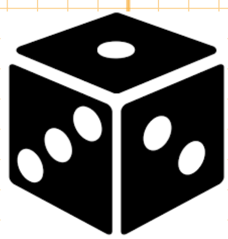
-1-

[1]

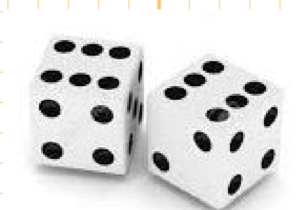
Nelle figure sono rappresentati comuni dadi da gioco a forma di cubo.

Assumiamo che su ognuna delle 6 facce sia riportato un punteggio compreso tra 1 e 6

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere in base alle informazioni che si possono ricavare da quanto abbiamo assunto e dalle figure sopra riportate.



(a) Figura 1



(b) Figura 2

(c) Figura 3

·1 Nella figura 1 è presente un dado nero

·2 Nella figura 1 è presente un dado numerato da 1 a 6

·3 Una delle facce del dado riportato nella figura 1 riporta il punteggio di 3

·4 Una delle facce del dado riportato nella figura 1 riporta il punteggio di 5

·5 Nella figura 2 sono presenti due dadi

·6 Nella figura 2 sono presenti due dadi con tutte le facce bianche

·7 Nella figura 2 sono presenti due dadi con tutte le facce che riportano il punteggio 6 bianche

·8 Nella figura 3 sono presenti dadi con tutte le facce nere o bianche

·9 Nella figura 3 sono presenti dadi che hanno almeno 15 facce nere

·10 I dadi nella figura 3 hanno facce nere o bianche

·11 I dadi nella figura 3 hanno facce nere e bianche

1

Supponiamo vera l'affermazione:
"Se usi il dentifricio X allora avrai denti bianchi."
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere

·1 Hai denti bianchi quindi usi il dentifricio X

·2 Non hai denti bianchi quindi non usi non usi il dentifricio X

·3 Non usi il entifricio X quindi non hai denti bianchi

·4 Non usi il dentifricio X quindi gli asini volano

·5 Non usi il dentifricio X quindi i tuoi denti assumeranno una colorazione indefinita

1

Sia n un numero naturale e sia $D(n)$ l'insieme dei numeri naturali divisibili per n
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e scriverne la negazione

·1 Per ogni numero naturale n si ha $n \in D(m)$ per ogni m naturale

·2 Per ogni numero naturale n si ha $n \in D(n)$ per ogni n naturale

·3 $1 \in D(m)$ per ogni m naturale

·4 $n \in D(1)$ per ogni n naturale.

-2-

1

Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

·1 $x^2 - 5x + 6 = 0$

·2 $x^3 = 8$

·3 $x^4 = 16$

·4 $x^3 + x^2 + x + 1$

·5 $(x^2 - 1)(x^3 + 27)$

1

Sia

$$\begin{cases} x = \cos\theta\cos\phi \\ y = \sin\theta\cos\phi \\ x = \sin\phi \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$

·1 Calcolare $x^2 + y^2 + z^2$

·2 Determinare per quali θ, ϕ si ha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$$

1

Si dice che due numeri naturali hanno la stessa parità se sono entrambi pari o entrambi dispari.

·1 Consideriamo la seguente affermazione:

Comunque si scelgano n numeri naturali essi hanno la stessa parità

Dimostriamo che l'affermazione è vera per induzione.

-Per $n = 1$

comunque si scelgano 1 numero naturale esso ha la stessa parità .di se stesso.

- Supponiamo l'affermazione vera per n e dimostriamola per $n + 1$

Supponiamo cioè che

comunque si scelgano n numeri naturali essi hanno la stessa parità

e verifichiamo che

comunque si scelga $n + 1$ numeri naturali essi hanno la stessa parità .

Infatti se consideriamo i primi n degli $n + 1$ numeri scelti e gli ultimi n degli $n + 1$ numeri scelti avremo due gruppi di numeri che hanno la stessa parità ed inoltre i due gruppi hanno elementi in comune per cui laparità nei due gruppi è la stessa e tutti gli $n + 1$ numeri hanno la stessa parità.

L'affermazione che abbiamo dimostrato per induzione è chiaramente falsa per cui si chiede la ragione per cui la dimostrazione è sbagliata.

-3-

1

·1 Determinare maggioranti, minoranti, estremo superiore, estremo inferiore, massimo , minimo dell'insieme

$$\left\{ \frac{3x+1}{2x+3} \ : x > \frac{1}{2} \right\}$$

1

·1 Determinare maggioranti, minoranti, estremo superiore, estremo inferiore, massimo , minimo dell'insieme

