Disequazioni e proprietà degli insiemi

1.1- *ese1. 1-*
Risolvere le seguenti disequazioni:

$(x+1)(x-2)<0$

$(x+5)(x-5)\geq 0$

$\dfrac{x+2}{x-3}>0$

$\dfrac{x-2}{x+3}>0$

$\dfrac{x+3}{x-2}<1$

$\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}>0$

$\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+7}<0$

$x^2(x-1)\geq 0$

$x(x-7)^2<0$

$(x-5)^4(x+10)\leq 0$

$(4x+7)^{10}(2x+8)<0$

$3x^2+5x+2>0$

$x^2+4x+4\leq 0$

$\sqrt{x+|x|}\geq 3-x$

$\left|\dfrac{x}{x-1}\right|<2+x$

$\sqrt{x^2-4}\leq 1-x$

$x^2+|tx|\geq 0$

$x+\sqrt{t(x)}\geq t$

$|2t-x|>\dfrac{1}{x}$

$tx^2-\sqrt{|t|x}\leq t,\quad t\in\mathbb{R}$

$|x^2+4|\geq x$

$-x^2-4x-5>0$

$|x|<x$

$|x+5|<|x+1|$

$\|x+4\|<1$

$|x+2|>|x-1|$

$\dfrac{-x^2+4}{(1-x)(x^2-2x+3)}<0$

$\dfrac{-x^2+9}{(1-x)(x^2-2x-3)}<0$

$\dfrac{3-x}{|x+1|}\leq 2x$

$\dfrac{|x+1|(x-2)}{x+3}>x$

$\left|\dfrac{3x-2}{x+3}\right|<0$

$1-|x|\leq\sqrt{x}$

$1-|x|<\sqrt{x^2}$

$|1-|x||\geq 1$

$2\sqrt{x+1}+x<x+7$

$\sqrt{x^2-8x+25}>-x+9$

$\sqrt[7]{x^2-2x}\leq x$

$x+|x|\geq 2$

$\dfrac{3x+1}{x-1}<\dfrac{2(x+1)}{x-2}$

$|x|>x$

$(a^2+a+3)x^2+2ax+1\leq 0,\quad a\in\mathbb{R}.$

1.2- *ese1. 2-*
Determinare $a\in\mathbb{R}$ tale che risulti:

$$\{x\in\mathbb{R}: ax+1<0\}\subset\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x+2>0\}.$$

1.3- *ese1. 3-*

Descrivere i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x - |x-1|| < 2\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : x\,\sqrt[3]{x} < 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 2x + 2} < x - 2\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 4 < 0\} \end{aligned}$$

Quali di essi risultano vuoti?

1.4- *ese1. 4-*
Siano

$$A_t = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + t < 0\} \qquad \text{e} \qquad B = \{y \in \mathbb{R} : y(y^2+1) < 0\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $A_t \subset B$?

1.5- *ese1. 5-*
Dati A, B, D sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ verificare che

$$A \backslash (B \backslash D) \subset (A \backslash B) \cup D$$

Se $D \subset A$ vale l'eguaglianza?

1.6- *ese1. 6-*
Quali dei seguenti insiemi risultano vuoti?

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq x\}; \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < \frac{1}{2}\}; \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 0\}; \\ D &= \{x \in \mathbb{R} : |x+4| \leq x + 3\}; \\ E &= \{x \in \mathbb{R} : \text{sen } x \geq 1\}; \\ F &= \{x \in \mathbb{R} : x < x^2\}. \end{aligned}$$

1.7- *ese1. 7-*
È vero che
$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, |b| \leq a \quad \forall a > 0 \Rightarrow b = 0$?
e che
$a^2 + b^2 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \Rightarrow a = b = 0$?

1.8- *ese1. 8-*
In che relazione stanno gli insiemi:

$$\{x \in \mathbb{R} : kx^2 - 2kx - 2x + 4 \leq 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 4 + k > 0\}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$?

1.9- *ese1. 9-*

Siano

$$\begin{aligned} A_1 &= \{y \in \mathbb{R}, y = -x + 1 + \sqrt{x^2+1}, x \geq -1\}, \\ A_2 &= \{y \in \mathbb{R}, y \geq a, \quad \forall a \in A_1\}, \\ A_3 &= \{z \in \mathbb{R}, z \geq a, \quad \forall a \in A_1\}. \end{aligned}$$

a) $0 \in A_1$?

b)A_2 e A_3 sono diversi dal $\emptyset$?

c)A_2 e A_3 sono intervalli? sono limitati?

1.10- *ese1. 10*-
Stesso problema di prima per

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\sqrt{x + |x|}; x \in \mathbb{R}\}, \\ C_1 &= \{-x + \sqrt{x}, x \geq 0\}. \end{aligned}$$

1.11- *ese1. 11*-
Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{ll}
5^{2x} + 5^x - 5 > 0 & 2\sin^2 x - \cos x - 1 > 0 \\
\sin^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x - 2 > 0 & a^x \geq 2 \\
\log_{10}(\dfrac{1}{3} - x) \geq 0 & \cos^2 x \sin(2x) > 0 \\
|x^2 + 1| \geq \sin^2 x & \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} > 0 \\
\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{-3x+1}} < \sqrt[6]{|-3x+1|} & \sqrt[5]{x^2 - 2x} \leq |x| \\
\left|\dfrac{\cos 2x}{\sin x}\right| < 1 & \dfrac{(2x^8 + 6x + 1)(x-1)}{\sqrt{x-1}|x^2 + 5x + 50|} \leq 0 \\
a^x > a \quad (a > 1) & 10^{\frac{1}{x}} \geq 100; \\
\sqrt{\lg(x^2 - 1)} \leq \lg \dfrac{1}{x^2+1} & (\sin x)(\cos x) \leq 0 \\
\sqrt{\operatorname{tg} x} \geq \sqrt{|x|} & \arcsin \dfrac{1}{x^2+1} \geq \arccos \dfrac{|x|}{x^2+1} \\
\operatorname{tg}(\cos x) > 5 & |\arcsin(2^x - 1)| \leq \dfrac{\pi}{4} \\
\dfrac{\cos x}{|2\sin x|} \geq 1 & \sqrt[3]{\lg_2(1 - x^2)} \leq \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}.
\end{array}$$

1.12- *ese1. 13*-
Siano

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x - |x+1|| < 2\} \\ B_k &= \{x \in \mathbb{R} : \ln(-x) < k\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\ C &= \{k \in \mathbb{R} : B_k \subset A\} \end{aligned}$$

è vero che: $C \neq \emptyset$?, $0 \in C$?, C è un intervallo?

1.13- *ese1. 14*-
Siano

$$A_k = \{x \in \mathbb{R} : e^x \geq k\}, k \in \mathbb{R},$$
$$B = \{x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], \text{tg } x \geq 0\}.$$

Si chiede se $k < 5$ o $k \leq 1$ per è condizione necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente affinché

$$B \subset A_k$$

.

1.14- *ese1. 15*-
Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \ln\,(7x^2 - 22x + 19) \leq 2 \\ \qquad \sqrt{\dfrac{1-\cos\,2x}{2}} \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x^2-1)\cos\,x \leq 0 \\ \qquad \lg\,(2x) \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{2x-7} \leq 2 \\ 7x - 3 \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + 6x \leq 9 \\ \dfrac{x-7}{2x} > x^2 + 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} < 2x \\ \dfrac{7x-3}{4} \leq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{6x^2} \leq 1 \\ \sqrt{x^2+x} > 0 \end{cases}$$

1.15- *ese1. 16*-
Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sono vere o false le seguenti affermazioni, e perché?

$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$;
$a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$;
$|a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$;
$a + c > b + c \;\; \forall c > 0$;
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}$ tale che $n \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > p^2\}$;
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $x = \sqrt[2m]{x^{2m}}$

.

1.16- *ese1. 21*-

Sia $a \in \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, I \neq \emptyset,\ a = \inf I$ è vero che $a+1$ è un maggiorante di I?

1.17- *ese1. 22-*
È vero che
$$\inf\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0, \} = \sup\{x \in \mathbb{R} : \lg_{10}\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) < 0\} \ ?$$

1.18- *ese1. 23-*
Siano
$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : -x - 1 + \sqrt{x^2+1} \geq 0,\ x \geq -1\}, \\ B &= \{y \in \mathbb{R} : y \leq a,\ \forall a \in A\}, \\ C &= \{z \in \mathbb{R} : z \geq a,\ \forall a \in A\}. \end{aligned}$$

Calcolare, se esistono,

$\sup A, \inf A, \max A, \min A,$
$\sup B, \inf B, \max B, \min B,$
$\inf C, \sup C, \min C, \max C$

1.19- *ese1. 45-*
Si considerino le proposizioni
a) $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0$ tale che $|\mathrm{sen}\ x| < \epsilon\ \forall x$ tale che $|x| < \delta$.
b) $\forall \epsilon > 0 \ \ \nexists\, \delta > 0$ tale che $|\mathrm{sen}\ x| < \delta$ È vero che b) è la negazione di a) ?
In caso negativo scrivere le negazioni di a) e b).

1.20- *ese6. 2-*
Risolvere le seguenti disequazioni
$$\begin{array}{ll} \sqrt{x+1} \geq -e^{-x} - \pi & \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+2} \\ \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x+2} & \dfrac{x+1}{x-a} \leq 1 \end{array}$$

1.21- *ese6. 3-*
Si consideri l'insieme
$$A = \left\{x = \frac{30^n n!}{(2n)!} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
Determinare, se esistono, $\sup A = \ldots\ldots$ $\inf A = \ldots\ldots$ $\max A = \ldots\ldots$ $\min A = \ldots\ldots$

1.22- *ese6. 70-*
Si considerino le funzioni
$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \qquad\qquad g(x) = x + 1$$
Risolvere le seguenti disequazioni

□
$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$$

☐

$$\sqrt{|f(x)|} \geq \sqrt{g(x)}$$

☐

$$\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \geq 1$$

☐

$$\sqrt{\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|} \geq 1$$

1.23- *ese7. 29-*

☐ Disegnare l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x+1) + x \geq 0\}$

☐ Disegnare l'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x+1) + x \geq 0, y \geq x\}$

☐ Disegnare l'insieme $C_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ y \in [a, b],\ x \leq y\}$

☐ Determinare tutti gli $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $C_{a,b} \subset B$

Si consideri $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3x+3}$

☐

Disegnare l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, f(x) \geq f(y)\}$

☐ Trovare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ $x, y \in [a, b],\ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(y)$

1.24- *ese7. 30-*

☐ Trovare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ $x, y \in [a, b],\ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Determinare $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$

☐ Disegnare il grafico di $g(x) = f(x-1)$

☐ Determinare $D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq x\}$ e disegnare i grafici di x e $g(x)$ sullo stesso piano cartesiano precisandone le mutue posizioni.

☐ Provare che la successione definita da $\begin{cases} a_n = g(a_{n-1}) \\ a_0 = 1 \end{cases}$ è decrescente, inferiormente limitata e trovarne il limite.

L_{A1} a_n è inferiormente limitata infatti:

L_{B1} a_n è decrescente infatti:

L_{C1} $\lim a_n =$ infatti:

Proprietà elementari delle funzioni

2.1- *ese1. 12*-
Provare che $2^x > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2.2- *ese1. 17*-
Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = x^2 + 1;\ \ h : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ \ h(x) = \frac{1}{x}$. Calcolare $g(2)$, $g(\frac{1}{2})$, $\frac{1}{g(2)}$, $g(h(2))$, $h(g(2))$, $g(1 + x + h(2))\quad h(g(h(2)))$

2.3- *ese1. 18*-
Scrivere le seguenti funzioni come composte delle funzioni elementari ($x \to \sqrt{x}, x \to \frac{1}{x}, x \to x^2, x \to x+a$)

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \sqrt{x^2} & f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \\
f(x) = \dfrac{1}{x-1} & f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4} \\
f(x) = 3x^2 - 4x + 4 & f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}
\end{array}
$$

.

2.4- *ese1. 24*-
Stabilire l'insieme immagine e studiare l'iniettività delle seguenti funzioni:

$$
\begin{array}{ll}
f\,(x) = 2x, & x \in [-5, 5], \\
f\,(x) = 2x + 3, & x \in [-5, 5], \\
f\,(x) = x, & x \in (-3, 3)\,, \\
f\,(x) = x^3, & x \in [-2, 2], \\
f\,(x) = 2x^3, & \\
f\,(x) = \dfrac{x}{|x|}, & x \in [5, 7]
\end{array}
$$

$$
f\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 1 \le x \le 3 \\ 2x & 0 \le x < 1 \end{cases}
$$
$$
f\,(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \in [0, 1) \\ \sqrt{x} & x \in [1, 2]. \end{cases}
$$

2.5- *ese1. 44*-
Si considerino le proposizioni
a) $: \exists\ \epsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0\ \exists\ x$ con $|x| < \delta$ tale che $|\text{sen}\ x| > \epsilon$
b) $: \forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $|\sin x| \le \epsilon \forall x$ con $|x| < \delta$
È vero che a) è condizione sufficiente affinchè non si verifichi b)

2.6- *ese1. 73*-
Dare tre esempi di funzioni crescenti e tre esempi di funzioni decrescenti.

2.7- *ese1. 87*-

Risolvere i seguenti problemi individuandone con precisione i dati caratteristici:

a) Un rettangolo ha area di 10 m^2. Esprimere il perimetro del rettangolo come funzione della lunghezza di un suo lato.
b) Una scatola rettangolare ha un volume di 1 m^3 e lunghezza doppia della larghezza. Esprimere la sua area superficiale come funzione della sua altezza.
c) Un rettangolo è inscritto in un semicerchio di raggio 1 ed ha la base sul diametro. Esprimere l'area del rettangolo come funzione della lunghezza della base.
d) Un cilindro circolare retto è inscritto in una sfera di raggio 12 m. Esprimere il volume e l'area superficiale del cilindro come funzione del raggio di base.

2.8- *ese4. 15-*

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln \left| |x^2 - 2x| - 1 \right|$$

□ f è definita in $I =$......

□ f è continua in $J =$......

□ f è derivabile in $K =$......

□ f è crescente in $L =$......

□ f è invertibile in $[0, 2]$? ◯NO ◯SI e la sua inversa è......

□ f è invertibile in $[0, 1]$? ◯NO ◯SI e la sua inversa è......

□ f è invertibile in $[3, +\infty]$? ◯NO ◯SI e la sua inversa è......

□ f è invertibile in $[-1, 1]$? ◯NO ◯SI e la sua inversa è......

2.9- *ese4. 19-*

Sia

$$y(x) = \sqrt{1 - \log_2(\cos^2 x)}$$

L'insieme di definizione di y è

□ $I =$...... Il rango di y è ......

□ $R_y =$...... infatti

□ y è periodica di periodo
$\frac{\pi}{2}$ ◯ π ◯ 2π ◯ 4π ◯ non è periodica ◯

□ il grafico di y è simmetrico rispetto all'asse delle x ◯ all'asse delle y ◯ all'origine ◯

□ y è monotona nell'insieme ...... è ivi crescente ◯ è ivi decrescente ◯ infatti ......
Dopo aver verificato se y è invertibile in $\left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right]$ determinare

□ il dominio dell'inversa

□ il rango dell'inversa

□ se l'inversa è monotona

☐ una espressione dell'inversa in termini di funzioni elementari
$y^{-1}(x) = \ldots\ldots$

☐ Determinare l'insieme delle soluzioni in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ della disequazione

$$y(x) \leq \sqrt{\log_2(\tan x)}$$

☐ Dimostrare che

$$\sup\left\{\frac{x^2-2x+3}{1-x}\right\} = +\infty$$

☐ Verificare usando la definizione di limite che

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 2x + 1 = 4$$

2.10- *ese5. 32*-
Eprimere in funzione del lato x

☐ L'area $A(x)$ dell'esagono regolare.

☐ L'area $A(x)$ dell'poligono regolare di n lati.

2.11- *ese5. 33*-
Si consideri il parallelepipedo in cui l'altezza h, la larghezza w e la lunghezza ℓ soddisfano le seguenti relazioni

$$w = 2h \qquad \ell = 3w$$

☐ Esprimere mediante una funzione il volume del parallelepipedo

2.12- *ese6. 20*-
Tra tutti i cilindri aventi superficie totale uguale ad 1, determinare quello di volume massimo.

2.13- *ese6. 30*-
Siano dati la funzione f e l'insieme di valori V come segue.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{3x+1} \\ V = \{-1, 2/3, 2, 0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x}{5x+3} \\ V = \{-7, 4/5, 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x}{7x+2} \\ V = \{-5, -1, 3/7\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{5x+2} \\ V = \{-1, 2/5, 3/7\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{7x}{3x+5} \\ V = \{1, 7/3, 15/7, 0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{x}{4x+3} \\ V = \{-1/4, 2/3, 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{7x}{-x+2} \\ V = \{-7, -7/2, -2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{5x}{2x+6} \\ V = \{5/4, 5/2, 3\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x}{3-2x} \\ V = \{-3, -2, -3/4\} \end{cases}$$

Per ogni coppia di dati trovare l'insieme di definizione Idi f.
Individuare $f(I) \cap V$.
f è strettamente crescente o decrescente in I?
f è iniettiva in I?
La restrizione di f a $[0, +\infty)$ è strettamente crescente?
La restrizione di f a $[0, +\infty)$ è strettamente decrescente?

2.14- *ese6. 31*-
Siano date le funzioni f e g e l'insieme T essendo

$$g(x) = 5^{h(x)}, \qquad h(x) = \log_5\left(1 + \frac{1}{\log_5 \sqrt[2]{x^2}}\right) \qquad T = [-1, 1]$$

$$g(x) = 3^{h(x)} - 1, \qquad h(x) = \log_3\left(1 + \frac{1}{\log_3 \sqrt[4]{x^4}}\right) \qquad T = [0, 1]$$

$$g(x) = 2^{h(x)} - 2, \qquad h(x) = \log_2\left(1 + \frac{1}{\log_2 \sqrt[6]{x^6}}\right) \qquad T = [-1, 1]$$

$$g(x) = 4^{h(x)} + 1, \qquad h(x) = \log_4\left(1 + \frac{1}{\log_4 \sqrt[4]{x^4}}\right) \qquad T = [0, 1]$$

$$g(x) = 7^{h(x)} - 3, \qquad h(x) = \log_7\left(1 + \frac{1}{\log_7 \sqrt[4]{x^4}}\right) \qquad T = [-1, 1]$$

$$g(x) = 8^{h(x)} + 3, \qquad h(x) = \log_8\left(1 + \frac{1}{\log_8 \sqrt[2]{x^6}}\right) \qquad T = [0, 1]$$

$$g(x) = 6^{h(x)} + 2, \qquad h(x) = \log_6\left(1 + \frac{1}{\log_6 \sqrt[2]{x^2}}\right) \qquad T = [-1, 0]$$

$$g(x) = 3^{h(x)} + 1/3, \qquad h(x) = \log_3\left(1/6 + \frac{1}{\log_3 x^2}\right) \qquad T = [-1, 0]$$

$$g(x) = -2^{h(x)}, \qquad h(x) = \log_2\left(1 + \frac{2}{\log_2 x^2}\right) \qquad T = [-1, 0]$$

Determinare l'insieme di definizione J di g
g è crescente in$J$?
g 'e decrescente in J?
Determinare un intervallo (se esiste) in cui g è strettamente crescente
Determinare un intervallo (se esiste) in cui g è strettamente decrescente
Posto $A = T \cap J$, risulta

$$sup\{g(x) : \ x \in A\} =$$

$$inf\{g(x) : \ x \in A\} =$$

Esiste $max\{g(x) : \in A\}$? Esiste $min\{g(x) : \in A\}$?

2.15- *ese6. 32*-
Data la funzione p e $\ell \in \mathbb{R}$ risulta
$$\lim_{x \to a} p(x) = \ell.$$
essendo
$$p(x) = x^2 + x + 1 \qquad \ell = 3 \qquad a = 1$$
$$p(x) = x^2 + x + 1 \qquad \ell = 1 \qquad a = -$$
$$p(x) = x^2 - x + 1 \qquad \ell = 1 \qquad a = 1$$
$$p(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad \ell = 4 \qquad a = -1$$
$$p(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad \ell = 1 \qquad a = 2$$
$$p(x) = x^2 + x + 1 \qquad \ell = 13 \qquad a = 3$$
$$p(x) = x^2 + x + 1 \qquad \ell = 3 \qquad a = -2$$
$$p(x) = x^2 - x + 1 \qquad \ell = 7 \qquad a = 3$$
$$p(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad \ell = 9 \qquad a = 4$$
Per ogni $\epsilon > 0$ determinare un opportuno $\delta = \delta_\epsilon$ per il quale sia
$$|p(x) - \ell| < \epsilon$$
purché $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

2.16- *ese6. 35*-
Data la funzione
$$f(x) = \alpha x/4 - \log(1 + e^x)$$
$$f(x) = \log(1 + e^x) - \alpha x/2$$
$$f(x) = \log(1 + e^x) - \alpha x/4$$
$$f(x) = \alpha x/2 - \log(1 + e^x)$$
determinare l'insieme di definizione I di f.
Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la f è invertibile in I?
Per tali valori scrivere una espressione dell'inversa.

2.17- *ese6. 71*-
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$$

☐ Determinare il campo di definizione D_f di f.

☐ Determinare dove f è crescente.

☐ Disegnare il grafico di f e di $|f|$.

☐ Verificare, usando la definizione di limite, che
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

☐ Determinare $\sup_{x \in D_f} f(x)$ $\inf_{x \in D_f} f(x)$

Limiti

3.1- *ese1. 46*-
Calcolare i seguenti limiti, se esistono:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} \quad (n \in \mathbf{Z})$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \sin^2 \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to k\frac{\pi}{2}} \mathrm{E}[\cos x], \quad k \in \mathbf{Z}, \quad k \neq 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{x-|x+1|}{x}\right|, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 7} \left\{\mathrm{E}[x] + (x-\mathrm{E}[x])^2\right\}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x \ \sin x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+\sqrt{x^2 \tan x}}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left[x^8 + |x^7-1| + 1\right]^{1+x^2-|x|^2} \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-kx}\right), \ k \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{k\to -\infty} \left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-kx}\right), \ x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^k \sin^k x}, \ k \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m,n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x-\mathrm{E}[x]}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}, \quad (a > b)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left\{\sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) - \sin\sqrt{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - \frac{5}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+\sin x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2+\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{cotg } x}{2x-\pi}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{a\ \sin x + x + ax^2}, \quad (a\in\mathbb{R})$$
$$\lim_{x\to 1} (x-1)\left[\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]^2$$

3.2- *ese1. 47-*
Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.
Siano
$$A = \{x\in\mathbb{R} : f(x) > 2\},$$
$$B = \{x\in\mathbb{R} : |f(x)| > 2\}$$
$$C = \{x\in\mathbb{R} : |f(x)| < 2\}.$$
A, B, C sono limitati?

3.3- *ese1. 48-*
Sia $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ con $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.
È vero che:
a) $\exists\ n\in\mathbb{N}$ tale che $A_n = \{x\in(0,1) : f(x) > n\}$ sia vuoto?
b) $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ contiene un intorno destro di 0?

