Analisi Matematica II

Complementi di Analisi Matematica

Prove Parziali

A.A. 1992/2018

Prima Prova Parziale 92/93

Si consideri in campo vettoriale
$$F(x,y,z) = (0,0,y)$$

<A> Calcolare **rot** F e **div** F

<B> Sia S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x = 0, \quad z^2 + y^2 \leq 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di **rot** F attraverso S.

<C> Sia S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di **rot** F attraverso S.

<D> Calcolare il lavoro di F sulla curva γ intersezione di $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con il piano $x = 1/2$.

<E> Calcolare il flusso di **rot** F attraverso la superficie $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \leq 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

<F> Determinare, se esistono, i punti del piano $z + y = 1$ aventi minima e massima distanza dall'origine.

<G> Studiare la curva ottenuta nel piano (x,y) proiettando sul piano $z = 0$ la curva δ intersezione del piano $z + y = 1$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

<H> Esprimere mediante un problema di minimizzazione vincolata il problema di trovare il punto della curva δ avente massima e minima quota.
Trovare tali punti.

Seconda Prova Parziale 92/93

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

<A> Calcolare $y''(0)$ per ogni soluzione dell'equazione data

<B> Detti $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, determinare una formula di ricorrenza per i coefficienti a_n di una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che sia soluzione dell'equazione data.

<C> Per i casi $a = 1$ $b = 0$ e $a = 0$ $b = 1$, determinare le formule di ricorrenza per b_n e c_n in modo che le corrispondenti soluzioni si possano scrivere nella forma $\sum b_n x^{3n}$ e $\sum c_n x^{3n+1}$, precisando la relazione tra a_n b_n e c_n.

<D> Determinare il raggio di convergenza delle serie trovate

<E> Scrivere l'integrale generale dell'equazione data

Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \qquad t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

<F> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili.

<G> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t, 0) = 0$.

<H> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t, 0) = 0$ e $u(t, \pi) = 0$.

<I> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t, 0) = 0$, $u(t, \pi) = 0$ e $u(0, x) = \sin x + 2 \sin 4x$.

<J> Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t, 0) = 0$, $u(t, \pi) = 0$ e $u(0, x) = x(x - \pi)$.

Prima Prova Parziale 93/94

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(|x|y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Stabilire se f è continua e differenziabile in $(0,0)$

<B> Stabilire se f è continua e differenziabile in $(1/2, 2)$.

<C> Calcolare, per i punti (x,y) per le quali esistono, le derivate parziali di f.

<D> Calcolare

$$\lim (x,y) \to \infty f(x,y)$$

<E> Stabilire se f è limitata su $\mathbb{R}^2$ provando brevemente quanto affermato.

Si consideri la curva Γ di equazione polare

$$\rho = 1 + (\sin(2\theta))^2 \qquad , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

<F> Dimostrare che Γ è semplice.

<G> Dimostrare che Γ è regolare.

<H> Dimostrare che Γ è limitata.

<I> Dimostrare che Γ è simmetrica rispetto all'asse y.

<J> Disegnare Γ.

<K> Calcolare $\int_{\Gamma'} F$ ove $\Gamma' = \Gamma \cap \{x \geq 0\}$ ed

$$F = \left(\frac{x}{(x^2+y^2-1)^{3/2}} - \frac{y}{(x+1)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2-1)^{3/2}} + \frac{1}{x+1} \right)$$

Seconda Prova Parziale 93/94

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) + 2y(x)y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

<A> Discutere esistenza ed unicità delle soluzione, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<B> Determinare tutte le soluzioni del problema quando $b = 0$.

<C> Determinare la soluzione del problema per $b = -4$ e $a = 1$.

<D> Determinare la soluzione del problema per $b = 13$ e $a = 1$.

<E> Precisare il campo di definizione delle soluzioni trovate discutendone la prolungabilità.

Si consideri

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

<F> Disegnare T

<G> Stabilire se T è limitato.

<H> Stabilire se T è chiuso.

<I> Calcolare il baricentro di T
$x_b =$ $y_b =$ $z_b =$
riportando succintamente i calcoli.
Sia inoltre $f(x, y, z) = x$

<J> Stabilire se esiste il massimo ed il minimo assoluto di f su T.

<K> Calcolare il minimo assoluto di f su T

<L> Calcolare il massimo assoluto di f su T

Prima Prova Parziale 94/95

Si consideri il solido delimitato dalla superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u,\theta) = u\cos\theta \\ y(u,\theta) = (1-u)\sin\theta \\ z(u,\theta) = u \end{cases} \qquad 0 \le u \le 1 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

<A> Disegnare le sezioni del solido ottenute tagliandolo con i piani

$$z = 0 \qquad z = 1 \qquad z = 1/2$$

<B> Disegnare le sezioni S_k del solido ottenute tagliandolo con i piani $z = k$ con $0 \le k \le 1$.

<C> Calcolare l'area delle sezioni S_k.

<D> Calcolare il volume del solido

<E> Calcolare le coordinate del baricentro del solido

<F> Disegnare nel piano (y,z) i luoghi dei punti tali che

$$|z| = y+1 \qquad z = |y+1| \qquad z^2 = (y+1)^2$$

<G> Descrivere il luogo dei punti dello spazio (x,y,z) tali che

$$|z| = y+1 \qquad z = |y+1| \qquad z^2 = (y+1)^2$$

<H> Stabilire quali sono i punti dello spazio in un intorno dei quali è possibile esplicitare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 = 1 \\ |z| = 1 + y \end{cases}$$

<I> Determinare una parametrizzazione della curva γ descritta dal sistema dato nel semispazio $z > 0$.

<J> Determinare i punti di minima distanza dalla curva γ della retta

$$\begin{cases} z = \sqrt{5} \\ y = 4 + x \end{cases}$$

Seconda Prova Parziale 94/95

Si consideri il tetraedro T definito da

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z - 1 \leq 0\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

<A> Calcolare il volume di T, determinare una parametrizzazione di ∂T e il vettore normale alla frontiera di T.

<B> Calcolare $\int_T \mathbf{div}\ F$ e $\int_{\partial T} \mathbf{rot}\ F$

<C> Individuare le facce del tetraedro attraverso le quali il flusso del campo F è non nullo e calcolarlo.

<D> Calcolare il flusso di F attraverso ∂T

<E> Stabilire se F è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + \sin y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<F> Studiare esistenza ed unicità in grande della soluzione del problema di Cauchy assegnato

<G> Disegnare il grafico della soluzione del problema assegnato.

<H> Studiare il problema della prolungabilità della soluzione a tutto $\mathbb{R}$

<I> Determinare la soluzione z del problema

$$\begin{cases} z''(x) + z(x) = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

<J> Determinare il polinomio di Taylor di $y(x) - z(x)$ del terzo ordine centrato in $x = 0$ e stimare la differenza $y(x) - z(x)$ vicino a 0.

Prima Prova Parziale 95/96

Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 + x^2 \leq y, \qquad y \in [1, 2]\}$$

<A> Determinare il volume del solido descritto da V

<B> Sia $S = \partial V$, determinare una parametrizzazione di S

<C> Determinare il vettore normale ad S

<D> Calcolare l'area della superficie di S

<E> Calcolare le coordinate del baricentro di S

Si considerino le funzioni

$$f(x, y) = y^2 - \sin x \qquad\qquad g(x, y) = \max\{0, f(x, y)\}$$

<F> Disegnare gli insiemi

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x, y) = 0\} \qquad L_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x, y) > 0\} \qquad L_- = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x, y) < 0\}$$

e stabilire l'insieme in cui g è continua

<G> Calcolare $\nabla g(\pi/2, 1)$ e le derivate direzionali di g in $P = (\pi/2, 1)$

<H> Stabilire se g è differenziabile in P

<I> Stabilire in quali punti del piano l'equazione $f(x, y) = 0$ può essere esplicitata in funzione di x

<J> Stabilire in quali punti del piano l'equazione $f(x, y) = 0$ può essere esplicitata in funzione di y

Seconda Prova Parziale 95/96

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{y'(x)}{1+y(x)} \\ y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione determinando eventuali soluzioni costanti

<B> Scrivere un problema del primo ordine equivalente al problema dato.

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $y_1 > 0$, $y_0 > -1$.

<D> Provare che se y è soluzione dell'equazione data, anche $z(x) = -2 - y(-x)$ risolve la stessa equazione

<E> Disegnare tutte le soluzioni dell'equazione data

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \qquad z \in \mathbb{C}$$

<F> Decomporre f in fratti semplici

<G> Esprimere ciascuno dei fratti semplici trovati in serie di potenze di z, precisandone il raggio di convergenza.

<H> Esprimere f in serie di potenze di z, precisandone il raggio di convergenza ed il comportamento sulla circonferenza di convergenza.

<I> Determinare la serie di potenze che esprime f' precisandone il raggio di convergenza

<J> Determinare la serie di potenze che esprime $\int_0^x f(t)dt$ precisandone il raggio di convergenza

Prima Prova Parziale 97/98

Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 0 \le z \le 1 - x\}$$

<A> Disegnare la proiezione di V sul piano (x, y)

<B> Determinare una formula di riduzione per il calcolo del volume di V

<C> Calcolare la coordinata y del baricentro di V

<D> Scrivere il piano tangente al grafico di $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto $(x, y) = (-1, 0)$

<E> Calcolare

$$\max_{(x,y,z)\in V} z$$

Si consideri l'equazione

$$bx^2 + 2ax + b = 0 \qquad b \neq 0$$

e siano $f_\pm(a, b)$ le funzioni che esprimono le soluzioni reali dell'equazione data rispetto ad a ed a b.

<F> Determinare il campo di definizione di $f_\pm$

<G> Disegnare l'insieme dei punti del piano (a, b) tali che:

$$|f_\pm(a, b)| = 1$$

<H> Disegnare l'insieme dei punti del piano (a, b) tali che:

$$|f_+(a, b)| \gtrless 1 \qquad |f_-(a, b)| \gtrless 1$$

<I> Calcolare

$$\lim_{(a,b)\to(1,0)} f_+(a, b) \qquad \lim_{(a,b)\to(-1,0)} f_+(a, b)$$

<J> Stabilire se esistono massimi e minimi assoluti per $|f_+|$

Seconda Prova Parziale 97/98

Si consideri il campo vettoriale di componenti

$$F(x,y,z) = \big(x\ln(x^2+y^2+z^2), y\ln(x^2+y^2+z^2), z\ln(x^2+y^2+z^2)\big)$$

<A> Determinare se il campo è conservativo e calcolarne i potenziali.

<B> Calcolare

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle ds$$

dove

$$\gamma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z = 0 \ , \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

<C> Calcolare

$$\int_S \langle \mathbf{rot}\ F, N\rangle d\sigma$$

dove

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0 \ , \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

<D> Calcolare **div** F e

$$\int_V \mathbf{div}\ F\ dxdydz$$

dove

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

<E> Calcolare

$$\int_{\partial V} \langle F, N\rangle d\sigma$$

<F> Determinare una parametrizzazione della superficie S_o e del volume V_o descritti dalla circonferenza e dal cerchio di raggio unitario giacente in un piano parallelo al piano $z = 0$ il cui centro si muove sulla linea di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta \qquad \theta\in[0,2\pi] \\ z(\theta) = \theta \end{cases}$$

<G> Determinare una parametrizzazione della superficie S_v e del volume V_v descritti dalla circonferenza e dal cerchio di raggio unitario giacente in un piano parallelo al piano $x = 0$ il cui centro si muove sulla linea di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin 2\theta \qquad \theta\in[0,2\pi] \\ z(\theta) = \theta \end{cases}$$

<H> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo del volume di V_v

<I> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo della superficie di S_o

Terza Prova Parziale 97/98

Si consideri la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^n + 1}{b^n} \right) \left(\frac{z^2 - 1}{z^2} \right)^n$$

<A> Stabilire se f è una serie di potenze ed, in caso affermativo, scriverne i coefficienti.

<B> Stabilire se è possibile trovare una serie di potenze $g(z) = \sum b_n z^n$ tale che

$$f(z) = g\left(\frac{z^2 - 1}{z^2} \right)$$

ed, in caso affermativo, scriverne i coefficienti.

<C> Determinare il raggio di convergenza di g.

<D> Disegnare nel piano complesso l'insieme dove è definita f precisando il comportamento di f sulla frontiera di tale insieme.

<E> Determinare, ove possibile, una espressione di f in termini di funzioni elementari.

Si consideri la funzione $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$

<F> Calcolare i coefficienti di Fourier dello sviluppo di f in serie di soli seni su $[-1, 1]$.

<G> Disegnare il grafico della somma della serie che rappresenta lo sviluppo di Fourier di f in serie di soli seni su $[-1, 1]$

<H> Disegnare il grafico della somma della serie che rappresenta lo sviluppo di Fourier di f in serie di soli coseni su $[-1, 1]$

<I> Calcolare i coefficienti di Fourier dello sviluppo di f su $[0, 2]$.

<J> Calcolare la media quadratica di f su $[-1, 1]$

Quarta Prova Parziale 97/98

Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} (y''(x))^2 = 1 + (y'(x))^2 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicitá locale della soluzione di un problema di Cauchy.

<B> Studiare esistenza ed unicitá globale della soluzione di un problema di Cauchy.

<C> Determinare l'inversa delle soluzioni convesse dell'equazione che corrispondono ad $y_0 > 0$.

<D> Determinare l'inversa delle soluzioni concave dell'equazione che corrispondono ad $y_0 > 0$.

<E> Determinare l'inversa delle soluzioni convesse dell'equazione che corrispondono ad $y_0 < 0$.

<F> Determinare l'inversa delle soluzioni concave dell'equazione che corrispondono ad $y_0 < 0$.

<G> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

<H> Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della soluzione convessa dell'equazione data che passa per il punto $(0, 0)$ con pendenza 1
Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

<I> Determinare tutte le soluzioni del sistema.

<J> Scrivere una matrice fondamentale del sistema.

<K> Disegnare le traiettorie del sistema che corrispondono ai dati iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

.

Prima Prova Parziale 98/99

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{|x|y^6}{x^6+y^6} & , (x,y) \neq (0,0) \\ k & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di continuità di f.

<B> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di differenziabilità di f.

<C> Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

<D> Determinare, per $k = 1$, se esistono, i punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti, di f, sul suo dominio.

Seconda Prova Parziale 98/99

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{|x|y^6}{x^6+y^6} & , (x,y) \neq (0,0) \\ k & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<A> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di continuità di f.

<B> Determinare, per $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di differenziabilità di f.

<C> Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

<D> Determinare, per $k = 1$, se esistono, i punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti, di f, sul suo dominio.

***

Terza Prova Parziale 98/99

Si consideri, nel piano (x, z), la circonferenza di centro $(2, 3)$ e raggio 1, e sia S la superficie ottenuta ruotando tale circonferenza di un giro completo attorno all'asse z.

<A> Determinare una parametrizzazione di S.

<B> Calcolare la massa di S, supponendo la sua densità superficiale proporzionale alla distanza dal piano $z = 0$.
Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{ax}{x^2 + 2y^2 - 1}, \frac{2y + b}{x^2 + 2y^2 - 1} \right)$$

<C> Stabilire per quali $a, b \in \mathbf{R}$ il campo è chiuso.

<D> Calcolare, per gli a e b determinati al punto c), il lavoro fatto dal campo F lungo la curva di equazione

$$\begin{cases} x(t) = 10 + t \cos t \\ y(t) = t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

<E> Sempre con gli a e b trovati al punto c), determinare, se esistono, tutti i potenziali di F.

Quarta Prova Parziale 98/99

Si consideri il problema

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x) + e^x - 1 + x \\ y(0) = \gamma \\ y'(0) = \delta \end{cases}$$

<A> Determinare, al variare di γ e δ le soluzioni sviluppabili in serie di potenze di centro 0, precisandone il dominio.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{2+\sqrt{n}}$$

<B> Determinare il dominio di f.

<C> Determinare un numero razionale che approssimi $f(2.1)$ a meno di 10^{-6}

Quinta Prova Parziale 98/99

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = 2(y'(x))^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

<A> Studiarne l'esistenza e l'unicità della soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

<B> Nel caso $a = 0$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.

<C> Nel caso $a = 1$ determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio.
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{xy(x) + y^2(x) + x^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

<D> Determinarne tutte le soluzioni, precisandone il dominio.

Prima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln y & y > e^x \\ xye^{-x} & x \leq y \leq e^x \\ 0 & y < x \end{cases}$$

<**A**> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<**B**> Calcolare, se esiste $\nabla f(0,0)$ e $\nabla f(0,1)$

<**C**> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$ e $(0,1)$

<**D**> Determinare se f è differenziabile in $(0,0)$ e $(0,1)$

Seconda Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = a(x^2 + y^2 - 2x) + xy$$

<A> Determinare tutti i punti di possibile massimo o minimo relativo per f

<B> Stabilire, al variare di a, se tali punti risultano effettivamente di massimo o di minimo relativo

<C> Per $a = 1$, Determinare minimi e massimi assoluti di f su

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : |x - 1| + |y| \leq 1\}$$

<D> Stabilire, al variare di a, se f è convessa.

Seconda Prova Parziale Bis 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + x^2y^2$$

<**A**> Determinare tutti i punti di possibile massimo o minimo relativo per f

<**B**> Stabilire se tali punti risultano effettivamente di massimo o di minimo relativo

<**C**> Determinare minimi e massimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : |x| \leq y^2 \leq 1\}$$

<**D**> Stabilire se f è convessa.

Terza Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x\ln(x^2+y^2) - y - 2$$

<A> Calcolare f_x f_y

<B> Studiare il segno di $\lim_{y\to+\infty} f(x,y)$ e di $\lim_{y\to-\infty} f(x,y)$;
Determinare inoltre il segno di f sulla circonferenza $x^2+y^2=1$.

<C> Studiare il segno di $f_y(x,y)$

<D> Studiare il segno di $f_x(x,y)$ nella parte di piano esterna alla circonferenza $x^2+y^2=1$.

<E> Disegnare il grafico della funzione $\phi(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$f(x,y) = 0$$

Quarta Prova Parziale 99/00

Si consideri al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la famiglia di piani

$$\pi_{(a,b)} : \qquad \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + z = 1 \qquad a, b \in \mathbb{R}_+$$

e si indichi con
- $V(a,b)$ il volume della parte di spazio avente coordinate positive, delimitata dal piano $\pi_{(a,b)}$
- $S(a,b)$ l'area della parte del pianoo $\pi_{(a,b)}$ che è delimitata dal primo ottante.

<A> Calcolare l'area di $S(a,b)$. (Può essere utile ricordare che l'area di un parallelogrammo è uguale alla norma del prodotto vettoriale dei suoi lati.)

<B> Calcolare il Volume di $V(a,b)$

<C> Scrivere l'enunciato del problema di minimizzare il volume $V(a,b)$ sotto la condizione che l'area $S(a,b) = s$ sia fissata.

<D> Determinare la soluzione del problema trovato

Quinta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V ottenuto facendo ruotare la parte di piano

$$D = \{(x, z) : 1 \leq x \leq 2 - z^2\}$$

attorno all'asse z, e la superficie S ottenuta facendo ruotare la parte di piano

$$L = \{(x, z) : 1 \leq x = 2 - z^2\}$$

attorno allo stesso asse z.

<A> Scrivere una formula di riduzione per l'integrale triplo che permette di calcolare il volume di V.

<B> Calcolare il Volume di V

<C> Scrivere una parametrizzazione di S. e una parametrizzazione di S è

<D> Scrivere una formula di riduzione per l'integrale di superficie che permette di calcolare l'area di S.

<E> Calcolare $\int_S \frac{d\sigma}{\sqrt{1+4z^2}}$.

Sesta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V ottenuto facendo ruotare la parte di piano

$$D = \{(x, z) : 1 \leq z \leq 2 - x^2\}$$

attorno all'asse x. ed il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$.

<A> Calcolare **div** F e $\int_V$ **div** $F dxdydz$

<B> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie S ottenuta facendo ruotare la parte di piano

$$D_1 = \{(x, z) : 1 = z \leq 2 - x^2\}$$

attorno all'asse x.

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie ∂V e attraverso la superficie T ottenuta facendo ruotare la parte di piano

$$D_2 = \{(x, z) : 1 \leq z = 2 - x^2\}$$

attorno all'asse x.

<D> Calcolare il **rot** F

<E> Calcolare il lavoro di F lungo la curva descritta dai punti $(x, 0, z)$ con $(x, z) \in D_1$

Settima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (8^n + 2^n)(x-3)^{3n}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza R della serie che definisce f e l'insieme di definizione D di f

<B> Stabilire se f è definita agli estremi dell'intervallo di convergenza.

<C> Calcolare $f(3 - \frac{1}{4})$ con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1-x)y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e sia

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

<D> Determinare una legge di ricorrenza per i coefficienti a_n in corrispondenza della quale y sia soluzione del problema dato

<E> Determinare esplicitamente y

Ottava Prova Parziale 99/00

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)\left(\frac{y^2(x)-1}{y^2(x)}\right)$$

<A> Trovare, al variare di a la soluzione dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = 0$

<B> Trovare la soluzione dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = x$$

<C> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

<D> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

<E> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

Recupero Prima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2+y^2} & 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ 0 & x^2+y^2 > 4 \\ a - \sqrt{R^2-x^2-y^2} & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

<A> Determinare i valori di a e di R per i quali f è continua su $\mathbb{R}^2$

<B> Calcolare le derivare parziali di f in $(0,1)$

<C> Stabilire se f è differenziabile in $(1,1)$ e calcolarne il gradiente.

Recupero Seconda Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2+y^2} & 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ 0 & x^2+y^2 > 4 \\ 1 - \sqrt{1-x^2-y^2} & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

<A> Determinare tutti i punti di possibile massimo o minimo assoluti di f su $[1/2, 3] \times [0, 3]$

<B> Disegnare il grafico della funzione $g(x) = f(x, x)$

<C> Stabilire se f ha massimo e minimo assoluti sulla bisettrice primo-terzo quadrante

Recupero Terza Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = xy + y^2e^y$$

<A> Stabilire se, in un intorno di $(0,0)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

<B> Stabilire se, in un intorno di $(1,0)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

<C> Stabilire se, in un intorno di $(-e,1)$, è possibile esplicitare y in funzione di x o x in funzione di y nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

<D> Disegnare il luogo di punti del piano definito da

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

Recupero Quarta Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

ed il solido

$$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

<A> Stabilire se esistono massimi e minimi assoluti di f su T e determinarli

<B> Stabilire se esistono massimi e minimi relativi di f su T e determinarli

Recupero Quinta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$$

<A> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume di T e calcolarlo

<B> Determinare una parametrizzazione della superficie ∂T

<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area di ∂T e calcolarla

Recupero Sesta Prova Parziale 99/00

Si consideri il solido V

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$$

ed il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

<**A**> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie ∂T

<**B**> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z = 0\}$$

<**C**> Calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z \geq 0\}$$

Recupero Settima Prova Parziale 99/00

Si consideri la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2n}$$

<A> Stabilire, nel campo complesso, l'insieme di definizione D della serie.

<B> Scrivere la serie che definisce $f'(z)$ e precisarne il campo di definizione

<C> Determinare esplicitamente f (in termini di funzioni elementari)

Recupero Ottava Prova Parziale 99/00

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + xy'(x) = x$$

<A> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

<B> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

<C> Determinare le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

Prima Prova Parziale 00/01

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \max\{(y-x^2)(x-y^2), 0\}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ e $(0,1)$

<D> Calcolare $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$

Seconda Prova Parziale 00/01

Si considerino le funzioni

$$f(x, y) = x^4 + y^2 \qquad , \qquad g(x, y) = y^2 + x^6 - 16$$

<A> Determinare i punti di massimo o minimo relativo ed assoluti per f

<B> Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in D : g(x, y) \leq 0\}$$

<C> Determinare i punti di minimo o massimo relativo ed assoluto per f su

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

<D> Determinare i punti di minimo o massimo relativo ed assoluto per f su

$$D = \{(x, y) \in D : g(x, y) \leq 0\}$$

Terza Prova Parziale 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - x^2, z \le 1 - |y|\}$$

<A> Disegnare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$$

<B> Disegnare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 = 1 - |y|\}$$

<C> Disegnare

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \le 1 - |y|\}$$

<D> Calcolare il volume di A

Quarta Prova Parziale 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$$

<A> Determinare le equazioni parametriche di A

<B> Calcolare il vettore N normale ad A

<C> Calcolare la misura di A

<D> Scrivere una parametrizzazione di

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y = 0\}$$

<E> Calcolare la misura di

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y = 0\}$$

Quinta Prova Parziale 00/01

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y}{1+xy}, -\frac{x}{1+xy}\right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso (irrotazionale).

<B> Calcolare, se esiste, un potenziale di F, precisandone il campo di definizione

<C> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1/2$

<D> Calcolare tutti i potenziali di F

Sesta Prova Parziale 00/01

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n^2+2n}$$

<A> Determinare l'intervallo D in cui la serie converge

<B> Studiare la convergenza della serie negli estremi di D

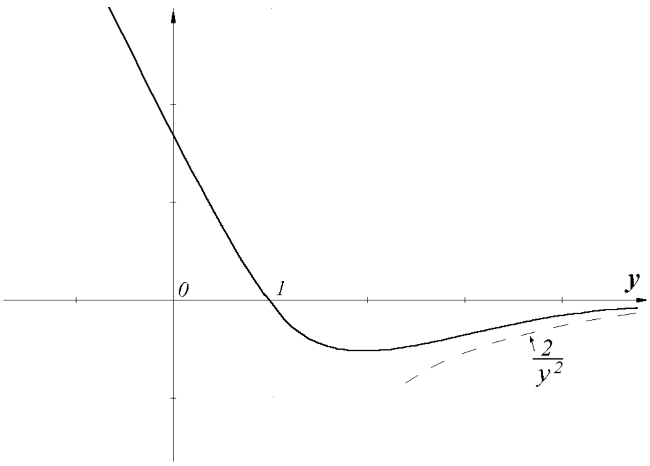
<C> Approssimare la somma della serie calcolata nel primo estremo di D, a meno di $1/10$

<D> Calcolare, dove esiste, la derivata di f.