$$\left\{ \frac{3x+1}{2x+3} : x \in \mathbb{N}, x > \frac{1}{2} \right\}$$

-4-

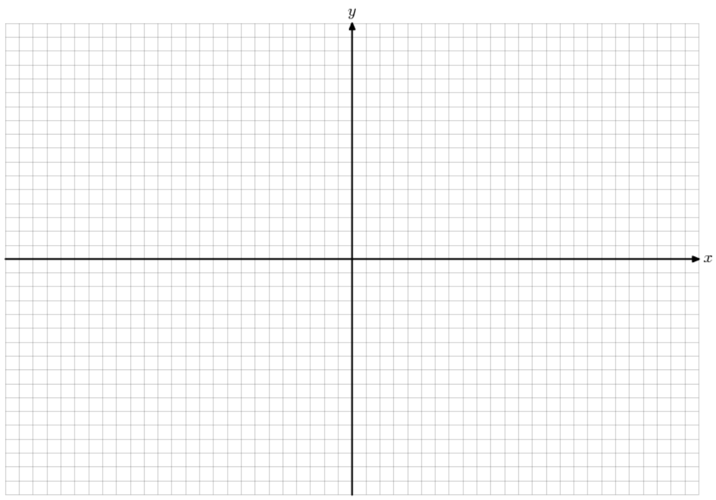
1

Sia

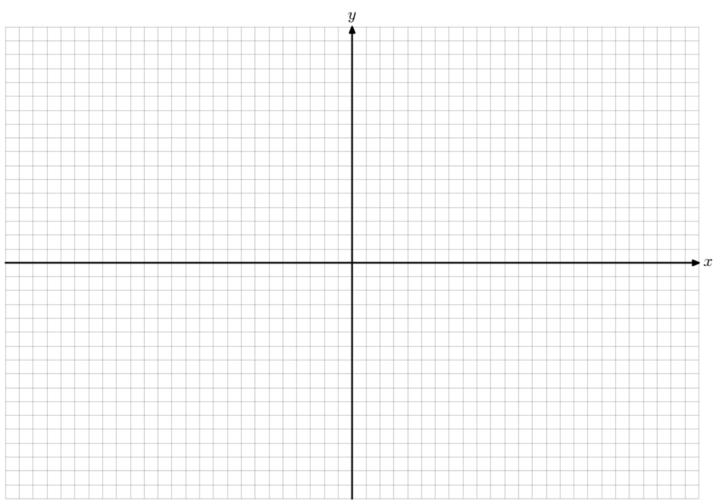
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+3}$$

·1 Disegnare nel piano i seguenti insiemi

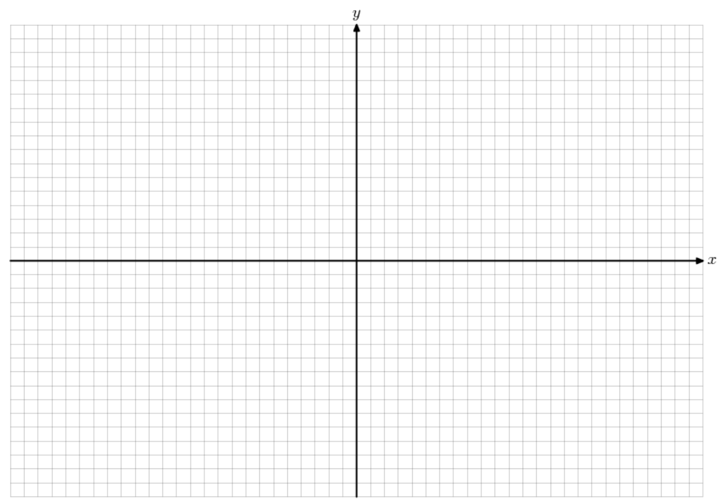
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x < y\}$, $a \in \mathbb{R}$



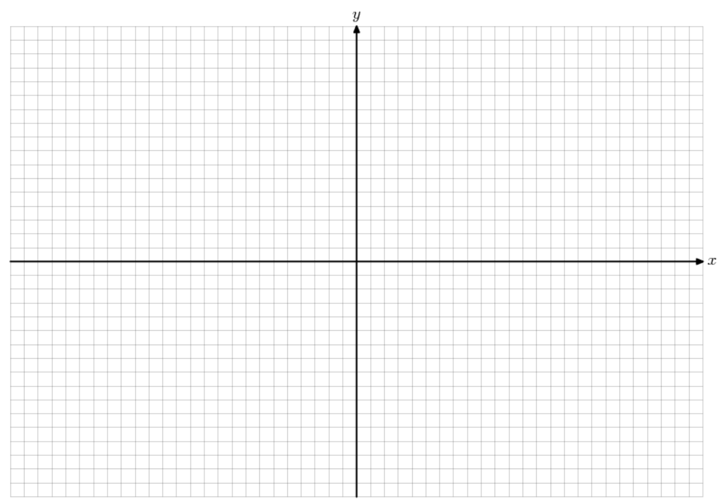
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < y \leq b\}$, $b \in \mathbb{R}$



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < y \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$



$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < y, f(x) < f(y)\}$, $a \in \mathbb{R}$



·**2** Determinare a in modo che $A \subset D$

·**3** Determinare b in modo che $B \subset D$

·**4** Determinare a, b in modo che $C \subset D^c$ (D^c è il complementare di D)

·**5** Dimostrare usando le affermazioni precedenti che f è decrescente su $[0, +\infty)$

·**6** Dimostrare usando le affermazioni precedenti che f è decrescente su $(-\infty, -2]$

·**7** Dimostrare usando le affermazioni precedenti che f è crescente su $[-2, 0]$

·8 Stabilire se è vero che f è decrescente su $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