3.4- *ese1. 49-*
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty.$$
È vero che $f(x) = 0$ per qualche $x\in(a,b)$?

3.5- *ese1. 50-*
Supponiamo che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)$$
esistano finiti, che
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) \le \lim_{x\to x_0} f(x)$$
e che
$$f(x) > 10^{-2} \qquad \text{se} \qquad |x-x_0| < 10^{-10}$$
È vero che
$$\lim_{x\to x_0} g(x) \le 1?$$

3.6- *ese1. 51-*
Siano $f, g:(0,2)\to\mathbb{R}$ tali che
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ell = \lim_{x\to 1} g(x).$$
Sia $h(x) = f(x)\wedge g(x)$, per $0 < x < 2$.
È vero che
$$\lim_{x\to 1} h(x) = \ell?$$

3.7- *ese1. 52*-
Costruire, se possibile, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 1^-} f(x)\,; \ \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \ \ \forall x_0 \in (0,1)$$

3.8- *ese1. 53*-
Sia $f(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x}}$,
a) Dove è definita f?
b) f è superiormente limitata?
c) f è inferiormente limitata?
d) la restrizione di f a $[3,+\infty)$ è limitata?
e) f è monotona?
f) $\exists \lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$?
g) $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)$?, $\exists \lim_{x\to -\infty} f(x)$?

3.9- *ese1. 54*-
Sia $f[0,1] \to \mathbb{R}$ con

$$\lim_{n\to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$$

È vero che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0?$$

3.10- *ese1. 55*-
Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ crescente tale che

$$\lim_{n\to +\infty} \quad f(n) = \ell \ \ (n \in \mathbb{N})\,.$$

È vero che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell?$$

3.11- *ese1. 56*-
Sia V intorno di 0 e siano $f, g : V \to \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to x_0} \qquad f(x) = 0, \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

È vero che:
a) $\exists\, \bar{x} \in V : f(\bar{x}) < g(\bar{x})$;
b) $f(x) < g(x)$ in qualche intorno di 0;
c) $f(0) < g(0)$?

3.12- *ese1. 57*-

Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}};$$

$$\lim_{x\to0^+} 1-\cos x/x^k \sin(kx)\,,\ k\in\mathbb{R}.$$

3.13- *ese1. 59*-
Sia $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to1} f(x)=\ell$$

È vero che

$$\lim_{t\to1} f\left(\frac{1}{t}\right)=\ell?$$

3.14- *ese1. 62*-
Siano $f:U\to V,\quad g:V\to W$, $U,\ V,\ W$ intervalli di $\mathbb{R}$, $x_0\in U,\quad y_0\in V,$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0\ \ \lim_{y\to y_0} g(y)=z_0,$$

Sia inoltre verificato che

$$\exists\,\delta>0:\ \{x:f(x)=y_0\}\cap(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset\{x_0\}.$$

Provare che

$$\lim_{x\to x_0}\ g(f(x))=z_0$$

3.15- *ese1. 63*-
Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan\ 2x}{\sin\ x}\qquad\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\ x}{(\pi-2x)^2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\qquad\qquad \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos\ x}{\sin^2(\pi-x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\ x^3}{x^2}\qquad\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\ x-3\sin\ x+2}{\sin\ x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\ x+3\sin\ x}{x^2-2x}\qquad\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3\ x+1}{x^3-3x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin\ x}{x+1}\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\ x-3\sin\ x\cos\ x+x\cos^2\ x}{x^2\cos\ x-3x\cos\ x+x\cos^3\ x}\qquad\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\ x}{3+\sin\ x}\qquad\qquad \lim_{x\to0}\sin\left(\frac{\sin\ x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{\sin^2\ x}{x}\right)\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^3+1}-x\right)\qquad\qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\cot\ x\right)$$

$$\lim_{x\to0}x^2-\cot^2\ x\qquad\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}-\sin\ x}{\tan\ x\sqrt{\sin\ x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin\ x}{4x - \sin\ x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x - 5\sin\ x + x\cos\ x}{x^5}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 - 3x^2 + 4}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin\ (3x)}{\sin\ (2x)\sin(5x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{4\ \sin\ x - x - x^2}{\sin\ x - 2x}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3\ x}{\cos^2\ x - 1} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 3x^2 - 2x + 1}.$$

3.16- *ese1. 66-*
Trovare gli estremi superiore e inferiore, ed i limiti per $x \to \pm\infty$ di:

$$f(x) = |x|(x+1) \qquad f(x) = \mathrm{E}\left(\sin\ \frac{\pi}{2}x\right) \quad (0 \le x \le 2\pi)$$
$$f(x) = x + [x] \qquad f(x) = \sqrt{|x|}$$
$$f(x) = |\sin\ x| \qquad f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x+1|} \qquad f(x) = \sqrt{x-1}$$
$$f(x) = |\cos\ x| \qquad f(x) = |x|^3 \quad (-1 \le x \le 1).$$

3.17- *ese1. 67-*
Trovare delle funzioni (se possibile continue su $\mathbb{R}$) tali che:
a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$ e $f(2) = 0$;
b) $\lim_{x\to 2} f(x) = \nexists$ e $f(2) = 1$;
c) $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$;
d) $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$;
e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to -\infty} f(1) = 1$.

3.18- *ese1. 68-*
Trovare delle funzioni (se possibile continue su $\mathbb{R}$) tali che:
a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$; $\sup\ f(x) = 2 = -\inf\ f(x)$;
b) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -1$;
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty = -\lim_{x\to 1^-} f(x)$;
c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 5$; $f(1) = 4$.

3.19- *ese1. 74-*
Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{\mathbb{R}} f = 2 = -\inf_{\mathbb{R}} f$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)\ \nexists$$

3.20- *ese1. 79-*

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\right)$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\ 2x}{\sin\ x+1}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2-\cos\ x}$$

3.21- *ese1. 86*-
Sia

$$f(x) = \frac{\sin\ (1+|x-1|)}{1+\tan\ x}$$

Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} f(x).$$

Determinare il campo di definizione di f.

3.22- *ese1. 123*-
Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\ (1+\arcsin\ x)}{x^2 - \frac{1}{\sin\ x}}\right)\left(\frac{1}{\tan x - \sin x}\right)^{-1}.$$

3.23- *ese1. 125*-
Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\ (1+\arcsin\ x)}{x^2} - \frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{1}{\tan\ x - \sin x}\right)^{-1}.$$

3.24- *ese1. 165*-
Calcolare, se esistono:

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\tan\ ^3 x\right)^{1/|x|^3}$$
$$\lim_{x\to 0} x \sin\ \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \left\{3^x - (\ln 5)^{x+2}\right\}$$
$$\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^x$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \left\{\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} - \sqrt{2}\right\}$$
$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2}\frac{1}{2x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\ x}{\sqrt{1-x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sin\ 1/x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{1+3^x}.$$

3.25- *ese1. 166*-
Calcolare, se esistono:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\ln x)}{\ln x}$$
$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x-x}$$
$$\lim_{x\to0^+}(1-\cos x^{\sin x})$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\ln x^2}{e^{1/x^2}}$$
$$\lim_{x\to0}\cot^2 x\cdot\ln(1+x)$$
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$
$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{(x^2-1)^2}-\frac{1}{\ln x}\right\}$$
$$\lim_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{1/\tan x}$$
$$\lim_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}.$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\ln\left(x^2-1\right)-\ln\left(x^2-x+1\right)\right\}$$
$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin\ (2x)-1}{2\sin x-\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$
$$\lim_{x\to a^+}\frac{\ln(e^x-e^a)}{\ln(x-a)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}2^x\sin\frac{1}{2^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\ln x$$
$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\tan x}$$
$$\lim_{x\to0^+}x^{1/\ln(3x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}$$

3.26- *ese1. 172*-
Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ \sin x}-1}{x^4}-\frac{\sin x}{x^3}+\frac{\ln|x|}{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{(\tan x)^5}}-x^{40}e^{-x}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{(\arcsin x)^2/\sqrt{1-\cos x}}-1}{x\tan x}-(1+\sin x)^{|x|^{3/2}}\right),$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin x}+x^{-1/2}-\frac{1}{\sqrt[6]{\arcsin^2 x/2}}-\sqrt{\frac{\ln\ x^2}{x^2}}\right).$$

3.27- *ese1. 174*-
Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}+x}{xe^x+\ln x}$$
$$\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-\sin(a\pi/2x)}{\ln x-\ln a}$$

3.28- *ese1. 189*-
Calcolare se esistono,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-x}{x^4}-\frac{1}{6x^6}-\ln(1+x^2)}{\arctan|\sin x|}.$$

3.29- *ese6. 54*-
Verificare mediante la definizione di limite che

$$\lim_{x\to 1}x+\frac{1}{x}=2$$

Giustificare brevemente le affermazioni

Continuità

4.1- *ese1. 65*-
Sia

$$f(x)=\frac{x^2}{x^{2471}+x^{1327}+x^{250}-4}$$

f è definita per $x>0$? Perchè?

f è definita per $x > 2$? Perchè?

4.2- *ese1. 71-*
Trovare una funzione f definita su $[0,1]$ tale che

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad f(x) \neq 0 \;\text{ per } x \neq \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

4.3- *ese1. 72-*
Trovare delle funzioni f e g tali che:
a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = +\infty;$
b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x) = 0;$
c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1} f(x)g(x) = \pi.$

4.4- *ese1. 75-*
Trovare una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua in

$$[0,1]\backslash \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \right\}.$$

4.5- *ese1. 76-*
Trovare una funzione che ha una discontinuità nel punto $\frac{1}{2}$ rispettivamente:
a) eliminabile,
b) di 1^a specie,
c) di 2^aspecie
e che sia continua negli altri punti di $\mathbb{R}$.

4.6- *ese1. 77-*
Trovare f non continua in 1 e tale che $|f|$ sia continua in 1.

4.7- *ese1. 78-*
Trovare una f non continua in 1, ma continua a sinistra di 1.

4.8- *ese1. 80-*
Siano:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \; x \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{se } \; x \notin \mathbf{Z} \end{cases} \qquad g(x) = f(x) - [f(x)].$$

f è continua in ogni punto?
g è continua in ogni punto?

4.9- *ese1. 81-*
Determinare, se esistono, i valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \; \in \mathbb{R}$ che rendano continue su tutto il dominio le seguenti funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{se } \; x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } \; x = 0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{|x^2-1|} & \text{se } \ x\neq\pm1 \\ \delta & \text{se } \ x=\pm1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-3x-10}{2-x} & \text{se } \ x\neq 2 \\ \beta & \text{se } \ x=2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{\sqrt{x}} & \text{se } \ 0<x\leq 1 \\ \epsilon & \text{se } \ x=0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(3x)}{2\ \sin\ (12\ x)} & \text{se } \ 0<x<\frac{\pi}{12} \\ \gamma & \text{se } \ x=0 \end{cases}$$

4.10- *ese1. 82*-
Determinare una radice reale di x^3-x-1 con un errore inferiore a $\frac{1}{10}$.

4.11- *ese1. 83*-
Esistono zeri della funzione $x\in\mathbb{R}\to x-4\sin\ x\in\mathbb{R}$?

4.12- *ese1. 84*-
Sia:

$$f(x)=\begin{cases} a+\sin x \ \text{ se } \ x\leq\dfrac{1}{2}, \ a\in\mathbb{R} \\ \dfrac{1+x}{2-x} \ \text{ se } \ x>\dfrac{1}{2} \\ 3 \ \text{ se } \ x=2 \end{cases}.$$

Per quali valori di a, f è continua in $\frac{1}{2}$? Per quali valori di a, f è continua su $\mathbb{R}$?

4.13- *ese1. 85*-
Sia $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-2$. Provare che in $(-1,0)$ esiste uno ed un solo zero di f, calcolarlo a meno di 10^{-3}.

4.14- *ese1. 126*-
Dire se le radici reali del polinomio x^5+x^3+1 appartengono all'intervallo $(-\infty,0]$ oppure $[0,+\infty)$.

4.15- *ese1. 135*-
Si provi che:

$x^{1000}+ax+b$, ha al più due zeri reali;

$(x^4+7)^{17}=215$ ha al più due radici reali;

x^5-7x+a ha al più uno zero reale in $[-1,1]$.

4.16- *ese1. 162*-
Provare che

$$\ln x<x-1 \text{ se } x>1$$

e che

$$e^x\geq 1+x \text{ se } x\geq 0.$$

4.17- *ese1. 164*-
Sia $f(x) = e^x - kx + 1$.

a) Se $k < 0$ f si annulla almeno una volta?
b) Se $0 \leq k \leq e$ f si annulla almeno una volta?
c) Che cosa si può dire se $k > e$?

Successioni

5.1- *ese1. 19*-
Scrivere estremo inferiore e due minoranti distinti di

$$\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 + n \quad n \geq 1} \right\}$$

5.2- *ese1. 20*-
Calcolare

$$\inf_{x \geq 0} \frac{x}{x^2+1} \qquad \sup_{x<0} \frac{x}{x^2+1}$$
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1}$$

5.3- *ese1. 25*-
Sia b_n una successione non monotona, definitivamente non crescente e sia

$$M = \inf\{b_n, n \in N\} \in \mathbb{R}$$

È vero che $b_n \to M$? Perchè?

5.4- *ese1. 26*-
Provare che se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e ammette solo i valori 1 e 2, allora è definitivamente costante.

5.5- *ese1. 27*-
Se $n\ a_n \to 0$, cosa si può dire dell'eventuale limite di a_n?

5.6- *ese1. 28*-
Se $\lim_n a_n = \ell,\ 0 < \ell < 1,\ b_n$ è decrescente e converge a 1 è vero che $a_n b_n$ è necessariamente monotona e converge a ℓ?

5.7- *ese1. 29*-

Per ciascuna delle seguenti proposizioni dire se è o non è condizione sufficiente affinché $\lim_n b_n = k$:

a) b_n è monotona decrescente e k è un suo minorante;
b) b_n è limitata superiormente e inferiormente ed ammette k come minimo maggiorante;
c) b_n è monotona decrescente e k è il minimo maggiorante;
d) b_n è monotona decrescente e k è il massimo minorante.

5.8- *ese1. 30*-
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1+n}$ è crescente, decrescente, converge a ℓ, non è monotona?

5.9- *ese1. 31*-
Sia $a_n \to \ell$. È vero che: $\ell \leq \sup a_n$, $\ell \geq \sup a_n$, $\sup a_n = \ell$; la successione è limitata?

5.10- *ese1. 32*-
Sia $a_n \to a,\ b_n \to b,\ c_n = a_n \wedge b_n$ È vero che: $c_n \to a$, $c_n \to b$, c_n può non essere convergente, c_n può converegere ad $\ell \neq a, b$, c_n converge solo se $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0$?

5.11- *ese1. 33*-
Calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$
\begin{array}{ll}
(-1)^n \dfrac{2}{2n^2+\sqrt{n}} & \dfrac{\ln\ n}{n}, \\
\ln\ n - n & \dfrac{\text{sen}\ n}{n}, \\
e^n - (-1)^n \ln\ n & \sqrt[n]{n}, \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4} & \dfrac{n}{(n+1)^n}, \\
(-1)^n \dfrac{2-e^{-n}}{1+e^{-n}} & \sqrt{n^3}+1, \\
n-\sqrt{2n-1} & \sqrt{n^3}-1-10n, \\
(-1)^n \dfrac{n\ \text{sen}\ 1/n}{1+n} & (-1)^n \dfrac{n^n}{2^n-10}, \\
\dfrac{(-1)^n\, 2^n}{2^{n+2}+1} & (-1)^n \dfrac{n^2\,(1+\sin\ 1/n)}{1+n}, \\
\left(1+\dfrac{1}{n!}\right)^{n!} & (-1)^{n+1} \dfrac{2-e^{-n}}{1+e^{n^2}} \\
\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} & \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}, \\
\left(1+\dfrac{1}{\ln\ n}\right)^{\ln\ n} & \dfrac{n}{n^2+\sqrt{n}}, \\
(-1)^n \dfrac{3}{n+\sqrt{n}} & \dfrac{n+1}{2n^2-\sqrt{n}}, \\
\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} & \sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}, \\
\sqrt{(n-\alpha)\,(n-\beta)}-n & n^2\left(1-\dfrac{\cos\ 2a}{n}\right), \\
\dfrac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\ \frac{b}{n}} & \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n\left(1-\cos\ \frac{1}{n}\right)}, \\
n\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & n\ \ln\left(1+\text{sen}\dfrac{1}{n}\right), \\
\sqrt{\cos\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{2}} & \dfrac{5^{2n}+(1+1/n+2)^{n+2}}{\text{sen}\ n+4n},
\end{array}
$$

$\dfrac{n^3 - \cos x^n}{\operatorname{sen} x^n + n^3}$.

5.12- *ese1. 34*-
Esiste una successione convergente che non ha maggioranti?

5.13- *ese1. 35*-
Sia $a_n,\ a_n > 0,\ \dfrac{a_n + 1}{a_n} < \dfrac{1}{2}$ È vero che $a_n \to 0$?

5.14- *ese1. 36*-
Sia $a_n,\ a_n < 0,\ \dfrac{a_n + 1}{a_n} > 2$ È vero che $a_n \to -\infty$?

5.15- *ese1. 37*-
Trovare tre coppie di successioni tali che valga una delle seguenti condizioni $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 2$; $a_n - b_n \to 0$; $a_n - b_n \to k \in \mathbb{R}$; $a_n - b_n \to \infty$

5.16- *ese1. 38*-
Siano $a_n,\ b_n$ limitate, è vero che $a_n b_n$ è limitata?

5.17- *ese1. 39*-
Sia a_n limitata è vero che $\dfrac{1}{a_n}$ è limitata?

5.18- *ese1. 40*-
Siano $a_n,\ b_n$ tali che $a_n + b_n \to k \in \mathbb{R}, a_n \to h$.
È vero che esiste finito $\lim\limits_n b_n$?

5.19- *ese1. 41*-
Siano $a_n,\ b_n$ tali che $\lim\limits_n a_n = 1,\ b_n > \dfrac{1}{n}\ \forall n$
è vero che $a_n\ b_n \to 1$?

5.20- *ese1. 42*-
Sia a_n non crescente e $M = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che $a_n \to M$.

5.21- *ese1. 43*-
Sia a_n tale che $\sup a_n = -1 = -\inf a_n$. È vero che esiste sottosuccessione di a_n che converge a 0?

5.22- *ese1. 58*-
a) Provare che $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
b) Sia $a_{n+1} = \sin\ a_n$. Calcolare $\lim a_n$.

5.23- *ese1. 60*-

Sia a_n una successione tale che $\lim a_{2n} = 0 = \lim \ a_{2n+1}$.
Esiste $\lim a_n$ ed in caso affermativo, quanto vale?

5.24- *ese1. 61*-
Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad\qquad \lim_{n} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

5.25- *ese1. 64*-
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e crescente. Dimostrare che, se

$$a_n \in [0,1] \ \ \forall \ n$$

e se a_n non converge, allora $f(a_n)$ non converge.

5.26- *ese1. 69*-
Trovare una funzione f e due successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1.$$

5.27- *ese1. 70*-
È possibile trovare una funzione f tale che $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, e

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1?$$

5.28- *ese3. 22*-
Determinare i due valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che, posto $a_n = \lambda^n$ sia soddisfatta la relazione

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Detti λ_1 e λ_2 tali valori, provare che esistono α e β in modo che, posto

$$a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

risulti soddisfatta la precedente relazione ed inoltre si abbia

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 3.$$

Calcolare infine

$$\lim \frac{\log_2 a_n}{n}.$$

Giustificare ogni affermazione.

5.29- *ese3. 32*-

Si consideri la successione definita da

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad , \quad a_0 = 1/2.$$

- Provare che $0 < a_n < 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Trovare una formula di ricorrenza per le successioni

$$b_n = a_{2n} \quad \text{e} \quad c_n = a_{2n+1} \quad , \quad n \geq 0.$$

- Provare che b_n è crescente e che c_n è decrescente.
- Trovare i limiti di b_n, di c_n e di a_n, se esistono.
- Detta $a_n = p_n/q_n$, con $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, trovare una formula di ricorrenza che definisca p_n e q_n e calcolare i limiti di p_n e q_n, se esistono.

Giustificare ogni affermazione.

5.30- *ese4. 11-*
Si consideri la successione

$$a_n = \int_0^n (n - E(x))dx$$

☐ Stabilire se a_n è infinita ed in caso affermativo determinarne l'ordine di infinito.
◯a_nè infinita ed il suo ordine è ...... ◯$a_n$non è infinita

5.31- *ese4. 22-*
Si considerino le successioni definite da

$$\begin{cases} a_0 = k \\ a_{n+1} = \delta a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = \beta \\ b_{n+1} = \delta b_n + \varepsilon \end{cases}$$

ove $\delta \neq 1$

☐ Trovare per quali valori di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$ si ha $a_n = \mu\lambda^n$ $\lambda =$ $\mu =$

☐ Trovare per quali valori $\beta \in \mathbb{R}$ si ha $b_n = \beta$ per ogni n $\beta =$

5.32- *ese4. 23-*
Sia

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \delta c_n + \varepsilon \end{cases}$$

☐ Trovare per quali valori di $\beta, k \in \mathbb{R}$ si ha $c_n = b_n - a_n$ $\beta =$ $k =$

☐ Trovare una espressione esplicita della successione c_n $c_n =$

☐ Calcolare $\lim c_n =$......

5.33- *ese6. 5-*
Si consideri la successione definita da

$$a_0 = 2 \quad , \quad a_{n+1} = a_n - a_n e^{a_n}$$

$$a_0 = 4 \quad , \quad a_{n+1} = a_n - a_n e^{-a_n}$$

$$a_0 = 4 \qquad , \qquad a_{n+1} = a_n - a_n e^{a_n}$$
$$a_0 = -5 \qquad , \qquad a_{n+1} = a_n - a_n e^{-a_n}$$

☐ a_n è monotona? ☐ *SI* ☐ *NO*

☐ a_n è limitata? ☐ *SI* ☐ *NO*
Determinare, se esistono:

☐ $\sup\{a_n\} = \ldots\ldots$

☐ $\inf\{a_n\} = \ldots\ldots$

☐ $\max\{a_n\} = \ldots\ldots$

☐ $\min\{a_n\} = \ldots\ldots$

☐ $\lim a_n = \ldots\ldots$

5.34- *ese6. 25*-
Si consideri la successione
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$$

1 - Ricordando che $x = e^{\ln(x)}$ provare che a_n è una successione infinitesima di ordine 1.
2 - Dedurre il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right)$$
ricordando che vale il terorema di confronto asintotico per le serie*
3 - Studiare la convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right) x^n$$
con particolare riferimento al comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.
Si consideri la successione
$$b_n = a_n + \frac{e}{2n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e + \frac{e}{2n}\right)$$
4 - Determinare l'ordine di infinitesimo di b_n
5 - Studiare la convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e + \frac{e}{2n}\right) x^n$$

---

* **Teorema di confronto asintotico**
Siano $a_n > 0$, $b_n > 0$ due successioni tali che
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$$
allora
$$\sum a_n < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum b_n < +\infty$$

con particolare riferimento al comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

6 - Dimostrare il teorema di confronto asintotico per le serie.