Settima Prova Parziale 00/01

Si consideri il problema di Cauchy

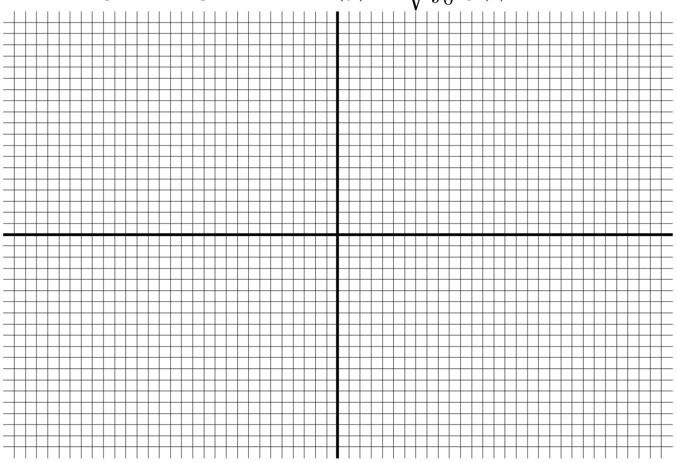
$$\begin{cases} 2y''(x) = g(y(x)) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$



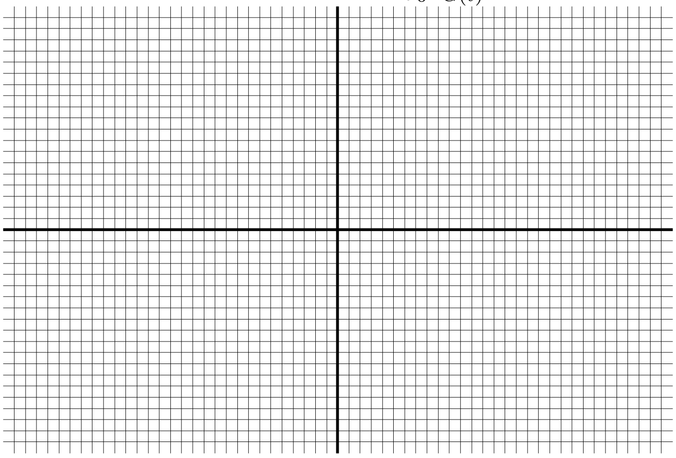
dove g è la funzione il cui grafico è indicato in figura.

e l'area $\int_0^{+\infty} g(s)ds > 0$

<A> Disegnare il grafico di $G(y) = \sqrt{\int_0^y g(t)dt}$,

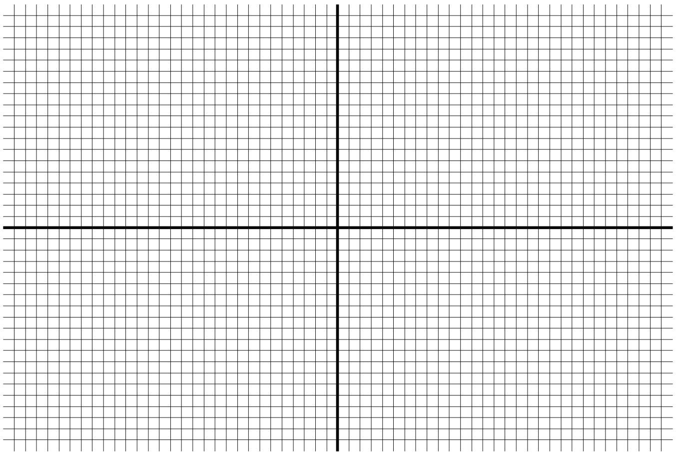


<B> Disegnare il grafico di $F(y) = \int_0^y \frac{1}{G(t)}dt$,

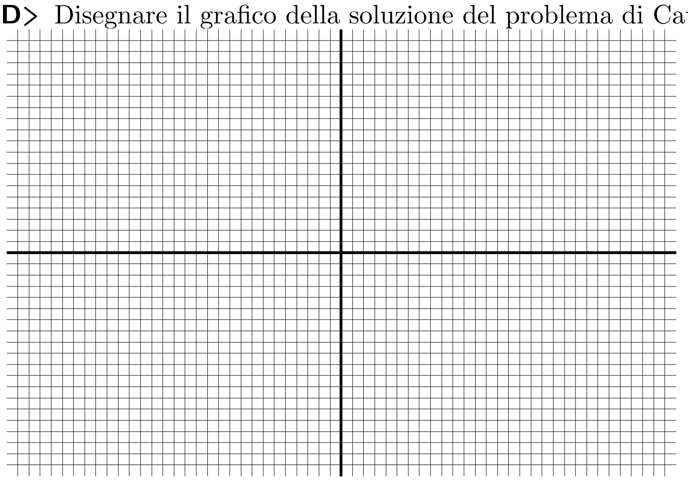


<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = G(y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



<D> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato



Recupero Prima Prova Scritta 00/01

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x & y \leq x \\ a(y-x) + b(y-x)^2 & y > x \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ e $(0,1)$

Recupero Seconda Prova Parziale 00/01

Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = by + y^2 + x^2 \qquad , \qquad g(x,y) = y^2 + x^2 - 2y$$

<A> Determinare i punti di massimo o minimo relativo ed assoluti per f

<B> Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq 0\}$$

<C> Determinare i punti di minimo o massimo relativo ed assoluto per f su

$$D = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq 0\}$$

Recupero Terza Prova Scritta 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di A

Recupero Quarta Prova Scritta 00/01

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

<A> Determinare le equazioni parametriche di A e calcolarne la superficie

<B> Scrivere una parametrizzazione di

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-y^2}, x^2 + y^2 = 1\}$$

e calcolarne la lunghezza.

Recupero Quinta Prova Scritta 00/01

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(2x\cos(x^2+y^2) - \frac{1}{x^2}, 2y\cos(x^2+y^2)\right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso (irrotazionale).

<B> Calcolare, se esiste, un potenziale di F, precisandone il campo di definizione

<C> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1/2$

Recupero Sesta Prova Scritta 00/01

Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x^2)^n}{n!}$$

<A> Determinare l'insieme D in cui la serie converge

<B> Provare che

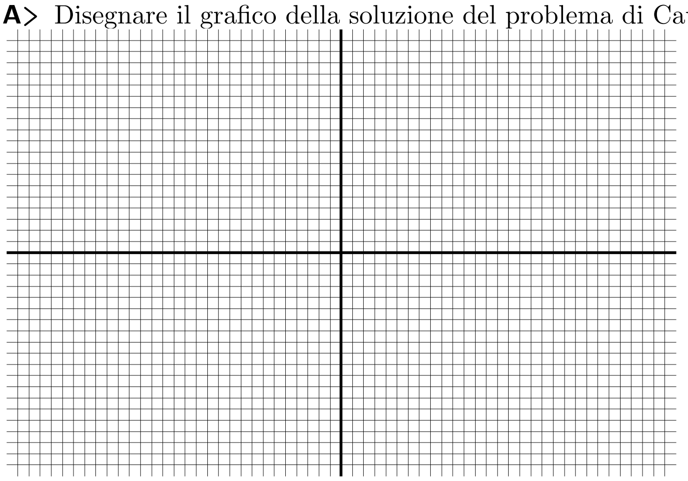
$$f'(x) = (1 - 2x)f(x)$$

Recupero Settima Prova Scritta 00/01

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y''(x) = 3y^2(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<A> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy dato



Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (y - \arctan x)^2 & y > \arctan x \\ y - \arctan x & y \leq \arctan x \end{cases}$$

<**A**> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<**B**> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<**C**> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\pi/4, 2)$

<**D**> Scrivere l'equazione del piano tangente in $(\pi/4, 2)$

<**E**> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(\pi/4, 1)$

Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y^2 + 4x^2(x^2 - 1)$$

<A> Determinare δ_1 tale che

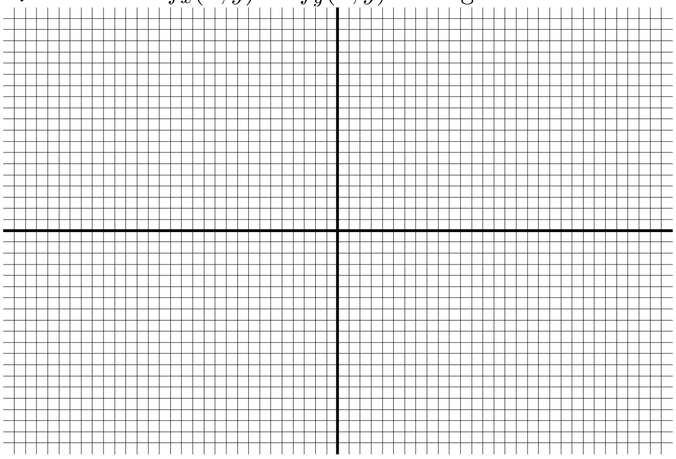
$$f(x, 0) \leq 0 \qquad \forall x \in [0, \delta_1]$$

<B> Determinare δ_2 tale che

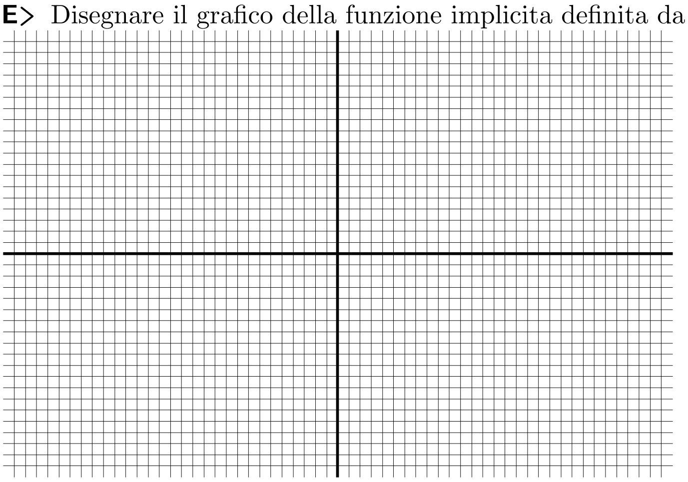
$$f(x, 1) \geq 0 \qquad \forall x \in [0, \delta_2]$$

<C> Determinare δ tale che per ogni x fissato in $[0, \delta]$ l'equazione $f(x, y) = 0$ ammette una ed una sola soluzione in $[0, 1]$

<D> Calcolare $f_x(x, y)$ ed $f_y(x, y)$ e disegnare l'insieme dei punti del piano in cui in cui sono positive.



<E> Disegnare il grafico della funzione implicita definita da $f(x, y) = 0$



Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la linea γ di equazioni

$$\begin{cases} z(t) = t^3 + t + 1 \\ y(t) = t\ln(t) - t \end{cases} \qquad t = \in [3, 4]$$

<A> Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse z

<B> Calcolare il vettore N normale alla superficie S

<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area della superficie S.

<D> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume delimitato da S e dai piani $z = 0$ e $z = 1$.

<E> Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse y

Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq z \geq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<A> Scrivere le equazioni parametriche della frontiera ∂V di V.

<B> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0, 0, 1)$ attraverso la superficie ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0, 0, 1)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 = z \geq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0, 0, 1)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Quinta Prova Parziale 01/02

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3+n}$$

<A> Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza.

<B> Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale.

<C> Disegnare il grafico della somma della serie sul suo intervallo di convergenza reale
Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-x^2)^n}{n^3+n}$$

<D> Stabilire dove f è continua, dove è derivabile e disegnare il grafico della somma della serie.

Sesta Prova Parziale 01/02

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x)\cos y(x) = (y'(x))^2 \sin y(x)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

<C> Disegnare il grafico di una soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = y_0$, $y_1 = 0$

<D> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$.

Recupero Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0, 0)$

<D> Scrivere, se esiste, l'equazione del piano tangente in $(0, 0)$

Recupero Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2$$

<A> Determinare δ_1 tale che

$$f(x,3) \leq 0 \qquad \forall x \in [2-\delta_1, 2+\delta_1]$$

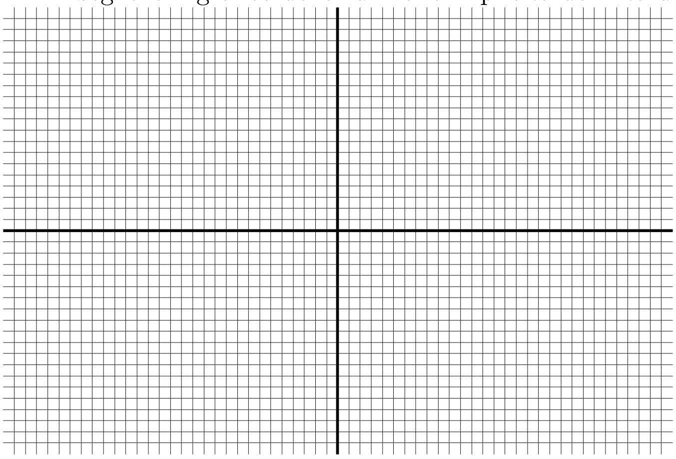
<B> Determinare δ_2 tale che

$$f(x,1) \geq 0 \qquad \forall x \in [2-\delta_2, 2+\delta_2]$$

<C> Determinare δ tale che per ogni x fissato in $[2-\delta, 2+\delta]$ l'equazione $f(x,y) = 0$ ammette una ed una sola soluzione.

<D>

Disegnare il grafico della funzione implicita definita da $f(x,y) = 0$



Recupero Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la linea γ di equazioni

$$\begin{cases} z(t) = t^3 \\ y(t) = t\ln(t) \end{cases} \qquad t = \in [1, 2]$$

<A> Determinare le equazioni parametriche della superficie S ottenuta mediante la rotazione di 2π radianti della linea γ attorno all'asse z

<B> Calcolare il vettore N normale alla superficie S

<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare l'area della superficie S.

<D> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume delimitato da S e dai piani $z = 1$ e $z = 8$.

Recupero Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

<A> Scrivere le equazioni parametriche della frontiera ∂V di V.

<B> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x, y, z)$ attraverso la superficie ∂V

<C> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x, y, z)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Recupero Quinta Prova Parziale 01/02

Si consideri la serie di potenze definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

<A> Determinarne il raggio di convergenza e disegnare nel piano complesso il cerchio di convergenza.

<B> Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza reale.
Si consideri poi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{\sqrt{n^2+1}}$$

<C> studiare il campo di definizione di f la sua continuità e la sua derivabilità

Recupero Sesta Prova Parziale 01/02

Si consideri l'equazione differenziale

$$\ln(y(x))y''(x) - \frac{1}{x}y^2(x) = 0$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione relativa ai dati iniziali $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = -1$

<C> Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$.

Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x-y) & xy(x-y) \geq 0 \\ 0 & xy(x-y) < 0 \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,1)$

<D> Calcolare massimi e minimi assoluti di f su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$$

Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la curva

$$\gamma \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ z(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, 1/2]$$

<A> Disegnare la curva γ

<B> Calcolare la lunghezza di γ

<C> Calcolare l'area della superficie S ottenuta facendo ruotare γ di $\pi/2$ attorno all'asse z

<D> Calcolare il volume del solido delimitato da S, dai piani coordinati e dal piano $z = \sin(1)$

Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione definita dalla serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

<A> Determinare l'insieme su cui y è definita continua e derivabile 2 volte

<B> calcolare su tale insieme $y'(x)$ ed $y''(x)$

<C> Verificare che

$$y'(x) = -2xy(x)$$

<D> Calcolare $y(1/2)$ a meno di $1/100$

<E> Esprimere y in termini di funzioni elementari.

Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + (y'(x))^2 + (y(x)+1)y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

<B> Determinare la soluzione per $a = 0$

<C> Disegnare il grafico della soluzione per $a = \frac{1}{e} - 1$

Recupero Prima Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \max\{xy(x - y), 0\}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Determinare i punti del piano in cui f è differenziabile

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0, 1)$

<D> Calcolare massimi e minimi assoluti di f su

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$$

Recupero Seconda Prova Parziale 01/02

Si consideri la curva

$$\gamma \begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = t^3 - t \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

<A> Disegnare la curva γ

<B> Calcolare la lunghezza di γ

<C> Calcolare l'area della superficie S ottenuta facendo ruotare γ di 2π attorno all'asse z

<D> Calcolare il volume del solido delimitato da S, e dal piano $z = 0$

Recupero Terza Prova Parziale 01/02

Si consideri la funzione definita dalla serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2^n)}}{n^2}$$

<A> Determinare l'insieme su cui y è definita continua e derivabile 2 volte

<B> calcolare su tale insieme $y'(x)$ ed $y''(x)$

<C> Calcolare $y(1/2)$ a meno di $1/100$

Recupero Quarta Prova Parziale 01/02

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + (y(x))^4 + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare di a

<B> Disegnare il grafico della soluzione per $a = 1$

<C> Disegnare il grafico della soluzione per $a = -1$

Prima Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+1)^2 & y\ge x^2+1\\ y^2 & 0<y<x^2+1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,0)$ e $\nabla f(0,1)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(1,0)$

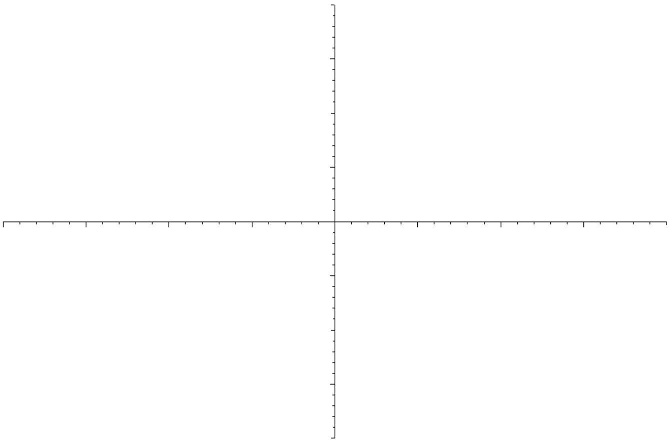
<D> Stabilire se f è differenziabile in f in $(0,1)$ ed in $(1,0)$

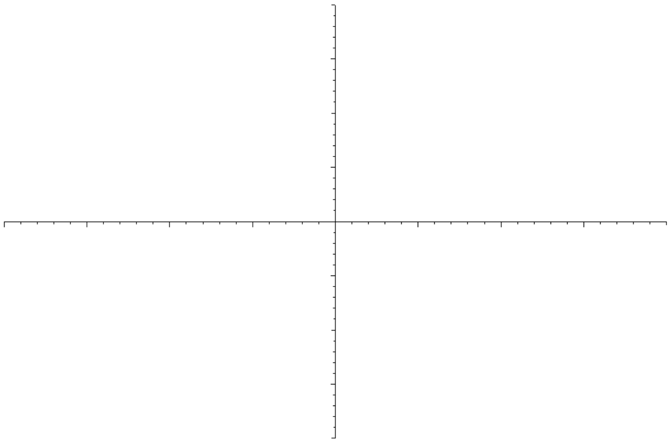
Seconda Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y^2 + \ln(1 + x^2y^2) - 1$$

<A> Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y e disegnare nel piano gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative.





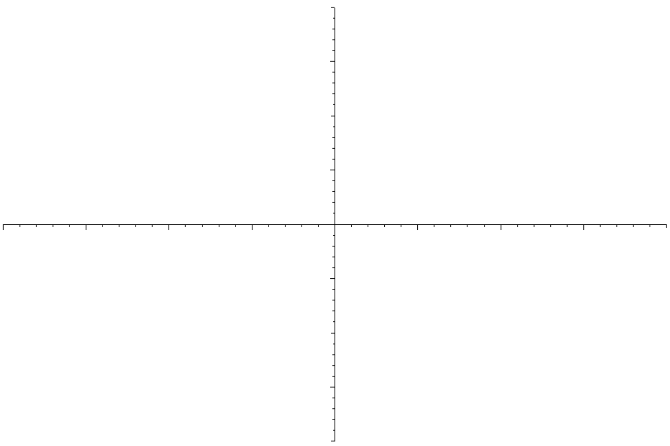
<B> Studiare il segno di $f(x, y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

<C> Studiare il segno di $f(x, y)$ per $y = \pm\frac{2}{x}$

<D> Disegnare nel piano le curve

$$y = \pm 1 \qquad . \qquad y = 0 \qquad , \qquad y = \pm\frac{2}{x}$$

riportando il segno di f ristretta a tali curve.

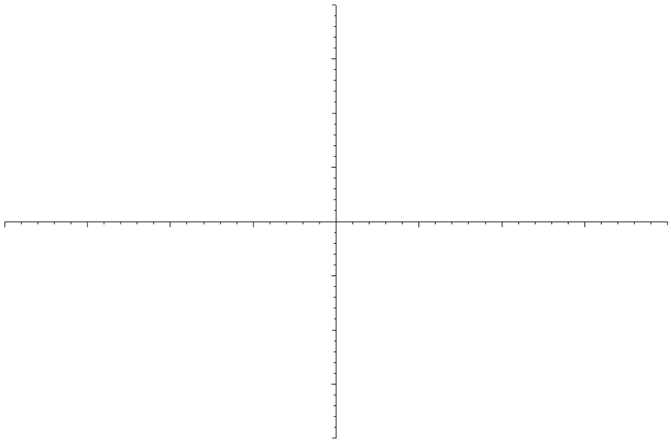


<E> Stabilire se $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assuma valori positivi, precisando il suo campo di definizione.

<F> Studiare crescenza e decrescenza di φ, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \qquad\qquad , \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) =$$

e disegnare il grafico di φ



Terza Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

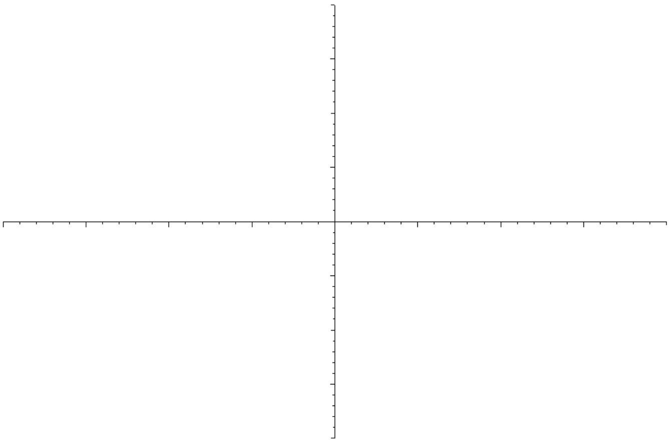
$$z = f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

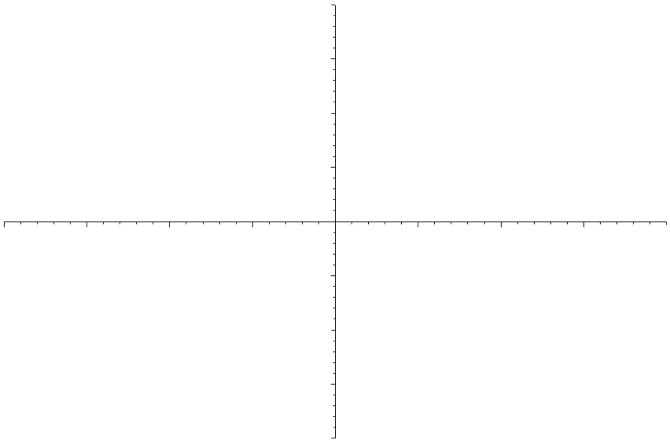
e sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 4x^2 + y^2 \leq z \leq 2 + 4x + 2y\}$$

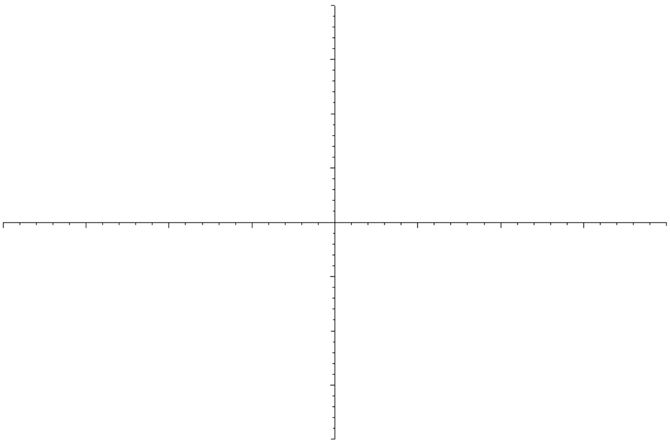
<A> Disegnare il grafico delle funzioni

$$z = f(x, 0) \qquad z = f(0, y)$$





<B> Disegnare la proiezione di V sul piano (x, y).