·9 Determinare estremo inferiore e superiore , massimo e minimo di f su $\mathbb{R}$

·10 Tenendo presente che :

$$x^2 + 3x + 3 > x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

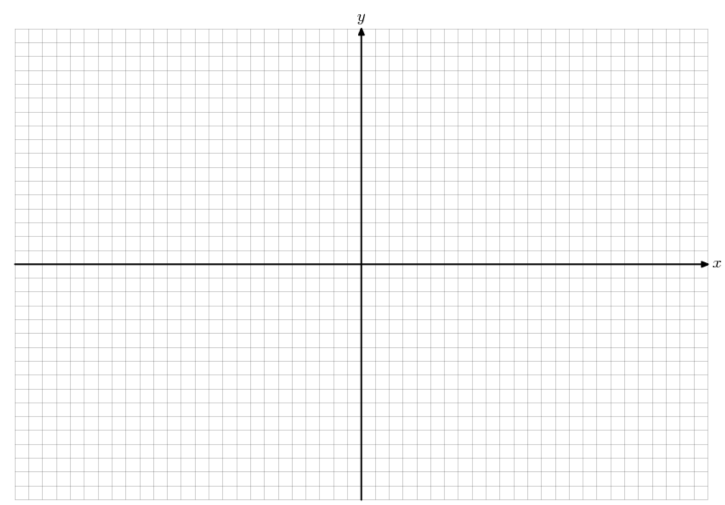
Verificare che

$$|f(x)| < \frac{1}{|x+2|}$$

·11 Verificare che
$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta$ tale che $x > \delta \Longrightarrow 0 < f(x) < \epsilon$

·12 Verificare che
$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta$ tale che $x < \delta \Longrightarrow -\epsilon < f(x) < 0$

·13 Disegnare il grafico di f



-5-

1

Si consideri la funzione

$$f(x) = (\sin(x) - 1)^2 + 4$$

·1 Determinare una funzione g in modo che $f(x) = g(\sin x)$

·2 Studiare crescenza e decrescenza di g, successivamente disegnarne il grafico e dedurne crescenza e decrescenza di f.

·3 Disegnare il grafico di f

·4 Disegnare con cura il grafico di f su $[0, 5]$ Determinando maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di f su $[0, 5]$

·5 Verificare che f è strettamente crescente in $[\pi/2, \pi]$ e calcolare l'inversa di f ristretta a tale intervallo

1

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \log_2 |x^2 - ax| \qquad g(x) = \arctan(f(x)) \qquad a \in (0, 2)$$

·1 Disegnare il grafico di f al variare di a

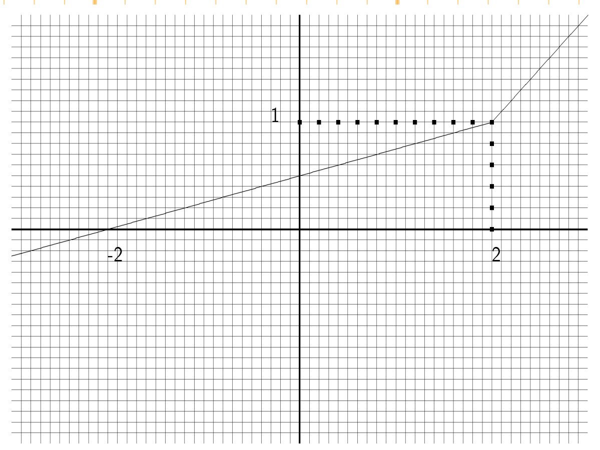
·2 Disegnare il grafico di g al variare di a

·3 Disegnare il grafico di g per $a = 2$ ed $a = 0$

·4 Per $a = 2$ stabilire ee g è invertibile su $(-\infty, 0]$ ed in caso affermativo determinarne l'inversa.

1

Sia f la funzione il cui grafico è riportato in figura



·1 Determinare, in corrispondenza di $\epsilon = .5$ un intorno bucato I di 2 in modo che sia verificato che $|f(x) - 1| < \epsilon$ per $x \in I$

·2 In corrispondenza di $\epsilon > 0$ determinare $\delta > 0$ tale che $|f(x) - 1| < \epsilon$ per $|x - 2| < \delta$

-6-

1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln(e^x - e^{2x} + 1))$$

·1 Disegnare il grafico di $g(x) = y - y^2 + 1$ e di $h(x) = e^x - e^{2x} + 1$

·2 Disegnare il grafico di f

·3 Verificare che f è invertibile su $[10, +\infty)$

·4 Determinare l'inversa di f

·5 Verificare, usando la definizione di limite che

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

1

Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ tale che

- $f(0) = -3$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -3$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -3$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$

·1 Disegnare il grafico di f

·2 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è limitata?

·3 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 si annulla almeno una volta?

·4 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è crescente?

·5 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è decrescente?

·6 È sempre vero che una funzione soddisfacente le condizioni da 1 a 7 è invertibile?

1

·1 Un punto si muove lungo l'asse x con velocità costante uguale a v metri al secondo, partendo da fermo.

Disegnare il grafico dello spazio percorso in funzione del tempo t.

