Analisi Matematica 2

Prove Parziali

A.A. 2012/2017

Prima Prova parziale 23/11/2011

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x - y^3 & |x| \leq |y^3| \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

<A> Determinare il campo di definizione di f e l'insieme su cui f è continua.

<B> Determinare se f è differenziabile in $(1,1)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(1,1)$.

<C> Determinare se f è differenziabile in $(0,1)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(0,1)$.

<D> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0,0)$.

<E> Determinare massimi e minimi assoluti di f su $Q = [0,1] \times [0,1]$.

<F> Calcolare $\int_Q f(x,y)dxdy$

<G> Determinare la direzione di massima pendenza per f nel punto $(0,1)$.

Seconda Prova parziale 17/12/2011

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 1 - y \ , \ z \leq 2 - y \ , x \geq 1 \ , \ x \leq 2 \ , \ y \geq 0 \ , \ y \leq 1\}$$

<A> Calcolare il volume di V

Si considerino due variabili aleatorie indipendenti: ξ con distribuzione triangolare che restituisce numeri in $[0, 2]$ ed ha moda $1/3$ ed η uniforme su $[1, 3]$

<B> Determinare la PDF di ξ , η e $\xi + \eta$

<C> Calcolare media e varianza di ξ , η e $\xi + \eta$

Prima Prova parziale 04/11/2013

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = |(y - \sin(x))(y - \cos(x))|$$

<A> Determinare il campo di definizione di f e l'insieme su cui f è continua.

<B> Determinare se f è differenziabile in $(1,1)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(1,1)$.

<C> Determinare se f è differenziabile in $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$.

<D> Calcolare le derivate direzionali di f in $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$.

<E> Determinare massimi e minimi assoluti di f su $Q = \{(x,y) \ : \ x \in [0,\pi], \ y \in [0, \sin(x)]\}$.

<F> Determinare la direzione di massima pendenza per f nel punto $(1,1)$.

Seconda Prova parziale 01/12/2013

<A> Determinare il punto dell'iperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$

avente minima distanza dal punto $(0, 1)$

<B> Calcolare il volume del solido definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq \frac{1}{2}(x + 1) \ , \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Seconda Prova parziale 01/12/2013

<A> Determinare il punto dell'iperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$

avente minima distanza dal punto $(0, 1)$

<B> Calcolare il volume del solido definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq \frac{1}{2}(x + 1) \ , \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Terza Prova parziale 07/01/2014

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^4} & x > 1 \\ bx + c & x \in [0,1] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

<A> Determinare a, b, c in modo che f sia la PDF di una variabile aleatoria ξ

<B> Determinare a, b, c in modo che la media di ξ sia1

<C> Determinare a, b, c in modo che la varianza di ξ sia 1

<D> Calcolare $P(4 \leq \xi \leq 5)$

<E> Calcolare $P(-1 \leq \xi \leq 0)$

Prima Prova parziale 03/11/2014

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & |x|+|y|\le 1 \\ 1 & altrove \end{cases}$$

<A> Determinare il campo di definizione di f e l'insieme su cui f è continua.

<B> Determinare se f è differenziabile in $(1/2, 1/3)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(1/2, 1/3)$.

<C> Determinare se f è differenziabile in $(1, 0)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(1, 0)$.

<D> Calcolare le derivate direzionali di f in $(1, 0)$.

<E> Determinare la direzione di massima pendenza per f nel punto $(1, 0)$.

<F> Determinare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}^2$.