<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume di V

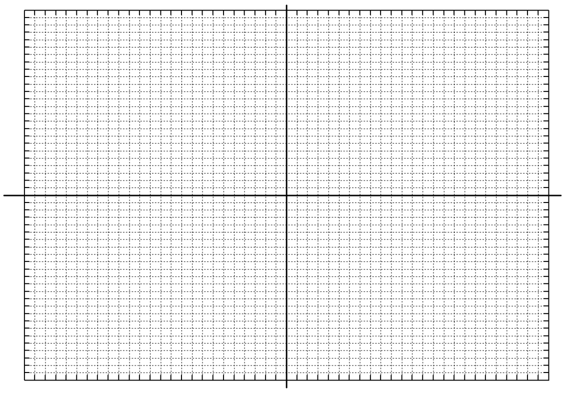
<D> Calcolare il volume di V

Quarta Prova Parziale 02/03

Si consideri l'insieme

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \ , \ x - 1 \leq z \leq 0\}$$

<A> Disegnare nel piano (x, z) l'insieme D e si consideri il volume V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse z di 2π



<B> Determinare le equazioni parametriche della superficie

$$S_1 = \partial V \cap \{z = 0\}$$

e della superficie

$$S_2 = \partial V \setminus S_1$$

<C> Determinare vettore normale ed area della superficie S_2
Si consideri inoltre il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

<D> Calcolare il flusso di F attraverso S_1 ed il flusso di F attraverso S_2

<E> Calcolare **rot** F ed il flusso di **rot** F attraverso S_2

<F> Calcolare il lavoro compiuto da F sul cerchio definito da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quinta Prova Scritta Parziale 02/03

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}(x-1)^{3n}$$

<A> Determinare il raggio di convergenza della serie ed il suo intervallo di convergenza

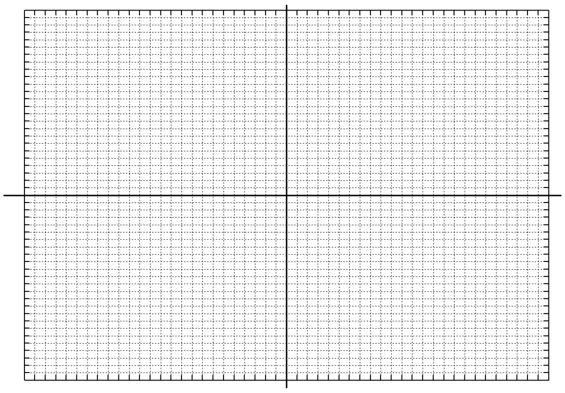
<B> Stabilire se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza

<C> Studiare la convergenza uniforme della serie

<D> Calcolare f'

<E> Studiare il segno di f'

<F> Disegnare il grafico di f



Sesta Prova Parziale 02/03

Si consideri il problema di Cauchy

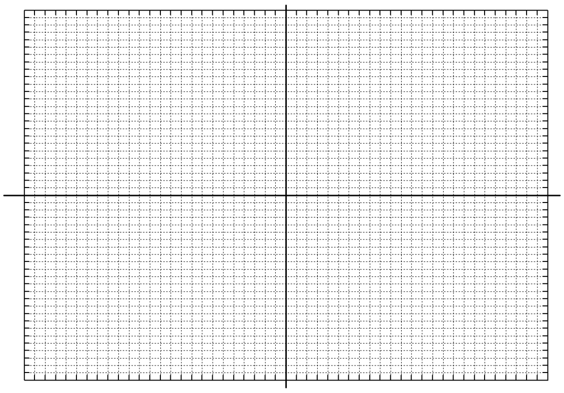
$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 - y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

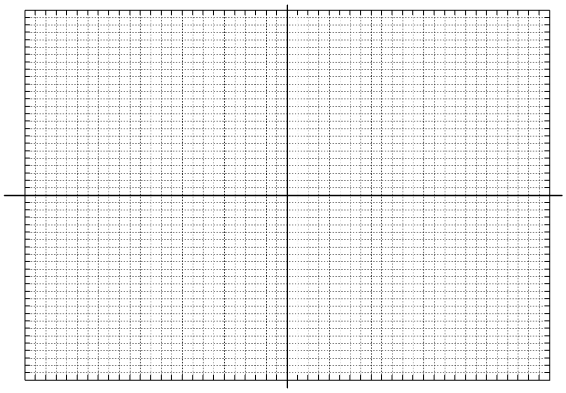
<A> Studiare esistemza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<B> Determinare le soluzioni costanti $y(x) = c$ e le soluzioni del tipo $y(x) = ax + b$ della sola equazione differenziale

<C> Per $a = 0$ e $b = 2$, determinare una funzione $z(y)$ tale che $z(y(x)) = y'(x)$ per le soluzioni della sola equazione differenziale.

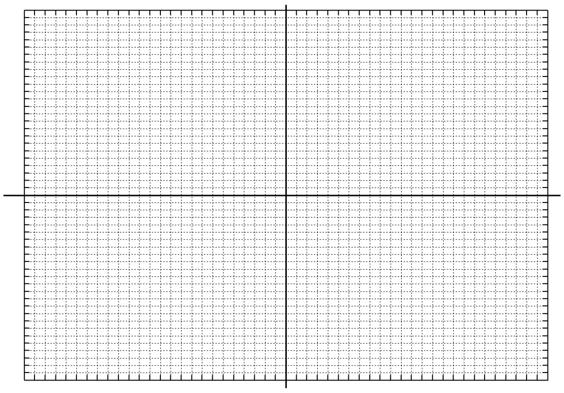
<D> Per $a = 0$ e $b = 2$, disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema di Cauchy, ed il grafico della soluzione del problema di Cauchy.

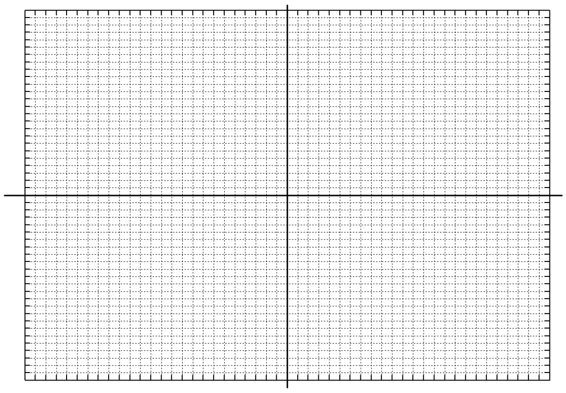




<E> Per $a = 0$ e $b = 2$, determinare una espressione esplicita di y (può essere utile integrare per sostituzione ponendo $e^s = u$)

<F> Per $a = 0$ e $b = -2$, Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy.





Recupero Prima Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & y \geq x^2+1 \\ x-y & 0 < y < x^2+1 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,0)$ e $\nabla f(0,1)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(1,0)$

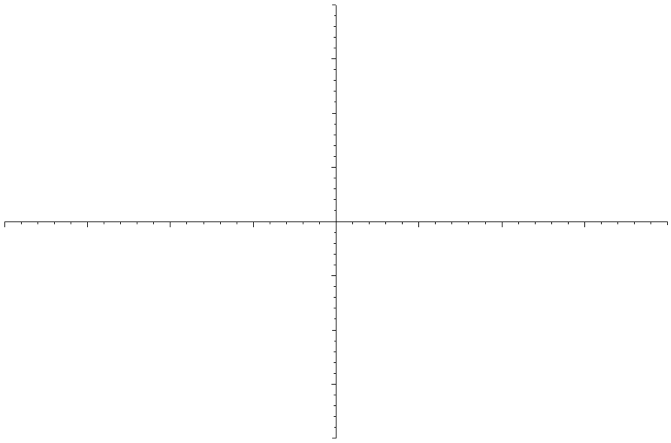
<D> Stabilire se f è differenziabile in f in $(0,1)$ ed in $(1,0)$

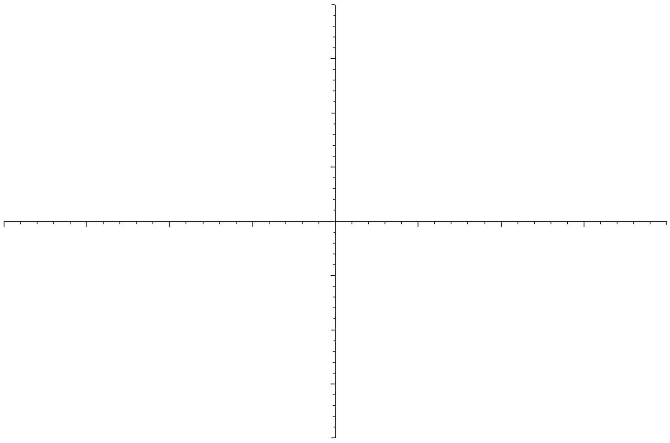
Recupero Seconda Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{y^2}(1 + x^2y^2) - e$$

<A> Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y e disegnare nel piano gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative.



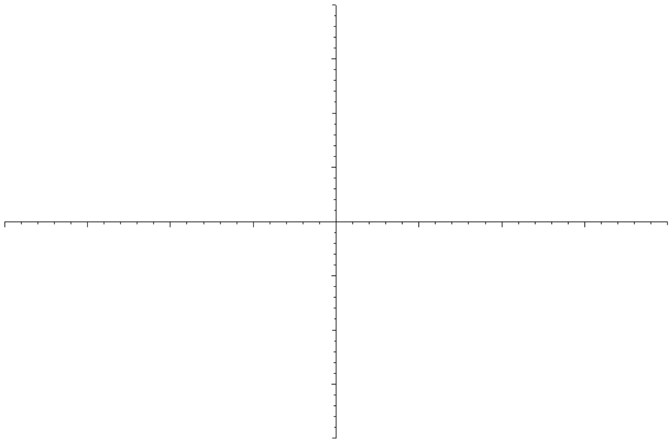


<B> Studiare il segno di $f(x, y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

<C> Disegnare nel piano le curve

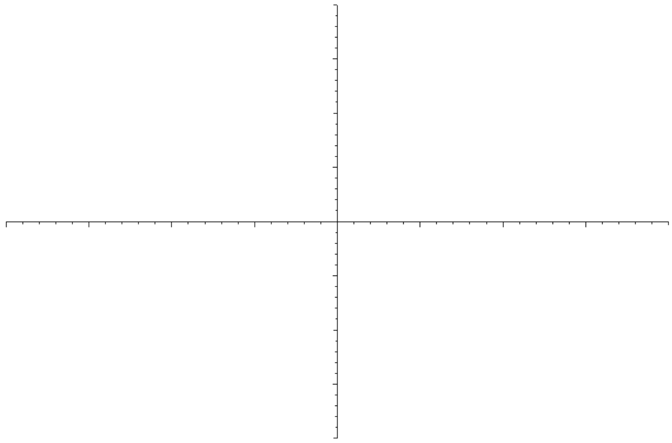
$$y = \pm 1 \qquad . \qquad y = 0$$

riportando il segno di f ristretta a tali curve.



<D> Stabilire se $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assuma valori positivi, precisando il suo campo di definizione.

<E> Studiare crescenza e decrescenza di φ, e disegnare un grafico approssimativo di φ



Recupero Terza Prova Parziale 02/03

Si consideri la funzione

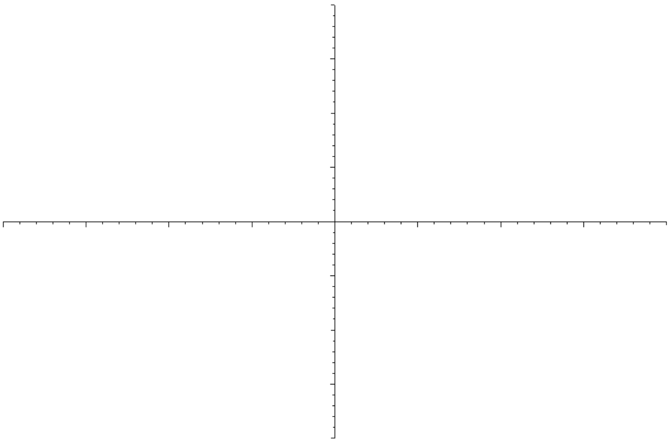
$$z = f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

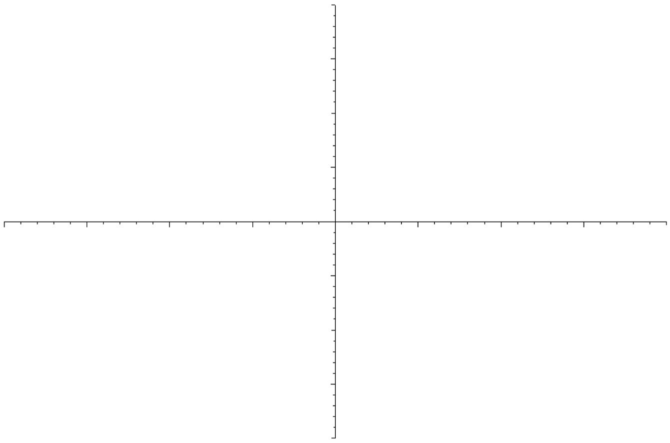
e sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq y\}$$

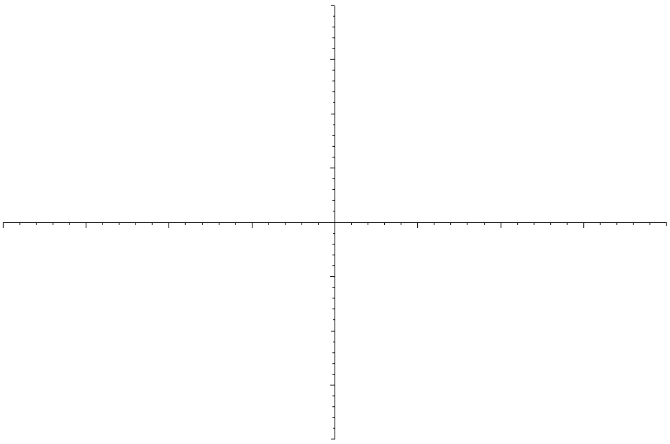
<A> Disegnare il grafico delle funzioni

$$z = f(x, 0) \qquad z = f(0, y)$$





<B> Disegnare la proiezione di V sul piano (x, y).



<C> Scrivere le formule di riduzione che consentono di calcolare il volume di V

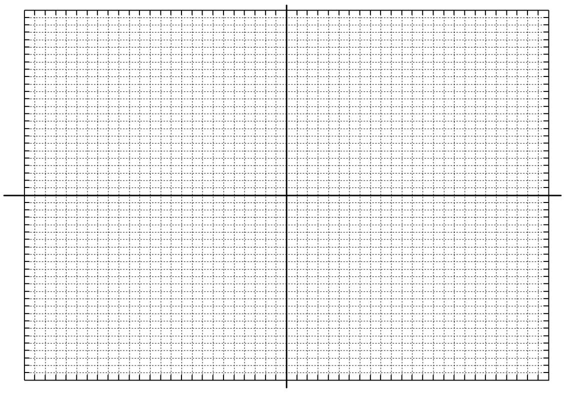
<D> Calcolare il volume di V

Recupero Quarta Prova Parziale 02/03

Si consideri l'insieme

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ -(x-1)^2 \le z \le 0\}$$

<A> Disegnare nel piano (x, z) l'insieme D e si consideri il volume V ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse z di 2π



<B> Determinare le equazioni parametriche della superficie

$$S_1 = \partial V \cap \{z = 0\}$$

e della superficie

$$S_2 = \partial V \setminus S_1$$

<C> Determinare vettore normale ed area della superficie S_2
Si consideri inoltre il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

<D> Calcolare il flusso di F attraverso S_1

<E> Calcolare il lavoro compiuto da F sulla curva definita da

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \qquad t \in [0, 2] \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Recupero Quinta Prova Parziale 02/03

Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^{3n}$$

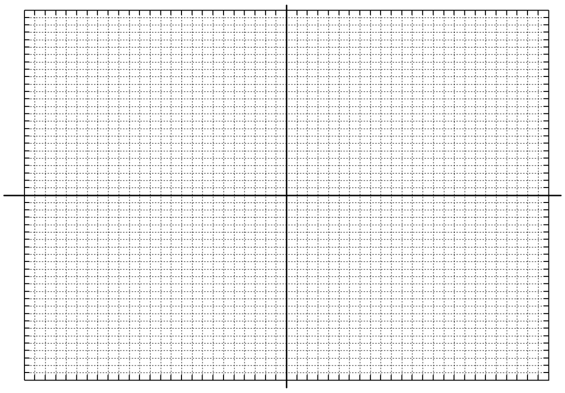
<A> Determinare il raggio di convergenza della serie ed il suo intervallo di convergenza

<B> Studiare la convergenza uniforme della serie

<C> Calcolare f'

<D> Studiare il segno di f'

<E> Disegnare il grafico di f



Recupero Sesta Prova Parziale 02/03

Si consideri il problema di Cauchy

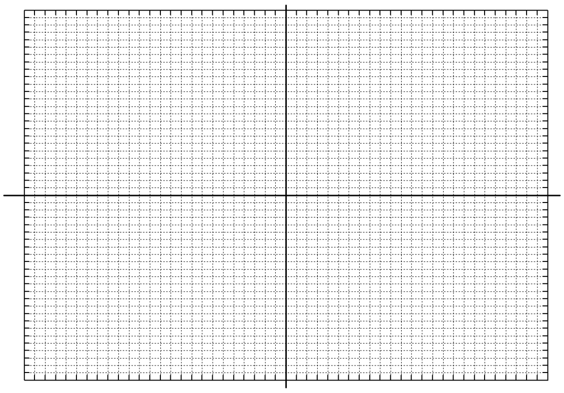
$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)e^{-y'(x)} \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

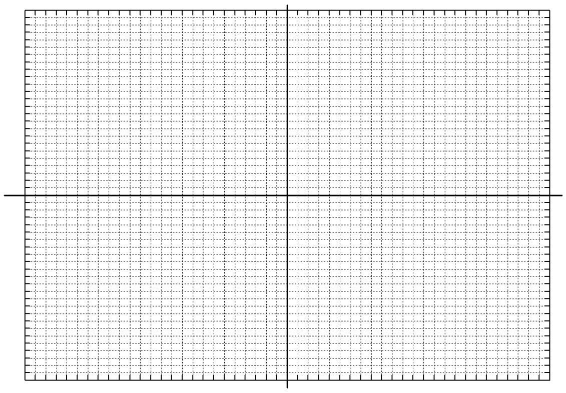
<A> Studiare esistemza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

<B> Determinare le soluzioni costanti $y(x) = c$.

<C> Per $a > 0$ e $b = \ln(a)$, determinare una funzione $z(y)$ tale che $z(y(x)) = y'(x)$ per le soluzioni della sola equazione differenziale.

<D> Per $a = 2$ e $b = \ln(a)$, disegnare il grafico dell'inversa della soluzione del problema di Cauchy, ed il grafico della soluzione del problema di Cauchy.





Prima Prova Scritta 28/01/2004

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln(1+(x-y)^3) & (x-y)>0\\ (x-y)^4 & (x-y)\le 0, x\ge 0\\ 0 & (x-y)\le 0, x<0\end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,1)$ e $\nabla f(0,0)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$

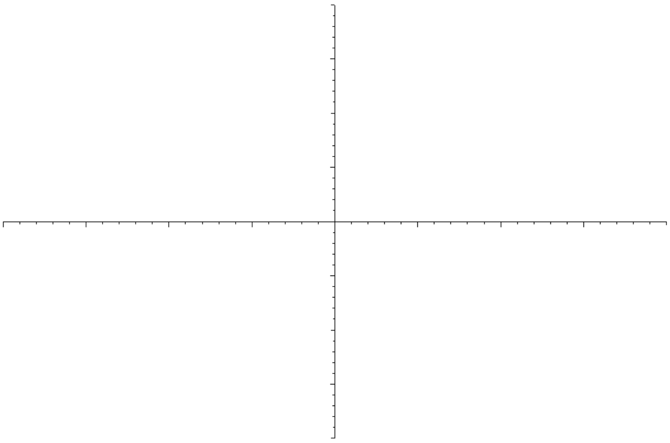
<D> Stabilire se f è differenziabile in f in $(1,1)$ ed in $(0,0)$

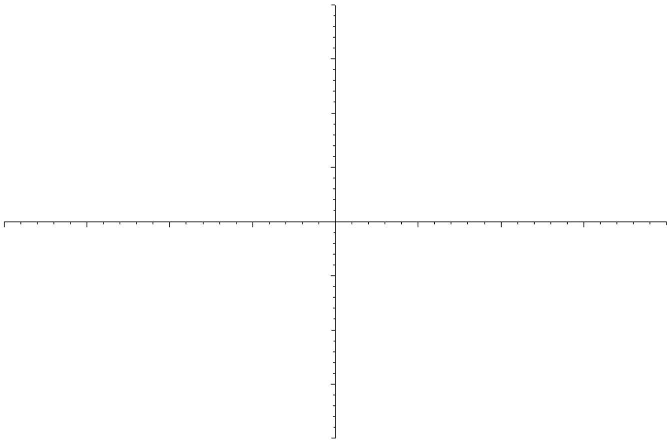
Seconda Prova Scritta 18/02/2004

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 3^{y^2}(1 + x^2y^2) - 2$$

<A> Calcolare le derivate parziali f_x ed f_y determinare gli insiemi in cui f_x ed f_y sono positive e gli insiemi in cui sono negative e disegnarli nel piano.





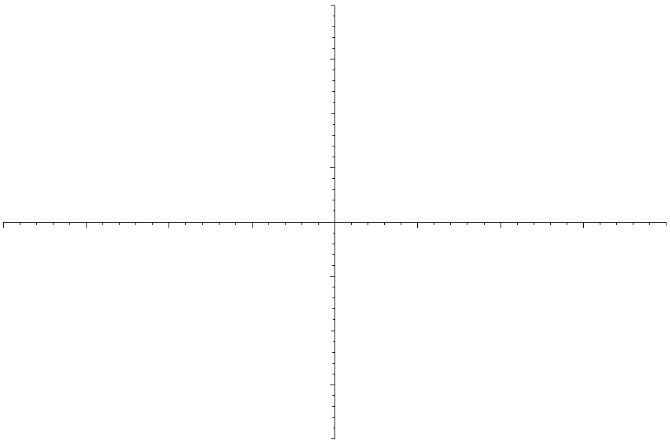
<B> Determinare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm 1$ e per $y = 0$

<C> Determinare il segno di $f(x,y)$ per $y = \pm\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ e $|x| > 1$

<D> Disegnare nel piano le curve

$$y = \pm 1 \qquad . \qquad y = 0 \qquad , \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

riportando, ove possibile,il segno di f ristretta a tali curve.

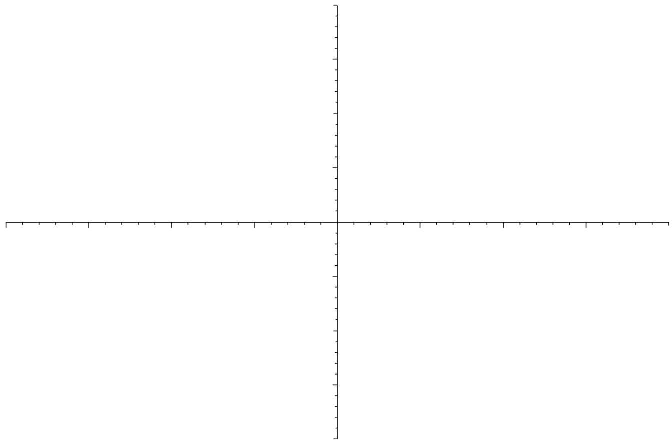


<E> Giustificare il fatto che $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ che assume valori negativi, definita su $\mathbb{R}$.

<F> Studiare crescenza e decrescenza di φ, calcolare

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \qquad\qquad , \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) =$$

e disegnare il grafico di φ



Terza Prova Scritta 10/03/2004

Si consideri

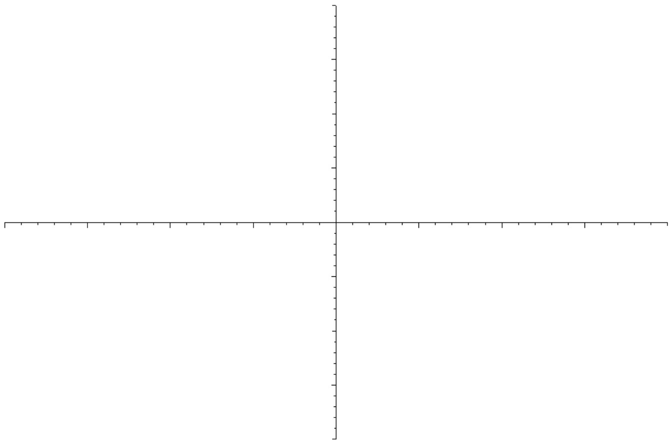
$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 - y \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}\ ,\ y \leq 3\}$$

e

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |1 - y| \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}\ ,\ y \leq 3\}$$

Parte 1

<A> Disegnare la proiezione di V_1 sul piano (x, y)



<B> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo di

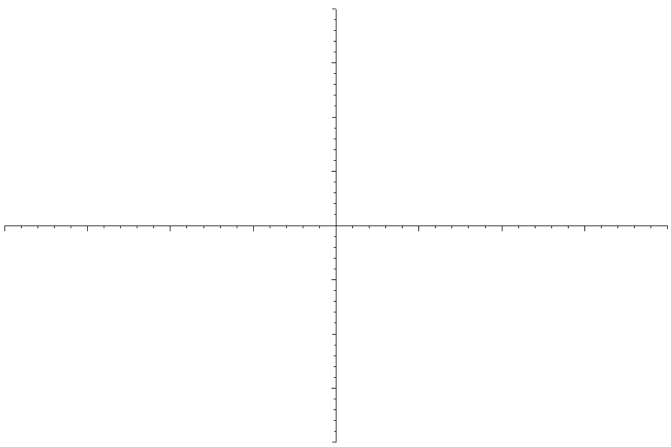
$$\iiint_{V_1} dxdydz$$

<C> Calcolare

$$\iiint_{V_1} dxdydz$$

Parte 2

<D> Disegnare la proiezione di V_2 sul piano (x, y)



<E> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo di

$$\iiint_{V_2} dxdydz$$

<F> Calcolare

$$\iiint_{V_2} dxdydz$$

Parte 3

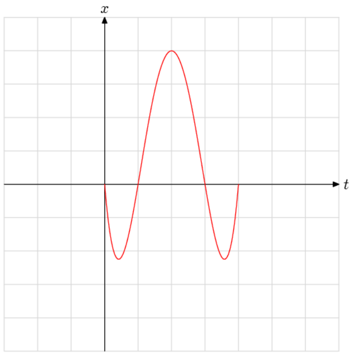
La Parte 1 e la Parte 2 valgono complessivamente 10 punti. Indicare a quale delle due parti si desidera attribuire 6 punti e a quale 4 punti

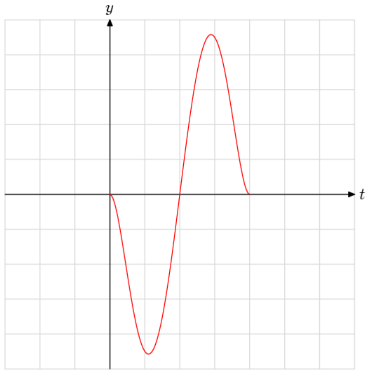
Correggere attribuendo 6 punti alla parte ......