5.35- *ese6. 34*-

Sia

$$f(x) = \sin x$$

oppure

$$f(x) = \arctan x$$

Data la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$a_0 = \pi/2, \qquad a_{n+1} = f(a_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

stabilire il segno di a_n

La funzione $x - f(x)$ è crescente in $\mathbb{R}$?

La funzione $x - f(x)$ è decrescente in $\mathbb{R}$?

La successione è limitata?

La successione è crescente?

La successione è decrescente?

Si ha $lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$. Perché?

5.36- *ese6. 40*-

Si considerino tutte le successioni tali che

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

☐ Determinare tutti i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $a_n = \lambda^n$ giustificando brevemente le affermazioni

☐ Verificare che $a_n = \alpha 2^n + \beta$ giustificando brevemente le affermazioni

☐ Determinare α, β in modo che $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ giustificando brevemente le affermazioni

☐ Determinare una regola di ricorrenza per la successione

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

☐ Calcolare il limite di r_n

5.37- *ese6. 47*-

Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{a_n} \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

☐ Stabilire se a_n è crescente o decrescente e giustificare brevemente l'affermazione.

☐ Stabilire se a_n ammette limite, in caso affermativo determinarlo ed in caso negativo provare che il limite non esiste.

☐ Determinare estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo di a_n, $\sup a_n =$, $\inf a_n =$, $\max a_n =$, $\min a_n =$

☐ Determinare una formula di ricorrenza per la successione $b_n = a_{2n}$

5.38- *ese6. 51-*
Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 \\ a_0 = k \end{cases}$$

Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la crescenza e la decrescenza di a_n.
Determinarne limite, estremo superiore ed estremo inferiore.
Studiare successivamente la successione

$$\begin{cases} b_{n+1} = (-1)^n (b_n)^2 \\ a_0 = -k \end{cases}$$

provando che $b_n = (-1)^{n+1} a_n$. Giustificare brevemente le affermazioni.

5.39- *ese6. 75-*
Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \\ a_0 = k \in \mathbb{R} \quad k > 0 \end{cases}$$

☐ Dimostrare che $a_n > 0$ e che a_n è definita per ogni $n \in \mathbb{N}$

☐ Dimostrare che a_n è decrescente

☐ Calcolare $\lim a_n$

☐ Studiare la successsione per $k = 0$

☐ Mostrare che se $-1 < k < 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $1 + a_{n_0} < 0$ per cui a_{n_0+1} non è definito.

5.40- *ese7. 14-*

☐ Verificare che $g(|x|) = f(|x|)$

☐ Stabilire se g è invertibile in $(-1, 0) \cup (0, 1)$ ed, in caso affermativo trovarne l'inversa precisandone il dominio.

Sia a_n la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + k \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

☐ Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che $a_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

☐ Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il limite di a_n.

☐ Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ a_n è monotona.

Derivabilità

6.1- *ese1. 88*-
Calcolare, usando la definizione di limite, la derivata di: $\sin x$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{\sin x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\sin\frac{1}{x}$, $x\,|x|\ +x^2$

6.2- *ese1. 89*-
Calcolare,dove esistono, le derivate di ogni ordine di x^3+3x+1, x^n, $\frac{1}{x}$, $\sin x\ \sin 2x$, $\sin\frac{1}{x}$, $\arcsin x$ in $x=0$.

6.3- *ese1. 90*-
Trovare condizioni di esistenza e una formula per la derivata seconda di $f(g(h(\cdot)))$.

6.4- *ese1. 91*-
Calcolare la derivata di

$$\sin\left(\sin(\sin x)\right) \quad , \quad (x^x)^x \quad , \quad (x)^{x^x},$$

$$\lg_{v(x)} u(x) \quad , \quad \left(x+(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x^7 \sin\ x^9 \mathrm{E}\left(\cos\ (\sin x^2)+x\right).$$

6.5- *ese1. 92*-
Discutere la derivabilità di

$$f: x\in\mathbb{R}\to\begin{cases} -\left|1-2x^2\right| & x<0 \\ \ln(1-2x) & 0\le x<\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x+\ \mathrm{E}(x)} & x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

6.6- *ese1. 93*-
Siano

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le c \\ ax+b & x>c\end{cases};$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x|>c \\ ax+b & |x|\le c\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \sin\ x & x\le c \\ ax+b & x>c\end{cases}.$$

Trovare i valori di a e b (in funzione di c) per cui esiste $f'(c)$.

6.7- *ese1. 94*-
Calcolare gli zeri della derivata prima di

$$|\sin x| \quad , \quad \sin|x| \quad , \quad \sin(nx)$$

$$|\sin(nx)| \text{ per } n\in\mathbb{N}.$$

6.8- *ese1. 95*-

Supponiamo che esista $f'(a)$. Dire quali delle seguenti uguaglianze sono vere:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(a)}{h-a} \\
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} \\
f'(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+2t)-f(a)}{t} \\
f'(a) &= \lim_{n\to+\infty} \left\{ n \left[f\left(a+\frac{1}{n}\right) - f(a) \right] \right\} \\
f'(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}
\end{aligned}$$

Se non è noto che $f'(a)$ esiste, quali delle precedenti uguaglianze sono buone definizioni di $f'(a)$?

6.9- *ese1. 96*-
Studiare il comportamento della derivata in un intorno di 0 per

$$x^{1/3},\ x^{3/2},\ x^{2/3},\ x^{-3/2},\ x^{-2/3},\ |\ln(x+1)|\,,$$

$$\begin{cases} x\ \sin\ 1/x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 \sin\ 1/x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

6.10- *ese1. 97*-
È vero che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A,\ f(x)>0$ ed esiste $f'(x)$ per $x>1$ allora $f'(x)\to 0$ per $x\to+\infty$?

6.11- *ese1. 98*-
Studiare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

ove $f(x) = x^\alpha \sin\ x^\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

6.12- *ese1. 99*-
Siano f,g dotate di derivate seconde in 0 e tali che

$$f(0) = \frac{2}{g(0)},\ \ f'(0) = 2g'(0) = 4g(0),\ \ g''(0) = 5f''(0) = 6f(0) = 3.$$

a) Posto $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcolare $h(0)$.
b) Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$.
c) Posto $k(x) = f(x)g(x)\sin\ x$, calcolare $k'(0)$.

6.13- *ese1. 100*-
Sia:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & 0\le x\le 1 \\ g(x) & 1<x\le 2 \end{cases}$$

Fissate f e g, in quali condizioni h è derivabile in $[0,2]$.

6.14- *ese1. 103*-
Calcolare la derivata di

$$\arctan\frac{1}{x} \quad , \quad \arcsin(\cos x) \quad , \quad \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad \arcsin(2x^2)$$

6.15- *ese1. 104*-
Sia $f(x) = 5x^{271} + 3x^{18} + 1, \quad x \geq 0$. Osservare che f è invertibile e che $f(1) = 9$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico dell'inversa nel punto di ascissa 9.

6.16- *ese1. 105*-
Sia

$$f(x) = 3x^2 - x - 1, \qquad per \qquad x \geq \frac{1}{6}$$

Calcolare, se esiste, la derivata dell'inversa in 7 .
a) usando il teorema di derivazione della funzione inversa;
b) trovando una formula per l'inversa (se possibile).

6.17- *ese1. 106*-
Sia $f(x) = 3x^2 - x - 1$, per $x \leq \frac{1}{6}$.Calcolare, se esiste, la derivata dell'inversa in -5.
a) usando il teorema di derivazione della funzione inversa;
b) trovando una formula per l'inversa (se possibile).

6.18- *ese1. 107*-
Sia $f(x) = x^{21} + 6$.Calcolare, se esiste, la derivata dell'inversa.
a) usando il teorema di derivazione della funzione inversa;
b) trovando una formula per l'inversa (se possibile).

6.19- *ese1. 108*-
Stabilire se la funzione $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$ è invertibile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$?
Detta g l'inversa di f ristretta a $(0, +\infty)$ calcolare, se esiste, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6.20- *ese1. 109*-
Sia g l'inversa di

$$f(x) = x + \ln\ x + e^x$$

in $(0, +\infty)$.
Calcolare $g'(1 + e)$.

6.21- *ese1. 110*-
Sia g l'inversa di

$$f(x) = \ln(1 + kx^2)\ (k \in \mathbb{R})$$

Calcolare $g'(1)$.

6.22- *ese1. 111*-
Sia g derivabile in $\mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di $t, x \in \mathbb{R}$ $g(t - a^x + \sin\ x)$ è derivabile ?

Calcolare per tali valori

$$\frac{d}{dx}[g(t - a^x + \sin\ x)]$$

6.23- *ese1. 112*-
Sia f derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, g derivabile in x_0, $g(x_0) = g'(x_0) = 0$, È vero che $f(g(\cdot))$ è derivabile in x_0?

6.24- *ese1. 113*-
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converga $\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in \mathbb{R}\ , n\ \in \mathbb{N}$.
Calcolare $f'(x)\ \forall\ x\ \in \mathbb{R}$.

6.25- *ese1. 114*-
Calcolare $f'(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, sapendo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e che

$$|f(x') - f(x'')| \le k\,|x' - x''|^\alpha\ , \quad k\ \in \mathbb{R}_+,\ \alpha > 1,\ \forall\ x',\ x''\ \in \mathbb{R}$$

6.26- *ese1. 115*-
Sia f^3 è derivabile in x_0 È vero che f è continua in x_0?

6.27- *ese1. 116*-
Sia $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ f\left(\frac{1}{x}\right) - x\ f(1)}{1 - x} = 1$$

È vero che f è derivabile in 1?
f è continua in 1?

6.28- *ese1. 117*-
Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{\sin|x|^k}\right)}{\sin^n x} & \text{se} \quad x \neq 0,\ \sin^n\ x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Determinare n e $k\ \in\ \mathbb{N}$ tali che f sia derivabile in 0.

6.29- *ese1. 120*-
Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Calcolare, se esiste, $f^{(n)}(0)$.

6.30- *ese1. 122*-
Calcolare la derivata di

$$F(x) = \begin{vmatrix} e^x & \sin\ x & x^x \\ x & \ln\ x & \sqrt{x} \\ 5 & \frac{1}{x} & x^3 \end{vmatrix}.$$

6.31- *ese1. 127*-
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile; dimostrare che f' non può avere discontinuità di 1^a specie.

6.32- *ese1. 128*-
Sia f derivabile con continuità in $(a, +\infty)$, e sia

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

Studiare il

$$\lim_{x\to a^+} f'(x)$$

6.33- *ese1. 129*-
Sia f continua e derivabile in $(a, +\infty)$;

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$$

Se esiste

$$\lim_{x\to +\infty} f'(x)$$

quanto vale?

6.34- *ese1. 130*-
Stabilire se la seguente proposizione è vera, è falsa o è indeterminata.
Sia f una funzione derivabile tale che $|f(x)| \leq 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$; allora $f'(x)$ è limitata?

6.35- *ese1. 131*-
Sia f derivabile e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$f'(x)$ è limitata?
$f'(x)$ può tendere a zero per $x \to +\infty$?

6.36- *ese1. 132*-
Sia f definita e derivabile in $[1, 2] \cup [3, 4]$ e $f'(x) = 0 \ \ \forall\, x \in [1, 2] \cup [3, 4]$.
È vero che f è costante?

6.37- *ese1. 133*-
Stabilire se la seguente proposizione è vera, è falsa o è indeterminata.
Se f è derivabile in $[a, +\infty)$ e

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - f'(x)) = \ell \in \mathbb{R}$$

allora

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell, \ \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0?$$

6.38- *ese1. 134*-

Sia $a < b < c$, trovare per ogni f tutti i b per cui è soddisfatta la formula del valor medio: $f(c) - f(a) = f'(b)(c-a)$,

I) $f(x) = x^2$, $a = 1,\ c = 2$;
II) $f(x) = e^x$, $a = 0,\ c = 1$;
III) $f(x) = \arctan\ x$, $a = 0,\ c = 1$;
IV) $f(x) = \ln\ x$, $a = 1,\ c = e$;
V) $f(x) = \sin\ x$, $a = 0,\ c = 8\pi$;
VI) $f(x) = x^3 - 3x$, $a = -2,\ c = z$.

6.39- *ese1. 136-*
Possono esistere delle funzioni derivabili tali che:
a) $f'(x) \leq 1\ \ \forall\ x\ \in \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(1) = 100$,
b) $f''(x) \leq 1\ \ \forall\ x\ \in\ \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(1) = 100$?

6.40- *ese1. 137-*
La funzione $f(x) = x^{2/3} - 1$ è tale che $f(1) = f(-1)$ ma f' non si annulla in $[-1, 1]$; perchè questo non contraddice il teorema di Rolle?

6.41- *ese1. 138-*
La funzione
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$
è tale che $f(0) = 0,\ f(2) = 2$ e non cè nessun $x\ \in\ [0, 2]$ ove $f'(x) = 1$. Perché questo non contraddice il teorema di Lagrange?

6.42- *ese1. 159-*
Come si comportano i seguenti rapporti quando $x \to +\infty$?
$$\frac{\lg_5 x}{\lg_7 x}\ ,\ \frac{5^x}{7^x}\ ,\ \frac{(x+5)^9}{(x+7)^9}\ ,\ \frac{x^2}{2^x}.$$

6.43- *ese1. 160-*
Quali delle seguenti funzioni ha l'ordine di infinito superiore per $x \to +\infty$:
$$x^{(x^x)} \quad \text{oppure} \quad (x^x)^x$$
$$x^2 \quad \text{oppure} \quad 2^x?$$

6.44- *ese1. 176-*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = e^x - 1 - x,\ f(0) = 0$. Provare che f non si annulla in $(0, +\infty)$.

6.45- *ese1. 180-*
Trovare il dominio delle derivate di
$$f(x) = \frac{x^2 \sin 1/x}{\sin^4 x + \cos^2 x},$$
$$f(x) = |x + ||x| - 1||$$

$$f(x)|x+|x-1||.$$

6.46- *ese1. 182*-
Sia
$$f(x)=\begin{cases} |\sin x+\cos|+(x-\pi)\sin\dfrac{1}{x-\pi}, & x\neq\pi \\ 1 & , x=\pi \end{cases}$$
Calcolare $f'(x)$.

6.47- *ese1. 183*-
Sia $f : x \in \left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \to \sin x^2$.
a) Dire se esiste l'inversa g di f. Calcolare il dominio.
b) Calcolare, se $\exists$, $g'(\frac{1}{2}), g'(1), g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6.48- *ese1. 186*-
Sia f derivabile in $\mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) \neq A\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ e sia $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)-A}$. È vero che g ha gli stessi punti di massimo e di minimo di f? È vero che ha gli stessi flessi?

6.49- *ese6. 60*-
Si consideri la funzione
$$f(x)=\max\left\{|x|, \frac{1}{|x|+1}\right\}$$

☐ Determinare il campo di definizione di f

☐ Determinare l'insieme in cui f è continua

☐ Determinare l'insieme in cui f è derivabile

☐ Calcolare
$$\int_{-3}^{3} f(x)dx$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Determinare, dove esistono, tutte le primitive di f

Formula di Taylor

7.1- *ese1. 101*-
Trovare un polinomio $P(x)$
a) di 1^o grado e tale che $P(0)=a$, $P'(0)=b$;

b) di 2^o grado e tale che $P(0) = a$, $P''(0) = c$;
c) di 3^o grado e tale che $P''(0) = c$ e $P'''(0) = d$.

7.2- *ese1. 102*-
Studiare la relazione che intercorre tra i coefficienti di un polinomio di grado n e le sue derivate in 0. Cosa si può dire se si sostituisce x_0 a 0.

7.3- *ese1. 118*-
Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito (per $x \to +\infty$), rispetto all'infinitesimo o all'infinito campione di
$$\sqrt[3]{x},\ (1+2x)\sqrt{x},\ x^2 \arctan\ x,\ x^{\frac{x}{x-1}}\ ,\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

7.4- *ese1. 119*-
Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito (per $x \to 0$), rispetto all'infinitesimo o all'infinito campione di
$$x - \sin x\ ,\ e^x - x\ ,\ \frac{x}{x - \tan\ x}\ ,\ x + e^{-1/x^2}$$

7.5- *ese1. 121*-
Confrontare fra loro per $x \to +\infty$ le funzioni:
$$\frac{\ln\ x}{\sqrt{x}}\ ,\ \frac{\ln(\ln\ x)}{\ln x}\ ,\ \frac{x}{\ln\ x}$$
$$x(\ln\ x)^2\ ,\ e^{-x}x^3\ ,\ \frac{x\ \ln x}{(\ln(\ln\ x))^2}$$
$$\frac{x^2+1}{x\ \ln\ x}\ ,\ \frac{x\,(\ln(\ln\ x))^3}{\ln\ x}\ ,\ x\ \ln\ (x\ \ln\ x)$$

7.6- *ese1. 143*-
Calcolare $\sin 0,2$ a meno di 10^{-5} ed $e^{0,003}$ a meno di 10^{-9}.

7.7- *ese1. 144*-
Trovare i primi ($n \leq 5$) polinomi di Mac Laurin per le funzioni
$$x^{x^2},\ \tan x,\ \arctan x,\ \arcsin x.$$

7.8- *ese1. 145*-
Trovare il polinomio di Mac Laurin di ordine n per le funzioni
$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f(x) = \ln(1+x)$$
$$f(x) = \sqrt{1+x}$$
$$f(x) = (x-1)^4$$
$$f(x) = 2^x.$$

7.9- *ese1. 146*-
Trovare il polinomio di Mac Laurin ed una maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo il polinomio alla funzione nei seguenti casi:

a) $f(x) = e^x,$	$0 \le x \le 2$	$n = 2;$
b) $f(x) = e^x,$	$-3 \le x \le 0$	$n = 1;$
c) $f(x) = \cos\ x,$	$0 \le x \le 0,1$	$n = 3;$
d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x},$	$0 \le x \le 0,2$	$n = 2;$
e) $f(x) = \sin x^2 + \cos\lvert x\rvert,$	$\lvert x\rvert < \dfrac{1}{10},$	$n = 2.$

7.10- *ese1. 147*-
Valutare l'errore che si commette approssimando:

a) e^x	con	$1 + x + \dfrac{x^2}{2}$	per	$0 \le x \le 2$
b) e^x	con	$1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$	per	$0 \le x \le \dfrac{1}{2}$
c) $\tan x$	con	x	per	$-0,2 \le x \le 0,2$

7.11- *ese1. 148*-
Calcolare i seguenti limiti (se esistono) precisando in quali casi si può applicare il teorema di De l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos\ x} - \frac{2}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty}(a^x+1)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2\ x} - \frac{1}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin\ x}{x(1-\cos\ x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{2\sin\ x + x\cos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin\ x}{x+\cos\ x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)-\sin x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\ 1/x}{\sin\ x}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin\ x}{x+\cos\ x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\left\{(\ln\ x)^x - \frac{x^3+x^2}{x^2+1} - \left(1+\cos\ \frac{1}{x}\right)^x\right\}.$$

7.12- *ese1. 149*-
Usando la formula di Taylor calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin\ x - x(1+x)}{x^3}.$$

7.13- *ese1. 150*-

L'equazione ln $x = e^x$ ha una soluzione, ha un numero finito di soluzioni, ha infinite soluzioni, oppure non ha soluzioni?

7.14- *ese1. 151*-
Se $f(x)$ è infinitesimo d'ordine superiore a $g(x)$ e $g(x)$ è infinitesimo d'ordine superiore ad $h(x)$, sono confrontabili $f(x)$ e $g(x) - h(x)$?

7.15- *ese1. 152*-
Il resto della formula di Taylor di grado n è nullo per tutti i polinomi, per i polinomi di grado $\leq n$, in un intorno di $x = x_0$, in altri casi?

7.16- *ese1. 153*-
Se

$$\begin{gathered} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \\ f''(x_0) \neq g''(x_0) \\ f'''(x_0) = g'''(x_0) \end{gathered}$$

allora

$$f(x) - g(x)$$

è infinitesimo di ordine $1, 2, 3$ o 4?

7.17- *ese1. 154*-
Calcolare i seguenti limiti (se esistono):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\tan\ x - x}{x^3} \\
&\lim_{x\to 0} \left(\ln(1+x) - x + \arctan\ \frac{1}{x} \right) \\
&\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\ln x} \right) \\
&\lim_{x\to 0} \left\{ \frac{e^{1/x^2} + e^{1/x^4} \ln x}{e^{1/x^2} - e^{1/x^4}} + \frac{|\ln(1+\cos x)| + 1/x}{x^4} \right\} \\
&\lim_{x\to 0} \{ (\ln \sin\ x)(\arctan\ \sin\ \ln x) + \mathrm{E}\ (x) + \cos \ln x - \mathrm{E}\ (1+x) \} \\
&\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^4 \sqrt[3]{x} - \sin\ ^3 x + x^2}{e^{x^2} - \cos x} \right)^{1/(x^2 \sin\ x)} \\
&\lim_{x\to \pi/4} \left\{ \frac{\sin\ 2x - 1}{2\sin x - \sqrt{2}} + \ln\left(\frac{4}{\pi}x\right) - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} + \sqrt{|x| - \arctan\ x} \right\} \\
&\lim_{x\to 0^+} \left\{ (\sin\ x)^{\tan\ x} + x^{\ln 1/x} - (\sin\ x)^{\sin\ x} - x^{\sin\ x} \right\} \\
&\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin\ 1/x} - x^{3/2} \right) \\
&\lim_{x\to +\infty} \left\{ e^{-x} \ln x - x^{1/x} + 2^{-x} \sin\ \frac{1}{2^x} \right\} \\
&\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\sin\ ^2 x}{x} - x \sin\ \frac{1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} - x^2 \tan\ \frac{1}{x} \right) \\
&\lim_{x\to +\infty} \left\{ x \ln\left(\frac{1+x}{x} \right) + \sqrt[3]{x^3+1} - \ln\left(x^2-1\right) e^{2x} - x \right\}
\end{aligned}$$

7.18- *ese1. 155*-
Stabilire se la seguente proposizione è vera, è falsa o è indeterminata. Siano

$$f, g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ 0 < f(x) < g(x)\ \forall x \in [-1,1]$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

allora

$$\frac{g(x)}{f(x)} \to +\infty$$

per $x \to 0$?

7.19- *ese1. 167*-
Siano $f(x) = x - \sin x,\ g(x) = x + \sin x$. Verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ \nexists, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -1.$$

Come si spiega ciò in relazione al teorema di de l'Hôpital.