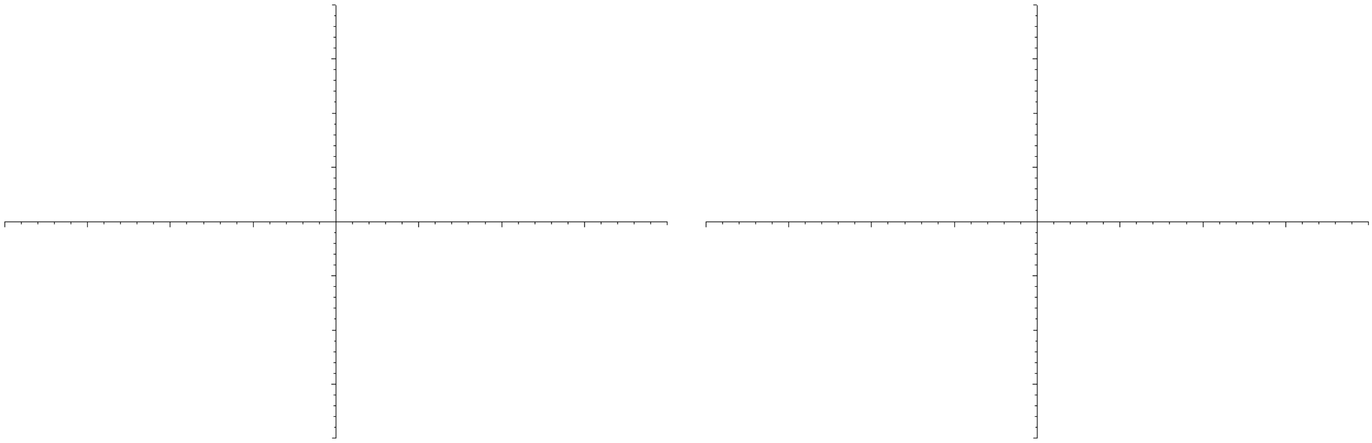
Seconda Prova parziale 12/12/2014

Si consideri la funzione

$$D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + z^2 \leq 1 \ , \ x^2 + z^2 - 2x \leq 0\}$$

<A> Disegnare D ed il trasformato di D mediante il cambio di variabili

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ z = \rho \sin\theta \end{cases}$$



<B> Calcolare l'aerea di D.

<C> Calcolare

$$\int_D x dx dz$$

Si consideri il volume V generato dalla rotazione di D attorno all'asse z

<D> Calcolare il volume di V.

<E> Determinare massimi e minimi assoluti di $F(x,y,z) = z$ su V.

Terza Prova parziale 08/01/2015

Sia ξ una variabiile aleatoria binomiale relativa a n ripetizioni di una prova bernoulliana con probabilità di successo p e sia η una variabiile aleatoria binomiale relativa a m ripetizioni di una prova bernoulliana con probabilità di successo q

<A> Impostare il calcolo per determinare la PDF di ξ e di η

<B> Tenendo conto dell'identità di Vandermonde, che afferma che

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

Determinare, per $p = q = 1/2$, la PDF di $\xi + \eta$
ed interpretare il risultato.
Si considerino tre scatole in cui sono contenuti dadi di colore diverso nelle quantità che seguono:

- I scatola : 8 dadi Neri, 5 dadi Bianchi, 7 dadi Gialli
- II scatola : 13 dadi Neri, 7 dadi Bianchi,
- III scatola : 5 dadi Neri, 10 dadi Bianchi;

<C> Si sceglie una scatola e si estrae un dado Bianco; calcolare la probabilità che sia stata scelta la scatola I, II, III

<D> Si sceglie una scatola e si estrae un dado Nero; calcolare la probabilità che sia stata scelta la scatola I, II, III

<E> Si sceglie una scatola e si estrae un dado Giallo; calcolare la probabilità che sia stata scelta la scatola I, II, III

Prima Prova parziale 03/11/2015

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = |1 - x^2 - y^2|$$

<A> -[3] Determinare il campo di definizione di f e l'insieme su cui f è continua.

<B> -[3] Determinare se f è differenziabile in $(0, 1/2)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(0, 1/2)$.

<C> - [4] Determinare se f è differenziabile in $(1, 0)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(1, 0)$.

<D> -[6]Calcolare le derivate direzionali di f in $(1, 0)$.

<E> - [5]Determinare la direzione di massima pendenza per f nel punto $(1, 0)$.

<F> -[4] Determinare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}^2$.