Quarta Prova Scritta 20/05/2004

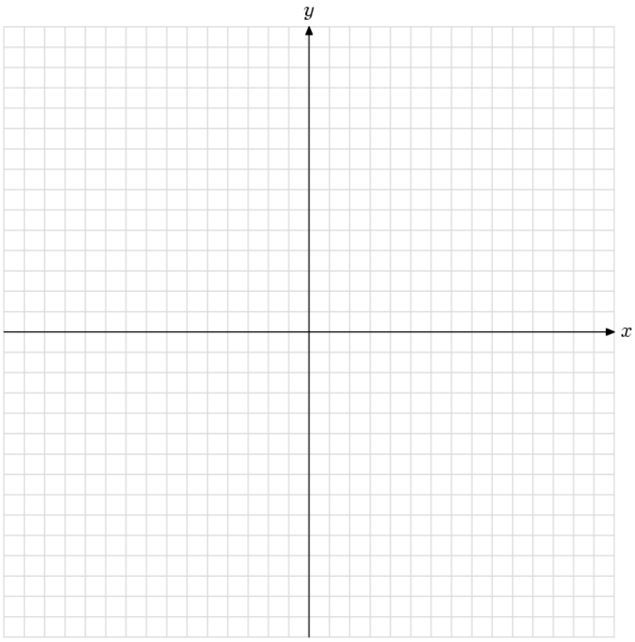
Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = t(t-1)(t-3)(t-4) \\ y(t) = t^2(t-4)^2(t-2) \end{cases} \qquad t \in [0,4]$$





<A> Disegnare la curva γ



<B> Calcolare il vettore tangente alla curva in $(0,0)$ ed in $(4,0)$, ed utilizzare le informazioni per precisare il disegno di γ

<C> Calcolare la lunghezza di γ

<D> Verificare che γ è semplice, chiusa, regolare

Quinta Prova Scritta 14/06/2004

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$$

<A> Determinare i valori di x per i quali f è definita.

<B> Verificare che f soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} xy'(x) = y(x)(1-x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

<C> Determinare esplicitamente f

<D> Determinare lo sviluppo in serie di McLaurin di f

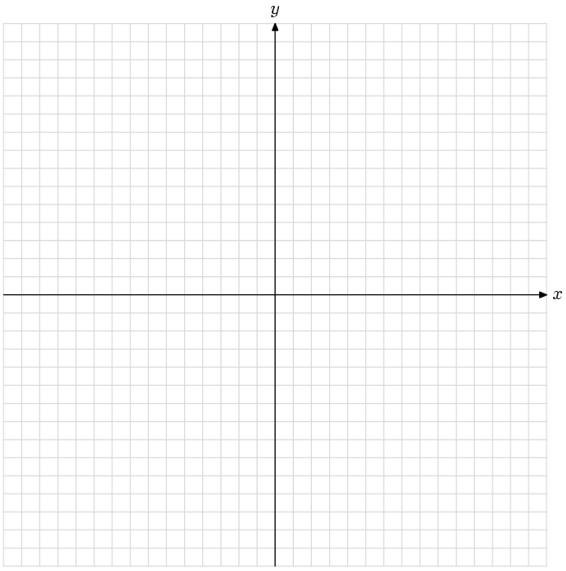
Sesta Prova Scritta 24/06/2004

Si consideri l'equazione differenziale

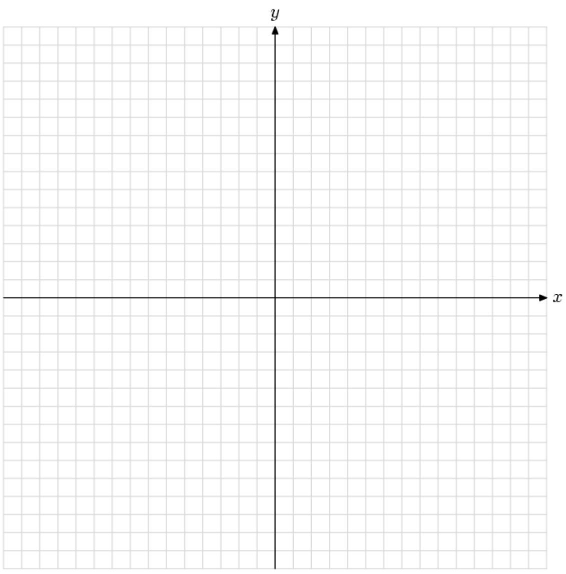
$$2y''(x) = y(x)(2 - 3y(x))$$

⟨A⟩ Studiare esistenza ed unicità locale della soluzione dell'equazione corrispondente ai dati iniziali. $y(0) = a$ e $y'(0) = b$

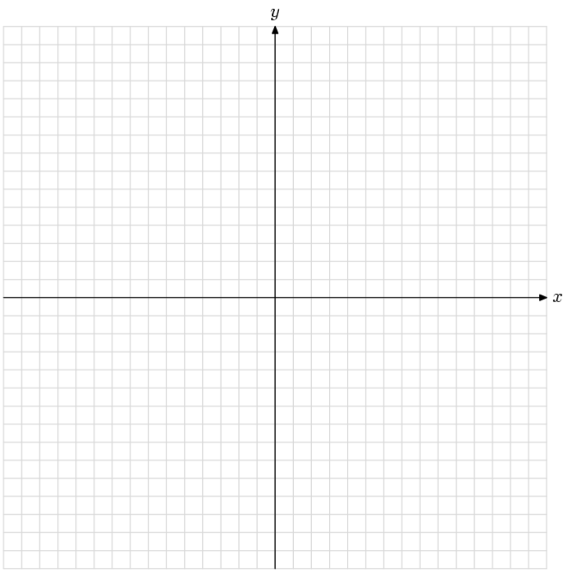
⟨B⟩ Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$



⟨C⟩ Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -2$



⟨D⟩ Stabilire se la soluzione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ può essere prolungata e, in caso affermativo, disegnare il grafico del suo prolungamento.


y
x

Recupero Prima Prova Scritta 28/01/2004

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(1+(y-2x)(x-2y)) & (y-2x)(x-2y) > 0 \\ 0 & (y-2x)(x-2y) \leq 0 \end{cases}$$

<A> Determinare i punti del piano in cui f è continua

<B> Calcolare $\nabla f(1,2)$

<C> Calcolare, se esistono le derivate direzionali di f in $(1,2)$

<D> Stabilire se f è differenziabile in $(1,2)$

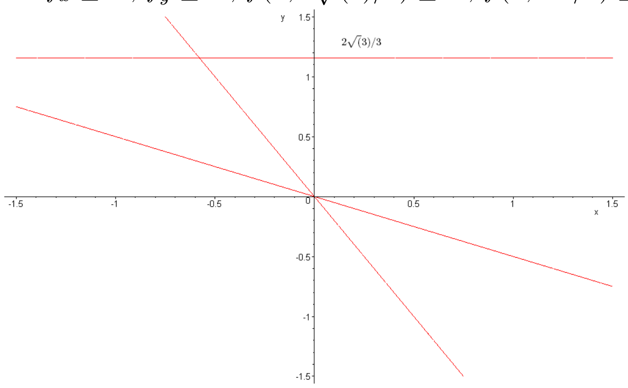
Recupero Seconda Prova Scritta 18/02/2004

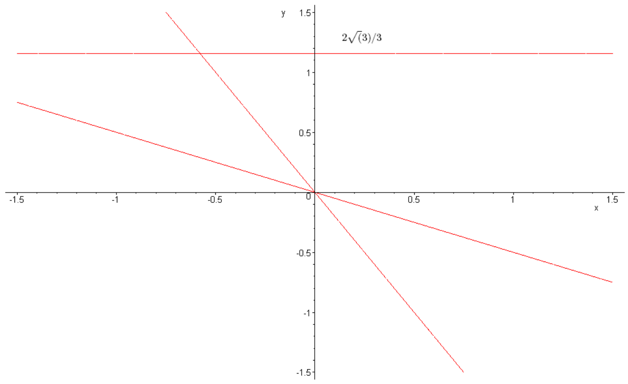
Si consideri la funzione

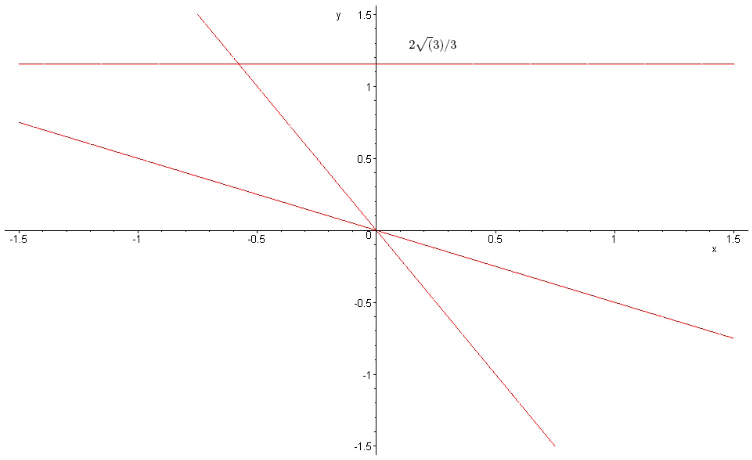
$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$$

<A> Determinare nel piano gli insiemi in cui

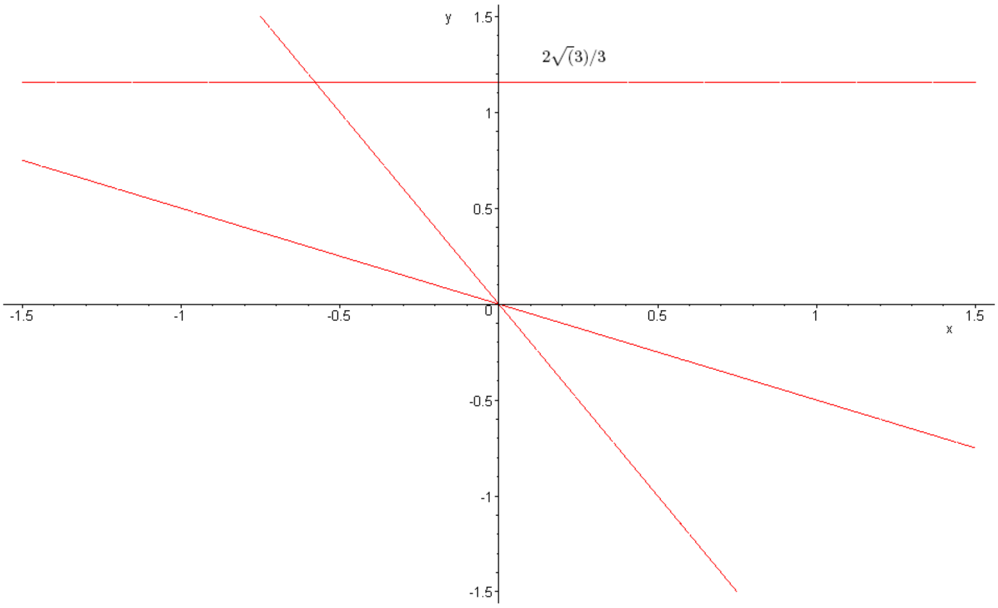
$f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$, $f(x, 2\sqrt(3)/3) \geq 0$, $f(x, -x/2) \geq 0$.







<B> Disegnare la curva definita implicitamente da $f(x, y) = 0$

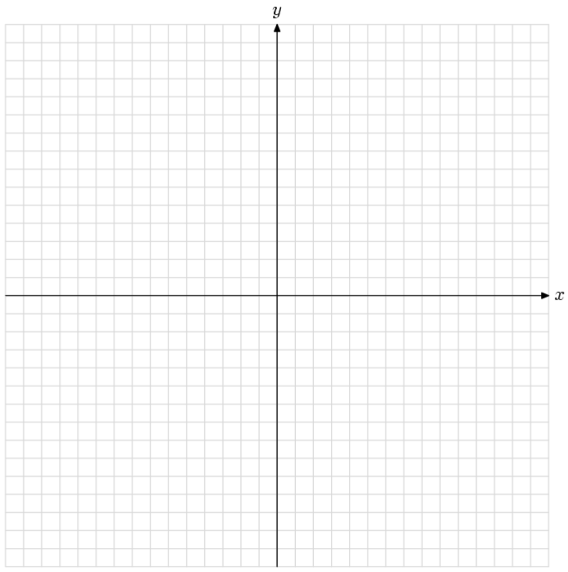

y
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
x
$2\sqrt(3)/3$

Recupero Terza Prova Scritta 10/03/2004

Si consideri

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1-x \ , \ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1\}$$

<A> Disegnare la proiezione di V sul piano (x,y)



<B> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo di

$$\iiint_V dxdydz$$

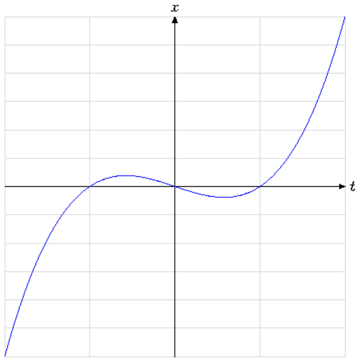
<C> Calcolare

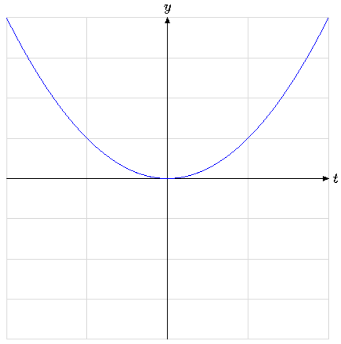
$$\iiint_V dxdydz$$

Recupero Quarta Prova Scritta 20/05/2004

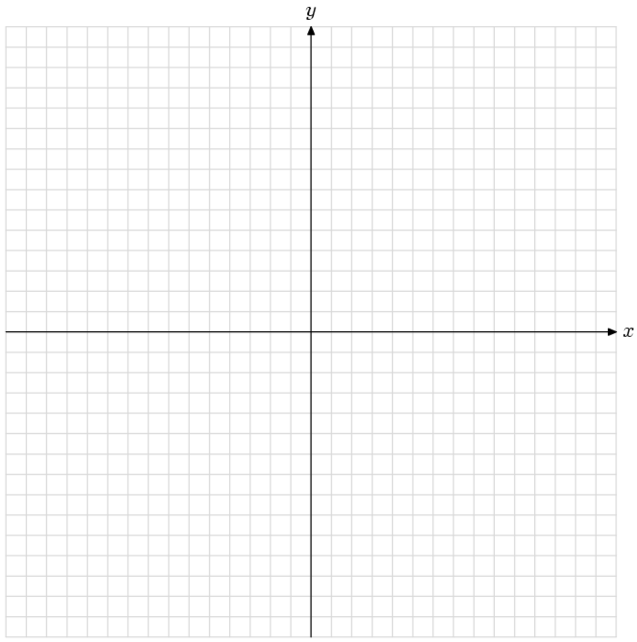
Si consideri la curva γ definita da

$$\begin{cases} x(t) = t - t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-2, 2]$$





<A> Stabilire se γ è semplice, chiusa, regolare e disegnare la curva γ



<B> Calcolare il vettore tangente alla curva e la sua lunghezza

Recupero Quinta Prova Scritta 14/06/2004

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

<A> Determinare i valori di x per i quali f è definita.

<B> Verificare che f soddisfa l'equazione

$$y(x) = 1 + \int_0^x 2y(t)dt$$

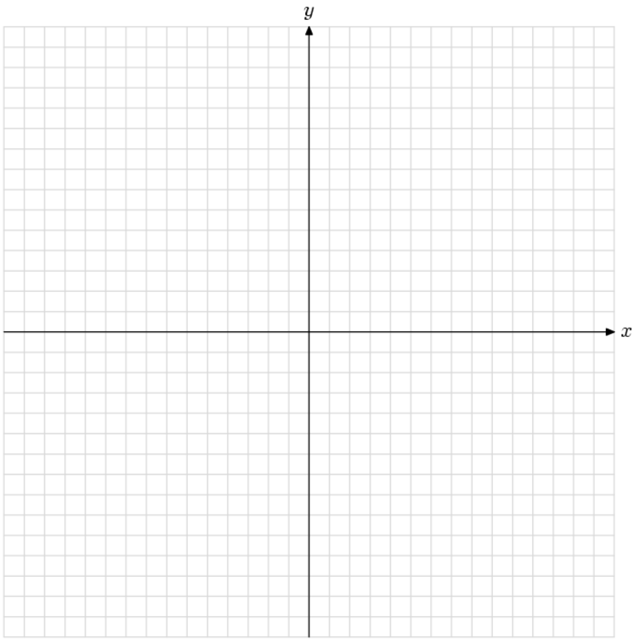
<C> Determinare esplicitamente f

Recupero Sesta Prova Scritta 24/06/2004

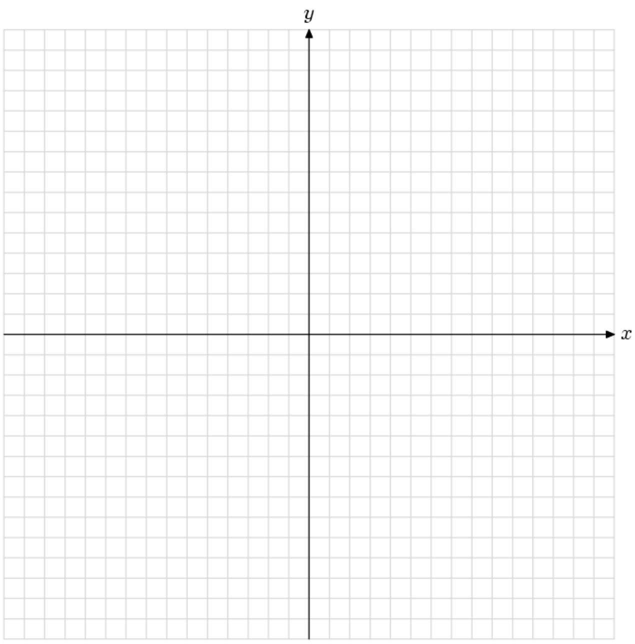
Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = y'(x)(2 - 3y(x))$$

<A> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$



<B> Disegnare il grafico della soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -2$



Prima Prova Scritta 03/02/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 - 5xy + 6y^2$$

<A> Stabilire se f è una forma quadratica e, in caso affermativo, determinarne la matrice di rappresentazione.

<B> Nel caso in cui la risposta alla domanda precedente sia affermativa, stabilire se f è definita.

<C> Se le risposte alle precedenti domande sono affermative, stabilire se f è definita positiva o negativa.
Siano

$$\begin{cases} A = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0\} \\ B = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x > 0\} \\ C = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

<D> Stabilire per ciascuno dei seguenti insiemi se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.
Sia $\phi_m(x)$ la restrizione di f alla retta $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$

<E> Determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ ϕ_m è sempre positiva.

Seconda Prova Scritta 17/02/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \min\{2e^{-x^2-y^2}, 1\}$$

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Determinare dove f è differenziabile e calcolare ∇f, ove possibile

<C> Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluto.

<D> Disegnare le curve di livello di f

<E> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 10)$.

<F> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, \sqrt{\ln(2)})$.

Terza Prova Scritta 11/03/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{(x^2)} - y^2 + 2y - 1$$

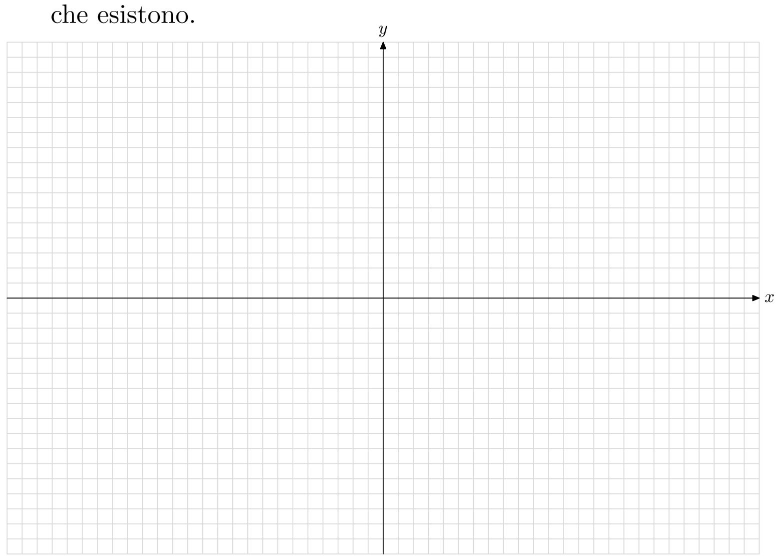
e l'insieme dei punti del piano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ f(x,y) = 0\}$$

<A> Stabilire se A è rappresentabile come grafico di una funzione $y(x)$ o $x(y)$ in un intorno dell'origine.

<B> Nel caso la risposta alla prima domanda sia affermativa, determinare prima un intorno e poi il pù grande intorno in cui è vero quanto affermato.

<C> Nel caso la risposta alla prima domanda sia affermativa, disegnare il grafico di quelle tra $y(x)$ ed $x(y)$ che esistono.



Quarta Prova Scritta 19/05/2005

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<C> Calcolare la superficie di ∂V

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F = (0, 0, z)$$

attraverso la superficie ∂V

Quinta Prova Scritta 09/06/2005

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}} \right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F

<B> Stabilire se F è chiuso

<C> Stabilire se F è conservativo

<D> Determinare un potenziale per F

<E> Determinare tutti i potenziali per F

<F> Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ x + y + z = 0$$

<G> Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z \geq 0$$

Quinta Prova Scritta Xtra 10/06/2005

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{x}{2-x^2-y^2-z^2}, -\frac{y}{2-x^2-y^2-z^2}+1, -\frac{z}{2-x^2-y^2-z^2}\right)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F

<B> Stabilire se F è chiuso

<C> Stabilire se F è conservativo

<D> Determinare un potenziale per F

<E> Determinare tutti i potenziali per F

<F> Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x+y+z=0\ ,\ z\geq 0$$

<G> Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x\geq 0$$

Sesta Prova Scritta 29/06/2005

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^5y^{(5)}(x) + y(x) = f(x)$$

e la serie di potenze

$$z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

<A> Sia $f(x) = x^9$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

<B> Sia $f(x) = e^x$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

<C> Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$; determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.
Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n$.

<D> Determinare a_n in modo che z risolva l'equazione assegnata.

<E> Determinare al variare di α il raggio di convergenza della serie trovata.

<F> Sia $\alpha = 3$. Stabilire per quali dati iniziali il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^5y^{(5)}(x) + y(x) = f(x) \\ y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_1 \ , \ y''(0) = y_2 \ , \ y'''(0) = y_3 \ , \ y^{(4)}(0) = y_4 \ , \end{cases}$$

ammette soluzione.

Prima Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri la forma quadratica

$$f(x,y) = 7x^2 - 2xy - 7y^2$$

<A> Determinare una matrice di rappresentazione di f.

<B> stabilire se f è definita.

<C> Stabilire se f è definita positiva o negativa.
Siano

$$\begin{cases} A = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0\} \\ B = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x > 0\} \\ C = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) < 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

<D> Stabilire per ciascuno dei seguenti insiemi se è aperto, chiuso, limitato, connesso per archi.
Sia $\phi_m(x)$ la restrizione di f alla retta $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$

<E> Determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ ϕ_m è sempre positiva.

Seconda Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-\rho^2} & \rho < \sqrt{\ln 2} \\ 1 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dove con ρ, θ si intendono le usuali coordinate polari nel piano.

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Determinare dove f è differenziabile e calcolare ∇f, ove possibile

<C> Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluto.

<D> Disegnare le curve di livello di f

<E> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, 10)$.

<F> Calcolare le derivate direzionali di f in $(0, \sqrt{\ln(2)})$.