La temperatura lungo l'asse x aumenta linearmente di g gradi per metro partendo da 0 gradi

Disegnare il grafico della temperatura del punto in funzione del tempo.

·2 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{3x^2 + 1}$$

·3 Calcolare al variare di x_0

$$\lim_{x\to x_0} E(\arctan(x))$$

·4 Verificare mediante la definizione di limite che

$$\lim_{x\to 0} \sin(x/2) = 0$$

·5 Calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{2 - \sqrt[3]{4-x}}{x-2}$$

-7-

1

Sia a_n la quantità definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = K + a_n \end{cases}$$

·1 Provare per induzione che

$$a_n = nK$$

1

Si consideri la sucessione

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

·1 Dimostrare che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2$$

·2 Dimostrare che a_n è crescente.

·3 Dimostrare che a_n tende a $+\infty$

·4 Dimostrare che

$$(-1)^{n^2} = (-1)^n$$

Si consideri

$$b_n = (-1)^{n^2} a_n$$

·5 Determinare estremo superiore ed inferiore di b_n

·6 Determinare, se esistono massimo e minimo di b_n

·7 Calcolare, se esiste,

$$\lim b_n$$

1

Si consideri per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \frac{n^2}{n!}$$

·1 Determinare

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) > f(n+1)\}$$

·2 Determinare estremo superiore e massimo di

$$\frac{n^2}{n!}$$

-8-

1

·1 Calcolare

$$\lim \frac{n!}{n^4}$$

·2 Calcolare

$$\lim \frac{(4n)!}{n^{4n}}$$

·3 Calcolare

$$\lim \sqrt[n]{\ln(1+1/n)}$$

·4 Determinare α in modo che risulti finito

$$\lim \frac{n^\alpha}{n^4-1}$$

·5 Dimostrare che non esiste

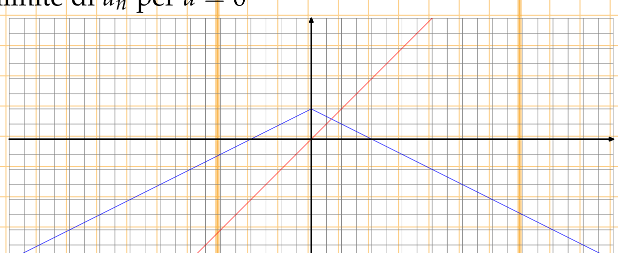
$$\lim_{x\to 0} \tan(1/x)$$

1

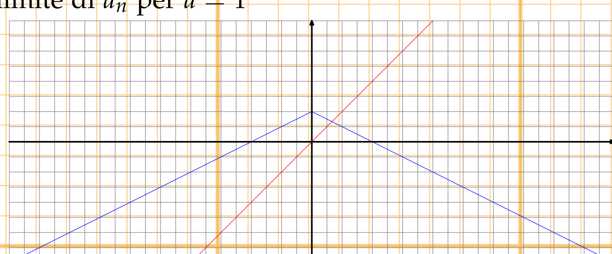
Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = (1-|a_n|)/2 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

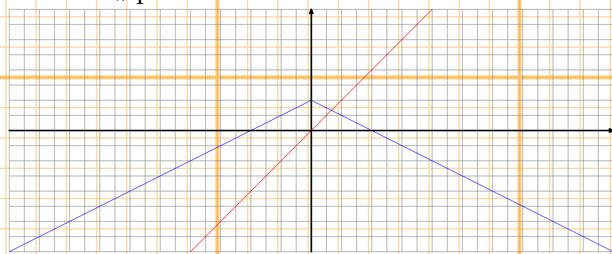
·1 Studiare il limite di a_n per $a = 0$



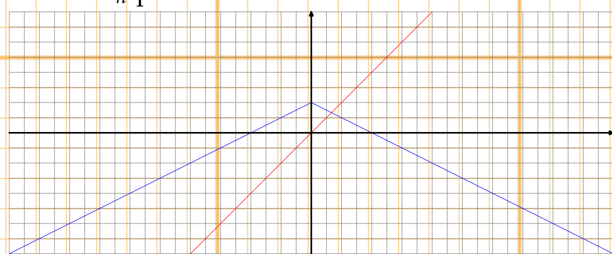
·2 Studiare il limite di a_n per $a = 1$



·3 Studiare il limite di a_n per $a = 5$



·4 Studiare il limite di a_n per $a = -1$



-9-

1

Si consideri la successione a_n ciascun termine della quale, dal secondo in poi, é la differenza tra il termine che lo precede e quello che lo segue.

·1 Scrivere una relazione di ricorrenza che caratterizzi la successione.

·2 Verificare che l'insieme delle successioni che soddisfano la relazione di ricorrenza assegnata è uno spazio vettoriale.

·3 Determinare λ in modo che $a_n = \lambda^n$ soddisfi la regola di ricorrenza trovata.