7.20- *ese1. 178*-
Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/\sqrt{1-x} - 1/\sqrt{1+x} - \tan x}{\ln(1+x) - \sin x + x^2/2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(\arcsin x)^2/\sin x} - 1}{x\ \tan\ x} - 2^{(x^{-1/2})}$$

7.21- *ese1. 187*-
Scrivere la formula di Taylor (polinomio di ordine n,punto iniziale x_0) con resto di Lagrange di

$$\begin{array}{lll}
a) f(x) = e^{x^2}, & x_0 = 1, & n = 8; \\
b) f(x) = \sin(2x), & x_0 = 0, & n = 5; \\
c) f(x) = \sqrt{1+4x^2}, & x_0 = 0, & n = 4; \\
d) f(x) = (x-1)^4, & x_0 = 0, & n = 4; \\
e) f(x) = \ln(1+x^2), & x_0 = 0, & n = 3; \\
f) f(x) = \sqrt[3]{1+x}, & x_0 = 0, & n = 2.
\end{array}$$

7.22- *ese4. 14*-
Sia

$$f(x) = e^{(e^{3x}-1)} - 1$$

☐ L'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$ è

☐ Il polinomio di Mc Laurin di f di grado 1 è

7.23- *ese4. 21-*
Si consideri la funzione

$$g(x) = \ln(1 + x^2) + \sin(x - x^3)$$

☐ Scrivere il polinomio di Taylor nel punto $x_0 = 0$ di g di grado 4 $\qquad p(x) =$

☐ Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ di g rispetto ad x^α ,$\alpha \in \mathbb{R}_+$ di

$$g(x) - x - x^2$$

L'ordine è……

☐ Scrivere il resto di Peano relativo al polinomio trovato al punto G $\qquad R(x) =$……

Massimi e minimi

8.1- *ese1. 124-*
Sia $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x + \pi) = f(x) \ \ \forall\, x \in\ \mathbb{R}$ ed $\exists$ continua $f'\}$.

a) $\exists\ f \in F$ non limitata in $\mathbb{R}$?
b) Ogni $f \in F$ ha massimo e minimo assoluti su $\mathbb{R}$?
c) $f'(x + \pi) = f'(x) \ \ \forall\, x\ \in \mathbb{R}, \ \ \forall\, f \in F$?
d) Provare che se $f \in F$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in\ \mathbb{R}$, allora $f'(x) = 0 \ \ \forall\, x \in\ \mathbb{R}$.

8.2- *ese1. 179-*
Siano

$$f(x) = x^3 + k\ e^{-x},\ g(x) = x^2 + k\ e^{-x},\ k \in \mathbb{R}$$

a) Discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi di f e g.
b) I minimi e massimi relativi sono anche assoluti?

8.3- *ese1. 227-*
Trovare il punto P di γ ove il triangolo APB abbia area massima essendo $A(2, 0),\ B(0, 1)$ e γ di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$

8.4- *ese3. 30-*
Tra tutti i triangoli inscritti in una circonferenza di raggio 1/2, aventi un angolo ottuso α con $\sin\alpha = 4/5$, trovare quello di area massima.

Giustificare ogni affermazioni.

Grafico

9.1- *ese1. 139*-
Sia f derivabile in $[a,+\infty)$ e $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$. È vero che $f'(x)$ ha limite per $x \to +\infty$?

9.2- *ese1. 140*-
Tracciare i grafici (studiando prima il dominio) di:

$$3^{\arcsin x + 1/\sqrt{x^2-3}}, \quad x^{\arcsin x + 1/\sqrt{x^2-3}} \quad \arcsin \frac{1+x}{1-x}, \quad \frac{|1+x|}{x^2}.$$

9.3- *ese1. 141*-
Provare che $x^x = 1 + x$ ha soluzioni non nulle.

9.4- *ese1. 142*-
Studiare le seguenti funzioni definendo, se esistono, prolungamenti continui e derivabili su $\mathbb{R}$;

$\sqrt[3]{x^2-2x+3}$	$x^2\sin(1+\ln x^2)$	$\arcsin\left\lvert\frac{x}{x+1}\right\rvert$
$\arcsin\left\lvert\frac{x}{x-1}\right\rvert$	$x2^{\sin x}$	$\ln\sqrt{x^2-3x+8}$
$\frac{\ln\lvert x^2-6x+8\rvert}{x-1}$	$\arcsin\frac{1}{\ln\lvert x-1\rvert}$	$x+\sin x$
$\ln(x^2+1)$	$\frac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$	$\frac{x^2\lvert x-1\rvert}{x+1}$
$\sin^4 x+\cos^4 x$	$x^{2/3}e^{-x}$	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
x^3-3x	x^4-6x^2	$\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{2x}{x^3-1}$	$\lvert 1-x^2\rvert$	$\frac{x^2-1}{x^2+1}$
$\left\lvert\frac{x}{x^2+1}\right\rvert$	$\frac{x}{x^3+1}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{x^2}{1+x}$	$\sin^2 x$	$\sqrt{1-x^2}$
$x-\sqrt{x-1}$	$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$	$\lvert x\rvert+\lvert 2x-1\rvert$
$\frac{1-\sin x}{\sqrt{\cos x}}$		

9.5- *ese1. 156*-
Sia $f : x \to \ln(x^2+1)$. Tracciare il grafico di f.
a) f è limitata inferiormente?
b) è limitata superiormente?
c) f è limitata?
d) Dire se f è invertibile in $[-1,2]$.
e) Trovare l'inversa, se esiste.
f) Dire se f è invertibile in $[2,+\infty)$.
g) Trovare l'inversa, se esiste.

9.6- *ese1. 157*-

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\ \frac{1}{\ln|x-1|}$$

indicandone l'insieme di definizione e disegnandone il grafico.

a) La funzione f è continua in $[1-\frac{1}{e},\ 1+\frac{1}{e}]$? In caso contrario, esiste un prolungamento continuo di f nello stesso intervallo? E derivabile?

b) In quali intervalli f è invertibile? Detta g l'inversa della restrizione di f a $[4,+\infty)$, calcolare $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

9.7- *ese1. 158-*
Calcolare insieme di derivabilità, derivata e studiare le seguenti funzioni:

e^{2x+3}	$\arcsin\ e^x$	2^{3x}
$\ln(\ln x)$	$\lg_x\ e$	$\ln(\sin\ x)$
x^{3x}	$x^{\ln\ x}$	$(\sin\ x)^{\cos\ x}$
$\arcsin\ (3x^2-7)$	$\dfrac{\sin\ x}{\arcsin\ x}$	$\arctan\ \dfrac{1}{x}$
e^{-x}	e^{x^2}	$\sin\ (\arcsin\ x)^2$
e^{2x}	$e^{(2^x)}$	$e^{-x^2/x}$
$2^{(x^2)}$	$e^{\arctan\ \ x}$	$x^{(x^x)}$
$(\ln\ x)^x$	$\ln(\sin\ x)$	$x^{1/x}$
$(\sin\ x)^n$	$\cos\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	$\sin\ (x^n)$
$\ln(x^2+2x)$.		

9.8- *ese1. 161-*
Tracciare il grafico delle seguenti funzioni :

$\dfrac{1}{\ln x}$	$e^{1/x}$	$\ln(1+x^2)$
ke^{-ht}	$ke^{-mt}+he^{-nt}$	$ke^{-mt}-he^{-nt}$
$1-e^{-kt}$	$ke^{-x/2}\qquad (k,h,m,n\ \in\ \mathbb{R}_+)$	

9.9- *ese1. 163-*
Studiare la funzione $f(x) = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

9.10- *ese1. 168-*
Studiare

$$f(x) = -\sqrt{3x}-3+x^2,$$

$$f(x) = 4+x^2,$$

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & -3 \le x \le -1 \\ 2 & -1 \le x \le 2 \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+\dfrac{\arctan(bx^2)}{1-\cos x} & \text{per } x<0 \\ \ln(4+ax) & \text{per } x \ge 0 \end{cases}$$

(determinare a e b per cui f è continua e derivabile in 0).

$$f(x) = \ln|1-x| + |\ln(x^2-1)|,$$

$$f(x) = \ln(x+1)^2 + \frac{1}{1-|x-2|},$$
$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+2}}{|x+1|}.$$

9.11- *ese1. 169-*
Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$\left(k^2-3\right) x^2 + 2y^2 - 4 = 0.$$

9.12- *ese1. 170-*
Tracciare il grafico di

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2},$$
$$f(x) = 4x^{\ln x/(1-x)},$$
$$f(x) = \arccos \frac{x - \ln\ 2}{2\left(e^x-2\right)},$$
$$f(x) = 2^x - kx - 1.$$

9.13- *ese1. 171-*
Tra i rombi circoscritti ad una conferenza di raggio 1 trovare quello di area minima.

9.14- *ese1. 173-*
Sia

$$f(x) = k \ln x + x,\ x > 0,\ k \in \mathbb{R}$$

a) Determinare il numero degli zeri di f al variare di k.
b) Determinare i valori di k per cui esiste l'inversa g di f.
c) Per quesi valori di k calcolare i primi tre termini dello sviluppo di Taylor per g con centro in $k \ln \epsilon + \epsilon$.

9.15- *ese1. 175-*
Studiare il grafico di

$$f(x) = e^{x^3+2x+x+1}$$

9.16- *ese1. 177-*
Sia

$$F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : \exists a \in \mathbb{R}\ :\ f(x+a) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

a) Esiste $f\ \in F$ non limitata su $\mathbb{R}$?
b) È vero che ogni $f\ \in F$ ammette max e min assoluti?
c) È vero che per ogni $f \in F$ esiste

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)?$$

d) Se $f \in F$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

esistono, cosa si può dire di $f'(x)$?
e) Esiste $f \in F$ non decrescente e non costante?
f) È vero che $f'(x+a) = f'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$?
g) Esiste $f \in F \ : \ f''(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$?

9.17- *ese1. 181*-
Sia data una funzione dispari g derivabile su tutto $\mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$.
a) È possibile determinare $a, b, \in \mathbb{R}$ tali che se $f(x) = ax + b$, la funzione

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |x| > H \\ k(x) & \text{se } |x| \le H \end{cases}$$

abbia derivata continua su $\mathbb{R}$?
b) È posssibile determinare $c, d, e \in \mathbb{R}$ tali che se $k(x) = cx^2 + dx + e$ la funzione

$$\ell(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |x| > H \\ k(x) & \text{se } |x| \le H \end{cases}$$

abbia derivata continua su $\mathbb{R}$?

9.18- *ese1. 184*-
Data la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{x^2}{x+1}$$

a) Determinare gli zeri di f.
b) Dire se esiste l'inversa di f rispettivamente in $[-1, \frac{1}{2}]$ e in $[0, 1]$ precisando il dominio.
c) Nei due casi precedenti trovare, se possibile, una formula per l'inversa.

9.19- *ese1. 185*-
Sia $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$G(x) = \sup\{g(t),\ t \ge x\}$$

G è continua in $[-1, 1]$?

9.20- *ese1. 188*-
Studiare

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 3} & f(x) = x \sin 2^x \\ f(x) = x 2^{\sin x} & f(x) = x^2 \sin(1 + \ln x^2) \\ f(x) = \arcsin \left| \dfrac{x}{x^2 - 1} \right| & f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1} \\ f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x & f(x) = x^{2/3} e^{-x} \\ f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}. & \end{array}$$

9.21- *ese3. 6*-
Sia

$$f(x) = \lg(e^x + x) + \lg(e^x - x).$$

Disegnare il grafico di f (non è richesto lo studio di f''). Calcolare l'ordine di infinito di f per $x \to +\infty$. Trovare un intervallo contenente 0 in cui f è invertibile e e calcolare la derivata dell'inversa di f in 0 se esiste.

9.22- *ese3. 17*-
Si consideri l'equazione nell'incognita x:

$$\ln[(k-1)x] + kx = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare, per ogni valore di k, quante soluzioni ha l'equazione assegnata.
Giustificare ogni affermazione.

9.23- *ese3. 26*-
Rappresentare nel piano l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + y^2 \ln(y) = 0\}$$

successivamente stabilire se esistono due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}$ e due funzioni $f : A \to \mathbb{R} \quad , \quad g : B \to \mathbb{R}$ tali che

$$xf(x) + f^2(x) \ln(f(x)) = 0 \quad , \quad f(0) = 1$$

$$xg(x) + g^2(x) \ln(g(x)) = 0 \quad , \quad g(-1/e) = 1/e.$$

Giustificare ogni affermazione.

9.24- *ese3. 28*-
Disegnare il grafico di

$$f(x) = e^{(x+1)\sqrt{(x-1)}/\sqrt{(x+2)}}$$

precisandone gli insiemi di definizione, continuità , derivabilità, limiti agli estremi del campo, monotonia e asintoti.
Giustificare ogni affermazione.

9.25- *ese3. 37*-
Data la funzione

$$f(t) = \frac{1+\sin t}{\sqrt[3]{t^2-1}\sqrt{t+2}},$$

verificare che f è infinitesima $a + \infty$ e determinarne l'ordine di infinitesimo. Stabilire se $\int_3^{+\infty} f(t)dt$ è convergente e tracciare il grafico della funzione

$$y(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

precisandone insieme di definizione, insieme di continuità, insieme di derivabilità. y è continua in -2?

9.26- *ese3. 39*-
Data l'equazione nell'incognita x:

$$e^{-x} = 1 + kx - x^2, \quad k \in \mathbb{R}$$

scrivere per ogni $k \in \mathbb{R}$ quante soluzioni ha l'equazione e se $k = -2$, verificare che c'è una ed una sola soluzione x_0 dell'equazione in $[-1, -1/2]$ e, a partire da tale intervallo, se $g(x) = e^{-x} + x^2 + 2x - 1$, determinare l'approssimazione x_1 di x_0 ottenuta con un solo passo del metodo delle tangenti applicato a g, precisando se l'approssimazione è per eccesso o per diffetto.
Tracciare al variare di $k \in \mathbb{R}$, il grafico di

$$f(x) = \frac{1}{1 + kx - x^2 - e^{-x}}.$$

Determinare infine al variare di k l'ordine di infinito di f in 0 e se $k = -2$ l'ordine di infinito di f nel punto x_0.

9.27- *ese3. 44*-
Sia

$$f(x) = x^3 + |t + x^2|, \quad t \in \mathbb{R},$$

determinare per quali t f risulta derivabile in $\mathbb{R}$ e per quali t f ha punti di minimo assoluto in $[-1, 1]$. Stabilire inoltre per quali valori di t f ha un unico punto di minimo assoluto in $[-1, 1]$ e per quali è invertibile sempre in $[-1, 1]$.
Disegnare infine al variare di t il grafico di f.

9.28- *ese4. 10*-
Si consideri la funzione

$$\ln(1 + x^2) - k \arctan(x) \qquad k \in \mathbb{R}$$

☐ Disegnare il grafico di f al variare di k

☐ Stabilire il numero degli zeri di f
f ha ...... zeri perchè......

9.29- *ese4. 20*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + 2\sin x & x > 0 \\ ax^2 + bx + c & x \leq 0 \end{cases}$$

☐ Trovare tutti i valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui f risulta continua in $\mathbb{R}$. $a =$ $\quad b =$ $\quad c =$

☐ Per tali valori calcolare $f(0) =$......

☐ Trovare tutti i valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui f risulta derivabile in $\mathbb{R}$. $a =$ $\quad b =$ $\quad c =$ Giustificando le affermazioni

☐ Per tali valori calcolare $f'(x) =$

☐ Stabilire quale delle seguenti affermazioni sono sempre vere

☐ f ammette almeno uno zero in $[\pi/2, 3\pi/2]$

☐ f ammette un solo zero in $[\pi/2, 3\pi/2]$

☐ f ammette almeno due zeri in $[\pi/2, 3\pi/2]$

☐ f ammette infiniti zeri in $[\pi/2, 3\pi/2]$ Giustificando le affermazioni

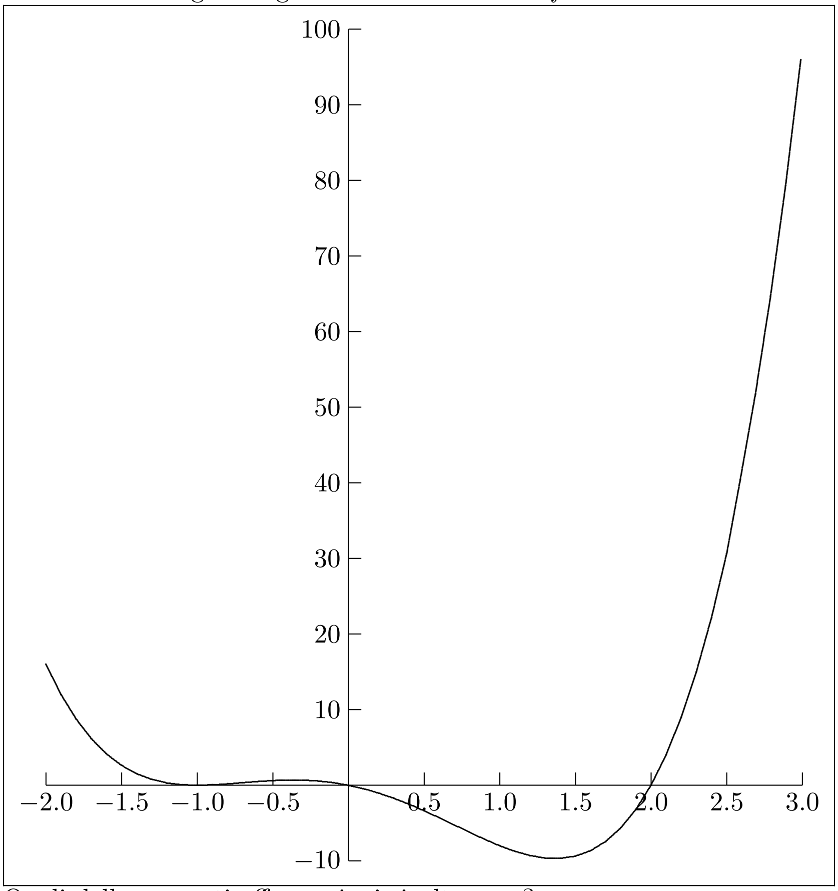
☐ Determinare per quali valori $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) - x^2}{x^\alpha} = -\frac{1}{2}$$

$a =$ $\quad b =$ $\quad c =$ $\quad \alpha =$

9.30- *ese6. 1*-

Si consideri il seguente grafico di una funzione f



Quali delle seguenti affermazioni risulta vera?

□ $f(x) = (x+1)^2 x(x-2)$	□ $f(x) = (x-1)x(x+2)$
□ $f(x) = (x+1)x^2(x-2)$	□ $f(x) = (x-1)x(x+2)^2$
□ $f(x) = 3(x+1)^2 x(x-2)$	□ $f(x) = (x-1)x(x+2)$
□ $f(x) = (x+1)^4 x(x-2)$	□ $f(x) = (x-1)x(x+2)$

Disegnare i grafici di

$f(|x|)$ $\quad f(x+3)-2$ $\quad \ln(f(x))$ $\quad f(\ln(x))$

9.31- *ese6. 4*-

Si consideri la funzione f sull'intervallo I ove

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x^2/2 & x > 0 \\ ax^2 + bx + c & x \leq 0 \end{cases} \qquad I = [1, +\infty)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-x} - \ln(1-x) & x < 0 \\ ax^2 + bx + c & x \geq 0 \end{cases} \qquad I = (-\infty, -1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} & x > 0 \\ ax^2 + bx + c & x \leq 0 \end{cases} \qquad I = [1, +\infty)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\arctan(x) - \ln(1+x) & x > 0 \\ ax^2 + bx + c & x \leq 0 \end{cases} \qquad I = [3, +\infty)$$

□ Trovare tutti i valori a, b, c reali per cui la funzione data risulta continua in $\mathbb{R}$

$a = \ldots$ $\qquad b = \ldots$ $\qquad c = \ldots$

□ Calcolare in corrispondenza dei valori trovati $f(0) = \ldots\ldots$

☐ Trovare tutti i valori a, b, c reali per cui la funzione data risulta derivabile in $\mathbb{R}$
$a = \dots$ $b = \dots$ $c = \dots$

☐ Calcolare in corrispondenza dei valori trovati $f'(x) = \dots$

☐ Disegnare il grafico di f per tutti i valori di a, b, c per cui f risulta continua e derivabile in $\mathbb{R}$

☐ Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere
☐ f ammette almeno uno zero in I ☐ f ammette un solo zero in I
☐ f ammette più di uno zero in I ☐ f ammette infiniti zeri in I

☐ Disegnare il grafico di f in I

☐ f è invertibile in I ? ☐ SI ☐ NO in caso affermativo disegnare il grafico di f^{-1}
In corrispondenza dei valori $a = 1$ $b = 2$ $c = 0$

☐ Disegnare il grafico di $1/f(x)$

☐ Disegnare il grafico di $f(|x|)$

☐ Disegnare il grafico di $f(\ln(x))$

☐ Disegnare il grafico di $\ln(f(x))$
In corrispondenza dei valori $a = 0$ $b = 2$ $c = 4$

☐ Disegnare il grafico di $f(x+1) - 1$

☐ Disegnare il grafico di $1/f(x^2)$

☐ Disegnare il grafico di $f(\arctan(x))$

☐ Disegnare il grafico di $\arctan(f(x))$
In corrispondenza dei valori $a = 1$ $b = 0$ $c = 1$

☐ Disegnare il grafico di $|f(x+1) - 1|$

☐ Disegnare il grafico di $f(x^2))$

☐ Disegnare il grafico di $f(e^{(x)})$

☐ Disegnare il grafico di $e^{f(x)}$
In corrispondenza dei valori $a = 1$ $b = 3$ $c = 0$

☐ Disegnare il grafico di $1/f(x+1)$

☐ Disegnare il grafico di $f(\sqrt[3]{x})$

☐ Disegnare il grafico di $f(\sqrt{x})$

☐ Disegnare il grafico di $\sqrt{f(x)}$

9.32- *ese6. 8-*
Si consideri la funzione
$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$g(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{|x|+1}\right)$$

$$g(x) = \arctan(x) - \ln(1+x)$$

☐ Disegnare il grafico di g

9.33- *ese6. 17-*
Si consideri la funzione

$$\ln[(k-1)x] + kx, \qquad\qquad k \in \mathbb{R}.$$

☐ Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme I di definizione di f $I = \ldots\ldots$

☐ Disegnare il grafico di f per $k = 2$

☐ Disegnare il grafico di f per $k = 0.5$

☐ Disegnare il grafico di f per $k = -1$

☐ determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

9.34- *ese6. 18-*
Disegnare il grafico di

$$y(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$$

(non è richiesto lo studio della derivata seconda).

9.35- *ese6. 29-*
Si consideri la funzione:

$$f(x) = \arcsin(a\sin(x) + b)$$

☐ Determinare il campo di definizione I di f per $a = 10, b = 1$;

☐ Disegnare nel piano l'insieme D dei punti (a, b) per iquali f è definita su tutto $\mathbb{R}$

☐ Per $a = 1/2 \quad b = 1/3$ disegnare il grafico di f precisando massimi e minimi assoluti

☐ Per $a = 1/2 \quad b = 1/3$ determinare un intervallo I in cui f è invertibile e calcolarne l'inversa

☐ Determinare l'insieme E dei valori che sono raggiunti da f al variare di $x \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in D$.