Terza Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

e l'insieme dei punti del piano

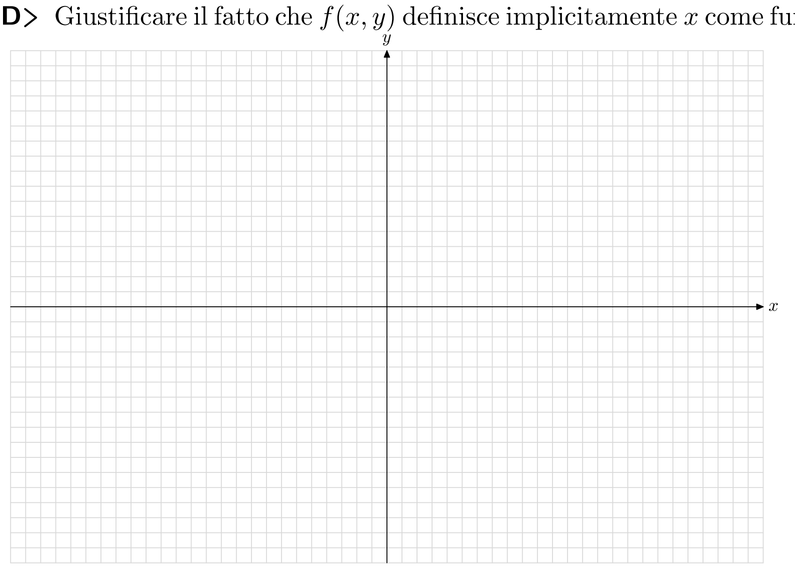
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ f(x,y) = 0\}$$

<A> Determinare un intorno $[\sqrt{2}/2-a, \sqrt{2}/2, +a] \times [\sqrt{2}/2-b, \sqrt{2}/2, +b]$ di $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ in cui f_x si mantiene negativa.

<B> Determinare a tale che $f(\sqrt{2}/2 - a, \sqrt{2}/2)$ e di $f(\sqrt{2}/2 + a, \sqrt{2}/2)$ assumano segno discorde.

<C> Determinare δ tale che $f(\sqrt{2}/2 - a, y)$ e $f(\sqrt{2}/2 + a, y)$ abbiano segno costante nell'intervallo $[\sqrt{2}/2 - \delta, \sqrt{2}/2, +\delta]$.

<D> Giustificare il fatto che $f(x,y)$ definisce implicitamente x come funzione di y in un intorno di $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.



Quarta Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<C> Calcolare la superficie di ∂V

<D> Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F = (y, x, z)$$

attraverso la superficie ∂V

Quinta Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \big(x\ln(x^2 + y^2 - 1) - 2, y\ln(x^2 + y^2 - 1) + 1\big)$$

<A> Determinare il campo di definizione di F

<B> Stabilire se F è chiuso

<C> Stabilire se F è conservativo

<D> Determinare un potenziale per F

<E> Determinare tutti i potenziali per F

<F> Calcolare il lavoro svolto da F lungo la curva definita da

$$x^2 + y^2 = 4\ ,\ x + y \geq 0$$

Sesta Prova Scritta R 06/07/2005

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2y(x) = 2x$$

<A> Risolvere per serie l'equazione assegnata.

<B> Determinare i dati iniziali in corrispondenza dei quali l'equazione differenziale ammette soluzioni che si possono scrivere come serie di potenze centrate in 0
Si consideri poi l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2y(x) = 2x$$

<C> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

Prima Prova Scritta 01/02/2006

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = ||x| + |y| - 1|$$

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Calcolare le derivate parziali di f nei punti $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

<C> Stabilire dove f è differenziabile.

<D> Calcolare le derivate direzionali di f nel punto $(0,1)$.

<E> Calcolare le derivate direzionali di f in $(2,2)$.

<F> Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(1/2,1/2)$, $(1,1)$, e $(2,2)$.

Seconda Prova Scritta 01/03/2006

Si consideri l'uguaglianza

$$f(x,y)=0 \qquad \textit{dove} \qquad f(x,y)=x^3+y^5+y-x$$

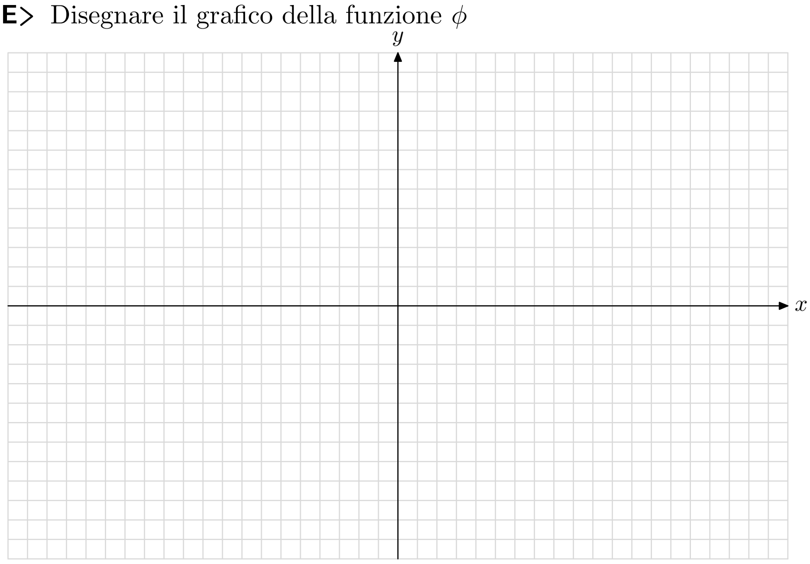
<A> Studiare la derivabilità di f e determinare il segno di $f_y(x,y)$

<B> Determinare il segno di $f(x,0)$ e di $\lim_{y\to\pm\infty} f(x,y)$

<C> Determinare il più grande intervallo della retta reale in cui $f(x,y)=0$ definisce y come funzione di $\phi(x)$

<D> Studiare crescenza e decrescenza di ϕ

<E> Disegnare il grafico della funzione ϕ



<F> Precisare il comportamento di ϕ agli estremi del campo di definizione

Terza Prova Scritta 14/03/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$\begin{cases} x(t,s,u) = t - su = t(1-u) + (t-s)u \\ y(t,s,u) = s + tu = s(1-u) + (t+s)u \\ z(t,s,u) = u \end{cases} \qquad \textit{per} \quad t \in [0,1]\ ,\ s \in [0,1]\ ,\ u \in [0,1]$$

<A> Disegnare

$$\{(x,y,z) \in V \ :\ z = 0\}$$

$$\{(x,y,z) \in V \ :\ z = 1\}$$

$$\{(x,y,z) \in V \ :\ z = 1/2\}$$

<B> Calcolare l'area di

$$\{(x,y,z) \in V \ :\ z = k\}$$

<C> Calcolare il volume di V

<D> Calcolare lo Jacobiano $J(t,s,u)$ della trasformazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$(x(t,s,u), y(t,s,u), z(t,s,u))$$

<E> Sia $C = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, calcolare

$$\iiint_C |J(t,s,u)| dt$$

<F> Usando il teorema di cambio di variabili calcolare il volume di V

Quarta Prova Scritta 26/05/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \geq z \geq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di V.

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V
Si consideri poi il campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (x + 2y + z, z^2 + y, x + z)$$

<C> Calcolare il flusso del campo F attraverso ∂V

<D> Calcolare il lavoro che il campo compie lungo il cerchio di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 che giace nel piano $y = x$

Quinta Prova Scritta 15/06/2006

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2n+1}\frac{x^{3n}}{5n}$$

<A> Determinare i coefficienti ed il centro della serie.

<B> Determinare il raggio di convergenza della serie

<C> Studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

<D> Calcolare la somma della serie per $x = .1$ a meno di 0.001.

Sesta Prova Scritta 29/06/2006

Si consideri l'equazione

$$y(x) = \int_0^x ty(t)dt + \frac{x^2}{2}$$

<A> Determinare i coefficienti di una serie di potenze centrata nell'origine che risolva l'equazione data.

<B> Determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

<C> Verificare che la somma della serie trovata è

$$e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

<D> Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = xy(x) + x$$

R - Prima Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \max\{1 - (|x| + |y|), 0\}$$

<A> Determinare dove f è continua.

<B> Stabilire dove f è differenziabile.

<C> Calcolare le derivate direzionali di f nel punto $(0,1)$.

<D> Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(2,2)$ e $(1/3,1/3)$.

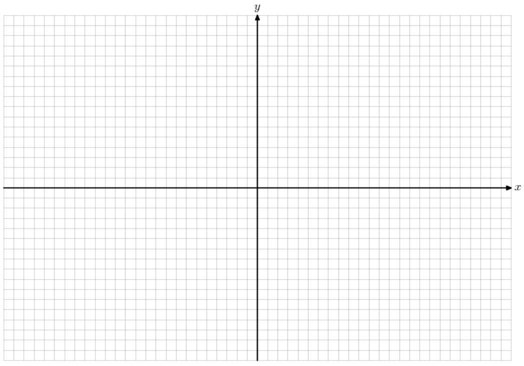
R -Seconda Prova Scritta 11/07/2006

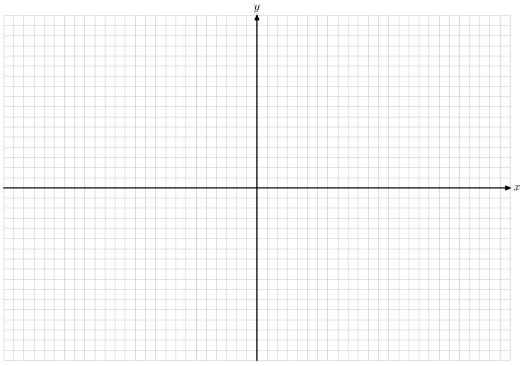
Si consideri la parte di piano γ definita dalla

$$f(x,y) = y^3 - y - x = 0$$

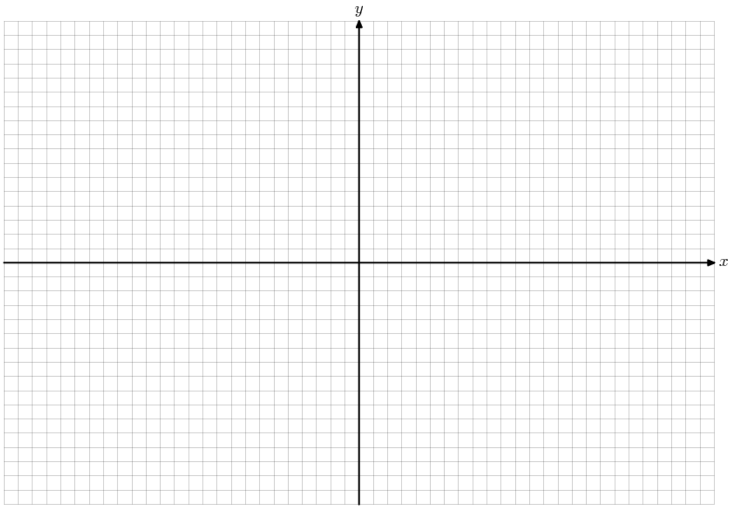
<A> Determinare le intersezioni $(x(m), y(m))$ di γ con la retta $y = mx$ al variare di m

<B> Disegnare i grafici di $x(m)$ e di $y(m)$.





<C> Disegnare γ



R - Terza Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$\begin{cases} x(t,s,u) = t\sin(s) \\ y(t,s,u) = t\cos(s) \\ z(t,s,u) = 2ut + (1-u)t \end{cases} \qquad \textit{per} \quad t \in [1,2]\ ,\ s \in [0,2\pi]\ ,\ u \in [0,1]$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Scrivere una parametrizzazione di ∂V

<C> Descrivere i punti dello spazio definiti da V.

R - Quarta Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la parte di spazio V definita da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 1 - \sqrt{2x^2 + y^2} \geq z \geq 0\}$$

<A> Calcolare il volume di V.

<B> Determinare una parametrizzazione di ∂V
Si consideri poi il campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

<C> Calcolare il flusso del campo F attraverso

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ 1 - \sqrt{2x^2 + y^2} = z\}$$

R - Quinta Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{6n}$$

<A> Determinare i coefficienti ed il centro della serie.

<B> Determinare il raggio di convergenza della serie

<C> Studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

<D> Per $x = 0.5$, determinare n in modo che la ridotta di ordine n approssimi la somma della serie a meno di 0.01.

R - Sesta Prova Scritta 11/07/2006

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = xy'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<A> Determinare i coefficienti di una serie di potenze centrata nell'origine che risolva il problema di Cauchy assegnato.

<B> Determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

<C> Verificare che la somma della serie trovata è

$$y(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Prima Prova parziale 08/03/2007

Per ognuna delle seguenti matrici scrivere la forma quadratica associata e stabilire se risulta definita, semidefinita, indefinita, positiva o negativa.

<A> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

<B> $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

<C> $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

<D> $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Per ciascuno dei seguenti insiemi stabilire se è aperto, chiuso, connesso per archi, convesso, limitato.

<E>

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$$

<F>

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(3, 3)\}$$

<G>

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y < 1\}$$

Per le seguenti successioni stabilire se sono convergenti ed in caso affermativo calcolarne il limite

<H>

$$P_n = (2\sin(\pi n), \cos(\pi n))$$

<I>

$$Q_n = (\frac{2}{n}\sin(\pi n), \frac{1}{n}\cos(\pi n))$$

<J>

$$R_n = (2n\sin(\pi n), n\cos(\pi n))$$

Seconda Prova parziale 22/03/2007

Sia
$$f(x,y) = \frac{x^{2n}}{y - e^x}$$

<A> Determinare il campo di definizione di f e stabilire dove è continua, derivabile e differenziabile.

<B> Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine.

<C> Determinare, se esiste il limite di f all'infinito.

<D> Stabilire se è possibile prolungare f per continuità in $(0,1)$

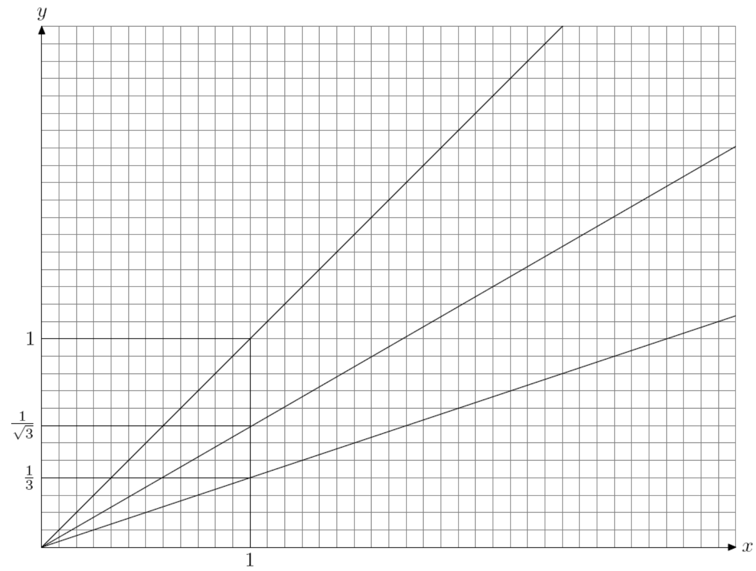
Terza Prova parziale 19/04/2007

Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = xy^3 - \frac{1}{3}x^3y \qquad , \qquad f_1(x,y) = f(x,y) - 1$$

<A> Individuare nel grafico sottostante il luogo dei punti Z del primo quadrante per cui

$$f(x,y) = 0$$

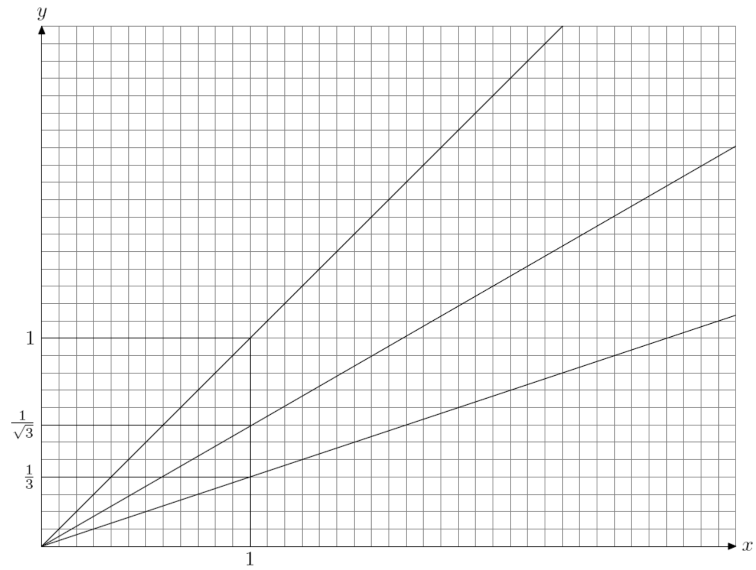


<B> Calcolare le derivate parziali di f.

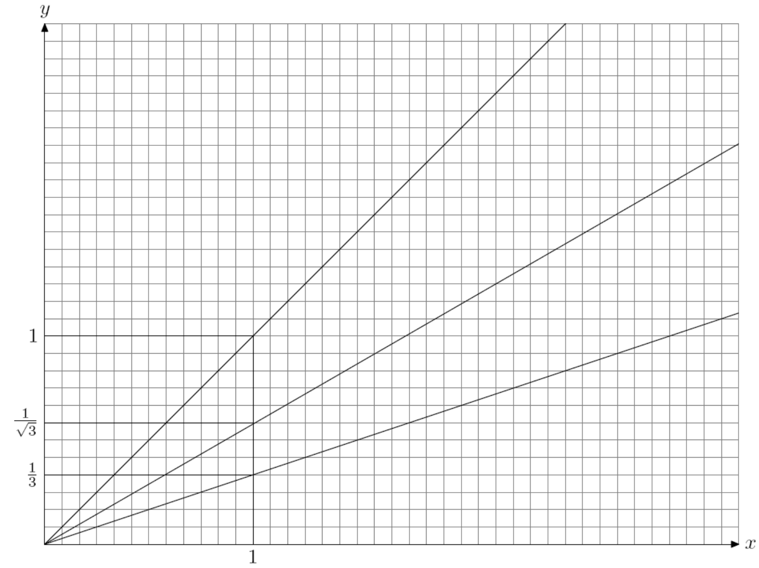
$f_x(x,y) =$

$f_y(x,y) =$

e studiarne il segno nel primo quadrante; determinare inoltre il luogo dei punti Z' del primo quadrante in cui f_x ed f_y si annullano.



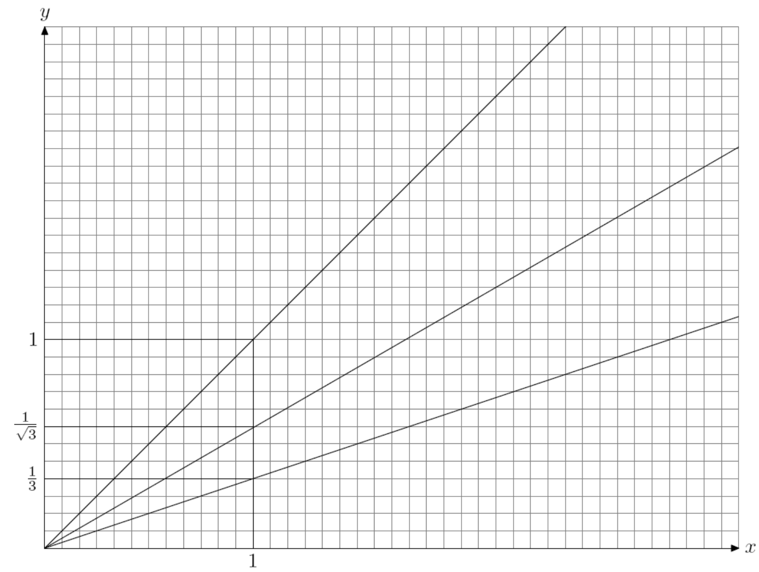
<C> Determinare il segno di f_1 su Z e su Z'.



<D> Disegnare il luogo dei punti del primo quadrante in cui

$$f_1(x, y) = 0$$

giustificando in maniera BREVE ed ESAURIENTE il disegno.



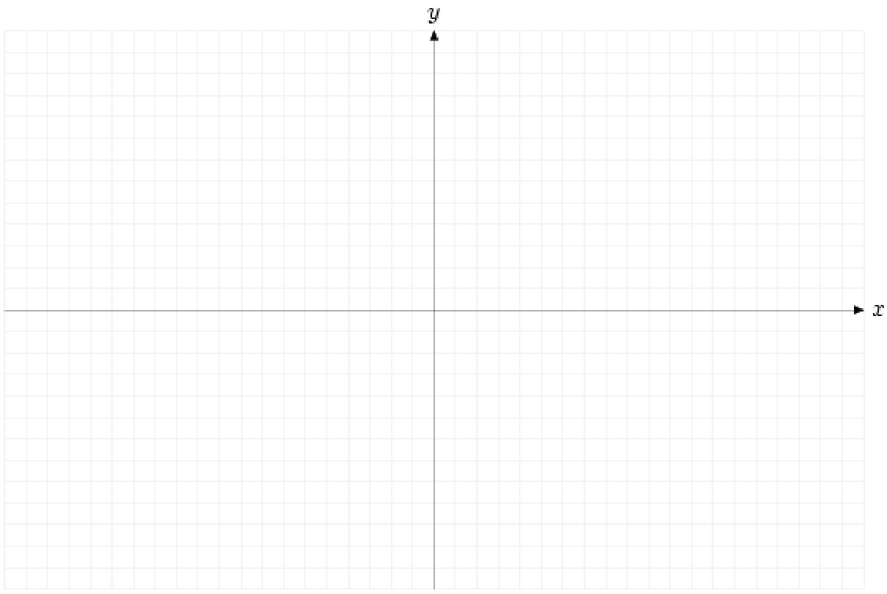
Quarta Prova parziale 03/05/2007

Si consideri la curva γ definita da

$$a(t) = \cos(3t)$$

$$\begin{cases} x(t) = a(t)\cos(t) \\ y(t) = a(t)\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

<A> Disegnare γ.



<B> Detta $\gamma/3$ la curva ottenuta considerando $t \in [-\pi/6, \pi/6]$ Stabilire se $\gamma/3$ è semplice regolare, chiusa.

<C> Si consideri la superficie piana D di cui $\gamma/3$ è frontiera nel piano. Determinare una parametrizzazione di D e calcolarne l'area

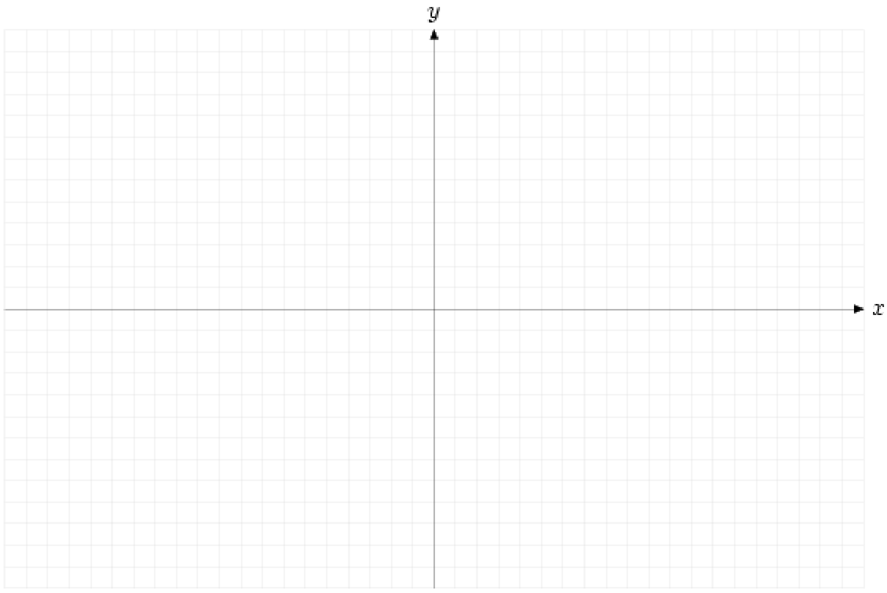
<D> Si consideri la superficie S costituita dai punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x, y) \in D$, e z giace sul grafico del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Determinare un parametrizzazione di S e calcolarne l'area.

<E> Calcolare il volume della parte di spazio delimitata dal piano $z = 0$ dal paraboloide $z = x^2 + y^2$ e dal cilindro con asse parallelo all'asse z generato da D.