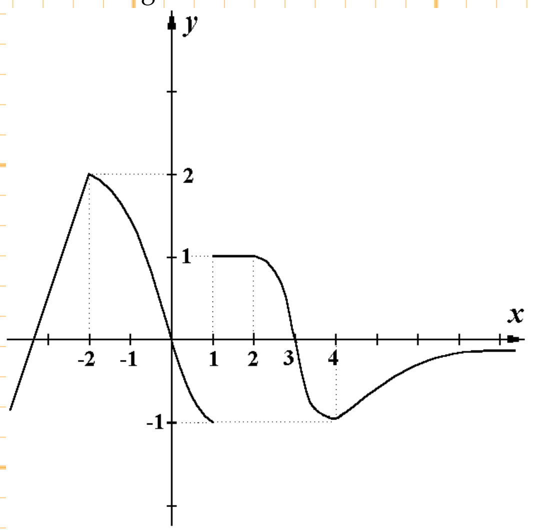
·4 Determinare tutte le successioni che soddisfano la relazione di ricorrenza trovata.

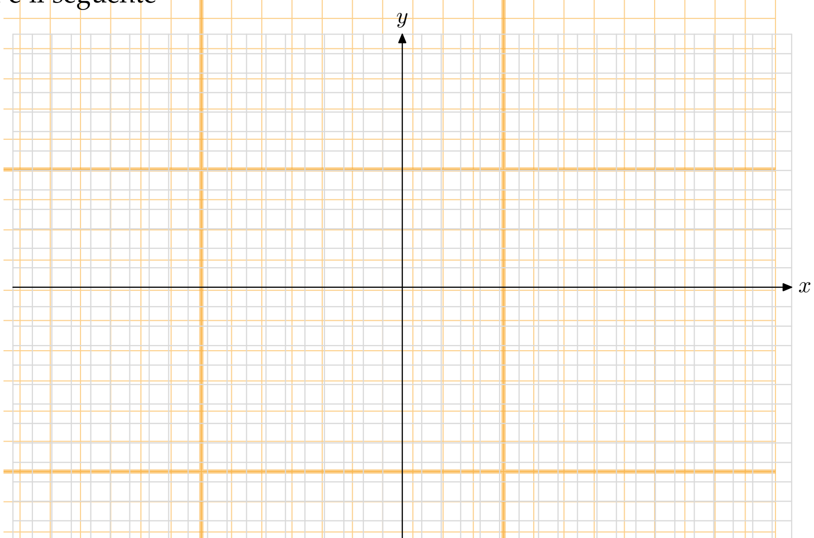
·5 Determinare una base per lo spazio delle successioni che soddisfano la regola di ricorrenza assegnata.

·6 Determinare una successione che soddisfi la regola di ricorrenza assegnata per la quale i primi due termini valgono 1.

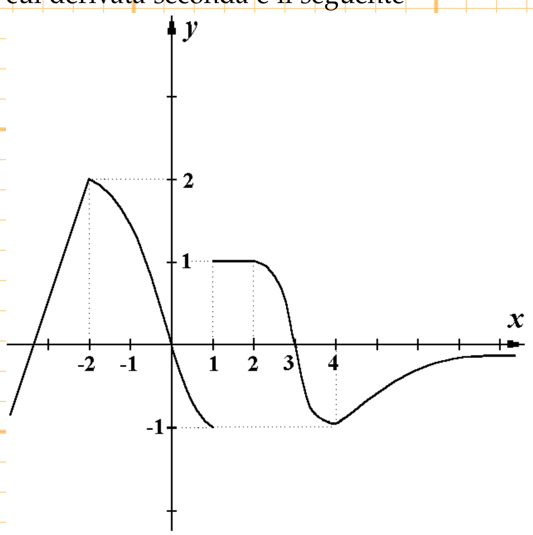
-10-

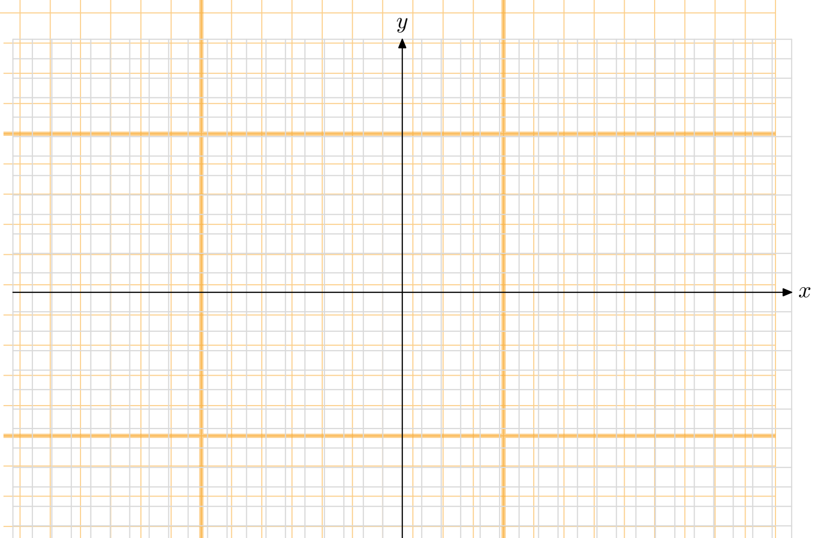
·1 Disegnare il grafico della derivata prima di una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ il grafico della cui derivata seconda è il seguente