9.36- *ese6. 38-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}\mathrm{e}^x$$

Calcolare $f'(x)$, $f''(x)$
determinaqre il massimo intervallo contenente $1/2$ in cui f è strettamente crescente
Disegnare il grafico di f .
Sia g la funzione inversa di f in I. Trovare l'insieme J di definizione di g e disegnare il grafico di g.
In quali intervalli di J, g è derivabile?
Calcolare $g(-3) =$, $g'(-3) =$ e $g''(-3) =$

9.37- *ese6. 41*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \ln x + x$$

☐ Disegnare il grafico di f ed f', giustificando brevemente le affermazioni.
Si consideri poi la famiglia di funzioni

$$g_{a,b}(x) = g(x) = ax^2 \ln x + bx$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}_+$

☐ Disegnare al variare di a, b il grafico di g ed g'.

☐ Determinare i valori di a, b per cui g risulta monotona.

9.38- *ese6. 44*-
Si consideri la funzione

$$f(y) = y \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) - \ln|y-1|$$

☐ Determinare il campo di definizione I di f

☐ Stabilire dove f è derivabile e calcolare la sua derivata.

☐ Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f giustificando brevemente le affermazioni.

☐ Calcolare i limiti agli estremi del campo di definizione di f' giustificando brevemente le affermazioni.

☐ Disegnare il grafico di f precisando crescenza, decrescenza, convessità e comportamento della retta tangente agli estremi del campo di definizione

9.39- *ese6. 45*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x-k}{x^2 - 3x + 2}$$

☐ Disegnare il grafico di f per $k = -1$.

☐ Disegnare il grafico di f per $k = 0.5$.

☐ Disegnare il grafico di f per $k = 1.5$.

☐ Disegnare il grafico di f per $k = 2.5$.

☐ Disegnare il grafico di f al variare di $k \in \mathbb{R}$.

9.40- *ese6. 48*-
Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$$

☐ Determinare il campo di definizione I di f;

☐ Determinare l'insieme J in cui f è derivabile;

□ Disegnare il grafico di f

□ Stabilire se f è decrescente su $(-\infty\ ,\ -1-\sqrt{6}]$ e su $[-1+\sqrt{6}\ ,\ +\infty)$ e giustificare brevemente l'affermazione.

□ Stabilire se f è invertibile su $[-1-\sqrt{6}\ ,\ 1) \cup [-1+\sqrt{6}\ ,\ 2)$ e calcolare f^{-1}

□ Dopo aver verificato che f è invertibile su $(2+\infty)$, detta g l'inversa, stabilire se g è derivabile e calcolare $g'(2)$

□ Determinare il rango di f

9.41- *ese6. 50-*
Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{|t^2-1|}(t-1)(t+3)}$$

□ Determinare il campo di definizione I di f giustificando brevemente le affermazioni

□ Determinare l'insieme J in cui f è continua giustificando brevemente le affermazioni

□ Determinare l'insieme K in cui f è derivabile giustificando brevemente le affermazioni

□ Disegnare il grafico di f

□ Calcolare

$$\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}$$

9.42- *ese6. 52-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^\alpha)}{e^x-1} & x>0 \\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(x)} & x<0 \end{cases}$$

Determinare il campo di definizione di f e studiarne la continuità al variare di α. Giustificare brevemente le affermazioni.

9.43- *ese6. 53-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x$$

Provare che f è decrescente per $x<0$.
Determinare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo di f per $x<0$
Stabilire se f è invertibile su $x<0$ ed, in caso affermativo determinare f^{-1} Giustificare brevemente le affermazioni.

9.44- *ese6. 55-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+x+1}$$

☐ Determinare il dominio della funzione f

☐ Disegnarne il grafico precisando dove f è crescente e dove f è decrescente.

☐ Determinare punti e valori di massimo e di minimo relativo ed assoluto

☐ Determinare il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione

$$f(x) = k$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$
Si consideri successivamente, al variare di $k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = e^x - k(x^2 + x + 1)$$

☐ Provare che g è continua e ammette derivate continue di ogni ordine su $\mathbb{R}$

☐ Disegnare il grafico approssimativo di g'', g' e di g (non occorre precisare il numero degli zeri)

☐ Usando il grafico di f precisare il grafico di g individuando il numero ed il segno degli zeri.

9.45- *ese6. 56*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = (x + x^2)\sin x$$

☐ Determinare il polinomio p_5 di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di grado 5 della funzione f

☐ Scrivere il resto relativo al polinomio trovato nella forma di Peano.

☐ Determinare un maggiorante di

$$|f(x) - p_5(x)|$$

su $[0, 1]$

☐ Determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$

9.46- *ese6. 57*-
Si consideri la funzione

$$g(x) = \frac{5x^2 + 5x + 2}{(2x + 1)^2(x^2 + x + 1)}$$

☐ Determinare <u>una</u> primitiva di f

☐ Determinare <u>tutte</u> le primitive di f

☐ Determinare <u>tutte</u> le primitive continue su $\mathbb{R}$ di f

☐ Calcolare

$$\int_0^1 f(x)dx$$

☐ Disegnare il grafico di f (si consiglia di tenere conto della forma di f ottenuta mediante la decomposizione in fratti semplici), illustrare graficamente il significato di $\int_0^1 f(x)dx$ e giustificarne il segno.

9.47- *ese6. 58*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t-1)}{\sqrt{|t-2||t-1|}}\,dt$$

☐ Determinare campo di definizione e limiti agli estremi del campo di f.

☐ Studiare la continuità di f

☐ Studiare la derivabilità di f e calcolarne la derivata

☐ Disegnare il grafico di f

9.48- *ese6. 67*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(|x^2-1|+1)$$

☐ Disegnare il grafico di f precisando il suo campo di definizione

☐ Determinare l'insieme in cui f è continua

☐ Determinare l'insieme in cui f è derivabile

☐ Determinare una restrizione di f che sia invertibile e trovarne l'inversa, precisando se è possibile invertire f su tutto $\mathbb{R}$ e perchè.

☐ Determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to -1$

9.49- *ese6. 74*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = (ax+b)\arctan(x)$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$

☐ Calcolare, dove esistono, f' ed f''

☐ Disegnare il grafico di f'

☐ Studiare la crescenza di f

☐ Studiare la convessità di f

☐ Determinare punti di massimo di minimo e di flesso di f e disegnare il grafico di f

9.50- *ese6. 93*-
Si considerino le funzioni

$$f_+^k(x) = \frac{-x+\sqrt{4k-3x^2}}{2} \qquad f_-^k(x) = \frac{-x-\sqrt{4k-3x^2}}{2}$$

☐ Determinare il campo di definizione di $f_\pm^k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

☐ Disegnare il grafico di $f_\pm^1$ precisandone le intersezioni con gli assi

☐ Verificare che $y = f^k_\pm$ se e solo se $x^2 + xy + y^2 = k$

☐ Determinare i punti del grafico di $f^1_\pm$ aventi distanza massima dall'origine.

9.51- *ese6. 94*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \max\{x, x^2, -\arctan x\}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ calcolare $f(-1/2)$

☐ Disegnare i grafici di x, x^2, $-\arctan x$ nello stesso piano cartesiano, precisandone la mutua posizione.

☐ Disegnare il grafico di $x^2 + \arctan x$

9.52- *ese6. 114*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{t^3+1} dt$$

☐ Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ f è definita.

☐ Studiare crescenza e decrescenza di f e tracciare un grafico che tenga conto delle indicazioni ottenute.

☐ Precisare il comportamento di f agli estremi del campo di definizione, calcolando eventuali asintoti.

☐ Studiare la convessità e la concavità di f.

☐ Disegnare il grafico di f tenendo conto di tutti gli elementi trovati.

9.53- *ese6. 116*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Disegnare il grafico di

$$F(x) = \int_0^{|x|} f(t) dt$$

☐ Calcolare

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x)$$

☐ Trovare tutte le primitive di f

☐ Calcolare $F(.1)$ a meno di .001

9.54- *ese6. 121*-

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^n} & x \neq 0 \\ \alpha \quad x = 0 \end{cases}$$

☐ Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ in modo che f sia continua e derivabile.

☐ Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ in modo che f sia derivabile e invertibile in un intorno di 0.

☐ Scelti $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ che soddisfano la precedente domanda, calcolare $f^{-1}(0)$.

☐ Disegnare il grafico di fe di f^{-1} localmente in 0.

☐ Approssimare, se esiste, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ a meno di 10^{-2}

9.55- *ese6. 125*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|}\ln|x+1|$$

☐ Determinare il campo di definizione e di derivabilità di f

☐ Calcolare la derivata di f.

☐ Determinare l'insieme in cui f è crescente e quello in cui f è decrescente

☐ Disegnare il grafico di f.

☐ Calcolare, se esiste, la retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 0$

9.56- *ese7. 1*-
Si consideri la funzione

$$f_k(x) = kx^3 + e^{-x}$$

☐ Disegnare il grafico di f_1

☐ Disegnare il grafico di f_{-1}

☐ Determinare il grafico di f_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

☐ Stabilire se esistono, ed in caso affermativo determinare, i valori di k per i quali la funzione f_k è limitata su $\mathbb{R}_+$

9.57- *ese7. 3*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^3+1}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Disegnare il grafico di

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

☐ Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

☐ Trovare tutte le primitive di f

9.58- *ese7. 5-*
Si consideri la funzione
$$f(x,y) = x^2 + y$$

☐ Disegnare i livelli di f

☐ Scrivere il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$

☐ Disegnare, al variare di x_0 e di y_0, il grafico di $g(x) = f(x,y_0)$ e di $h(y) = f(x_0,y)$

☐ Calcolare
$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$
ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

9.59- *ese7. 7-*
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - x + c}$$

☐ Determinare il dominio di f, al variare di c

☐ Disegnare il grafico di f per $c = 2$

☐ Disegnare il grafico di f per $c = 1$

☐ Disegnare il grafico di f per $c = 0$

☐ Disegnare il grafico di f al variare di $c \in \mathbb{R}$

9.60- *ese7. 9-*
Si consideri la funzione
$$f(x) = \int_{E(x)}^{E(x)+1} \frac{1}{(E(t))^2 + 1} dt$$

☐ Determinare il dominio di f

☐ Calcolarne i limiti agli estremi del campo

☐ Studiare crescenza e decrescenza di f

☐ Studiare la derivabilità di f e calcolarne, ove possibile la derivata prima.

☐ Disegnare il grafico di f

9.61- *ese7. 11*-
Si consideri la funzione

$$f(x,k) = \ln(kx^2) - \arctan(kx)$$

☐ Disegnare il grafico di f per $k = 2$

☐ Disegnare il grafico di $f(\cdot, k)$ per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ fissato

☐ Disegnare il grafico di $f(x, \cdot)$ per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ fissato

9.62- *ese7. 13*-
Si consideri la funzione

$$g(x) = \min\{x, 1/x\}$$

☐ Disegnare il grafico di g

☐ Determinare $\sup g$, $\inf g$, $\max g$, $\min g$.

Sia poi

$$f(x) = \max\{g(x), 0\}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Determinare $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$.

☐ Trovare il rango di f ed il rango di g

☐ Disegnare $|g|$ e $|f|$

9.63- *ese7. 19*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Disegnare il grafico di

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

☐ Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

☐ Trovare tutte le primitive di f

☐ Calcolare $F(.1)$ a meno di $.001$

9.64- *ese7. 22*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x-1|}\ln|x|$$

☐ Determinare il campo di definizione e di derivabilità di f

☐ Calcolare la derivata di f.

☐ Determinare l'insieme in cui f è crescente e quello in cui f è decrescente

☐ Disegnare il grafico di f.

☐ Calcolare, se esiste, la retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$

9.65- *ese7. 26*-
Si consideri la funzione

$$g(t) = \frac{e^{-\ln(t^4+1)}}{t-1}$$

☐ Dopo aver trovato il campo di definizione della funzione assegnata, calcolare l'ordine di infinitesimo di g per $t \to +\infty$ e l'ordine di infinito di g per $t \to 1$.

☐ Determinare il campo di definizione di $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2-x} g(t)dt$

☐ Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

☐ Calcolare $f'(x)$

☐ Disegnare il grafico di g per $t > 1$.

Integrali

10.1- *ese1. 190*-
Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 \tan^2 x\ dx \qquad \int_{-1}^1 x(x^2+1)^k\ dx,\ (k \in \mathbb{N})$$

$$\int_0^3 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2-3x}}\ dx$$

$$\int_{2/3}^1 \frac{x}{\sqrt{2-3x}}\ dx \qquad \int_0^1 e^{x^2} x\ dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} (2x - \sin^2 x)^{17}(2 - \sin 2x)\ dx \qquad \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\ dx$$
$$\int_{1/2}^{1} e^x\sqrt{e^x - 1}\ dx \qquad \int_1^2 \sqrt{e^x-1}\ dx$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{x+1}\ dx \qquad \int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\ dx$$
$$\int_0^{1/2} \frac{x}{x+1}\ dx \qquad \int_{-1/2}^{1} \frac{x^5}{x+1}\ dx$$
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/6} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$\int_0^1 x^2 e^x\ dx \qquad \int_0^1 \frac{3}{2} e^x \sqrt{1+e^x}\ dx$$
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\ dx \qquad \int_0^1 \frac{2-x^2}{x^2+3x+2}\ dx$$
$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x\ln(x)} \qquad \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

10.2- *ese1. 191*-
Studiare le seguenti funzioni integrali, prima senza calcolare l'integrale e poi trovando una primitiva. Confrontare i risultati ottenuti.

$$f(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2-6t+7}\ dt \qquad f(x) = \int_0^x (\sin t)^{1/2} \cos t\ dt$$
$$f(x) = \int_x^0 (3t+1)^{1/2}\ dt \qquad f(x) = \int_{-x}^0 \frac{dt}{7t+6}$$
$$f(x) = \int_{-x}^x \sin t \ln \sin t\ dt \qquad f(x) = \int_{-x}^x \frac{1}{t} \sin \ln |t|\ dt$$
$$f(x) = \int_2^x (-2t-t^2)^{1/2}\ dt \qquad f(x) = \int_1^x [t]\ dt$$

$$f(x) = \int_{1/2}^x \varphi(t)\ dt, \text{ ove } \varphi(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t < 0 \\ 1/\sqrt{t-t^2} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 1/2 - t & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

10.3- *ese1. 192*-
Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+10}} \qquad \int_{-\pi}^{+\infty} \frac{x}{e^x+1}\ dx$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sin x}\ dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} \qquad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \qquad \int_0^1 \frac{E(x)}{e^{1/x}}\ dx \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ dt$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)(t+2)}\ dt \qquad \int_{3/2}^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)(t-2)}\ dt \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\ dx$$
$$\int_0^1 \frac{x\ dx}{1-\cos x} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{\tan x - x}} \qquad \int_0^{1/2} \frac{\ln 2x}{2x-1}\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\ dx$$
$$\int_0^1 e^{-1/x} \ln x\ dx \qquad \int_1^{+\infty} e^{-1/x} \ln x\ dx.$$

10.4- *ese1. 193*-
Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-e^x)^\alpha}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{(x - \arctan x)^\alpha}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\ dx}{(x-1)^\alpha}.$$

10.5- *ese1. 194*-
Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x e^t \ln(1+t)\ dt$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x e^{t^2} \ln(1+t)\ dt$$
$$\lim_{y\to +\infty} \frac{\int_0^y \left(e^{x^2} + e^x + 1\right)\ dx}{e^{y^2} + e^y + 1}.$$

10.6- *ese1. 195*-
Calcolare

$$\int_0^{0,2} \sin t^2\ dt \quad \text{con un errore inferiore a } 10^{-2}$$
$$\int_{1/2}^0 \cos t^4\ dt \quad \text{con un errore inferiore a } 10^{-1}$$
$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\ dx \quad \text{con un errore inferiore a } 10^{-3}.$$

10.7- *ese1. 196*-
Studiare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \int_0^x t\ e^{-t^3}\ dt$$
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{e^{t^2} - 1}}\ dt$$
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{e^{t^2} - 1}}\ dt$$
$$f(x) = \int_0^{|x|} \sqrt{1 + t^2 + t^4}\ dt$$
$$f(x) = \int_0^x \arctan \frac{1}{t}\ dt$$

$$f(x)=\int_0^x e^{t^3}\ln(1+t)\ dt; \text{[e calcolare } \ f^{-1}(0),\ \left(f^{-1}\right)'(0)\text{]}$$
$$f(x)=\int_0^x \frac{|t-1|}{\sqrt{t}}\ dt$$
$$f(x)=\int_0^x E(t)\ dt\ (f \text{ è invertibile?})$$
$$f(x)=\int_0^x \left(1+e^{-3t}-e^{-2t}(1+t)-e^{-t}(1-t)\right)\ dt$$
$$f(x)=\int_1^x \frac{t\ln(1+t)}{(t+2)^2}\ dt$$
$$f(x)=\int_0^x e^{\sin t}\ dt$$
$$f(x)=\int_\pi^x \frac{\cos t\sin t}{1+\sin^2 t}\ dt.$$

10.8- *ese1. 197*-
Trovare max, min, flessi, concavità, zeri di

$$f(x)=\int_a^x \varphi(t)\ dt$$

con:

$$\varphi(t)=(\tan t)^{1/2},\ a=\pi/2$$
$$\varphi(t)=E\left(\frac{1}{\sin t}\right)^t,\ a=0$$
$$\varphi(t)=e^{(\sin t)-1},\ a=1/\pi$$
$$\varphi(t)=\int_1^t \frac{1}{\sqrt{r}}dr,\ a=0$$
$$\varphi(t)=\ln(\tan t),\ a=\pi/2.$$

10.9- *ese1. 198*-
Trovare $f\in\mathcal{C}^0([0,+\infty)),\ f\geq 0$ tale che non esista

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

ed esista

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$$

10.10- *ese1. 199*-
Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

$x^6e^{x^7}$	$\dfrac{\cos x}{\sin x}$
$(x-3)(x^2-6x+7)^{-1}$	$\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}$
$(x^3+6x)^7(3x^2+6)$	$(x-3)(x^2-6x+7)^{-5}$
$3x^2\cos x^3$	$x^2\sin x^3$
$3(3x+1)^{1/2}$	$(3x-1)^{1/2}$

$\cos x \sin^{-3} x$ $\quad$ $\cos^5 x \ \sin x$

$(7x-6)^{-1}$ $\quad$ $(2x+6)$

$(x^2+4x+8)^{-1}$ $\quad$ $(\ln x)/x\sqrt{x}$

$(-2x-x^2)^{1/2}$ $\quad$ $\sin \ln \cos x$

$\sin^4 3x \cos 3x$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$

$\dfrac{x^5+2}{x^3-1}$ $\quad$ $x(x^2+1)^k \ k \in \mathbb{R}$

$\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

$|x^2-3x|$ $\quad$ $x^6 e^{\sin x}$

$\dfrac{1}{1+e^x}$ $\quad$ $\dfrac{1}{a+b\cos x}$

$\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad$ $\dfrac{x^3+2}{x^2+2}$

$\dfrac{1}{x^3-1}$ $\quad$ $\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$

$\dfrac{1}{\sin x}$ $\quad$ $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

$\dfrac{1}{1+\sin x}$ $\quad$ $\sin^2 x \cos^2 x$

$\dfrac{\sin^4 x}{\cos x}$ $\quad$ $\dfrac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$

$\dfrac{2x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$ $\quad$ $\dfrac{\sin \ln x}{x}$

$\dfrac{x+2}{x+3}$ $\quad$ $x\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^{1/2}$

$(\ln x)^2$ $\quad$ $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ $\quad$ $\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$x \ln 7x$ $\quad$ $\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}$

$\dfrac{8x+20}{x^2+2x-3}$ $\quad$ $\dfrac{15x+30}{x(x-2)(x-3)}.$

10.11- *ese1. 200*-

Calcolare i seguenti integrali definiti:

$\displaystyle\int_\pi^0 x^2 \cos x^3 \ dx$ $\quad$ $\displaystyle\int_0^\pi \cos x \ dx$

$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{3x+1} \ dx$ $\quad$ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3}{2-x^2} \ dx$

$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 x \sin x \ dx$ $\quad$ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \ dx$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{5x}+2}{e^{3x}-1} \ dx$ $\quad$ $\displaystyle\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3} \ dx$

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2+3\cos^2 x} \ dx$ $\quad$ $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} \ dx$ $\quad$ $\displaystyle\int_0^1 e^x \cos e^x \ dx$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$ $\quad$ $\displaystyle\int_\pi^3 \frac{1}{\sin x} \ dx$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ dt$ $\quad$ $\displaystyle\int_{-1}^{6\pi} \sin(6x-2)\sin(9x-3) \ dx$

$$\int_1^{2\pi+1} \sin^2(2x+2)\ dx \qquad \int_2^3 \frac{(x^3-1)\quad dx}{2x^5-2x^4-4x^3+4x^2+2x-2}$$

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_3^4 x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ dx$$

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2-1}\ dx \qquad \int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{x+2}}\ dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{\frac{x+2}{x}}}\ dx \qquad \int_0^1 \sqrt{3x-1}\ dx$$

$$\int_1^2 (3x^2-x)^{1/2}\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x}\ dx$$

$$\int_2^3 \frac{x+3}{e^x}\ dx \qquad \int_{1/2}^1 \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\ dx$$

$$\int_{-1}^3 (x^3+x)e^{x^2}\ dx \qquad \int_1^4 \frac{x+2}{e^x}\ dx$$

$$\int_0^{\sqrt{1/2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\ dx \qquad \int_4^3 \arctan\frac{x}{1-x^2}\ dx$$

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\ dx \qquad \int_0^{1/2} \frac{t^3}{t^3-1}\ dt$$

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}\ dx \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx$$

$$\int_1^{11} \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}} \qquad \int_{11}^{11} e^{x^2}\ dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x|x-1|}\ dx.$$

10.12- *ese1. 201*-
Sia f continua tale che si abbia

$$\int_1^2 f(x)\ dx = 0$$

esiste $x_0 \in (1,2)$ tale che $f(x_0)=0$? Perché?

10.13- *ese1. 202*-
Calcolare l'area della regione piana compresa fra le curve di equazione:

a) $y = \frac{1}{1+2x^2}\ y = x^2$;
b) $x^2+y^2=16,\ x^2=12(y-1)$;
c) $y = x^2\ln\sqrt{(1-x)},\ y=-x^2$;
d) $xy=1,\ y=\sqrt{1-x^2}$.

10.14- *ese1. 203*-
Calcolare l'area fra il grafico di f e l'asse delle x :

$f(x)=2x,\ x\in[2,6]$ $\qquad$ $f(x)=x^2, x\in[0,4]$
$f(x)=|x|, x\in[-1,3]$ $\qquad$ $f(x)=x^2+x,\ x\in[0,1]$
$f(x)=x-|x|,\ x\in[-1,3]$ $\qquad$ $f(x)=\sin x\cos x,\ x\in[0,2\pi]$
$f(x)=x^4-x^2,\ x\in[-5;5]$ $\qquad$ $f(x)=x^7+x^5,\ x\in[-10,10]$
$f(x)=e^x+\ln x,\ x\in[1,3]$.

10.15- *ese1. 204*-
Data la funzione

$$f(x) = \lg \frac{\sin}{|\sin x|} + \sin \cos x$$

1) Disegnarne il grafico.
2) Trovare, se possibile, una funzione g di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tale che, detto I l'insieme di definizione di f, si abbia $f(x) = g(x)\ \forall x \in I$.