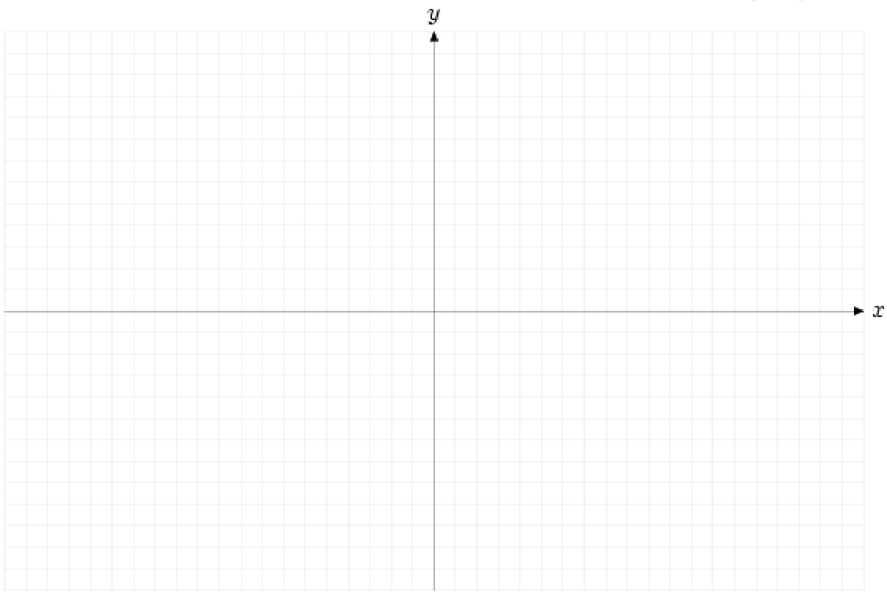
Quinta Prova parziale 17/05/2007

Si consideri la funzione $f(t) = e^t$

<A> Determinare lo sviluppo F di f in serie di Fourier di soli coseni su $[0, \pi]$ e disegnarne il grafico



<B> Determinare lo sviluppo G di f in serie di Fourier soli seni su $[0, \pi]$ e disegnarne il grafico



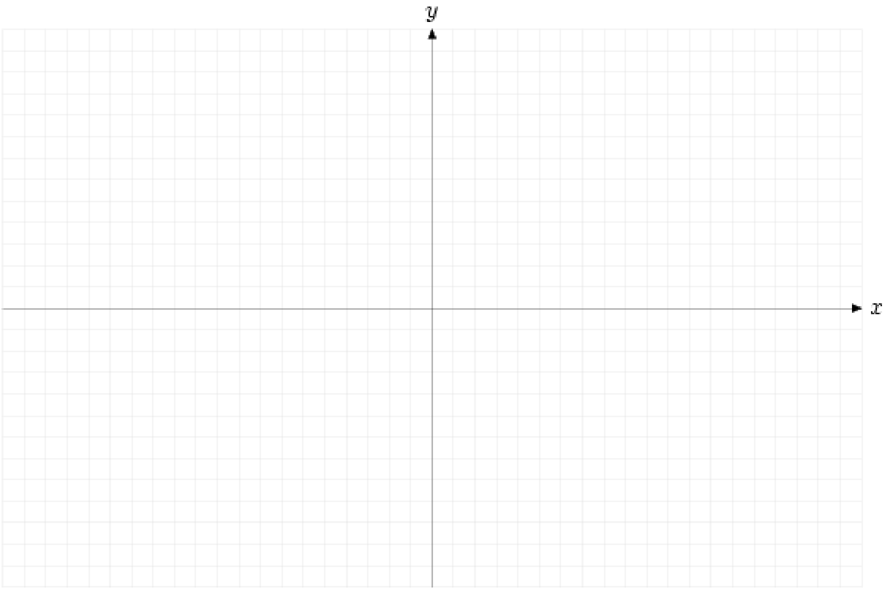
<C> Utilizzando gli sviluppi trovati verificare che $F' = G$ in $[0, \pi)$

Sesta Prova parziale 31/05/2007

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = -\frac{y^2(x)}{\sqrt[3]{1 - y^3(x)}}$$

<A> Disegnare il grafico della soluzione y dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$



<B> Disegnare il grafico della soluzione y dell'equazione data corrispondente ai dati iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = 1/2$.

Prima Prova parziale 13/03/2008

Si consideri la funzione $z = g(x)$ che assume, per $1 \leq x \leq 2$ i valori della retta per i punti $(0,1)$ e $(3,4)$ ed è nulla altrove.

<A> Determinare una espressione analitica della funzione $z = f(x,y)$ che si ottiene facendo ruotare g attorno all'asse z.

<B> Studiare la continuità di f.

<C> Studiare la differenziabilità di f.
Per ciascuno dei seguenti insiemi stabilire se è aperto, chiuso, connesso per archi, convesso, limitato.

<D>

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leq 1\} \setminus \{(0,0)\}$$

<E>

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 + 3y^2 \leq 1\} \cup \{(13,3)\}$$

<F>

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y^2 < 1\}$$

Seconda Prova parziale 03/04/2008

Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

<A> Stabilire se il sistema definisce una delle tre variabili come funzione delle altre due.

<B> Stabilire se il sistema definisce due delle tre variabili come funzione dell' altra.

<C> Stabilire se è vero che $f(x, y, z) = x + y + z$ ammette massimo e minimi assoluti su A.

<D> Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di f su A

Terza Prova parziale 17/04/2008

Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

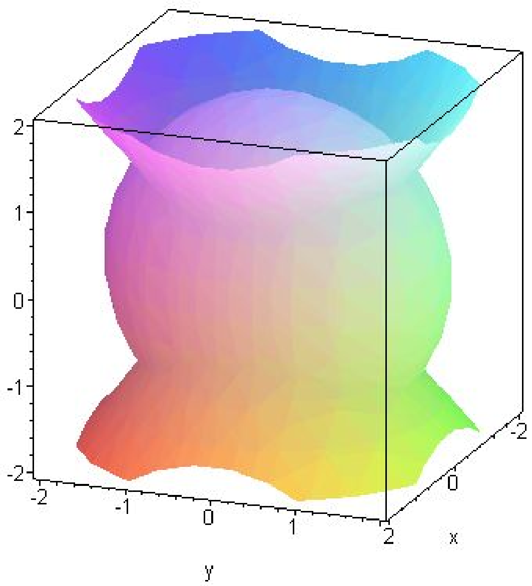
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 \le 1 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \end{cases}$$

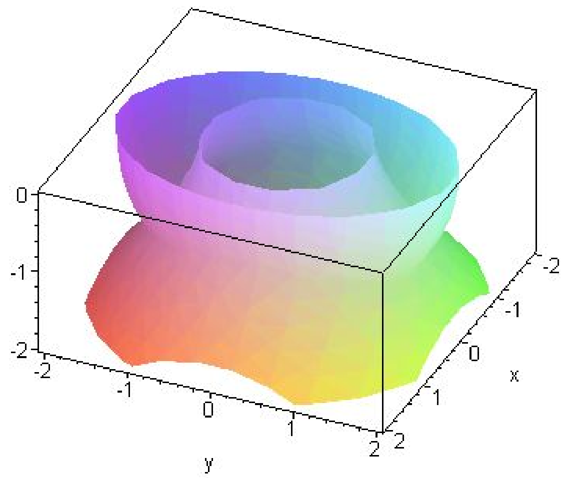
<A> Calcolare la misura di A.

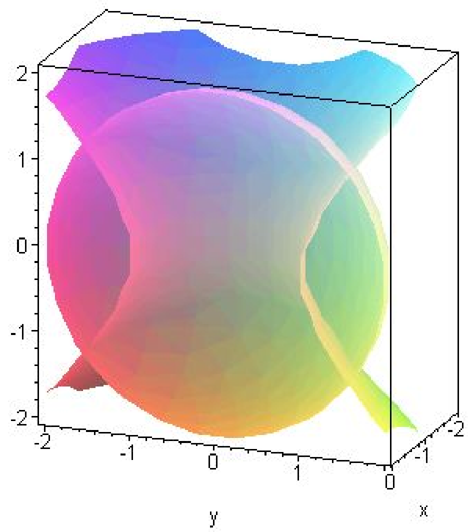
Si consideri la parte B di $\mathbb{R}^3$ definita da

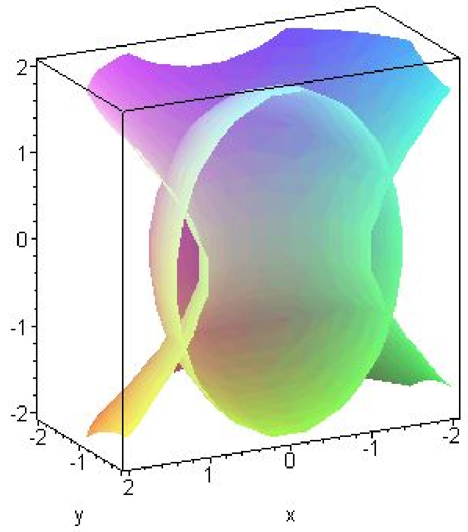
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

<B> Calcolare la misura di B






2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
0
-1
-2
y
x


2
1
0
-1
-2
-2
-1
2
1
0
-1
-2
y
x

Quarta Prova parziale 08/05/2008

Si consideri la parte A di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \end{cases}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right)$$

<A> Calcolare il flusso di F attraverso ∂A.

<B> Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la curva.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases}$$

<C> Stabilire se F ammette potenziale ed, in caso affermativo, calcolare tutti i potenziali precisandone il campo di definizione.

Quinta Prova parziale 22/05/2008

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = x^4 y(x)$$

e si consideri

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$$

<A> Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data.

<B> Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data ed inoltre sia $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

<C> Determinare a_n in modo che f soddisfi l'equazione differenziale data ed inoltre sia $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

<D> Determinare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ ed $y'(0) = 1$

Sesta Prova parziale 04/06/2008

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

<A> Determinare la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

<B> Determinare la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

<C> Determinare a in modo che la soluzione dell'equazione differenziale data tale che $y(0) = a$ e $y'(0) = 0$ sia costante.

<D> Determinare il polinomio di McLaurin di terzo ordine delle soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = 1$ ed $y'(0) = 1$

Prima Prova parziale 12/03/2009

Si consideri la funzione $\phi(t,s) = (f(t,s), g(t,s))$ definita da

$$\phi(t,s) = \begin{cases} 2t+s \\ 2t-s \end{cases}$$

<A> verificare che ϕ è lineare.

<B> Disegnare l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \exists (t,s) \in [0,1] \times [0,1] \ , \ \phi(t,s) = (x,y)\}$$

<C> Studiare la differenziabilità di ϕ e calcolarne il gradiente.

<D> Determinare e disegnare l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2 \ , \ t^2 + s^2 = 1 \ , \ \phi(t,s) = (x,y)\}$$

<E> Determinare i punti tali che $f(t,s) = 0$

$$A = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(t,s) = (0,0)\}$$

<F> Determinare i punti ortogonali all'insieme A

Seconda Prova parziale 02/04/2009

Si consideri il luogo V dei punti dello spazio definiti da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2x \\ z + x = 2 \end{cases}$$

<A> Determinare il luogo P dei punti del piano $z = 0$ proiezione di V.

<B> Verificare che $(2, 0) \in P$ e scrivere l'equazione delle rette del piano (x, y) che passano per $(2, 0)$ ed hanno coefficiente angolare m.

<C> Determinare, al variare di m l'intersezione delle rette con P diversa da $(2, 0)$;

<D> Descrivere V identificando i suoi punti in funzione di m

<E> Determinare il punto di V che ha quota massima.

Terza Prova parziale 30/04/2009

Si consideri il luogo V dei punti dello spazio definiti da:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$$

<A> Verificare che se $(x_0, y_0, z_0) \in V$ allora anche $(x_0 + t, y_0, z_0 - t) \in V$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

<B> Disegnare la sezione determinata da V sui piani $x = \pm 1$.

<C> Determinare una parametrizzazione della frontiera di

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2xz \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$$

<D> Scrivere le formule di riduzione per il calcolo dell'area della frontiera di W

<E> Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (z, x, y)$ attraverso la frontiera di W.

Quarta Prova parziale 21/05/2009

Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^2 e^{-n(1+t^2)} dt$$

<A> Verificare che f è definita in $x = 0$.

<B> verificare che la serie delle derivate dei termini $n-$esimi è uniformemente convergente su I, e precisare I.

<C> Verificare che f è continua e derivabile su I.

<D> Determinare una espressione di f in termini di funzioni elementari.

Quinta Prova parziale 04/06/2009

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = y(x)(y'(x))^2 + y(x)y'(x)$$

<**A**> Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

<**B**> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = \pi$ e $b = 0$.

<**C**> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 0$ e $b = 1$.

Esame Giugno 11/06/2009

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = y(x)y'(x)$$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

<B> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 4$ e $b = 0$.

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy per $a = 0$ e $b = -1$.
Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (\ln(1 + y), \frac{x}{1 + y}, 1)$$

<D> Determinare il campo di definizione di F e stabilire se il campo è chiuso.

<E> Calcolare, dove esiste, un potenziale di F

<F> Calcolare il lavoro svolto dal campo lungo la curva γ definita dalla circonferenza di centro $(10, 10, 1)$ e raggio 2 giacente nel piano $z = 1$

<G> Calcolare il flusso del campo F attraverso il cerchio giacente nel piano $z = 1$ di cui γ è frontiera.

Esame Luglio 01/07/2009

Si consideri l'equazione

$$y'(x) = -y^2(x)$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale del problema dato.

<B> Determinare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che rappresenti la soluzione del problema dato in un intorno di $x_0 = 0$, precisandone il raggio di convergenza.

<C> Determinare lo sviluppo di McLaurin di y centrato nell'origine.

<D> Determinare l'errore che si commette sostituendo alla soluzione del problema il suo polinomio di McLaurin di ordine 10.

Si consideri il luogo A dei punti dello spazio tali che

$$x^8 + y^8 + z^8 = 1$$

ed il punto

$$P_0 = (1, 1, 1)$$

<E> Determinare il punto di A che ha minima distanza da P_0

<F> Determinare il punto di A che ha massima distanza da P_0

<G> Stabilire, giustificando l'affermazione, se A è un punto, una linea, una superficie o un volume in $\mathbb{R}^3$

<H> Calcolare la misura di A. (È sufficiente indicare le formule di riduzione che consentono di eseguire il calcolo).

Esame Luglio 22/07/2009

Si consideri l'equazione

$$y(x) = \int_0^x y(x-t)dt$$

<A> Determinare, se esiste una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che rappresenti la soluzione del problema dato in un intorno di $x_0 = 0$, precisandone il raggio di convergenza.

<B> Determinare lo sviluppo di McLaurin di y centrato nell'origine.
Si consideri poi l'equazione

$$y(x) = \int_1^x y(x-t)dt$$

<C> supponendo che una soluzione del problema esiste, determinare il polinomio di McLaurin di ordine 2. di y

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x(y - x) - 1$$

<D> Disegnare nel piano il livello zero di f

<E> Determinare massimi e minimi relativi di f su $\mathbb{R}$

<F> Determinare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}$

<G> Calcolare le derivate direzionali nell'origine di $g(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$

Esame Settembre 16/09/2009

Si consideri l'equazione

$$y''(x) = \sin(y(x))$$

<A> Studiare esistenza ed unicità locale del problema di Cauchy associato all'equazione data relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

<B> Studiare esistenza ed unicità in grande del problema di Cauchy associato all'equazione data relativo ai dati iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

<C> Disegnare il grafico della soluzione per $a = 0$, $b = 1$.

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

<D> Disegnare nel piano le curve di livello di f

<E> Studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

<F> Studiare

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$$

<G> Stabilire se esistono ed in caso affermativo calcolare massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}$

<H> Calcolare le derivate direzionali nell'origine di $g(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$

Esame Gennaio 13/01/2010

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} x^n n^x$$

<A> Determinare il campo di definizione di f

<B> Dimostrare che la serie che definisce f converge totalmente per $|x| < 0.5$

<C> Dimostrare che f è continua in $(-1/2, 1/2)$

<D> Dimostrare che f è derivabile in $(-1/2, 1/2)$ e calcolarne la derivata.

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = : \; x^2 + y^2 - z^2 \leq -1 \; , \; |z| \leq 4\}$$

<E> Calcolare il volume di V

<F> Calcolare l'area di ∂V

<G> Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ attraverso ∂V

<H> Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = : \; x^2 + y^2 - z^2 = -1 \; , \; |z| \leq 4\}$$

Esame Febbraio 03/02/2010

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 4y(x) - z(x) + f(x) \\ z'(x) = 2y(x) + z(x) + g(x) \end{cases}$$

<A> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo .

<B> Disegnare le traiettorie del sistema Omogeneo.

<C> Studiare la stabilità della soluzione nulla per il sistema omogeneo.

<D> Trovare tutte le soluzioni del sistema completo per $f(x) = 1$ e $g(x) = |x|$

<E> Calcolare la massima e la minima distanza di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z = x + 1\}$$

dall'origine.

<F> Calcolare la massima e la minima distanza di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z = x + 1\}$$

dall'origine.

<G> Calcolare la massima e la minima distanza di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z \geq x + 1\}$$

dall'origine.

<H> Calcolare la misura di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z \geq x + 1\}$$

Esame Febbraio 18/02/2010

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) - z(x) + f(x) \\ z'(x) + z(x) = g(x) \end{cases}$$

<A> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo .

<B> Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo che sono limitate su $\mathbb{R}_+$.

<C> Trovare tutte le soluzioni del sistema completo per $f(x) = 1$ e $g(x) = e^x$

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , x^2 + z^2 \leq 1 \ , y^2 + z^2 \leq 1\}$$

<D> Calcolare il volume di V

<E> Determinare una parametrizzazione di ∂V

<F> Calcolare l'area di ∂V

<G> Dimostrare che V è contenuto nel cubo $[0, 1]^3$

Prima Prova parziale 12/05/2010

Si considerino le funzioni

$$\begin{cases} f(x,y,z) = z^2 - (1 + x^2 + y^2) \\ g(x,y,z) = x^2 + z^2 - 2 \end{cases}$$

Rispondere a (almeno) 4 delle seguenti domande.

<A> Calcolare il volume del solido V definito in $\mathbb{R}^3$ dalle disuguaglianze

$$f(x,y,z) \geq 0 \quad , \quad g(x,y,z) \leq 0$$

<B> Calcolare l'area della superficie S definita da

$$f(x,y,z) = 0 \quad , \quad g(x,y,z) \leq 0$$

<C> Calcolare l'area della superficie T definita da

$$f(x,y,z) \geq 0 \quad , \quad g(x,y,z) = 0$$

<D> Calcolare la lunghezza della linea γ definita da

$$f(x,y,z) = 0 \quad , \quad g(x,y,z) = 0 \quad , \quad x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0$$

<E> Studiare l'esplicitabilità dell'equazione

$$f(x,y,z) = 0$$

<F> Studiare l'esplicitabilità del sistema di equazioni

$$f(x,y,z) = 0 \ , \ g(x,y,z) = 0$$

<G> Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (2x, -y, -z)$ attraverso S

<H> Calcolare il lavoro del campo $F(x,y,z) = (2x, -y, -z)$ lungo γ

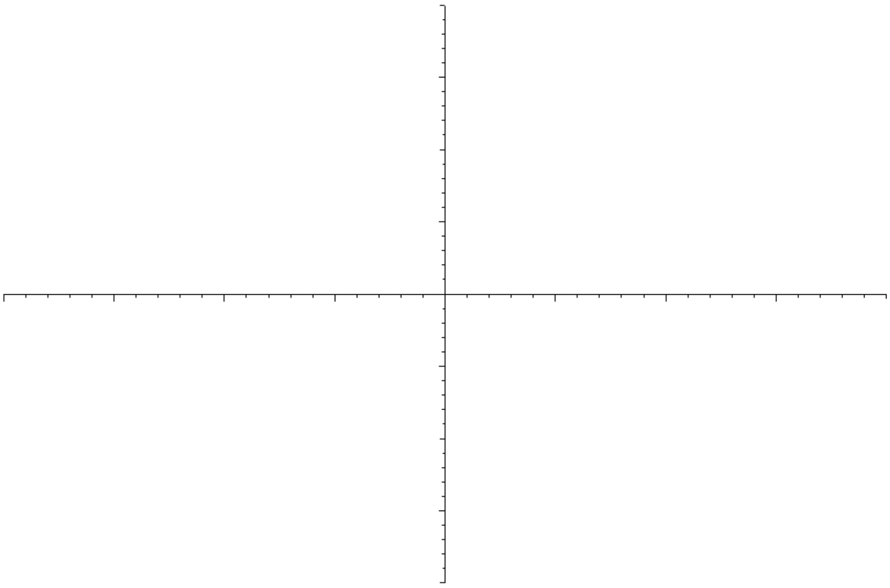
<I> Calcolare, se esiste un potenziale di F

Seconda Prova parziale 07/06/2010

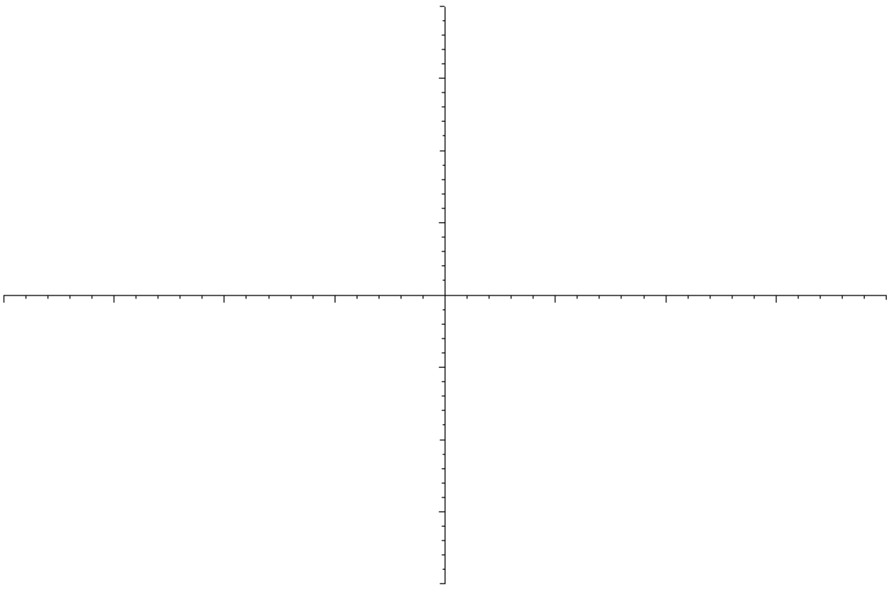
Si considerino il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)(y(x) + y'(x)) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = z_0 \end{cases}$$

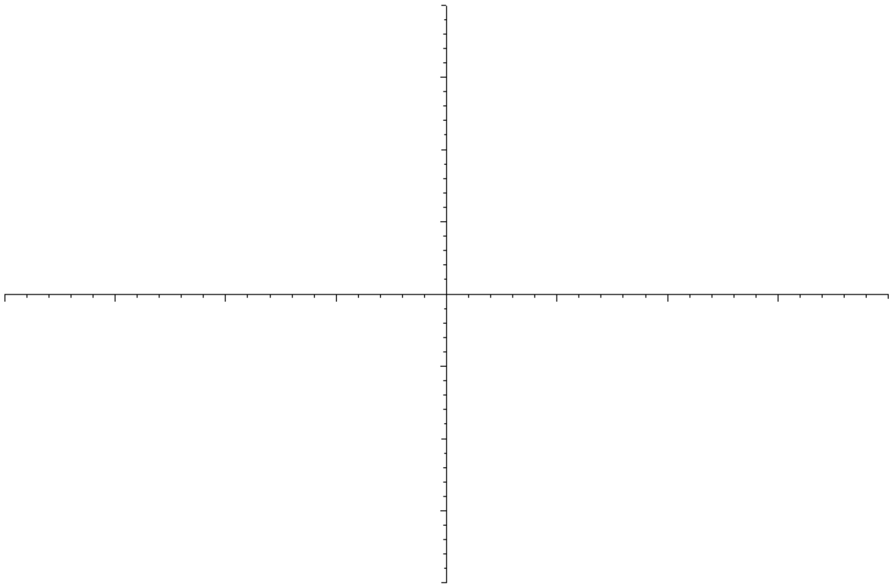
<A> Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 0$ e $z_0 = 3$



<B> Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 0$ e $z_0 = -3$



<C> Disegnare il grafico della soluzione per problema di Cauchy per $y_0 = 1$ e $z_0 = 0$



Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) = |x| y'(x) - y(x)$$

<D> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x > 0$.

<E> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x < 0$.

<F> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione per $x \in \mathbb{R}$.
Si consideri

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 \leq y\} \qquad , \qquad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y^2 + z^2 \leq x\}$$

<G> Calcolare il volume di $V_1 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : y \leq 4\}$

<H> Determinare una parametrizzazione di $\partial \left(V_1 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : y \leq 4\}\right)$
Si Consideri poi

$$V = V_1 \cup V_2$$

<I> Calcolare il volume di V

<J> Dimostrare che V è contenuto nel cubo $[0, 1]^3$

Prima Prova parziale 12/05/2011

Si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 \geq x^2 + y^2 - 1 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

Rispondere a (almeno) 4 delle seguenti domande.

<A> Determinare la proiezione di V sul piano $z = 0$

<B> Determinare la proiezione di V sul piano $y = 0$

<C> Determinare la proiezione di V sul piano $x = 0$

<D> Calcolare il volume di V

<E> Calcolare l'area della superficie ∂V

<F> Determinare massimi e minimi assoluti di $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ su V

<G> Determinare una parametrizzazione della linea

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = x^2 + y^2 - 1 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

<H> Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, 0, z)$ attraverso ∂V

Seconda Prova parziale 06/06/2011

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} t\dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = tx(t) + ty(t) \end{cases}$$

<A> Determinare una regola di ricorrenza per a_n, b_n in modo che

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad e \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

siano soluzioni per il sistema dato

<B> Determinare condizioni in grado di identificare completamente a_n, b_n in modo che x e y siano soluzioni del sistema dato

<C> Determinare il raggio di convergenza delle serie che definiscono x e y

<D> Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema che possono essere scritte come serie di potenze centrate in 0.

Prima Prova parziale 23/11/2011

Si consideri l'insieme

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : \ (x+1)(x^2+y^2) = 4x^2\}$$

Rispondere a (almeno) 4 delle seguenti domande.