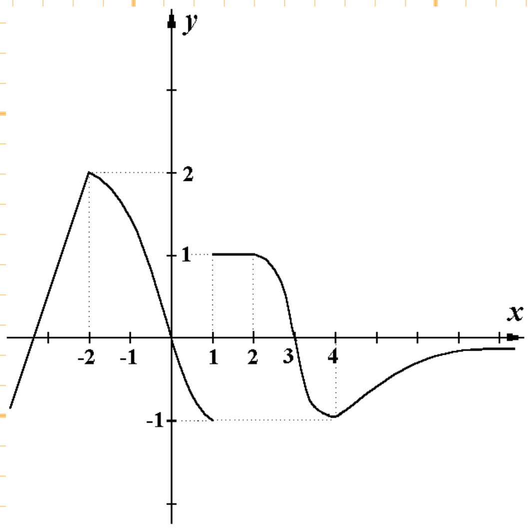


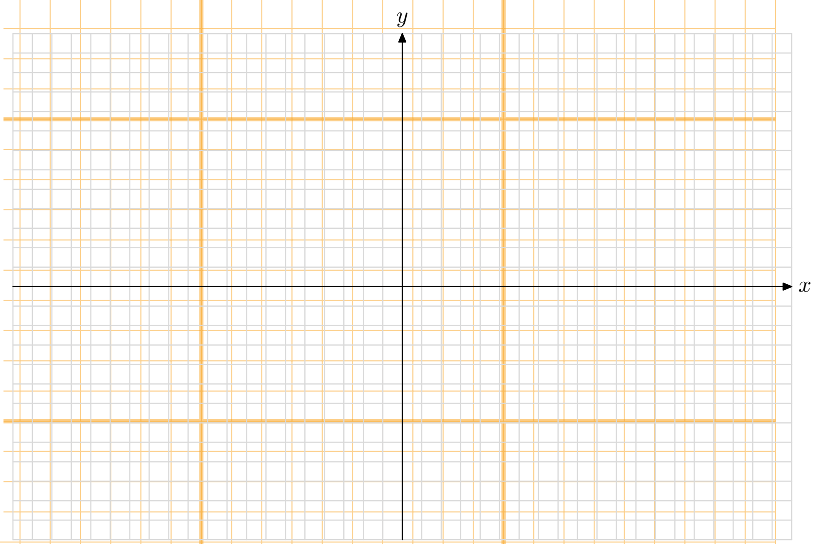
·2 Disegnare il grafico di una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ il grafico della cui derivata seconda è il seguente



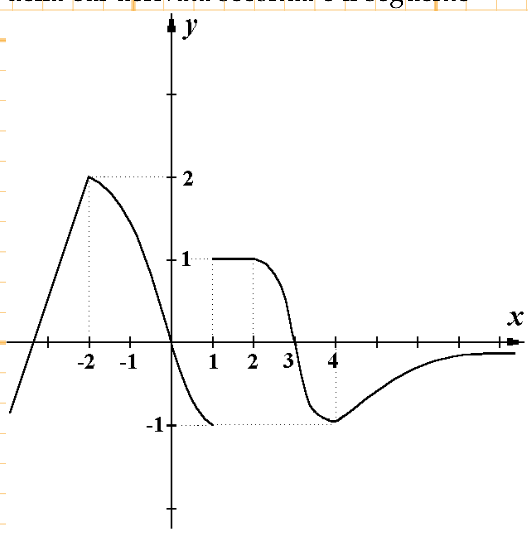


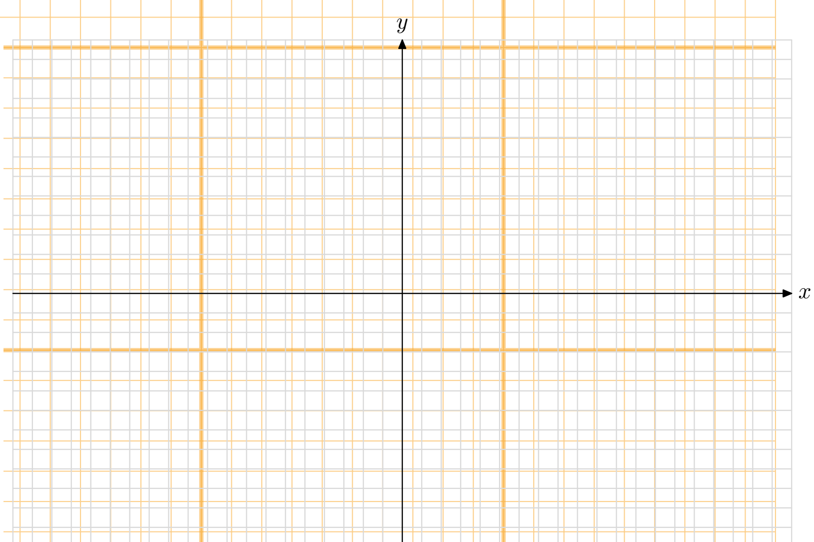
·3 Disegnare il grafico della funzione di classe $\mathcal{C}^1$ che passa per il punto $(1,1)$ con pendenza 0. il grafico della cui derivata seconda è il seguente





·4 Disegnare il grafico della funzione di classe $\mathcal{C}^1$ la cui retta tangente nell'origine è la bisettrice primo terzo quadrante il grafico della cui derivata seconda è il seguente