10.16- *ese1. 205*-
Data

$$f(x) = \lg |x + \sqrt{1 + x^2}|$$

Disegnarne il grafico, dire se è invertibile, e dove, e determinare una formula per l'inversa.

10.17- *ese1. 206*-
Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x + x^3}{e^{x^2} - 1} \right)^{x^2/x - \sin x}$$

10.18- *ese1. 207*-
Siano date le due famiglie di funzioni, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = |1 - x^\alpha| \qquad\qquad g_\alpha(x) = \begin{cases} x^3 & \alpha \in \mathbb{Q} \\ 0 & \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Disegnare per qualche valore di α, il grafico di f_α.
ii) Per ogni x fissato, sia

$$h(x) = \sup \{g_\alpha(x), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha che $h(x) \in \mathbb{R}$? Trovare un intervallo $a \leq x \leq b$ in cui h è una funzione invertibile. Disegnare il grafico di h.

10.19- *ese3. 1*-
Data

$$f(x) = \int_{1/2}^{x^2} \frac{\lg t}{t^2(t-1)} dt,$$

disegnare il grafico di f, precisandone dominio, simmetrie, comportamento agli estremi, monotonia. In quali punti f è continua? In quali punti f è derivabile? Trovare un maggiorante di f in $[1/2, +\infty)$.

10.20- *ese3. 3*-
Sia

$$y(x) = \int_0^x \lg(t^4 + t^2 - 6t + k) dt \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Per quali k il dominio di y è $\mathbb{R}$? Per tali k disegnare il grafico di y precisandone comportamento agli estremi del dominio, monotonia e convessità. Determinare un valore di k, in modo che il dominio di y non sia tutto $\mathbb{R}$ e, per tale k disegnare il grafico di y.

10.21- *ese3. 5*-

Sia

$$u(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \geq k \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}} & \text{se } x < k \end{cases},$$

k parametro reale. Determinare tutti i valori di k tali che u abbia primitive in $\mathbb{R}$. Calcolare esplicitamente tutte le primitive di u in $\mathbb{R}$.
Se $k = 1$ trovare un polinomio p tale che $p(x)$ approssimi $\int_0^x u(t)dt$ per ogni $x \in [1/3, 0]$ a meno di $1/10$.

10.22- *ese3. 7-*
Sia

$$f(x) = \int_0^x t \lg \left| \frac{2t-1}{t-2} \right| dt.$$

Determinare il dominio di f. Determinare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ tali che esista $f'(x)$, e calcolarla. Calcolare $f'(1)$, se esiste.

10.23- *ese3. 9-*
Sia

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{|x|+1}\right).$$

Disegnare il grafico di f (non è richiesto il calcolo di f''). Calcolare l'ordine di convergenza (se esiste) di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Trovare tutti i valori del parametro reale α tale che converga $\int_0^{+\infty} e^{\alpha\ x} f(x)dx$.

10.24- *ese3. 11-*
Sia $f(x) = \cos x/x$. Disegnare il grafico di f in $(0, \pi/2]$ precisandone monotonia e convessità. Determinare due numeri A, B positivi (se esistono) tali che $A \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)dx \leq B$. Calcolare (se esiste) $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{\pi/2} f(t)dt$.
Calcolare (se esiste) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_{\pi/4}^{(\pi/4)+x} f(t)dt$.

10.25- *ese3. 14-*
Sia

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 1, \ x \leq 0 \\ b + \arctan x, \ x > 0 \end{cases} \quad a, b \text{ parametri reali.}$$

Per quali a, b f è continua? Per quali a, b, f è continua ed invertibile in $\mathbb{R}$? Per tali a, b determinare esplicitamente, se possibile, l'inversa, precisandone il dominio. Per quali a, b, f è derivabile in $\mathbb{R}$? Stabilire per quali a, b, f ha primitive in $\mathbb{R}$ e determinarle esplicitamente tutte.

10.26- *ese3. 15-*
Sia

$$g(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{\sqrt{x^3 + tx + 1}}, \quad t \text{ parametro reale.}$$

Per quali t converge $\int_0^{+\infty} g(x)dx$?. Per $t = 2$ determinare, se esiste, un maggiorante di $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. Per $t = 0$ determinare, se esiste, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, tale che $\int_0^T g(x)dx$ differisca da $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ per al più 10^{-2}.

10.27- *ese3. 19-*
Siano

$$f(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{(t^2-1)}} dt \qquad g(x) = x \quad , \quad h(x) = \frac{2}{x-1}$$

a) Disegnare il grafico di f, precisando: l'insieme di definizioine I, l'insieme di continuità, derivabilità, limiti agli estremi del campo e monotonia, (non è richiesto lo studio di f'').

b) Stabilire se f si annulla in I e, in caso affermativo, determinarne l'ordine di infinitesimo.
Giustificare ogni affermazione.

10.28- *ese3. 23-*
Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$, è convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t^\alpha}{t^\alpha - 1} dt.$$

Determinarne un maggiorante razionale, per uno a scelta di tali α.
Giustificare ogni affermazione.

10.29- *ese3. 24-*
Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \leq 0 \\ \sin(x-a) & \text{per } 0 < x < 2 \\ bx + c & \text{per } x \geq 2. \end{cases}$$

Trovare tutti e soli gli $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che f sia:
1) continua in $\mathbb{R}$;
2) derivabile in $\mathbb{R}$;
3) ammetta primitive in $\mathbb{R}$; per tali valori di $a, b, c, \in \mathbb{R}$ determinarle tutte esplicitamente, come funzioni elementari a tratti.
Giustificare ogni affermazione.

10.30- *ese3. 25-*
Calcolare a meno di 10^{-18}

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{30}} dx.$$

Giustificare ogni affermazione.

10.31- *ese3. 29-*
Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_0^{|x|} \frac{\ln|2-t|}{(t-1)^{4/3}} dt.$$

a) Determinare il campo di definizione di f;
b) determinare i limiti agli estremi del campo;
c) determinare gli insiemi di crescenza e decrescenza;
d) determinare eventuali massimi e minimi;
e) disegnare il grafico di f;
f) determinare eventuali asintoti.
Giustificare ogni affermazione.

10.32- *ese3. 31-*
Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = t^\alpha e^{-t} \ln t \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \alpha > 0.$$

Disegnare il grafico di f_α precisando:
- campo di definizione,
- crescenza, decrescenza, massimi e minimi,
- derivabilità in 0 e in 1, $f'_\alpha(0)$ ed $f'_\alpha(1)$.

Si determini inoltre per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, esiste

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt.$$

Giustificare ogni affermazione.

10.33- *ese3. 35-*
Sia:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq 3 \\ kx^2 - 2 & \text{se } |x| > 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare per quali k f ha primitive in $\mathbb{R}$ e calcolare se esiste, la primitiva y di f in $\mathbb{R}$ tale che $y(0) = 0$. Per quali k tale y appartiene a $C^2(\mathbb{R})$? Disegnare il grafico di

$$z(x) = \int_1^x f(t)dt \quad \text{quando } k = 1.$$

Stabilire, se $k = 2$, se converge e perchè $\int_{-4}^{3} f(x)dx$.
Per quali $k \in \mathbb{R}$ esistono funzioni u tali che $u''(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

10.34- *ese3. 41-*
Data

$$f(x) = e^{x^3 - x^2},$$

determinate il polinomio di Mc-Laurin di ordine 6 di f e calcolare a meno di 10^{-2} $\int_0^1 f(x)dx$ Verificare che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge e trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\left| \int_a^0 f(x)dx - \int_{-\infty}^0 f(x)dx \right| \leq 10^{-2}$$

10.35- *ese3. 46-*
Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^{2x} + x},$$

disegnare il grafico di f precisando l'insieme di definizione, i limiti agli estremi e il segno. Verificare inoltre la monotonia di f in un intorno di $x_0 = 0$. Disegnare quindi il grafico di $y(x) = \int_0^x f(t)dt$, precisandone il dominio, i limiti agli estremi e la monotonia. Integrando per parti, stabilire infine se $\int_{-\infty}^{-\pi} f(x)dx$ converge o non converge.

10.36- *ese4. 7-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{1}{x}} \frac{t^2 + \frac{1}{t^{10}}}{t-1} dt$$

☐ Il campo di definizione di f è $D =$......

☐ f è derivabile in $D' =$......

☐ La sua derivata è $f'(x) =$......

☐ Calcolare $\lim_{x\to 0} f(x) = \ldots\ldots$

☐ Calcolare $\lim_{x\to 1} f(x) = \ldots\ldots$

☐ Calcolare $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ldots\ldots$

10.37- *ese4. 9*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{E(x)} \frac{|\sin(t)|}{t^{3/2}} dt$$

ove E indica la funzione parte intera.

☐ Il campo di definizione di f è $D = \ldots\ldots$

☐ f è derivabile in $D' = \ldots\ldots$

☐ La sua derivata è $f'(x) = \ldots\ldots$

☐ Disegnare il grafico di f

10.38- *ese4. 13*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{x} E(\ln(t)) dt$$

ove indichiamo con E la funzione parte intera

☐ Il campo di definizione di f è $D = \ldots\ldots$

☐ Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
◯Esiste e vale. . . . . . ◯Non esiste

☐ Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} f(x)$
◯Esiste e vale. . . . . . ◯Non esiste

10.39- *ese4. 18*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{x} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} dt$$

☐ Il campo di definizione di f è $D = \ldots\ldots$

☐ Calcolare, se esistono, $a = \lim_{x\to +\infty} f(x)$ e $b = \lim_{x\to -\infty} f(x)$
◯a Esiste e vale. . . ◯a Non esiste
◯b Esiste e vale. . . ◯b Non esiste

☐ Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} f(x)$
◯Esiste e vale. . . . . . ◯Non esiste

☐ Calcolare

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} dt$$

☐ Calcolare

$$f\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

10.40- *ese4. 25-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+x^2+3x-5}$$

☐ Trovare una primitiva F di f precisandone il dominio. $F(x) =$......

☐ Trovare tutte le primitive F di f precisandone il dominio. $F(x) =$......

☐ Calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)dx =$......

☐ Calcolare $\int_\pi^{+\infty} f(x)dx =$......

☐ Trovare una primitiva F di f tale che $F(0) = 1$ precisandone il dominio. $F(x) =$......

☐ Trovare tutte le primitive F di f tale che $F(0) = 1$ precisandone il dominio. $F(x) =$......

10.41- *ese5. 7-*
Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \sin^2(x+t)e^t dt$$

☐ Trovare il campo di derivabilità di F $I =$ ......

☐ Calcolare $\quad F'(x) =$ ......

☐ Verificare che $F'(x) + F(x) = 2\sin^2(2x)e^x$

10.42- *ese5. 36-*
Calcolare i seguenti integrali (tra parentesi è indicato un suggerimento)

☐

$$\int_0^1 x\sin(x)dx$$

(per parti)

10.43- *ese6. 7-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{|t-1|}(t+1)}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{|t-1|^3}(t+1)}$$

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{(\sqrt[3]{t}+1)(t^2+1)}$$

☐ Determinare il campo di definizione D di f $D = \ldots\ldots$

☐ Determinare l'insieme E dei punti di D in cui f è derivabile $E = \ldots\ldots$

☐ Disegnare il grafico di f in D

10.44- *ese6. 9*-
Calcolare

☐ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(t-1)} = \ldots\ldots$

☐ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt = \ldots\ldots$

☐ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}(t+1)} = \ldots\ldots$

10.45- *ese6. 13*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 1, \ x \le 0 \\ b + \arctan x, \ x > 0 \end{cases} \quad a, b \text{ parametri reali.}$$

☐ Per quali a, b f è continua in $\mathbb{R}$? $a \in \ldots\ldots$ $b \in \ldots\ldots$

☐ Per quali a, b, f è continua ed invertibile in $\mathbb{R}$? $a \in \ldots\ldots$ $b \in \ldots\ldots$

☐ Per a, b determinati come nel punto F trovare esplicitamente l'inversa di f, precisandone il dominio. $f^{-1}(y) = \ldots\ldots$ definita in $D = \ldots\ldots$

☐ Per quali a, b, f è derivabile in $\mathbb{R}$? $a \in \ldots\ldots$ $b \in \ldots\ldots$

☐ Per $a = 2$, $b = 0$ trovare, se esiste una primitiva g di f in $\mathbb{R}$ $g(x) = \ldots\ldots$

10.46- *ese6. 15*-
Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_0^{|x|} \frac{\ln|2-t|}{(t-1)^{4/3}} dt.$$

☐ Determinare il campo di definizione I di f; $I = \ldots\ldots$

☐ Determinare se i limiti agli estremi del campo di definizione di f sono finiti o infiniti

☐ Determinare gli insiemi di crescenza C e decrescenza D di f $C = \ldots\ldots$ $D = \ldots\ldots$

☐ Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativo di f Punti di massimo relativo Punti di minimo relativo

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Determinare eventuali asintoti per f

10.47- *ese6. 19*-
Calcolare

$$\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}dx$$

Calcolare

$$\int_1^2 \frac{1}{\sin x}dx$$

Calcolare

$$\int_0^1 x \ \sin x \ dx$$

Calcolare

$$\int_0^\pi x^2 \ \sin x \ dx$$

10.48- *ese6. 27*-
Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \frac{e^t}{|2t-\sqrt{2}|}dt.$$

☐ Determinare il campo di definizione I di f; $\quad I = \dots\dots$

☐ Determinare i limiti agli estremi del campo di definizione di f

☐ Calcolare $f'(x)$: $\quad f'(x) = \dots\dots$

☐ Stabilire l'insieme C in cui $f'(x) > 0$ e l'insieme D in cui $f'(x) < 0$: $\quad C = \dots\dots \quad D = \dots\dots$

☐ Disegnare il grafico di f

10.49- *ese6. 37*-
Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_{\cos(x)}^{1+\cos(x/2)} \frac{x}{x-1}$$

☐ Determinare il campo di definizione I di f;

☐ Determinare l'insieme J in cui f è derivabile;

☐ Calcolare $f(0) =$

☐ Calcolare, ove esiste, $f'(x) =$

☐ Determinare $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

10.50- *ese6. 62*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_x^{\arctan x} \tan t dt$$

☐ Stabilire per quali valori di x è definita f.

☐ Determinare l'insieme in cui f è continua e l'insieme in cui f è derivabile.

☐ Calcolare, dove esiste, la derivata di f studiandone il segno.

☐ Disegnare il grafico di f .

☐ Provare che f è una funzione pari.

10.51- *ese6. 66*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ \\ ax^2 + bx + c & x > 1 \end{cases}$$

☐ Stabilire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ f è continua in $x = 1$

☐ Stabilire per tali valori dove f è continua

☐ Stabilire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ f è derivabile in $x = 1$

☐ Stabilire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ e su quali sottoinsiemi f ammette primitiva

☐ Determinare tutte le primitive di f

10.52- *ese6. 68*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_{x/2}^{x} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{t-1}(t^2-1)} dt$$

☐ Stabilire per quali valori di x è definita f.

☐ Determinare l'insieme in cui f è continua e l'insieme in cui f è derivabile.

☐ Calcolare, dove esiste, la derivata di f .

☐ Calcolare

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

.

10.53- *ese6. 82*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \tan x + \frac{x}{3}$$

☐ Provare che f è crescente strettamente sugli intervalli $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

☐ Calcolare i limiti di f per $x \to (\pm\frac{\pi}{2} + k\pi)^{\pm}$

☐ Dimostrare che f ammette uno ed un solo zero in ogni intervallo $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, precisando se si trova in $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$ o in $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.
Si consideri poi la funzione

$$g(x) = x\sqrt[3]{\sin x}$$

☐ Calcolare g' e studiarne il segno. (È consigliabile ricordare l'affermazione del punto precedente.)

☐ Verificare che g è una funzione pari e determinarne gli zeri.

☐ Calcolare $g(\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ e $g(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ ed il limite per $n \to +\infty$

☐ Disegnare un grafico approssimativo di g precisandone gli zeri.

☐ Disegnare un grafico approssimativo di $\frac{1}{g}$.
Si consideri infine la funzione

$$h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{g(t)} dt$$

☐ Stabilire il campo di definizione di h Studiare crescenza e decrescenza di h e disegnarne un grafico approssimativo.

☐ Studiare la convessità e la concavità di h.

☐ Disegnare il grafico di h tenendo conto di concavità e convessità.
Si consideri $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

☐ Calcolare

$$\int_{0}^{-\infty} \varphi(t) dt$$

10.54- *ese6. 90*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{3x} - 1}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Precisare gli eventuali punti di massimo e di minimo di f

☐ Determinare tutte le primitive di f.

☐ Disegnare il grafico della primitiva di f che in 1 vale 0.

10.55- *ese6. 92*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{|t-3|}(t-\pi)} dt$$

☐ Stabilire per quali valori di x è definita f.

☐ Determinarne i limiti agli estremi del campo di definizione

☐ Studiare la derivabilità di f

☐ Disegnare il grafico di f

10.56- *ese6. 105*-

Si consideri la funzione

$$g(t) = \frac{e^{-\ln(t^7+1)}}{t^2-1}$$

☐ Dopo aver trovato il campo di definizione della funzione assegnata, calcolare l'ordine di infinitesimo di g per $t \to +\infty$ e l'ordine di infinito di g per $t \to 1$.

☐ Determinare il campo di definizione di $f(x) = \int_x^{x^2-x} g(t)dt$

☐ Calcolare, se esiste, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

☐ Calcolare $f'(x)$

☐ Disegnare il grafico di g per $t > 1$.

10.57- *ese6. 113*-
Si considerino le funzioni

$$f(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-2t}}dt$$

$$a(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad b(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Esprimere f in termini di funzioni elementari.

☐ Disegnare i grafici di a e b avendo cura di precisare la loro mutua posizione.

☐ Determinare il campo di definizione di

$$g(x) = f(b(x)) - f(a(x))$$

☐ Calcolare $g'(x)$.

10.58- *ese7. 15*-
Si considerino le funzioni

$$a(x) = x - E(x) \qquad , \qquad b(x) = 1 + \frac{1}{E(x)}$$

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

☐ Disegnare il grafico di a.

☐ Disegnare il grafico di b.

☐ Determinare i punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali $a(x) \leq b(x)$.

☐ Determinare il campo di definizione di f.

☐ Disegnare il grafico di f precisando se è crescente, decrescente, se ammette punti di massimo di minimo o di flesso.

10.59- *ese7. 17*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_{\sin x}^{2+\cos x} (t-1)\ln(t-1)dt$$

☐ Determinare il campo di definizione D di f

☐ Determinare il sottoinsieme di D in cui f è continua

☐ Calcolare, dove esiste, $f'(x)$

☐ Stabilire se f è crescente o decrescente

☐ Disegnare il grafico di f.

10.60- *ese7. 24*-
Si considerino le funzioni

$$f(y) = \int_0^y \frac{1}{2t-1}dt$$

$$a(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad b(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Esprimere f in termini di funzioni elementari.

☐ Disegnare i grafici di a e b avendo cura di precisare la loro mutua posizione.

☐ Determinare il campo di definizione di

$$g(x) = f(b(x)) - f(a(x))$$

☐ Calcolare $g'(x)$.

10.61- *ese7. 28*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_{\sin x}^{+\infty} \frac{\ln(t-1)}{t^2}dt$$

☐ Determinare il campo di definizione della funzione assegnata

☐ Studiare il segno di f

☐ Studiare la crescenza di f

☐ Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

☐ Studiare la derivabilità di f e disegnarne il grafico.

Equazioni Differenziali

11.1- *ese1. 208-*
Per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} y''(x) + by(x) = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

è limitata su tutto $\mathbb{R}$?

11.2- *ese1. 209-*
Data l'equazione differenziale

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = 2e^{3x}$$

a) trovare le soluzioni per ogni valori di $\alpha \in \mathbb{R}$,
b) trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono soluzioni y per le quali

$$y(x) \to -\infty \quad \text{se} \quad x \to +\infty$$

c) trovare α e $k \in \mathbb{R}$ tali che la corrispondente soluzione $\bar{y}$ diverga negativamente se $x \to +\infty$ e inoltre

$$\bar{y}(0) = 0 \qquad \bar{y}'(0) = k$$

11.3- *ese1. 210-*
Trovare tutte le soluzioni dei seguenti problemi:

$$(a) \qquad \begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - 3y'(x) = 0 \\ y(0) \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} y''(x) + (4i+1)y'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \qquad \begin{cases} y''(x) + (3i-1)y'(x) - 3iy(x) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(d) \qquad \begin{cases} y''(x) + 10y(x) = 0 \\ y(0) = \pi \\ y'(0) = \pi^2 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{ll}
(e) & y''(x) + 16y(x) = 0 \\
(f) & \begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \\
(g) & \begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}
\end{array}
$$

11.4- *ese1. 211*-
Si consideri l'equazione

$$Ly''(x) + Ry'(x) + \frac{1}{C}y(x) = 0 \quad , \quad \text{con } L, R, C \in \mathbb{R}_+$$

a) trovare tutte le soluzioni nei tre casi

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \gtreqless 0$$

;

b) dimostrare che tutte le soluzioni tendono a zero per $x \to +\infty$ in ciascuno dei tre casi di a);

c) trovare la soluzione tale che

$$y(0) = 1, \ y'(0) = 0$$

nel caso

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0$$

d) mostrare che,nel caso

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0$$

ogni soluzione può essere scritta nella forma

$$y(x) = Ae^{ax}\cos(\beta x - \omega)$$

dove $A, a, \beta, \omega \in \mathbb{R}$.
Determinare a e β.

11.5- *ese1. 212*-
Risolvere le equazioni:

$$
\begin{array}{ll}
y'(x) - 2y(x) = 1, & y'(x) - 2y(x) = x^2 + x \\
y'(x) + 3y(x) = e^{ix} & y'(x) + y(x) = e^x \\
3y'(x) + y(x) = 2e^{-x} & y'(x) + iy(x) = x, \ y(0) = 2
\end{array}
$$

11.6- *ese1. 213*-
Data l'equazione

$$Ly'(x) + Ry(x) = E$$

con $L, R, E \in \mathbb{R}_+$

a) Risolvere l'equazione.

b) Trovare la soluzione tale che
$$y(0) = I_0, I_0 \in \mathbb{R}_+.$$
c) Disegnare il grafico della soluzione in b) se $I_0 > E/R$.
d) Mostrare che ogni soluzione tende a E/R se $x \to +\infty$.

11.7- *ese1. 214*-
Data l'equazione
$$Ly'(x) + Ry(x) = E \sin \omega x \qquad \text{con} \qquad L, R, E, \omega \in \mathbb{R}_+$$
a) trovare la soluzione tale che
$$y(0) = 0$$
b) mostrare che può essere scritta come
$$y(x) = \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{-R}{L}x} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega x - \alpha)$$
con α tale che
$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \ \sin \alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$
c) disegnarne il grafico.