Seconda Prova parziale 10/12/2015

Sia
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2 - 2x \le z \le 2 - x \ , \ z \le 2 - (x^2 + y^2)\}$$

<A> -[15] Determinare il volume di A
Sia
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \le 1 \ , \ 2 - 2x \le z \le 2 - x\}$$

<B> -[9] Determinare il volume di B
Sia
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - x \ge 0 \ , \ : \ x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$$

<C> -[6] Calcolare
$$\int_C 2x - x^2 - y^2 dxdy$$

Terza Prova parziale 08/01/2016

Sia ξ una variabile aleatoria esponenziale di media λ ed η una variabile aleatoria esponenziale di media μ

<A> -[10] Determinare la PDF della variabile aleatoria $x = \xi + \eta$

<B> -[8] Determinare la media e la varianza di x

Si supponga di dover raggiungere la località B partendo da A e passando per la località C utilizzando un mezzo di trasporto che collega A con C che prevede 6 partenze da A ogni ora ed un secondo mezzo che collega C con B e prevede 3 partenze ogni ora.

<C> -[2] Calcolare quanto tempo in media si dovrà aspettare il primo mezzo.

<D> -[2] Calcolare quanto tempo in media si dovrà aspettare il secondo mezzo.

<E> -[4] Calcolare quanto tempo in media si dovrà aspettare complessivamente.

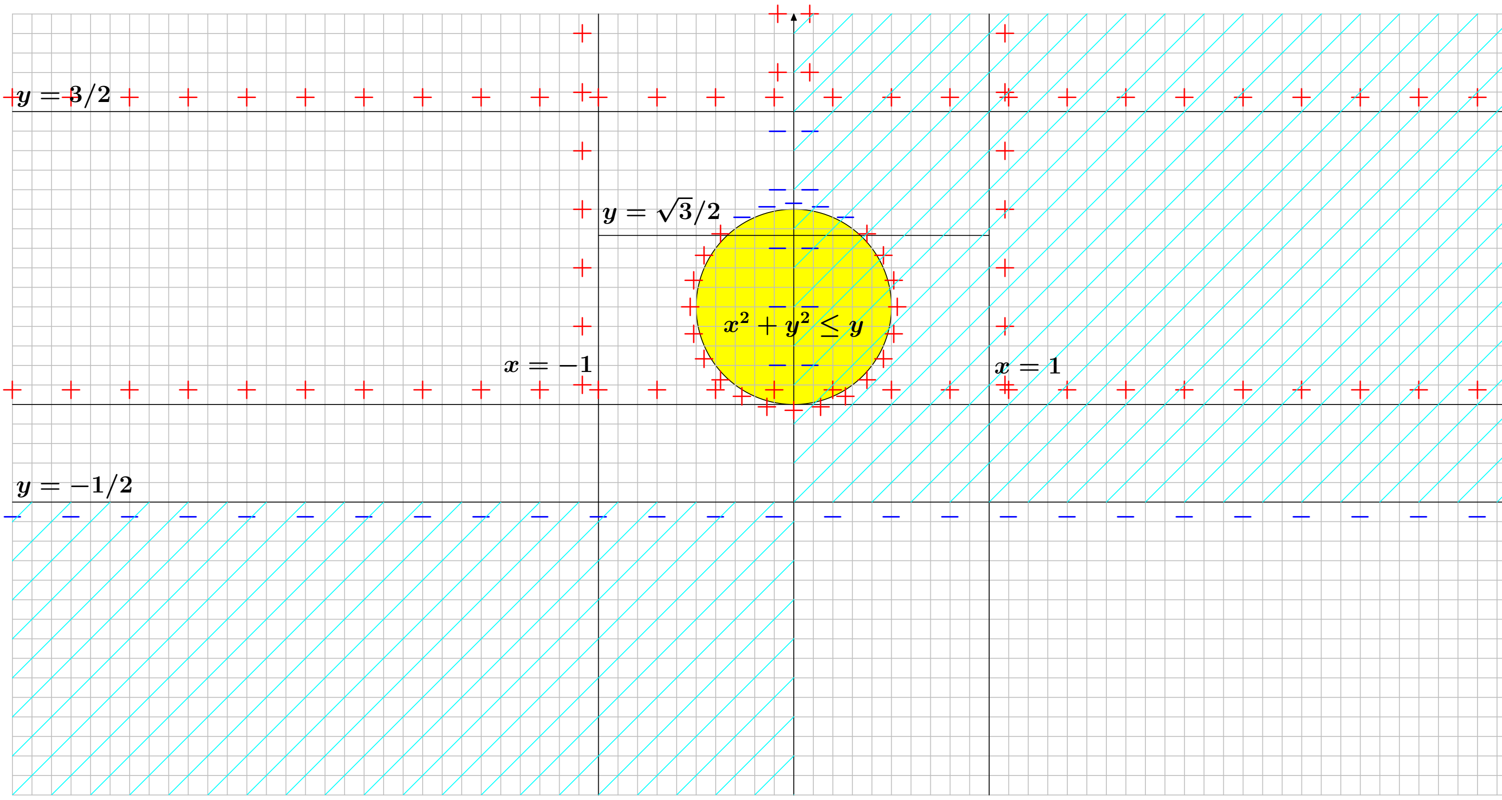
<F> -[4] Calcolare la probabilità che l'attesa superi complessivamente 30 minuti.

