata continua su  $\mathbb{R}$   $a$  decrescente su  $\mathbb{R}$  e  $b$  crescente su  $\mathbb{R}$  e sia inoltre  $\varphi$  una funzione continua e positiva su  $\mathbb{R}$ . Si consideri

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t) dt$$

- $E_3 \bigcirc$  Stabilire se  $f$  è derivabile e calcolarne la derivata.
- $F_3 \bigcirc$  Studiare crescita e decrescenza di  $f$ .  
Per  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $a(x) = -\arctan(x)$  e  $b(x) = x^3$
- $G_3 \bigcirc$  Studiare il segno di  $f$
- $I_3 \bigcirc$  Disegnare il grafico di  $f$