11.8- *ese1. 215*-
Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni
$$\begin{aligned}
&y''(x) + \frac{1}{2}y'(x) + y(x) = 0 \\
&y''(x) + \frac{1}{2}y'(x) + y(x) = x + 1 \\
&y'' = 2\alpha y'(x) - y(x) + 1 \\
&y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0 \\
&y'' + 2y'(x) + y(x) = 0 \\
&y''(x) - 9y'(x) = 0 \\
&y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = 0 \\
&y''(x) + ky(x) = 0 \ (k \in \mathbb{R}) \\
&y''(x) - 4y(x) = x^2 e^{2x} \\
&y''(x) - 4y'(x) - 4y(x) = \sin 2x + e^{2x} \\
&y''(x) + 2y'(x) 2y(x) = e^x \sin x \\
&y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x} \\
&y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x \\
&y(x) = y'' + y'(x) \\
&y''(x) + y'(x) = 0 \\
&y''(x) + y(x) = 0 \\
&y''(x) = -2y'(x) - 3y(x) + e^{-x} \cos x
\end{aligned}$$

11.9- *ese1. 216*-
Assegnati i problemi
a) $y'(x) - 10y(x) = e^{-x}, \ y(0) = \alpha,$
b) $z'(x) - 10z(x) = e^x, \ z(0) = \beta.$

Determinare α e β tali che

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{z(x)}{y(x)}\right| = +\infty$$

11.10- *ese1. 217*-
Trovare l'integrale generale di

$$y''(x) + 4y(x) = x + \frac{1}{\cos 2x}$$

$$y''(x) = -y(x) + 2x\cos x$$

$$y'''(x) + 2y'' + y'(x) = 2\sin x + 3\cos 2x$$

11.11- *ese1. 218*-
Datal'equazione

$$y'' + 2y'(x) + \lambda y(x) = e^{-x}, \;\; \lambda\in\mathbb{R}, x\le 0$$

per quali λ tutte le soluzioni sono infinitesime all'∞?
Per quali λ hanno limite $a+\infty$ e per quali λ esiste una soluzione che tende $a+\infty$ per $x\to+\infty$?

11.12- *ese1. 219*-
Data l'equazione

$$y''(x) - y'(x) + ky(x) = 2xe^{x/3}$$

a) Determinare al variare di k tutte le soluzioni,
b) Siano u_1 e u_2 due soluzioni linearmente indipendenti di

$$y'' - y'(x) = 0$$

. Determinare un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di grado minimo possibile avente come soluzioni

$$u_1, u_2 \;\; \text{e} \;\; u_3 = \cos x.$$

c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione trovata al punto b).

11.13- *ese1. 220*-
Determinare gli eventuali valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ per i quali esiste la soluzione in $[0,1]$ di

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = x - \cos x \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y'(0) = \lambda \end{cases}$$

Stabilire se esiste la soluzione in $[0,1]$ di

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = \sin 2x \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

11.14- *ese1. 221*-
Data l'equazione differenziale

$$y'(x) + xy(x) + \sqrt{y(x)}x = 0$$

determinare, se esistono, le soluzioni
a) verificanti la condizione iniziale $y(0) = 0$;
b) verificanti la condizione iniziale $y(0) = -1$,
c) verificanti la condizione inizilale $y(0) = 1$.

11.15- *ese1. 222*-
Dato il problema

$$(*) \qquad \begin{cases} xy(x)y'(x) + y^2(x) - x = 0 \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

a) Trovare una soluzione $\bar{y}$ di $(*)$ in un opportuno intorno di $x = 1$,
b) determinare il più grande intervallo I a cui $\bar{y}$ può essere estesa come funzione almeno di classe $\mathcal{C}^1(I)$.

11.16- *ese1. 223*-
Studiare al variare di α e di β

$$\begin{cases} xy''(x) - y'(x) = 0 \\ y(\alpha) = 0 \\ y'(\alpha) = \beta \end{cases}$$

11.17- *ese1. 224*-
Studiare

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x}y(x) + \left(\dfrac{\sin y(x)}{x}\right)^{-1} \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy'(x) - y(x) + 1 = 0 \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^2(x) + 1}{1 - 2xy(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

11.18- *ese1. 225*-
Risolvere

$$\begin{cases} y'(x) = xy^3(x) + y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

In particolare trovare y_1 e y_2 tali che $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$.

11.19- *ese1. 226*-
Determinare i punti del piano per cui vi è unicità locale per l'equazione

$$y(x) = xy'(x) - \sqrt{y'(x)}$$

Trovare tutte le soluzioni tali che $y(1) = -1/4$.
Tra queste ve n'è qualcuna che passi per $(0, -1)$ e sia definita almeno in $[0, 1]$?

11.20- *ese1. 228*-
Studiare

$$y'(x) = (1 + y(x))\sqrt{y(x)}$$

in quali punti sono verificate le condizioni di esistenza e unicià?
$(0, 1)$ è fra questi?
In caso affermativo, qual'è il campo di esistenza della relativa soluzione?

11.21- *ese1. 229*-
Risolvere il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y''(x) = \left[y(x)y'(x) + \sqrt{y}'(x)\right] y'(x) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

11.22- *ese1. 230*-
Determinare l'integrale generale dell'eq. differenziale

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) + 3y(x) = \sqrt{x}$$

11.23- *ese1. 231*-
Studiare i seguenti problemi differenziali

$$\begin{cases} \cos xy''(x) - \sin xy'(x) = 0 \\ y(0) \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{\tan y'(x)}{x} = 0 \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy''(x) = y'(x) = xe^x \\ y(a) = 1 \qquad\qquad a \in \mathbb{R} \\ y'(a) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy''(x) - y'(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 6x + 8} \\ y(3) = 1 \\ y''(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy''(x) - y'(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \\ y(2) = 3 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(y'(x)\right)^2 + 2\left(y'(x)\right)^{3/2} y(x) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy'(x) - 2y(x) = x^5 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) = x^3 \\ y(0) \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = x \sin x \\ y(\pi/2) = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{4 - y^2(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{9 - y^2(x)} \\ y(0) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
$$y''(x) = -\frac{2}{y(x)}$$
$$(x-1)y'(x) = xy(x)$$
$$(x^2 - 4)y'(x) = y(x),$$
$$y'(x) = 1 + \frac{y(x)}{x}$$
$$y'(x) - xy(x) = 0$$
$$y'(x) - 2y(x) = x^2 + 1$$
$$y'(x) - \sin xy(x) = 0$$
$$y'(x) - 3y(x) = 0,$$
$$y'(x) - e^x y(x) = 1$$
$$y'(x) - \frac{1}{1+x^2} y(x) = x$$
$$xy'(x) + y(x) = x \cos x$$
$$y\left(\pi/2\right) = 2$$
$$y'(x) + y(x) \cot x = 0 \qquad \text{in} \qquad (0, \pi)$$
$$y'(x) = \frac{x^3}{y^2(x)}$$
$$\tan x \cos y(x) = -y'(x) \tan y(x)$$
$$(x+1)y'(x) + y^2(x) = 0$$
$$y'(x) = (y(x) - 1)(y(x) - 2)$$
$$y(x)\sqrt{1 - x^2}y'(x) = x$$
$$y'(x) = \frac{x^2 + 2y^2(x)}{xy(x)}$$
$$xy(x)(1 + x^2)y'(x) = 1 + y^2(x)$$
$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

11.24- *ese1. 232*-
Studiare

$$\begin{cases} (2y^2(x) - x^2)y'(x) + 3xy(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
y'(x)x = \tan y(x) \\
y(1) = \pi \quad y(1) = \dfrac{\pi}{4} \quad y(1) = \dfrac{2}{3}\pi
\end{cases}
$$

Per quali α esistono soluzioni dei due problemi tali che $y(0) = \alpha$?
Per quali α vi è unicità?

11.25- *ese1. 233*-
Studiare i seguenti problemi

$$
\begin{cases}
-xy'(x) = \cot y(x) \\
y(-1) = \pi, \quad y(-1) = \dfrac{\pi}{4}, \quad y(-1) = \dfrac{2}{3}\pi
\end{cases}
$$

Per quali α esistono soluzioni tali che $y(0) = \alpha$?

11.26- *ese1. 234*-
Determinare un insieme D ed una funzione di classe $\mathcal{C}^1(D)$, il cui grafico passi per il punto $(2, 1)$ e tale che la retta tangente al grafico in ciascun punto incontri una ed una sola volta l'asse x e l'ascissa del punto d'incontro sia il quadrato dell'ascissa del punto di tangenza al grafico.
Qual'è il massimo intervallo su cui si può definire la soluzione di tale problema?

11.27- *ese1. 235*-
Trovare le curve in $\mathbb{R}^2$ tali che la tangente in ogni punto disti dall'origine il valore assoluto dell'ascissa di tale punto (è conveniente nel corso dello svolgimento assumere y^2 come funzione incognita).

11.28- *ese1. 236*-
Studiare

$$
\begin{cases}
xy(x)y'(x) = y^2(x) - x^4 \\
y(1) = 1
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y''(x) + (1 - x^2)y'(x) = 0 \\
y(0) = 0 \\
y'(0) = 2
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y'(x) = xy''(x) \\
y(1) = 1 \\
y'(1) = -1
\end{cases}
$$

11.29- *ese1. 237*-
Determinare la soluzione di

$$
\begin{cases}
y''(x) - 2\lambda y'(x) + 2\lambda^2 y(x) = e^x \\
y(0) = \alpha & \lambda \in \mathbb{R} \\
y'(1) = \beta
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x(\tan y(x))y'(x) = 1 \\
y(5) = 100
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) - = x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = x \sin x \\ y(\pi/2) = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) \cos y(x)(2x + -4 \sin y(x) - 3) = 2 \sin y(x) - x - 3 \\ y(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$
$$\begin{cases} y''(x) = y(x)y'(x) \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$$
$$\begin{cases} y''(x) = -y^2(x) - y(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \lambda \end{cases}$$
$$\begin{cases} y''(x) - x^2(y'(x))^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
$$y'' - xy'(x) + y(x) = 0 \qquad ((y(x) = x \text{ è soluzione})$$
$$xy'(x) + y(x) = x|\cos x|$$
$$y'(x) = \frac{3x + 2y(x) + 1}{3x + 2y(x) - 1}$$
$$y'(x) = \frac{x^2 - y^2(x)}{xy(x)}$$
$$\frac{xy(x)y'(x)}{(y(x) - 1)(1 - x)} = 1$$
$$\frac{y'(x)}{\sin x} - y(x) = 0$$
$$y'(x) + y(x) = y^2(x)(\cos x - \sin x)$$
$$y'(x) + y(x) \cot x = 2 \cos x \qquad \text{in } (0, \pi)$$
$$xy'(x) - y(x) + xy^3(x)(1` + \lg x) = 0$$
$$xy'(x) - y(x) + xe^{\frac{y(x)}{x}} = 0$$
$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = 0$$

.

11.30- *ese1. 238*-
Trovare le funzioni f di classe $\mathcal{C}^2$ su $(0, +\infty)$ tali che se t è la tangente al grafico di f e P è l'intersezione del grafico di f con l'asse delle ordinate, allora la perpendicolare per P a t passa per $(1, 0)$.

11.31- *ese1. 239*-
Studiare i seguenti problemi:

$$y'(x) = \frac{2\sqrt{1 - y(x)}}{x^2}$$
$$y'(x) = -2xy^2(x)$$
$$y'(x) = -\frac{1 - x}{1 - y(x)} \frac{\sqrt{2y(x) - y^2(x)}}{\sqrt{2x - x^2}}$$
$$y'(x) = \frac{y(x) - 1}{\sin(y(x) - 1)} \sqrt{1 - x^2}$$

$$y'(x) = \frac{2x + +y(x)}{x - 2y(x)}$$
$$y'(x) = \frac{3x^2 - y^2(x)}{x^2 + y^2(x)}$$
$$y'(x) = \left(\frac{2x + y(x) - 4}{x + 2y(x) - 5}\right)^2$$
$$y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + \frac{5x + 4}{2\sqrt{x - 1}}$$
$$y'(x) = -xy(x) + e^{-y'(x)}$$
$$y'(x) = xy(x)\left(\frac{2}{1 + x^2} + y^2(x)\right)$$
$$y'(x) + (\tan x)y(x) + (\sin x)\sqrt[3]{y^2(x)} = 0$$
$$y'(x) = \frac{y(x)}{6x} + \frac{1}{3x^2y^5(x)}$$
$$x^2 = 4y(x) - (y'(x))^2.$$
$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2(x^2 - 1)}\frac{-2y(x)}{x} + \frac{x^2}{x^2 - 1}$$
$$y(x) = y''(x) - (y'(x))^2 - 3x^2y^2(x) = 0$$
$$\begin{cases} y'(x) = -(\tan x)y(x) + \cos^2 x e^{\sin x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

11.32- *ese1. 240*-
Trovare, se ne esistono, gli insiemi D e le curve di equazione $y = y(x)$, di classe $\mathcal{C}^2(D)$, che hanno un estremo nel punto $(0, 1)$ e l'altro sulla retta $x = 1$, soddisfano l'equazione differenziale $y''(x) = y'(x)$ e hanno lunghezza minima
Si ricordi che se una curva ha equazione $y = y(x), x \in [a, b]$ la sua lunghezza è data da

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

11.33- *ese1. 241*-
Studiare:

$$y'(x) = y(x)\frac{\tan x + 1}{\cos}$$
$$y'(x) = x^2y(x)$$
$$y(x)y'(x) = x$$
$$y'(x) = \frac{x + x^2}{y(x) - y^2(x)}$$
$$y'(x) = \frac{e^{x-y(x)}}{1 + e^x}$$
$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{x - y(x)}$$
$$y'(x) = \frac{x^2 + xy(x) + (y(x))^2}{x^2}$$
$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{xy(x) + x^2}$$

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x} - xy^2(x)$$
$$xy(x)y'(x) = 1 - x^2$$
$$y'(x)\tan x = y(x)$$
$$y'(x) = (x + y(x))^2,$$
$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - 1$$
$$y'(x) = -\frac{x + y(x)}{x}$$
$$(2x - y(x)) + (4x - 2y(x) + 3)y'(x) = 0$$
$$y'(x) + \frac{2y(x)}{x} = x^3$$
$$y^2(x) = (2xy(x) + 3)y'(x)$$
$$3xy'(x) = y(x)(1 + x\sin x - 3y^3(x)\sin x)$$
$$y'(x) - \frac{y(x)}{1 - x^2} = 1 + x$$
$$(x - y(x))y(x) - x^2y'(x) = 0;$$
$$y'(x)y'''(x) + y'(x)^2 - 2(y''(x))^2 = 0$$
$$y(x) = x + y'(x) + \sin\ y'(x).$$
$$\begin{cases} (1 + e^x)y(x)y'(x) = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x - y^2(x) + x) - (x^2y(x) - y(x)) = y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x)\sin x = y(x)\tan y(x) \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (2x + 3y(x) - 1) + (4x + 6y(x) - 5) \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

11.34- *ese1. 242*-
Siano f e g soluzioni di
$$y'(a) - a(x)y(x) = 0, \qquad a \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R})$$
Può essere il prodotto $f \cdot g$ soluzione di tale equazione? In quali casi lo è?

11.35- *ese1. 243*-
Studiare:
$$\begin{cases} y'(x) = xy'' + (y'(x))^2 \\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy'(x) = x^2 + xy(x) - y(x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) + (\cos x)y(x) = \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (1 + x)y'(x)y(x) = 4x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

11.36- *ese1. 244*-
Sia data l'equazione

$$y'(x) = y(x)\sqrt{1 - y(x)}\sqrt{\cdot + x - 1}$$

a) Trovare le eventuali soluzioni tali che $y(2) = 0$
b) Trovare le eventuali soluzioni tendenti a 0 per $x \to +\infty$
c) Determinare, se esistono, delle soluzioi tendenti a 1 per se $x \to +\infty$
d) Trovare le eventuali soluzioni tali che $y(z) = 1$

11.37- *ese1. 245*-
Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y'\frac{(x)}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

Trovare se esistono delle soluzioi tendenti $a - 1$ per $x \to 0$.

11.38- *ese1. 246*-
Dato il problema

$$\begin{cases} y'(x) = (a + y(x))(y(x))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Stabilire quante soluzione ha;
b) Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che la corrispondente soluzione sia strettamente crescente e convessa in opportuno intorno di 0,
c) Determinare la soluzione per $a = 1$.

11.39- *ese1. 247*-
Risolvere

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt[3]{y(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

precisando il campo di definizione della soluzione.

11.40- *ese1. 248*-
Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{xy(x)}{x^2 + y^2(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

precisando il campo di definizione della soluzione.

11.41- *ese1. 249*-
Studiare il problema di Cauchy, precisando il campo di definizione della soluzione:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}y''(x) = \left(\dfrac{1}{4} + (y'(x))^2 \dfrac{y(x)}{(|y(x)| + 1/4)|y(x)|}\right) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

11.42- *ese1. 250*-
Provare che la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^3 + e^{\sin\ x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

non può avere punti di massimo nell'intervallo di esistenza della soluzione.

11.43- *ese1. 251*-
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \left(y(x) + \sqrt{y(x)}\right) \sin x \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad \text{per} \quad \alpha = -1, 2$$

precisando il campo di definizione della soluzione.

11.44- *ese1. 252*-
Dato il problema

$$\begin{cases} y''(x) = e^{xy(x)} \\ y'(0) = y_1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è possibile determinare y_1 y_1 in modo che in 0 abbia un minimo relativo?

11.45- *ese1. 253*-
Disegnare il grafico della funzione $y(x)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + x(1 + y^2(x)) = 0 \\ y(0) + 0 \end{cases}$$

11.46- *ese1. 254*-
Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$y^{(4)}(x) - y(x) = \frac{1}{x}$$
$$y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{\cos 2x}$$
$$y''(x) + 3y'(x) - 2y(x) = \ln(1 + e^{2x})$$
$$y'''(x) - y''(x) + 4y'(x) - 4y(x) = 0$$
$$y''(x) - y'(x) + ky(x) = 2xe^{x/3}$$

11.47- *ese1. 255*-

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = e^{2x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) - 2y'(x) = x^3 + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = \sin x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + e^x - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

11.48- *ese1. 256*-
Data l'equazione
$$y'(x) + k^2 y(x) = 0 \ k \in \mathbb{R}$$
trovare per quali valori di k ha soluzioni non banali e calcolarle.
Trovare inoltre le soluzioni dell'equazione data soddisfacenti le condizioni
$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \\ y(0) = -y(\pi) \\ y'(0) = -y'(\pi) \end{cases}$$

11.49- *ese1. 257*-
Trovare le soluzioni di
$$y''(x) + y(x) = 0$$
tali che

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pi/2) = 2 \end{cases}$
$y(0) = y(\pi) = 0$
$y(0) = y'(\pi/2) = 0 y(0) = y(\pi/2) = 0$

.

11.50- *ese1. 258*-
Trovare un'equazione differenziale di 2^0 ordine a coefficienti costanti che abbia come soluzione la funzione $y(x) = \cos 3x$.

11.51- *ese1. 259*-

Risolvere:

$$
\begin{aligned}
&(x^2+1)y'(x)+xy(x)=3x^3 2\\
&xy'(x)+y(x)=x\ln x\\
&xy'(x)+2y(x)=\sin x;\\
&x^2y'(x)+xy(x)=x^2+x+1\\
&y'(x)+y(x)\tan x=e^x\\
&(x+1)y'(x)-y(x)=3x+4x^3\\
&(x+3)y'(x)-2y(x)=e^x+1\\
&2xy'(x)-y(x)=\frac{2x^3-1}{x}\\
&xy'(x)=y(x)+2xy(x)\\
&y''(x)+y'(x)=0\\
&y'(x)+y(x)\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\\
&y'(x)+2y(x)=0\\
&y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0\\
&y''(x)+y(x)=4x\sin x
\end{aligned}
$$

11.52- *ese1. 260*-
Studiare i seguenti problemi di Cauchy:

$$
\begin{cases} y'(x)=y(x)\sqrt{1-y^2(x)} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x)=y(x)\sqrt{1-y^2(x)} \\ y(0)=1 \end{cases}
$$

11.53- *ese2. 41*-
È data l'equazione differenziale:

$$
xy''+y'+y+x=kx \quad , \quad k\in\mathbb{R}
$$

Per quali $k\in\mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni definite in $(1,+\infty)$ è uno spazio vettoriale?
Per ognuno di tali k indicare la dimensione di tale spazio.
Per quali $k\in\mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni analitiche in 0 è uno spazio vettoriale?
Per ognuno di tali k indicare la dimensione di tale spazio.
Per $k=2$ scrivere tutte le soluzioni somme di serie di potenze centrate in 0, precisando per ognuna il raggio di convergenza.
Ancora per $k=2$, trovare un polinomio che approssimi una soluzione y, se esiste, dell'equazione differenziale tale che $y(0)=1$ a meno di $\frac{1}{1000}$ nell'intervallo $(-1,1)$.

11.54- *ese2. 42*-
Data l'equazione differenziale $xy''-2y'+y=0$ trovarne le eventuali soluzioni analitiche in un intorno di 0 e calcolare il raggio di convergenza degli sviluppi di tali soluzioni.

11.55- *ese3. 2*-
Data l'equazione differenziale

$$
y^{(3)}-ky''+y'-ky=0,
$$

k parametro reale, verificare che se $k = 0$ ne esiste una sola soluzione tale che $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, e calcolarla esplicitamente. Se $k = 6$, scrivere il polinomio di Mc-Laurin di 4^0 ordine della soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$. Trovare tutti i k tali che esistono almeno 2 soluzioni y soddisfacenti la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ e calcolare la dimensione del relativo spazio vettoriale.

11.56- *ese3. 4*-
Dato il problema

$$y'(x)\cos y(x) = \sin^2 y(x), \quad y(0) = k,$$

per quali $k \in \mathbb{R}$ il problema ha una sola soluzione? Se $k = \pi/4$, disegnare il grafico della soluzione vicino a 0, e scrivere il polinomio di Mc-Laurin di ordine 2. Per lo stesso valore di k determinare la soluzione e tracciarne il grafico.

11.57- *ese3. 8*-
Data l'equazione differenziale

$$y'' + 3y' + ky = 0,$$

calcolare per ogni $k \in \mathbb{R}$ la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni soddisfacenti la condizione $y'(0) = 0$. Determinare tutti i valori del parametro reale k in modo che per tutte le soluzioni y dell'equazione si abbia $y(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Risolvere il problema $y'' + 3y' = x^2, y(0) = 0 = y'(0)$.

11.58- *ese3. 10*-
Dato il problema

$$yy' = \sqrt{1 + y^2},\ y(0) = 1,$$

verificare che ammette un'unica soluzione, calcolare il polinomio di Mc-Laurin di ordine 2 della soluzione, disegnare il grafico della soluzione vicino ad $x = 0$, determinare esplicitamente la soluzione.

11.59- *ese3. 12*-
Dato il problema: $y' = \frac{\sqrt{1-\sin y}}{\cos\ y}$, $y(0) = k$ per quali valori del parametro reale k il problema ha almeno una soluzione? Per $k = 0$ verificare esistenza e unicità della soluzione e scriverne il polinomio di Mc-Laurin di ordine 2.

11.60- *ese3. 13*-
Dato il problema

$$y' = y^2 \lg x,\ y(x_0) = 1,$$

per quali x_0 c'è una unica soluzione? Scrivere il polinomio di Taylor di punto iniziale x_0 ed ordine 2 della soluzione quando $x_0 = 1$, e disegnare il grafico della soluzione vicino ad x_0. Trovare una formula esplicita per la soluzione quando $x_0 = 2$, e determinarne il dominio. Scrivere le coordinate dei primi 3 vertici della poligonale ottenuta, quando $x_0 = 1$, applicando il metodo di Eulero con passo 0.1.