<A> Determinare al variare di t le intersezioni $x(t), y(t))$ di G con la retta $y = tx$

<B> Disegnare il grafico di x e di y in funzione di t

<C> Disegnare la traccia della curva γ definita da $x(t), y(t))$

<D> Calcolare l'area della parte di piano limitata da G

<E> Studiare l'esplicitabilità di G rispetto ad x

<F> Determinare una o più funzioni di x l'unione dei grafici delle quali descriva completamente G

<G> Calcolare la derivata seconda della funzione definita implicitamente da G il un intorno di $(1, 1)$

<H> Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione definita implicitamente da G il un intorno di $(1, 1)$, in $x = 1$

Seconda Prova parziale 09/01/2012

Si consideri il problema di trovare una funzione y che sia soluzione della seguente equazione integrodifferenziale.

$$y''(x) = \int_0^x ty(t)dt$$

<A> Determinare, derivando ambo i membri, un'equazione differenziale che sia necessaria per una soluzione dell'equazione integrodifferenziale

<B> Scrivere un problema di Cauchy equivalente all'equazione integrodifferenziale data.

<C> Determinare, mediante una relazione di ricorrenza, una successione a_n tale che $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ soddisfi l'equazione integrodifferenziale data

<D> Determinare, mediante una relazione di ricorrenza, una successione a_n tale che $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ soddisfi l'equazione integrodifferenziale data

<E> Determinare, tutte le soluzioni dell'equazione integrodifferenziale data.

Prima Prova parziale 23/11/2012

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 1, x - y)$$

<A> Stabilire se e dove l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $(z, y) = \phi(x)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

<B> Calcolare $\nabla\phi$

<C> Determinare esplicitamente una espressione di ϕ in termini di funzioni elementari precisandone la validità.

<D> Calcolare massimi e minimi assoluti di $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ vincolato a $f(x, y, z) = 0$
Sia

$$V = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3\ :\ z^2 \geq 2(x^2 + y^2)\ ,\ z \geq 0\ ,\ z \leq x + 3\}$$

<E> Calcolare il volume di V

Seconda Prova parziale 08/01/2013

Si consideri la curva γ, nel piano (x, z), definita da

$$\begin{cases} z = \cos(t) \\ y = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

<A> Disegnare γ

<B> Stabilire se γ è semplice, regolare, chiusa

<C> Calcolare $\int_\gamma xdy + ydx$

Sia S la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della parte di γ che giace nel semipiano delle ascisse positive

<D> Determinare una parametrizzazione di S

<E> Calcolare l'area della superficie S

Prima Prova parziale 04/11/2013

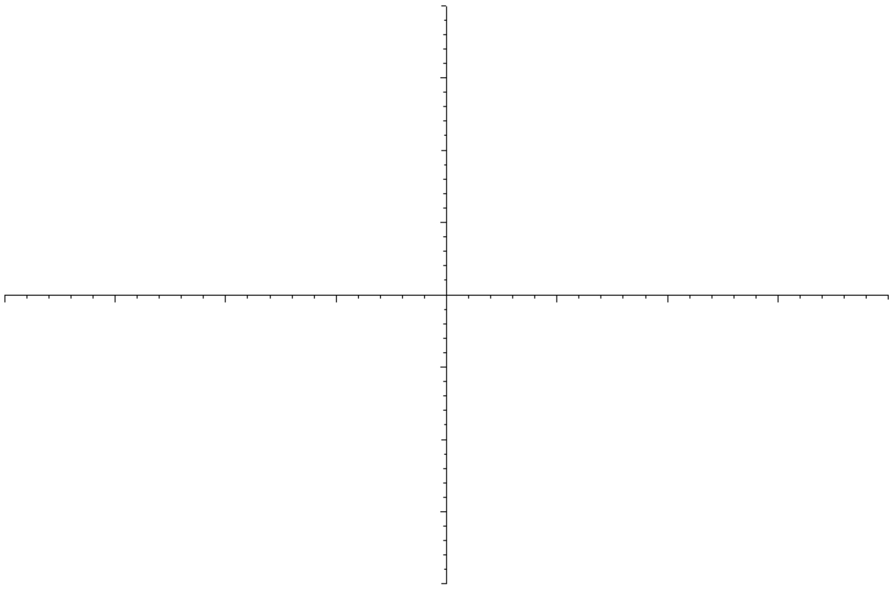
Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{|x|}\right)^n$$

<A> Determinare l'insieme di definizione di f

<B> Studiare la derivabilità di f e studiare il segno di f'.

<C> Disegnare il grafico di f.

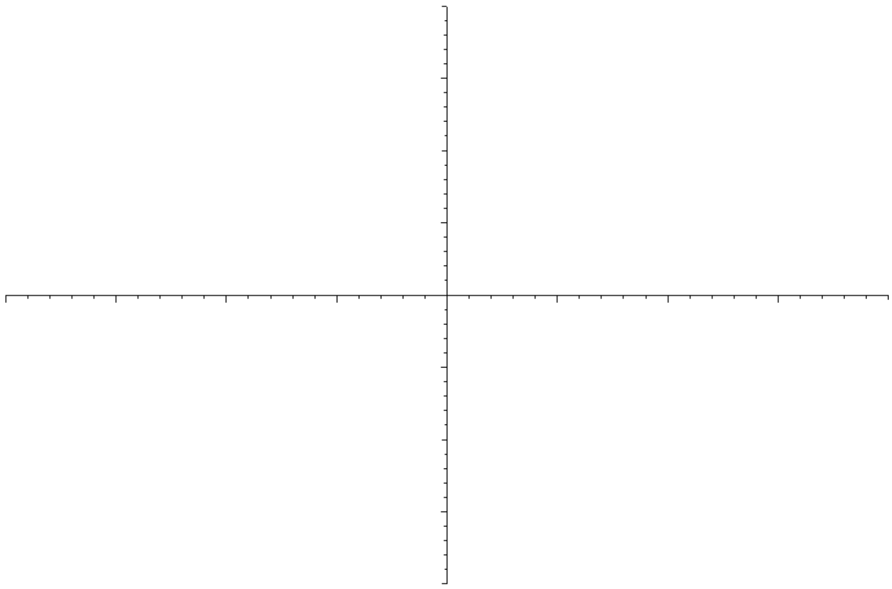


Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

<D> Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di g su $[-\pi, \pi]$

<E> Disegnare il grafico della somma delle serie di Fourier ottenuta.



Seconda Prova parziale 09/12/2013

Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq \frac{1}{2}(x+1) \ , \ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

<A> Calcolare il volume di V

<B> Calcolare la superficie di ∂V.
Si consideri

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq 1 \ , \ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

e

$$\omega_2 = z dx dy$$

<C> Verificare che

$$\int_C d\omega_2 = \int_{\partial C} \omega_2$$

Terza Prova parziale 07/01/2014

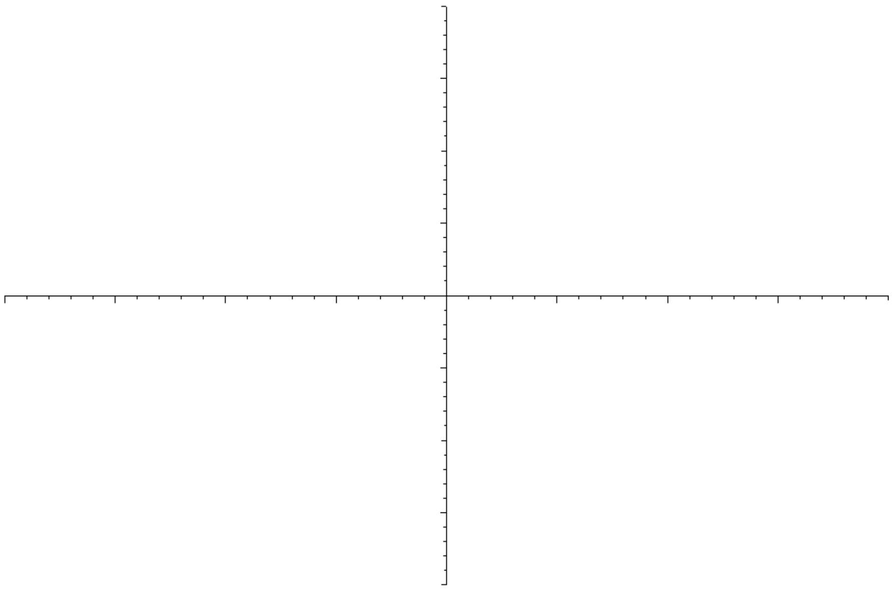
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 + y(x)y'(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

<A> Ridurre l'equazione ad un sistema differenziale del primo ordine e studiarne esistenza ed unicità .

<B> Determinare la soluzione del problema per $a = 3$ e $b = 0$

<C> Disegnare il grafico della soluzione del problema dato per $a = 0$ e $b = 1$



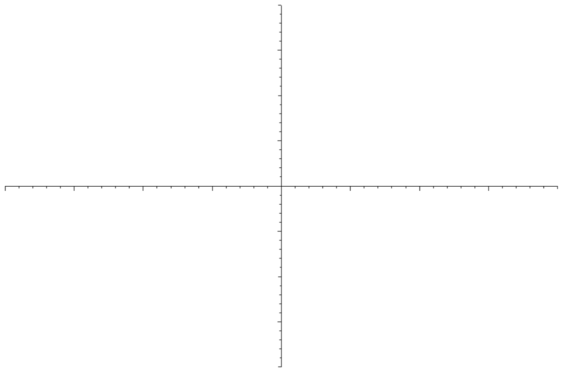
Prima Prova parziale 11/11/2014

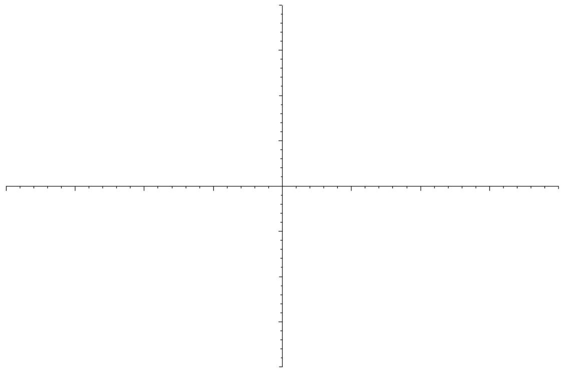
Si consideri

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 + xy = 1\}$$

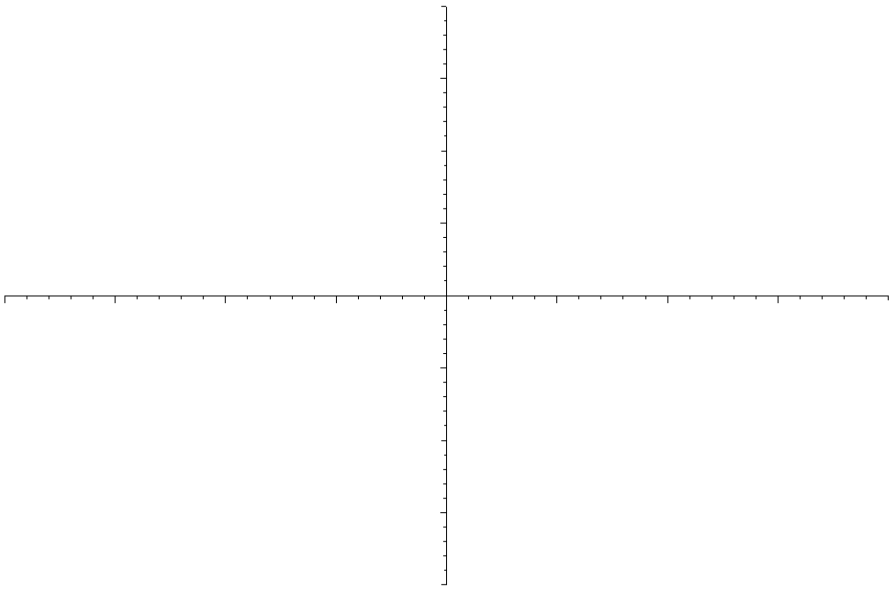
<A> Determinare l'intersezione $(x(m), y(m))$ di A con una generica retta $y = mx + 1$ per $(0, 1)$.

<B> Disegnare i grafici di $x(\cdot)$ e di $y(\cdot)$





<C> Disegnare A.



<D> Calcolare

$$\int_S dx \wedge dy$$

dove S è la regione di piano limitata delimitata da A.

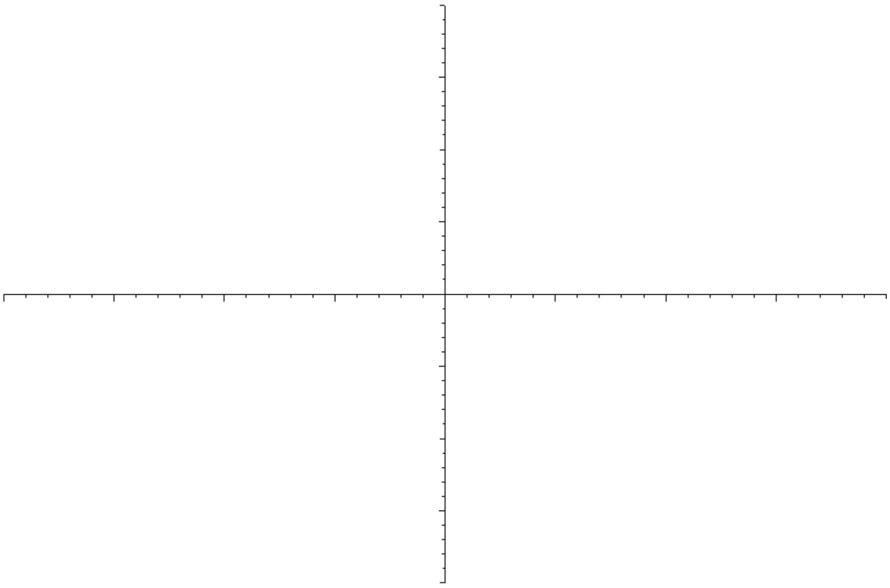
Seconda Prova parziale 12/12/2014

Si consideri

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} n e^{-n} x^{2n}$$

<A> Determinare dove f è definita, continua e derivabile

<B> Disegnare il grafico di f



<C> Calcolare $f(-1)$ a meno di $1/100$

<D> Determinare il polinomio di McLaurin di f di ordine 5

<E> Calcolare $f^{(22)}(0)$.

<F> Determinare esplicitamente f

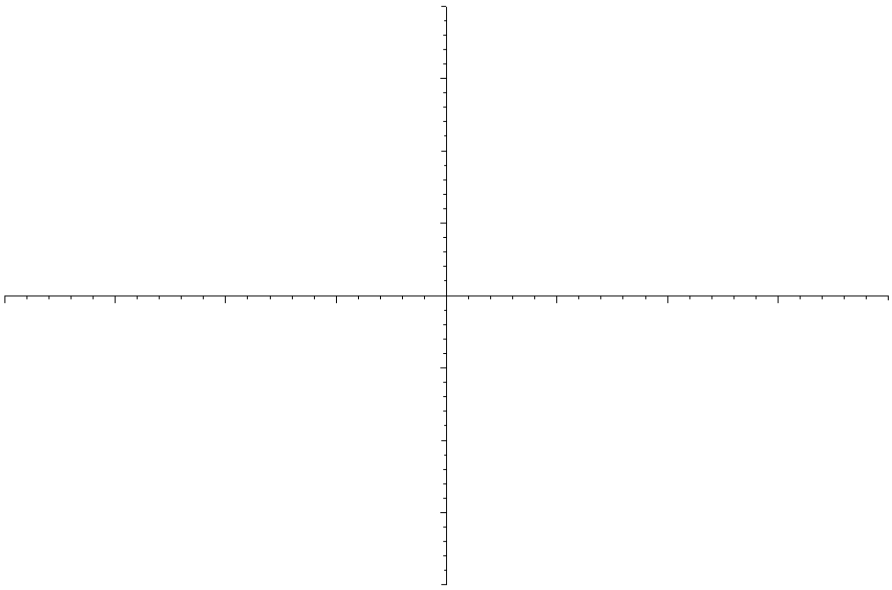
Terza Prova parziale 08/01/2015

Si consideri l'equazione differenziale

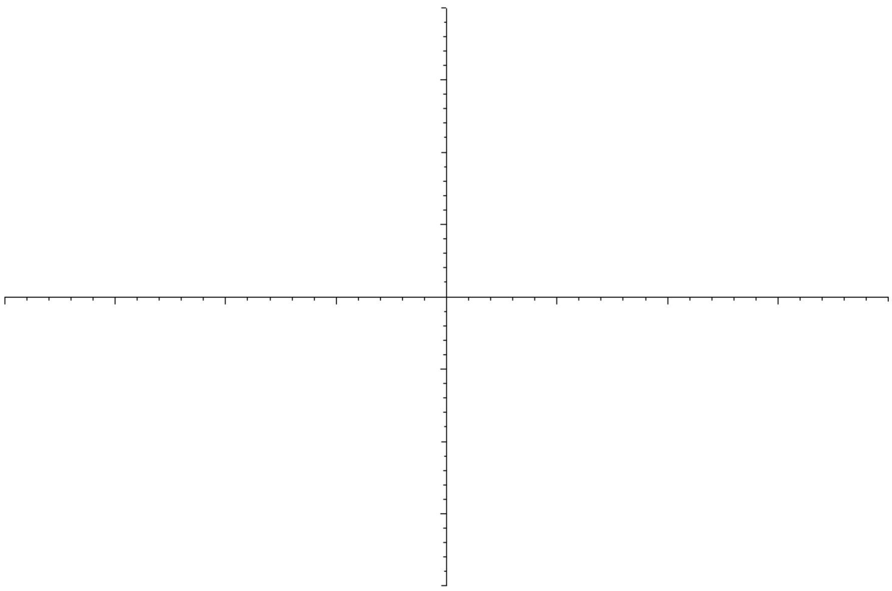
$$2y''(x)(1+y^2(x)) = 1$$

<A> Studiare esistenza ed unicità della soluzione per il problema di Cauchy associato ai dati iniziali $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$

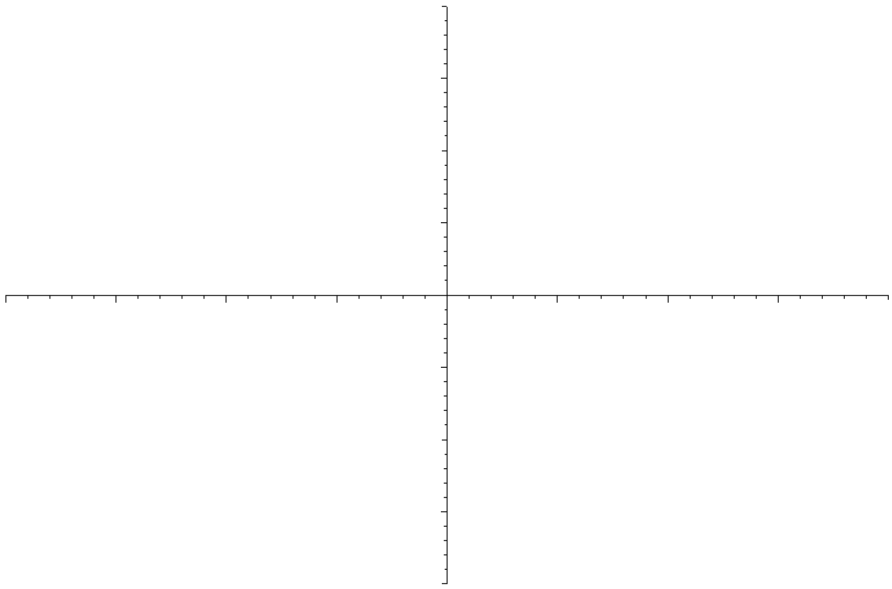
<B> Disegnare il grafico di y per $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1$



Disegnare il grafico di y per $x_0 = y_0 = 0, z_0 = -1$



<C> Disegnare il grafico di y per $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 0$



Prima Prova parziale 11/11/2015

Si consideri

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1 \;,\; 0 \leq z \leq 2 \;,\; z \geq y - x\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (0,0,z)$$

<A> -[5] Calcolare

$$\int_A \mathbf{div}\; F dxdydz$$

<B> -[5] Determinare una parametrizzazione di ∂A

<C> -[4] Calcolare

$$\int_{\partial A} \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

<D> -[6] Calcolare

$$\int_S \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1 \;,\; z = 0 \;,\; y \leq x\} \cup$$
$$\cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1 \;,\; z = y - x \geq 0\} \cup$$
$$\cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1 \;,\; z = 2\}$$

Seconda Prova parziale 12/14/2015

Si consideri

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

<A> -[5] Determinare lo sviluppo in serie di McLaurin di f

<B> -[5] Determinare n in modo che la ridotta $n-$esima della serie trovata approssimi $\ln(5)$ a meno di 0.01

<C> -[6] Determinare lo sviluppo in serie di Fourier $F(x)$ di $f(x) = x$ su $[0, \pi]$ in serie di soli coseni.

<D> -[2] Calcolare $F(0)$.

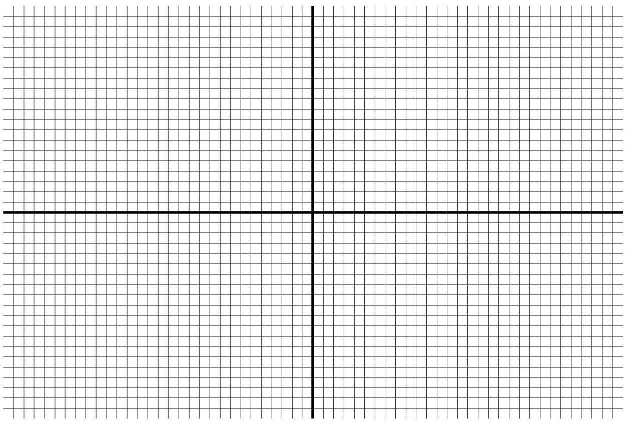
<E> -[2] Dedurre dal calcolo precedente una espressione in serie per π^2
Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^n + 1)x^{3n}$$

<F> -[3] Determinare il campo di definizione di f

<G> -[3] Calcolare $f'(x)$ precisando dove e' definita.