Prima Prova parziale 10/11/2016

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 2y^3 + 6x^2y + 3x^2 - 3y^2$$

e la figura seguente



in cui è evidenziato il segno che f assume nei punti delle rette $y = -1/2$, $y = 0$, $y = 3/2$, $x = 1$, $x = -1$ e sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$

La parte tratteggiata indica l'insieme in cui $f_x > 0$ mentre la parte colorata indica l'insieme in cui $f_y < 0$

<A> -[15] Disegnare l'insieme dei punti del piano tali che $f(x,y) = 0$

<B> -[10] Verificare le affermazioni descritte nella figura che sono state usate per disegnare l'insieme dei punti del piano tali che $f(x,y) = 0$

<C> - [2] Determinare se f è differenziabile in $(1,0)$ ed in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(1,0)$.

<D> -[1] Calcolare le derivate direzionali di f in $(0,0)$.

<E> - [7] Determinare la direzione di massima pendenza per f nel punto $(0,0)$.

<F> -[4] Determinare massimi e minimi assoluti di f sul cerchio di equazione $x^2 + y^2 - y \leq 0$

<G> -[3] Calcolare se esiste il $\lim_{x,y)\to+\infty} f(x,y)$

<H> -[8] Calcolare le derivate direzionali di $g(x,y) = \max\{f(x,y), 0\}$ in $(0,0)$.

Seconda Prova parziale 19/11/2016

Si consideri la funzione

$$y(t) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+xt}dx$$

<A> -[4] Calcolare la derivata $\dot{y}(t)$ di y

<B> -[4] Integrare per parti $\dot{y}$ ed esprimere $\dot{y}$ in funzione di y

<C> -[4] Determinare y

<D> - [10] Calcolare il volume di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq 2 - (x^2 + y^2) \ , \ z \geq x \ , \ z \geq y\}$$

<E> - [12] Calcolare il volume di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq 2 - (x^2 + y^2) \leq 1 \ , \ z \geq x \ , \ z \geq y\}$$

<F> - [8] Calcolare l'area di

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \rho \leq \theta \ , \ : \ \rho \leq \pi - \theta\}$$

<G> - [8] Calcolare l'area di

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \rho \leq \theta \ , \ : \ \rho \leq \pi - \theta \ , \ \rho \leq 1\}$$

<H> - [8] Calcolare $\int_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dxdy$ dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

<I> - [8] Calcolare $\int_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dxdy$ dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Terza Prova parziale 10/01/2017

Partendo da A si può arrivare in B utilizzando un mezzo di trasporto.

- la frequenza media delle partenze è una variabile aleatoria con PDF di Poisson di media 6 partenze all'ora.
- il tempo di percorrenza è dato da una variabile aleatoria triangolare con moda 30 minuti nulla fuori dell'intervallo $[28, 32]$

<A> -[4] Calcolare il tempo medio di attesa del mezzo

<B> -[4] Calcolare il tempo medio di percorrenza.

<C> -[4] Determinare la PDF della variabile aleatoria T che restituisce il tempo di attesa del mezzo.

<D> -[4] Determinare la PDF della variabile aleatoria τ che restituisce il tempo di percorrenza.

<E> -[4] Determinare la media del tempo totale necessario per spostarsi da A a B..

<F> -[4] Determinare la varianza del tempo totale necessario per spostarsi da A a B..

<G> -[4] Determinare la PDF del tempo totale necessario per spostarsi da A a B.