-11-

1

Calcolare i seguenti limiti

$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg }x-\sin x}{x^n}\quad (n\in \mathbf{Z})$

$\lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\sin^2\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to k\frac{\pi}{2}} E[\cos x],\quad k\in \mathbf{Z},\quad k\neq 0$

$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{x-|x+1|}{x}\right|,\quad x_0\in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 7}\left\{E[x]+(x-E[x])^2\right\}$

$\lim_{x\to +\infty} x\ \sin x$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+\sqrt{x^2\tan x}}$

$\lim_{x\to x_0}\left[x^8+|x^7-1|+1\right]^{1+x^2-|x|^2}\quad (x_0\in \mathbb{R})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-kx}\right),\ k\in \mathbf{Z}$

$\lim_{k\to -\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-kx}\right),\ x\in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^k\sin^k x},\ k\in \mathbf{Z}$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^m-1}{x^n-1}\quad (m,n\in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin 2x}{x}$

$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x-E[x]},\quad x_0\in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2},\quad (a>b)$

$\lim_{x\to 0^+}\left\{\sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-\sin\sqrt{\frac{1}{x}}\right\}$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x}}\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+\sin x^2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2+\sin^2 x}$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\text{cotg }x}{2x-\pi}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{a\ \sin x+x+ax^2},\quad (a\in \mathbb{R})$

$\lim_{x\to 1}(x-1)\left[\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]^2$

1

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni.

e^{2x+3} $\qquad$ $\arcsin\ e^x$ $\qquad$ 2^{3x}

$\ln(\ln x)$	$\lg_x e$	$\ln(\sin x)$
x^{3x}	$x^{\ln x}$	$(\sin x)^{\cos x}$
$\arcsin(3x^2-7)$	$\dfrac{\sin x}{\arcsin x}$	$\arctan \dfrac{1}{x}$
e^{-x}	e^{x^2}	$\sin(\arcsin x)^2$
e^{2x}	$e^{(2^x)}$	$e^{-x^2/x}$
$2^{(x^2)}$	$e^{\arctan x}$	$x^{(x^x)}$
$(\ln x)^x$	$\ln(\sin x)$	$x^{1/x}$
$(\sin x)^n$	$\cos\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	$\sin(x^n)$
$\ln(x^2+2x)$.		

-12-

[1]

Si consideri la funzione

$$f(y) = y \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) - \ln|y-1|$$

·**1** Determinare il campo di definizione I di f

·**2** Stabilire dove f è derivabile e calcolare la sua derivata.

·**3** Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f giustificando brevemente le affermazioni.

·**4** Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f' giustificando brevemente le affermazioni.

·**5** Disegnare il grafico di f precisando crescenza, decrescenza, convessità e comportamento della retta tangente agli estremi del campo di definizione

-13-

1

Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = kx^2 + x \ln x$$

·1 Calcolare $f_k'(x)$ e di $f_k''(x)$

·2 Disegnare il grafico di $f_2'(x)$ e di $f_{-1/4}'(x)$

·3 Disegnare il grafico di $f_2(x)$ e di $f_{-1/4}(x)$

·4 Disegnare il grafico di $f_k'(x)$

·5 Disegnare il grafico di $f_k^(x)$

1

·1 Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$ tale che

$$f'(x) = \sin(f(x)) \qquad f(0) = \frac{\pi}{2}$$

OPPURE Sia $f(x) = 2\arctan(e^x)$

·2 **PER IL CASO (1)** Derivare entrambi i membri della (1) e ricavare f'' in funzione di f ed f' ed f''' in funzione di f f' ed f''
PER IL CASO (2) Calcolare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

·3 Calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ e scrivere il polinomio di Taylor P_2 ed il polinomio di Taylor P_3 di f centrato in 0 di grado 2 e 3, rispettivamente.

·4 Disegnare il grafico di P_2 e di P_3 per $|x| \leq 1$

·5 **SCONSIGLIATA PER IL CASO (2)** Provare che $|f'(x)| \leq 1$ $|f''(x)| \leq 1$ $|f'''(x)| \leq 2$

·6 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$ stimare il resto di Lagrange relativo al polinomio di Taylor di grado 2 in funzione di x

·7 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, disegnare un maggiorante ed un minorante di f per $|x| \leq 1$

·8 Supponendo verificato che $|f'''(x)| \leq 2$, determinare un maggiorante dell'errore commesso sostituendo f con P_2 per $|x| \leq 1/2$.

·9 Trovare, se possibile, a in modo che $f(x) - ax - \frac{\pi}{2}$ sia infinitesima in 0 di ordine superiore al secondo.

-14-

1

Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

e la partizione

$$P_n = \left\{ x^{\frac{k}{n}} \quad : \quad k = 0..n \right\}$$

·1 Disegnare il grafico di f

·2 Calcolare le somme superiori $U(f, P_n)$ di f rispetto alla partizione P_n

$U(f, P_n) =$

Si consideri la partizione

$$Q_n = \left\{ x^{\frac{k}{2^n}} \quad : \quad k = 0..2^n \right\}$$

·3 Dimostrare che $U(f, Q_n)$ è una estratta decrescente di $U(f, P_n)$

·4 calcolare

$$\int_1^x f(t)dt =$$

1

Si consideri $f(x) = \frac{1}{x}$ e la partizione definita da

$$P_n = \{(\sqrt[n]{2})^h \ : h = 0..n\}$$

·1 Determinare le somme superiori di f su [1,2].