<H> -[4] Disegnare il grafico di f

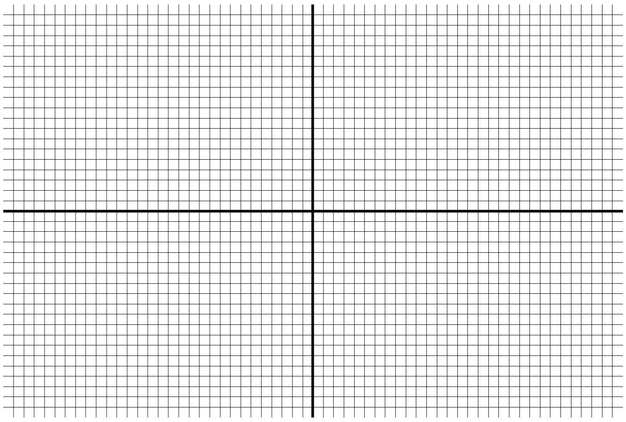


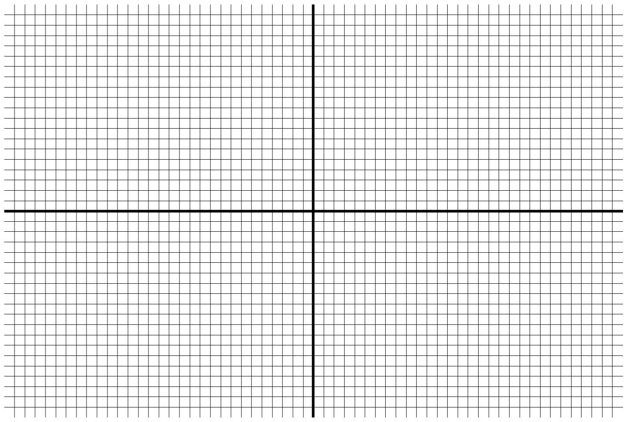
Terza Prova parziale 07/01/2016

Si consideri

$$\begin{cases} (y''(x))^2 = \dfrac{1}{y(x)} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<A> -[10+10] Disegnare il grafico delle soluzioni del problema





Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = 0$$

<B> -[4] Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_+$

<C> -[4] Determinare tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}_-$

<D> -[5] Determinare tutte le funzioni continue su $\mathbb{R}$ soluzioni dell'equazione data su $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$

Prima Prova parziale 10/11/2016

Si consideri

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| = z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (-x, y, z)$$

<A> -[6] Calcolare

$$\int_A \mathbf{div}\ F dxdydz$$

<B> -[7] Determinare una parametrizzazione di ∂A

<C> -[4] Calcolare

$$\int_{\partial A} \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

<D> -[4] Calcolare

$$\int_B \langle F, \frac{N}{||N||} \rangle d\sigma$$

<E> -[4] Calcolare

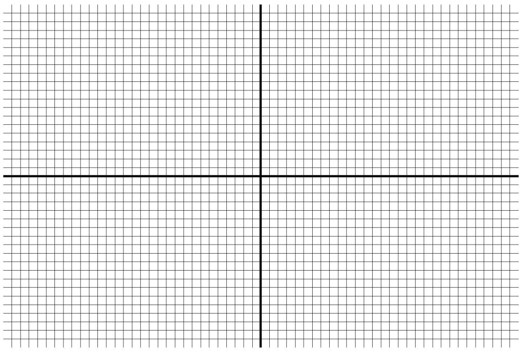
$$\int_{\partial B} \langle F, \frac{T}{||T||} \rangle ds$$

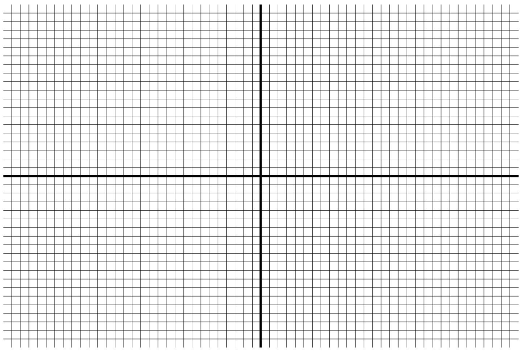
Si consideri la curva γ definita da

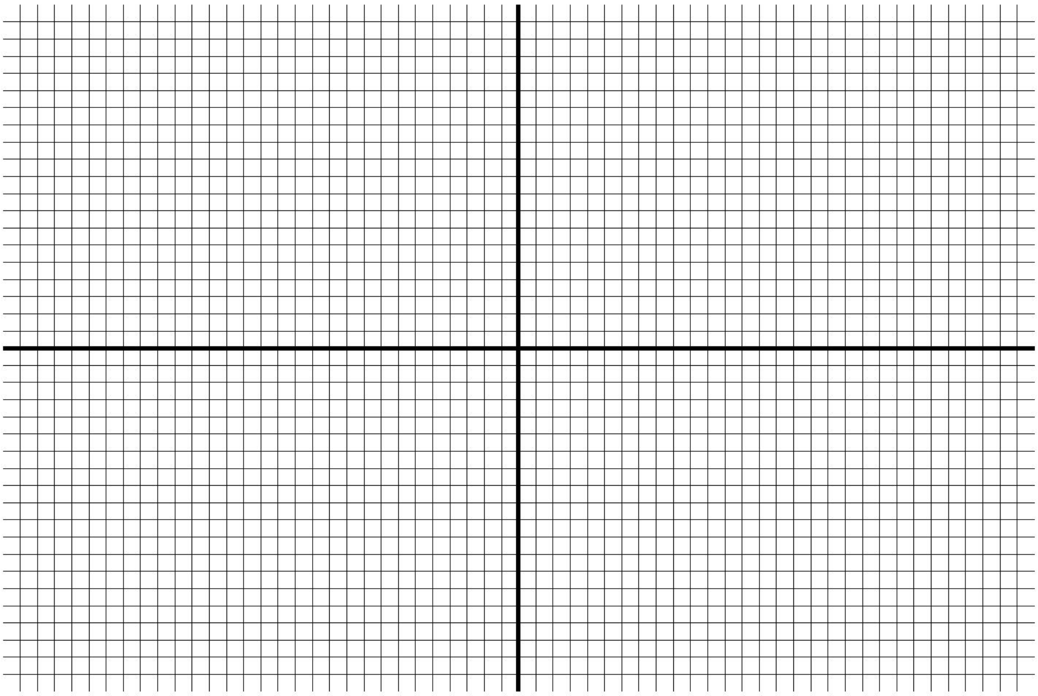
$$2y^3 + 6x^2 y + 3x^2 - 3y^2 = 0$$

<F> - [6] Determinare al variare di m le intersezioni $(x(m), y(m))$ di γ con la retta $y = mx$

<G> - [10] Disegnare il grafico di $x(m)$ di $y(m)$ e la curva γ







<H> - [9] Calcolare l'area della parte limitata di $\mathbb{R}^2$ di cui è frontiera la parte di γ che giace nel semipiano positivo delle ordinate.

Seconda Prova parziale 19/12/2016

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

<A> -[6] Studiare la convergenza puntuale di f_n

<B> -[9] Studiare la convergenza uniforme di f_n
si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} x^{n^2}$$

<C> -[3] Determinare il raggio di convergenza ρ

<D> -[4] Studiare la convergenza agli estremi dell'intervallo di convergenza

<E> -[4] approssimare a meno di 0.01 $f(-\rho)$

<F> -[4] approssimare a meno di 0.01 $f(\rho)$
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y(x)$$

<G> - [4] Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 1$, $y('0) = 1$.

<H> - [4] Trovare una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che risolva l'equazione e soddisfi i dati iniziali $y(0) = 0$, $y('0) = 0$.

<I> - [7] Trovare tutte le soluzioni della serie data che si possano esprimere come serie di potenze centrate in $x_0 = 0$

Terza Prova parziale 09/01/2017

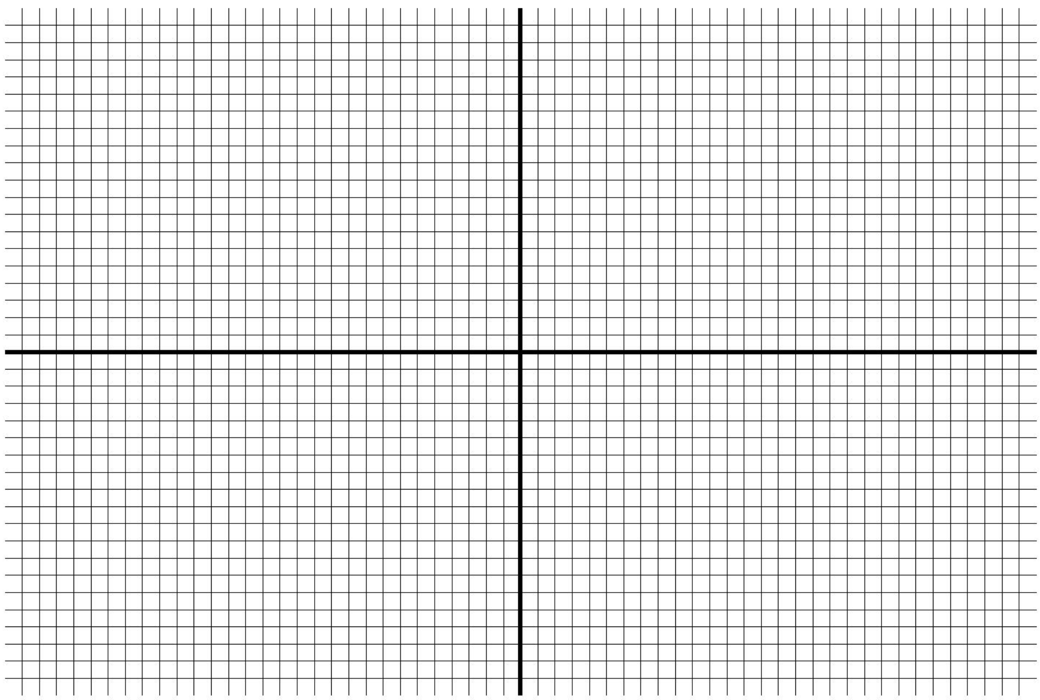
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)(y'(x) + y^2(x))$$

<A> -[2] Studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare dei dati iniziali.

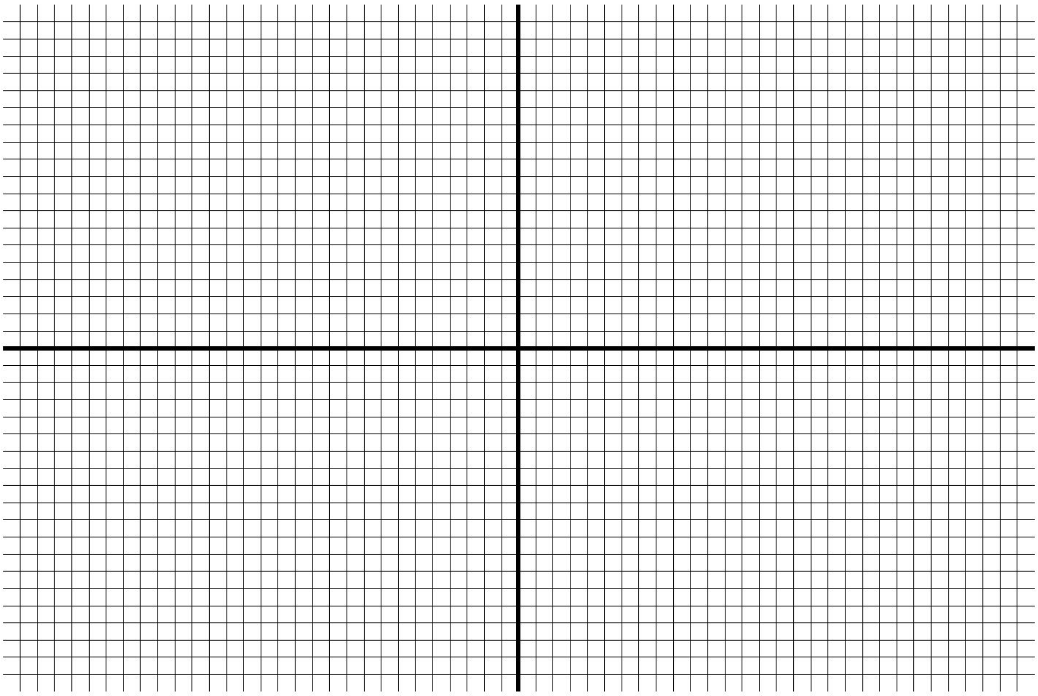
<B> -[2] Scrivere il Polinomio di McLaurin di ordine 3 della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

<C> -[10] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

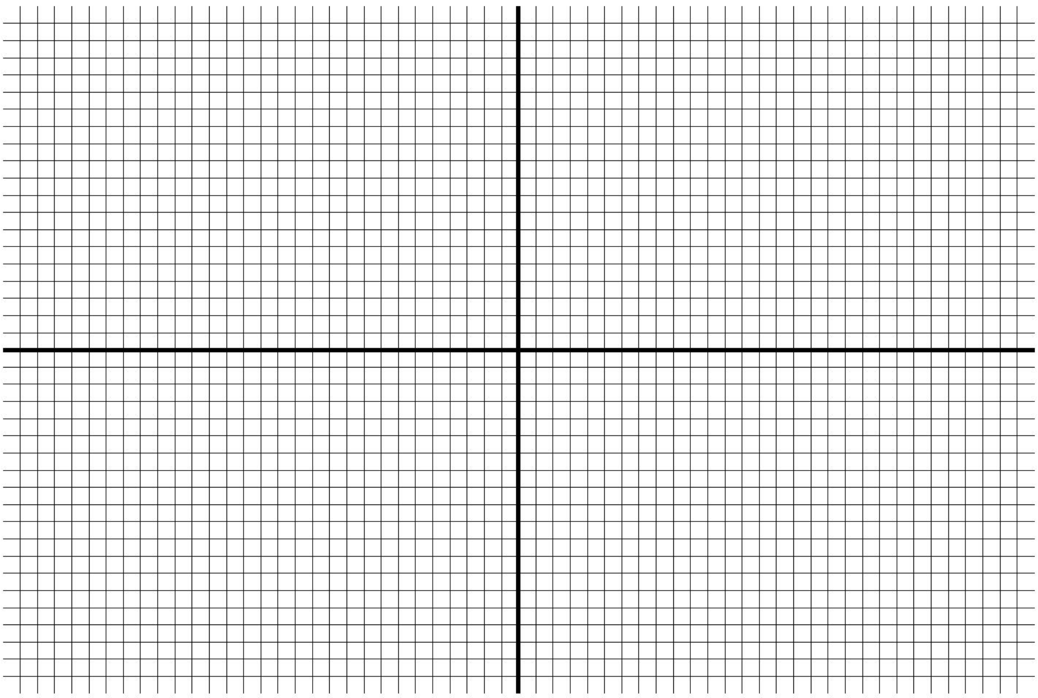


<D> -[10] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 1$,

$y'(0) = 0$.



<E> -[10] Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.



Prima Prova parziale 10/11/2017

Siano $R, H > 0$ e si consideri la curva definita da

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = R\cos(\theta) \\ x(\theta) = R\sin(\theta) \\ x(\theta) = H\theta \end{cases} \qquad , \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

<A> -[4] Parametrizzare γ mediante la lunghezza d'arco.

<B> -[3] Determinare il versore tangente T

<C> -[3] Determinare il versore normale N

<D> -[3] Determinare il versore binormale B

<E> -[2] Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ lungo la curva γ.

<F> -[9] Determinare una parametrizzazione della superficie generata da una circonferenza centrata in un punto di γ di raggio proporzionale alla lunghezza d'arco, giacente in un piano ortogonale alla curva γ.

Si consideri la superficie definita da

$$S = \begin{cases} x = (t)\cos(s) \\ y = (t)\sin(s) \\ z = s \end{cases} \qquad s \in [0, 2\pi] \ , \ t \in [0, 1]$$

<G> -[2] Calcolare il versore N normale alla superficie S

<H> -[4] Calcolare l'area della superficie S

<I> -[4] Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie S

<J> -[6] Descrivere la superficie studiata

Seconda Prova parziale 01/12/2017

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$$

<A> -[4]Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

<B> -[3] Dimostrare che deve essere $a_{2n+1} = 0$ per ogni n naturale.

<C> -[3] Determinare i valori che possono assumere a_0 ed a_1

<D> -[3] Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

<E> -[3] Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione data che si possono esprimere come serie di potenze centrate in $x_0 = 0$

<F> -[4] Determinare una espressione esplicita per a_n

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$x2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 16)y(x) = 0$$

<G> -[4]Determinare la successione a_n in modo che $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione data

<H> -[3] Dimostrare che deve essere $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

<I> -[3] Dimostrare che deve essere $a_{2n-1} = 0$ per ogni n naturale.

<J> -[3] Determinare i valori che può assumere a_4

<K> -[3] Determinare il raggio di convergenza della serie trovata.

<L> -[4] Determinare l'ordine di infinitesimo di y in $x_0 = 0$

Terza Prova parziale 08/01/2018

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2t \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + z(t) + e^t \\ \dot{u}(t) = x(t) + y(t) + 1 \end{cases}$$

-○ [6] Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

<A> -[6] Determinare tutte le soluzioni del sistema

<B> -[6] Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo.

<C> -[6] Determinare una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo.

<D> -[6] Determinare l'insieme W di tutte le soluzioni del sistema omogeneo tali che

$$x(0) = u(0)$$

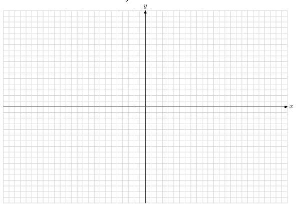
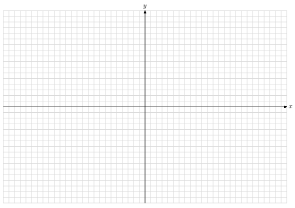
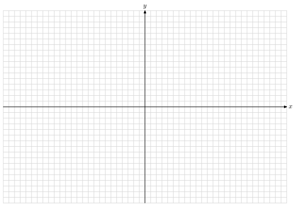
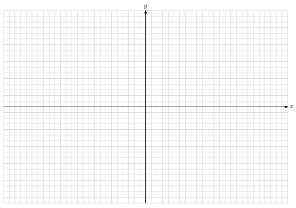
<E> -[9] Stabilire se W è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione ed una base

Terza Prova parziale 09/01/2018

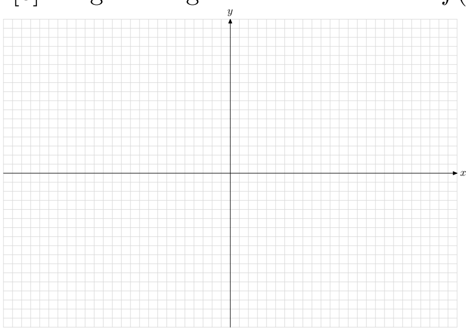
-○ [20] Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 + \sqrt{(y(x)}$$

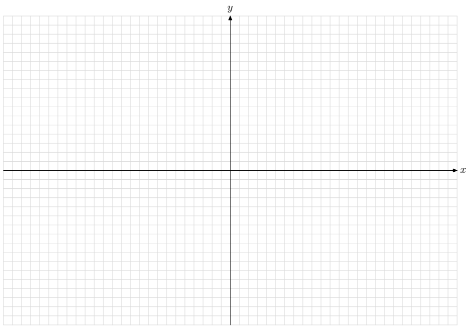
relative ai dati iniziali $[y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{5/3}]$, $[y(0) = 1, y'(0) = -\sqrt{5/3}]$, $[y(0) = 1, y'(0) = 1]$, $[y(0) = 1, y'(0) = 2]$. (Può essere utile svolgere questo punto dopo aver risposto alle domande successive.)

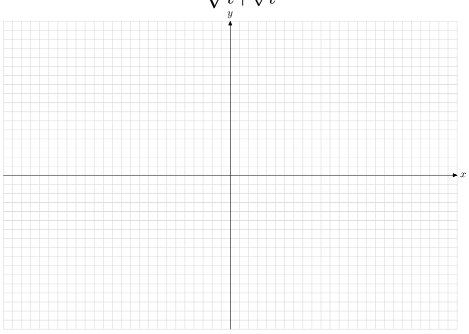
<A> -[8]Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x + 2/3x\sqrt{x} - a - 2/3a\sqrt{a} + b$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}_+$



<B> -[6] Disegnare il grafico della funzione $F(x) = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt$



<C> -[6] Calcolare $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{t}}} dt$ e disegnarne il grafico



Prima Prova parziale 02/11/2018

Si consideri la parte di spazio definita da

$$V = \{(x, y, z) \ : \ 0 \leq z \leq \theta \ , \ 1 \leq \rho \leq 2 \ , \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Dove (ρ, θ) sono le coordinate polari nel piano (x, y).

<A> -[6] Parametrizzare ∂V
Siano

$$S_0 = \{(x, y, z) \ : \ z = 0, \ 1 \leq \rho \leq 2 \ , \theta \in [0, 2\pi]\} \qquad , \qquad S_1 = \{(x, y, z) \ : \ z = \theta, \ 1 \leq \rho \leq 2 \ , \ , \theta \in [0, 2\pi]\}$$

<B> -[4] Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso S_0 e attraverso S_1

<C> -[6] Determinare una parametrizzazione di ∂S_1

<D> -[4] Calcolare il lavoro svolto dal campo vettoriale $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ lungo la curva ∂S_1
vspace2cm Siano

$$\gamma_1 = \{(x, y, z) \ : \ z = \theta, \ \rho = 1 \ , \theta \in [0, 2\pi]\} \qquad , \qquad \gamma_2 = \{(x, y, z) \ : \ z = \theta, \ \rho = 2 \ , \ , \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e si consideri la superficie P generata dalle parabole giacenti nel piano definito da $y = x\tan(\theta)$ passanti che si annullano nei punti $\gamma_1(\theta)$ e $\gamma_2(\theta)$

<E> -[2] Parametrizzare γ_1

<F> -[2] Parametrizzare γ_2

<G> -[8] Parametrizzare P

<H> -[4] Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie S

<I> -[4] Descrivere la superficie studiata

Seconda Prova parziale 03/12/2018

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad , \quad x \geq 0$$

⟨A⟩ -[4] Determinare il limite puntuale della successione f_n precisando il suo campo di definizione.

⟨B⟩ -[7] Determinare dove la convergenza puntuale di f_n è anche uniforme..
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

⟨C⟩ -[2]Determinare il campo di definizione di f

⟨D⟩ -[4] Determinare i coefficienti di Fourier di f su $[-\pi, \pi]$

⟨E⟩ -[4] Verificare che f è limite uniforme della serie su $\mathbb{R}$
vspace2cm
Si consideri la serie definita , per $a, b \in \mathbb{R}_+$, da

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{b}{x} \right)^n \right)$$

⟨F⟩ -[2] Determinare se si tratta di una serie di potenze ed in caso affermativo indicarne i coefficienti

⟨G⟩ -[7] Studiare la convergenza uniforme della serie al variare di a, b

⟨H⟩ -[4] Indicare se esistono a, b per i quali la serie non converge puntualmente per nessun valore di x reale.

⟨I⟩ -[6] Esprimere, nel caso in cui la serie sia convergente, la sua somma in termini di funzioni elementari

Terza Prova parziale 07/01/2019

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y'(x)\cos^2(y'(x))$$

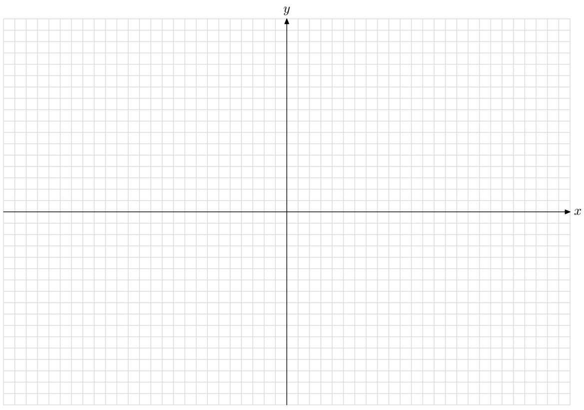
ed i dati iniziali
$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

<A> -[2] Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo e determinare eventuali soluzioni costanti.

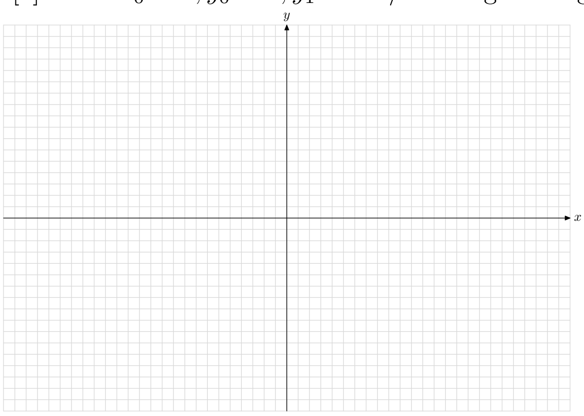
<B> -[2] Verificare che se y è soluzione dell'equazione data allora anche $z(x) = y(x + \bar{x})$ è soluzione.

<C> -[2] Verificare che se y è soluzione dell'equazione data allora anche $z(x) = y(x) + \bar{y}$ è soluzione.

<D> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = \pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo

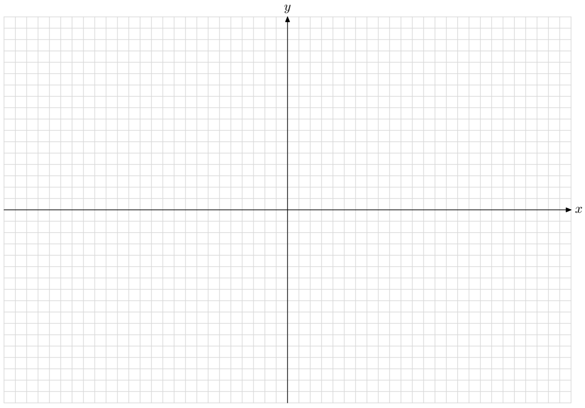


<E> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = -\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo

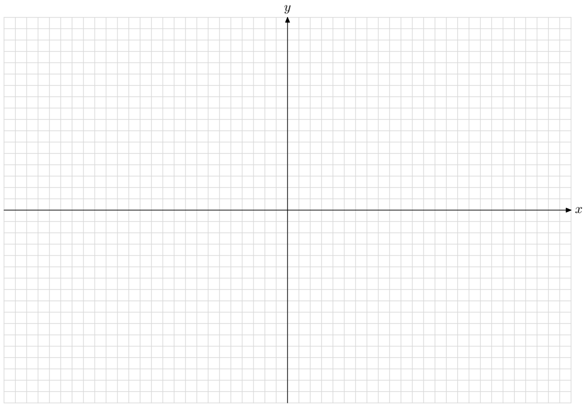


vspace2cm

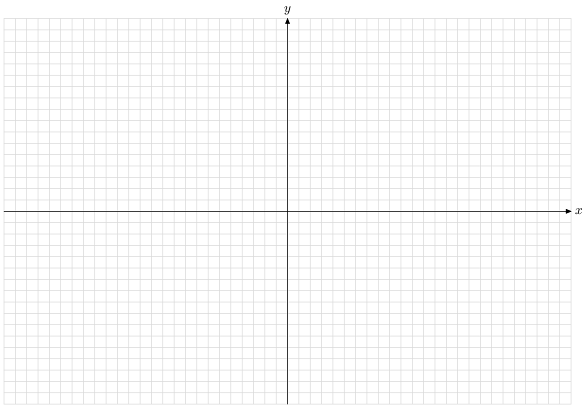
<F> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = 3\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo



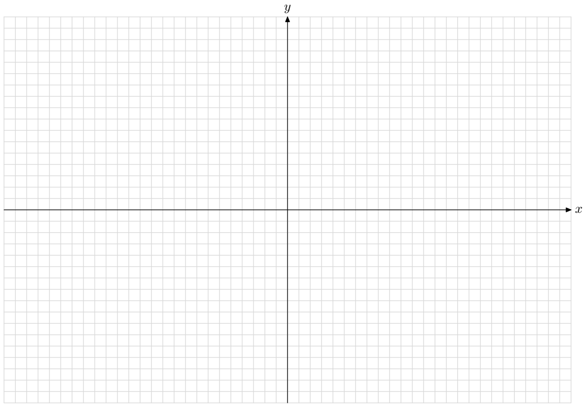
<G> -[6] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = -3\pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo



<H> -[5] Siano $x_0 = 0, y_0 = 0$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo al variare di y_1



<I> -[5] Siano $y_1 = \pi/4$. Disegnare il grafico delle soluzioni del problema di Cauchy relativo al variare di x_0, y_0


y
x