·2 Determinare le somme inferiori di f su [1,2].

·3 Calcolare un'approssimazione di

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

·4 Stimare l'errore che si commette, quando si considera l'approssimazione trovata in luogo di

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

1

·1 Sia

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} t^k$$

Verificare che

$$S_n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

·2 Verificare che

$$\sum_{k=0}^{n} e^{tk} = \frac{1 - e^{(n+1)t}}{-e^t}$$

Sia $f(t) = e^t$ e sia P_n^x la partizione dell'intervallo $[0, x]$ ottenuta suddividendolo in n parti uguali.

·3 Calcolare le somme superiori U_n di f sull'intervallo $[0, x]$ relativamente alla partizione P_n^x

·4 Calcolare le somme inferiori L_n di f sull'intervallo $[0, x]$ relativamente alla partizione P_n^x

·5 Calcolare le somme di Riemann R_n di f sull'intervallo $[0, x]$ relativamente alla partizione P_n^x e alla scelta S che considera in ogni intervallo il punto medio

·6 Calcolare, se esiste

$$\lim_n U_n$$

·7 Calcolare, se esiste

$$\lim_n L_n$$

·8 Calcolare, se esiste

$$\lim_n R_n$$

·9 Dimostrare che

$$\lim_n U_n = \lim_n L_n = \lim_n R_n = \int_0^x e^t dt$$

·10 Dimostrare che $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $[1, +\infty)$

-15-

1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{t^3+1} dt$$

·1 Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ f è definita.

·2 Studiare crescenza e decrescenza di f e tracciare un grafico che tenga conto delle indicazioni ottenute.

·3 Precisare il comportamento di f agli estremi del campo di definizione, calcolando eventuali asintoti.

·4 Studiare la convessità e la concavità di f.

·5 Disegnare il grafico di f tenendo conto di tutti gli elementi trovati.

1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_{\sin x}^{+\infty} \frac{\ln(t-1)}{t^2} dt$$

·1 Determinare il campo di definizione della funzione assegnata

·2 Studiare il segno di f

·3 Studiare la crescenza di f

·4 Calcolare $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

·5 Studiare la derivabilità di f e disegnarne il grafico.

1

Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ (x-1)^3 - 1 & 0 < x < 3 \\ \dfrac{1}{x^2} & x > 3 \end{cases}$$

·1 Disegnare il grafico di f.

·2 Disegnare il grafico di f'

·3 Disegnare il grafico di

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

·4 Trovare tutte le primitive di f

·5 Stabilire se f è monotona e se f è invertibile su $\mathbb{R}$.

1

Calcolare i seguenti integrali

·1 $_2$ $\int_0^2 \frac{dt}{\sin(t)}$

·2 $_1$ $\int_0^x \frac{dt}{t(t-2)}$

·3 $_1$ $\int_0^x \arctan(s)ds$

·4 $_2$ $\int_0^x \frac{ds}{s^2+4s+5}$

·5 $_2$ $\int_0^{+\infty} e^s \sin(2s)ds$

·6 $_1$ $\int_1^x \frac{1}{s}\sin(\ln(s))ds$

Sia

$$(f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq -1 \\ x & -1 < x \leq 0 \\ -x & 0 < x \leq 1 \\ \arctan(1/x) & x > 1 \end{cases}$$

·7 $_1$ Disegnare il grafico di f

·8 $_3$ Disegnare il grafico di una primitiva di f

·9 $_3$ Disegnare il grafico di una funzione continua, definita su $\mathbb{R}$, che sia primitiva di f sull'insieme in cui f ammette primitiva.

·10 $_2$ Determinare tutte le primitive di F

Si consideri

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^2+\frac{1}{|x|}} \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{|t-1|}}dt$$

·11 $_3$ Determinare il campo di definizione di F

·12 $_3$ Stabilire dove f è derivabile e calcolarne la derivata.

·13 $_3$ Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

·14 $_3$ Calcolare $\lim_{x\to-\infty} F(x)$

-16-

[1]

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = |x|\sqrt{y(x)}$$

·**1** Determinare, al variare di (x_0, y_0), se esiste soluzione del problema di Cauchy ottenuto associando all'equazione data la condizione $y(x_0) = y_0$.

·**2** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(1) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

·**3** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(-1) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

·**4** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

-17-

1

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y''(x) = |x|$$

·1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

·2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa

·3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa tali che $y(0) = y'(0) = y''' = 0$

·4 Stabilire se le soluzioni dell'equazione omogenea tali che $y(0) = 0$ formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

-18-

[1]

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - 3y(t) + t \\ \dot{y}(t) = 2x(t) + 4y(t) + e^{-t} \end{cases}$$

·1 Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato

·2 Determinare l'integrale generale del sistema completo

·3 Determinare l'integrale generale del sistema completo tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

·4 Determinare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema assegnato.