11.61- *ese3. 16*-
È dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} = kx^2 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il problema ha soluzioni, quante soluzioni ha e l'insieme di definizione delle soluzioni. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme delle soluzioni sia uno spazio vettoriale, calcolare la dimensione di tale spazio. Per $k = 1$ trovare esplicitamente tutte le soluzioni.

11.62- *ese3. 18*-
Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'(x) = x\left(e^{y(x)} - e^{-y(x)}\right) \\ y(0) = \alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste ed è unica la soluzione del problema in un intorno di 0?
b) Per tali α trovare esplicitamente la soluzione, precisandone l'insieme di definizione.
Giustificare ogni affermazione.

11.63- *ese3. 20*-
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - x^2\, y(x) = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Dimostrare che il problema ha una ed una sola soluzione su $\mathbb{R}$.
b) Supponendo noto che $|y(x)| + |y'(x)| \leq m \quad \forall x \in I = (-1/2, 1/2)$, valutare, in funzione di m, l'errore che si commette sostituendo alla soluzione il suo polinomio di Mc-Laurin di terzo grado, nell'intervallo I.
c) Determinare successivamente m (è possibile far ciò usando il lemma di Gronwall).
Giustificare ogni affermazione.

11.64- *ese3. 21*-
Studiare esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -x\sqrt{y}(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{al variare di } x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Giustificare ogni affermazione.

11.65- *ese3. 27*-
Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'(x) = e^{x-(y(x))^n} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

a) Discutere l'esistenza e l'unicità della soluzione al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ed $n \in \{1, 2, 3\}$.
b) Per tali (x_0, y_0) ed n la soluzione è invertibile in un intorno di x_0? In caso affermativo, calcolarne la derivata dell'inversa in y_0.
c) Per $n = 1$ e per gli (x_0, y_0) verificanti il punto a), calcolare esplicitamente la soluzione, precisandone insieme di definizione e rango.
Giustificare ogni affermazione.

11.66- *ese3. 33*-
Data l'equazione differenziale:

$$y''(x) + ay'(x) + y(x) = \sin(bx) \text{ con } a, b \in \mathbb{R},$$

determinare se per $a = 2,\ b = -2$ l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. Determinare quindi tutti e soli i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui:
i) l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale;
ii) esiste almeno una soluzione limitata;
iii) tutte le soluzioni sono limitate.
Infine per $a = 0$, $b = 1$ scrivere esplicitamente la soluzione y dell'equazione differenziale tale che $y(0) = 0 = y'(0)$.

11.67- *ese3. 36*-
È data l'equazione differenziale:

$$y'(x) = \sqrt{x}\cos y(x).$$

Per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ ne esiste un'unica soluzione y tale che $y(x_0) = 0$? Determinare esplicitamente le soluzioni corrispondenti rispettivamente ai dati: $y(0) = \pi/2$ e $y(1) = 0$. Disegnare, vicino a $x_0 = 4$, il grafico della soluzione y tale che $y(4) = \pi$, precisandone monotonia e convessità. Determinare infine un polinomio p tale che $y(x) - p(x) \to 0$ per $x \to 4$ di ordine superiore al secondo dove y è la soluzione tale che $y(4) = \pi$.

11.68- *ese3. 38*-
È data l'equazione differenziale:

$$(*) \qquad y''' - (2+a)y'' + (2a+1)y' = ay, \quad a \in \mathbb{R},$$

determinarne il polinomio caratteristico e stabilire per quali valori di a:
i) è convesso in $[0, 1]$;
ii) ha nell'origine un punto di massimo locale.
Stabilire inoltre la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di $(*)$ che risultano infinitesime per $x \to +\infty$. Se $a = 0$, la soluzione di $(*)$ tale che $y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$ è data da ... Determinare ora una soluzione di $y''' - 2y'' + y' = x^2$ e, fissato a, se y è soluzione di $(*)$, stabilire se $z(x) = \int_0^x y(t)dt$ è continua in $\mathbb{R}$, se appartiene a $C^\infty(\mathbb{R})$ e determinare l'equazione differenziale lineare di ordine ≥ 2 che z risolve.

11.69- *ese3. 40*-
Dato il problema ai valori iniziali

$$(*) \qquad y'(x)\sqrt{2x-1} = y^2(x) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

stabilire per quali $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione di $(*)$. Sia ora $x_0 = 5$, determinare per quali valori di y_0 la corrispondente soluzione di $(*)$ risulta, vicino a x_0: i) crescente; ii) decrescente; iii) concava; iv) convessa. Se $x_0 = 1,\ y_0 = 1$, determinare il polinomio di Taylor p di ordine 2 e punto iniziale x_0, relativo alla corrispondente soluzione y di $(*)$, stabilire l'ordine di infintitesimo di $y(x) - p(x)$ per $x \to 1$ e tracciare il grafico locale della y. Siano infine $x_0 = 1, y_0 = 2$. Determinare una formula esplicita per la corrispondente soluzione di $(*)$, precisandone l'insieme di definizione.

11.70- *ese3. 42*-
Data l'equazione differenziale

$$y'(x) = ky(x) + f(x) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

determinarne tutte le soluzioni se $k = -1$ ed $f(x) = \sin x$. È vero che se $k = -1$ ed f è continua e limitata in $[0, +\infty)$, allora tutte le soluzioni sono limitate in $[0, +\infty)$? Stabilire per quali valori di k tutte le soluzioni tendono a zero per $x \to +\infty$ se $f(x) = x$. Sia ora $\bar{y}$ la soluzione corrispondente a $k = -1$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ tale che $\bar{y}(0) = 0$. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x)$, $\lim_{x\to0} \bar{y}(x)$, $\lim_{x\to-1} \bar{y}(x)$ e stabilire se $\bar{y}$ ha almeno un punto di massimo assoluto relativamente a $[0, +\infty)$. Tracciare infine il grafico di $f(x) = e^x\bar{y}(x)$.

11.71- *ese3. 43*-
Sia

$$y(x) = \int_1^{1/x} \frac{e^t}{t} dt,$$

stabilire l'insieme di definizione di y e, sfruttando la disuguaglianza $e^t \geq 1$, verificare che $y(x) \to +\infty$ per $x \to 0$. Determinare se y è derivabile in $(0, +\infty)$ e calcolarne la derivata. Trovare infine un polinomio p tale che approssimi $f(x) = \frac{e^t-1}{t}$ a meno di 10^{-2} se $t \in (0, 1/2]$.

11.72- *ese3. 45*-
Dato il problema differenziale:

$$y''(x) + x|x|y'(x) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1.$$

Determinare se ha soluzioni in $\mathbb{R}$ e se l'insieme di tutte le soluzioni del problema formano uno spazio vettoriale reale. Tracciare quindi il grafico, vicino ad $x_0 = 0$, della soluzione y tale che $y(0) = 0$. Vedere inoltre se ogni soluzione del problema è derivabile tre volte in $x_0 = 0$ e calcolare infine la soluzione di

$$y''(x) + x|x|y'(x) = 0 \quad , \quad (0) = y'(0) = 1.$$

11.73- *ese4. 3*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{iv} = y(x) + x$$

☐ L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale
SI ◯ **NO** ◯
Trovare tutte le soluzioni dell'equazione che tendono a $+\infty$ per $x \to -\infty$

☐ $y(x) = \ldots\ldots$

☐ L'insieme delle soluzioni di cui al punto F è uno spazio vettoriale
SI ◯ **NO** ◯
Nel caso in cui la risposta al punto G sia affermativa, trovare la dimensione dello spazio vettoriale.

☐ $dim = \ldots\ldots$
Sia

$$S = \{x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

e

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Calcolare

☐ $\int_S \langle F, n_e \rangle d\sigma = \ldots\ldots$

☐ $\int_{\partial S} \langle F, T \rangle ds = \ldots\ldots$
ove n_e è la normale esterna ad S e T è il vettore tangente a ∂S

11.74- *ese4. 6*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y'(x) + xy(x) = 1$$

☐ Trovare una soluzione dell'equazione definita su $(0, +\infty)$
◯Esiste ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Trovare una soluzione dell'equazione definita su $(-\infty, 0)$
◯Esiste ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Trovare una soluzione dell'equazione definita su $\mathbb{R}$
◯Esiste ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Trovare una soluzione dell'equazione che soddisfi la condizione iniziale $y(1) = 0$
◯Esiste per $x \in I = \ldots\ldots$ ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione su $(-\infty, 0)$

$$x^2 z''(x) + x z'(x) = 1$$

$z(x) = \ldots\ldots$

☐ Trovare il polinomio p di Taylor di y centrato in $x_0 = 1$ di grado 3
$p(x) = \ldots\ldots$

11.75- *ese4. 8-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = 4x\sqrt{|1 - y(x)|}$$

☐ Trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 2$
◯Esiste ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = -2$
◯Esiste ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 1$
◯Esiste ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Trovare una soluzione mai nulla dell'equazione definita su tutto $\mathbb{R}$
◯Esiste ed è $y(x) = \ldots\ldots$ ◯Non esiste

☐ Esistono soluzioni dell'equazione data che si annullano in un punto che non è di flesso
◯Si perchè ...... ◯No perchè ......

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

11.76- *ese4. 12-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = E(y(x))$$

ove indichiamo con E la funzione parte intera

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

☐ Esistono soluzioni dell'equazione definite su tutto $\mathbb{R}$? ◯NO ◯SI

☐ Esistono soluzioni **non identicamente nulle** dell'equazione definite su tutto $\mathbb{R}$? ◯NO ◯SI

☐ È possibile trovare una funzione $\bar{y}$ definita su tutto $\mathbb{R}$, continua, derivabile a tratti, non costante, che soddisfi, dove è derivabile, l'equazione data?
◯NO ◯SI e il suo grafico è...... (In caso di risposta affermativa disegnare il grafico)

☐ Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x)$

☐ È possibile trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = .5$?
◯NO ◯SI e il suo grafico è...... (In caso di risposta affermativa disegnare il grafico)

☐ È possibile trovare una funzione definita su tutto $\mathbb{R}_+$, continua, derivabile a tratti, non identicamente nulla, che soddisfi, dove è derivabile, l'equazione data e per la quale risulti $y(0) = 1.5$?
◯NO ◯SI il suo grafico è...... (In caso di risposta affermativa disegnare il grafico) ed è definita in ......

☐ È possibile trovare una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$, continua, derivabile a tratti, non identicamente nulla, che soddisfi, dove è derivabile, l'equazione data $y(0) = 1.5$?

◯NO ◯SI e il suo grafico è In caso di risposta affermativa disegnare il grafico

11.77- *ese4. 16-*

☐ Trovare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'''(t) + y''(t) = 4 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

$y(x) = \ldots\ldots$

☐ Trovare il più grande intervallo $\Delta = [-\delta, \delta]$ tale che si abbia

$$|e^{x^2} - 1| < \frac{1}{100}$$

$\Delta = \ldots\ldots$

☐ Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\right) dx =$$

11.78- *ese4. 17-*

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(y(x))$$

ove $f(x) = ||x| - 1|$

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

☐ Esistono soluzioni dell'equazione definite su tutto $\mathbb{R}$? ◯NO ◯SI

☐ Esistono soluzioni limitate dell'equazione definite su tutto $\mathbb{R}$? ◯NO ◯SI

☐ È possibile trovare una soluzione y dell'equazione data, non identicamente nulla, che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 0$? ◯NO ◯SI ed è $y(x) = \ldots\ldots$

☐ È possibile trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 1/2$? ◯NO ◯SI ed è $y(x) = \ldots\ldots$

☐ È possibile trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = -1/2$?

◯NO ◯SI ed è $y(x) = \ldots\ldots$

☐ È possibile trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 2$?

◯NO ◯SI ed è $y(x) = \ldots\ldots$

☐ È possibile trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = -2$?

◯NO ◯SI ed è $y(x) = \ldots\ldots$

11.79- *ese4. 24-*

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = x \sin(y(x))$$

e se ne studino tutte le soluzioni. Si faccia uso delle informazioni acquisite per rispondere alle seguenti domande.

☐ Trovare una soluzione dell'equazione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 2\pi$ $y(x) =\ldots\ldots$

☐ Trovare una soluzione dell'equazione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 1$ $y(x) =\ldots\ldots$

☐ Trovare le soluzioni dell'equazione data che $y(x_0) = y_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in [0, \pi]$ $y(x) =\ldots\ldots$

☐ Esistono soluzioni dell'equazione data che non possono essere prolungate su tutto $\mathbb{R}$? ◯ SI ◯ NO

☐ Esistono soluzioni dell'equazione data che siano periodiche? ◯ SI ◯ NO

☐ Esistono soluzioni limitate dell'equazione data ? ◯ SI ◯ NO

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data.

11.80- *ese5. 1-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \sqrt{1 - y(x)}$$

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

☐ Esistono soluzioni limitate dell'equazione definite su tutto $\mathbb{R}$ per cui $y(0) = 0$?
◯non esistono ◯esistono e sono date da ......

☐ È possibile trovare una soluzione y dell'equazione data che soddisfi le condizioni $y(0) = 0$ ed $y(2) = 1$?
◯NO ◯SI ed è $y(x) = \ldots\ldots$

☐ Per quali valori di k è possibile trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ ed $y(k) = 1$?

☐ È possibile trovare una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 2$?
◯NO ◯SI ed è $y(x) = \ldots\ldots$

11.81- *ese5. 2-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + \alpha y'(x) + y(x) = 0$$

☐ Determinare se esistono soluzioni dell'equazione che siano periodiche
◯non esistono ◯esistono per $\alpha = \ldots\ldots$

☐ Nel caso in cui la risposta ad A sia affermativa determinare tutte le soluzioni periodiche dell'equazione.

☐ Se ne esistono, trovare tutte le soluzioni dell'equazione periodiche di periodo 2, in caso contrario giustificare brevemente perchè non ne esistono.

☐ Se è possibile trovare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni periodiche dell'equazione data; in caso contrario giustificare brevemente perchè non è possibile.

11.82- *ese5. 4-*

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + z(x) \\ z'(x) = y(x) + 2z(x) + 1 \end{cases}$$

☐ Trovare l'integrale generale del sistema omogeneo associato
$y(x) = \ldots\ldots \quad z(x) = \ldots\ldots$

☐ Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato
$G(x) = \ldots\ldots$

☐ Determinare un integrale particolare del sistema non omogeneo
$\bar{y}(x) = \ldots\ldots \quad \bar{z}(x) = \ldots\ldots$

☐ Scrivere l'integrale generale del sistema non omogeneo
$y(x) = \ldots\ldots \quad z(x) = \ldots\ldots$

11.83- *ese5. 13*-
Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

☐ Determinare la soluzione generale del sistema dato

☐ Determinare una equazione differenziale equivalente al sistema dato

☐ Determinare tutte le soluzioni costanti del sistema dato

☐ Determinare la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni costanti del sistema dato

☐ Determinare il più grande sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\forall (x_0, y_0, z_0) \in A$ il sistema dato ha una soluzione costante con

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

11.84- *ese5. 16*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = e^{-x} + \sin x$$

☐ Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

☐ Determinare l'integrale generale dell'equazione.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea tali che

$$y(0) = y(\pi) = y(2\pi) = 0$$

☐ L'insieme delle soluzioni di cui al punto C) è uno spazio vettoriale?

☐ In caso di risposta affermativa al punto precedente, qual è la dimensione dello spazio vettoriale?

11.85- *ese5. 18*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$(x^2-2x)y''(x)+xy'(x)+3y(x)=0$$

☐ Una soluzione non banale y_0 dell'equazione, analitica in 0, ha sviluppo di Mc Laurin:
$y_0(x)=\ldots\ldots$

☐ Tutte le soluzioni analitiche in 0 dell'equazione sono date da:
$y(x)=\ldots\ldots$

☐ Il raggio di convergenza degli sviluppi trovati è:
$R=\ldots\ldots$

☐ Cercare una funzione $u:(0,2)\to\mathbb{R}$ tale che

$$u(x)y_0(x)$$

sia soluzione dell'equazione data $u(x)=\ldots\ldots$

☐ Scrivere l'integrale generale dell'equazione data
$y(x)=\ldots\ldots$

11.86- *ese5. 20*-
Considerare

$$\begin{cases} y'''(x)=(12x+8x^3)y(x)\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\\ y''(0)=2 \end{cases}$$

☐ La soluzione del problema:

○ esiste unica ○ esiste non unica ○ non esiste

☐ È definita in: ○ $[-a,a]$ per qualche $a\in\mathbb{R}_+$ ○ $(0,+\infty)$ ○ $(-1,1)$ ○ $\mathbb{R}$

☐ Una possibile formula ricorrente per i coefficienti di una soluzione analitica, se esiste, è:

☐ I primi tredici termini della successione sono:

$a_0=\ldots$ $a_1=\ldots$ $a_2=\ldots$ $a_3=\ldots$ $a_4=\ldots$ $a_5=\ldots$ $a_6=\ldots$ $a_7=\ldots$ $a_8=\ldots$ $a_9=\ldots$
$a_{10}=\ldots$ $a_{11}=\ldots$ $a_{12}=\ldots$

☐ Una espressione per la successione a_n è: $a_n=\ldots$

☐ Calcolare espressamente una soluzione del problema: $y(x)=\ldots$

☐ Un polinomio che approssima a meno di $1/100$ la soluzione del problema in $[-1/3,1/4]$ è: ○ $x-\frac{x}{2}+x^3$
○ $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ ○ $1+x^2+\frac{x^4}{2}$ ○ $1+x^2+x^4$

11.87- *ese5. 27*-

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) + 3z(x) + \sin(x) \\ z'(x) = 5y(x) + z(x) + e^x \end{cases}$$

☐ Trovare l'integrale generale del sistema omogeneo associato
$y(x) = \ldots\ldots \quad z(x) = \ldots\ldots$

☐ Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato $G(x) = \ldots$

☐ Determinare un integrale particolare del sistema non omogeneo
$\bar{y}(x) = \ldots \quad \bar{z}(x) = \ldots\ldots$

☐ Scrivere l'integrale generale del sistema non omogeneo
$y(x) = \ldots\ldots \quad z(x) = \ldots\ldots$

☐ La soluzione nulla è stabile per il sistema omogeneo ☐ SI perchè ... ☐ NO perchè ...

☐ Disegnare le traiettorie del sistema lineare omogeneo che corrispondono alle condizioni iniziali

$$a) \begin{cases} y(0) = -3 \\ z(0) = 5 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

11.88- *ese5. 34*-
Si consideri l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x$$

☐ Scrivere il polinomio caratteristico associato all'equazione data

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea associata all'equazione data.

☐ Trovare una soluzione dell'equazione non omogenea

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea

☐ Determinare la soluzione dell'equazione omogenea tale che

$$y(0) = y'(0) = 0$$

☐ Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea tale che

$$y(0) = y'(0) = 0$$

11.89- *ese5. 35*-
Si consideri l'equazione differenziale a variabili sebarabili

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}$$

☐ Trovare le soluzioni costanti dell'equazione data

☐ Trovare la soluzione dell'equazione data tale che $y(1) = 1$

☐ determinare il campo di definizione della soluzione del punto precedente

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni dell'equazione data

11.90- *ese6. 6*-
Si consideri l'equazione differenziale e i dati iniziali

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x} \qquad y_0 = 0 \quad y_1 0$$

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{2x} \qquad y_0 = 0 \quad y_1 1$$

$$y''''(x) + y''(x) = x \qquad y_0 = 0 \quad y_1 0$$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione omogenea ad essa associata $y(x) = \ldots\ldots$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione data $y(x) = \ldots\ldots$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione data tali che

$$y(0) = y_0 \qquad\qquad y'(0) = y_1$$

$y(x) = \ldots\ldots$

11.91- *ese6. 10*-
Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x) + y(x))y'(x) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = a \end{cases}$$

☐ Per quali valori di x_0 e di a c'è l'esistenza e l'unicità della soluzione.

☐ per $a \neq 0$, ponendo

$$y'(x) = z(y(x))$$

trovare una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea in $z(y)$ equivalente all'equazione data.

☐ Risolvere l'equazione differenziale lineare di cui al punto precedente e disegnare il grafico delle soluzioni.
$z(y) = \ldots\ldots$

☐ Per le funzioni $z(y)$ determinate al punto precedente tali che $z(0) = 2$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = z(y(x)) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

e si disegni il grafico della funzione $x(y)$ inversa della soluzione $y(x)$.

☐ Disegnare il grafico della soluzione $y(x)$.

11.92- *ese6. 12*-

È dato il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{1 + y^2(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

☐ Il problema dato ammette ☐ una sola soluzione per $(x_0, y_0) \in \ldots\ldots$ ☐ nessuna soluzione per $(x_0, y_0) \in \ldots\ldots$ ☐ più di una soluzione per $(x_0, y_0) \in \ldots\ldots$

☐ Determinare, se esiste, una soluzione del problema dato relativa ai dati $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ☐ $y(x) = \ldots\ldots$ ed è definita in $I = \ldots\ldots$ ☐ y non esiste

☐ Disegnare, se esiste, il grafico della soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Il grafico di y è ...... ☐ y non esiste

☐ Scivere il polinomio $p(x)$ di Taylor di grado 2 della soluzione y del problema assegnato relativa al dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 2)$ nel caso essa esista $p(x) = \ldots\ldots$ ☐ y non esiste

11.93- *ese6. 14-*
È dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{y'(x)}{x} = kx^2 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

☐ Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il problema ha soluzioni precisandone il campo di definizione $k \in \ldots\ldots$ definite in $I = \ldots\ldots$

☐ Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le soluzioni del problema formano uno spazio vettoriale $k \in \ldots\ldots$

☐ Per i valori di k trovati al punto B determinare la dimensione dello spazio vettoriale S delle soluzioni del problema dato precisandone il campo di definizione dim $S = \ldots\ldots$ definite in $I = \ldots\ldots$

☐ Trovare per $k = 1$ tutte le soluzioni del problema dato precisandone il campo di definizione $y(x) = x \ldots\ldots$ definite in $I = \ldots\ldots$

☐ Trovare per $k = 1$ tutte le soluzioni della equazione differenziale contenuta nel problema dato precisandone il campo di definizione $y(x) = \ldots\ldots$ definite in $I = \ldots\ldots$

11.94- *ese6. 16-*
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -x\sqrt{y}(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{al variare di } x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

☐ Determinare l'insieme dei punti (x_0, y_0) per i quali il problema ha almeno una soluzione $(x_0, y_0) \in \ldots\ldots$

☐ Per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 1$ trovare tutte le soluzioni $y(x)$, se ne esistono, del problema assegnato $y(x) = \ldots\ldots$

☐ Per $x_0 = 0$ ed $y_0 = -1$ trovare tutte le soluzioni $y(x)$, se ne esistono, del problema assegnato $y(x) = \ldots\ldots$

☐ Per $x_0 = 0$ ed $y_0 = 0$ trovare tutte le soluzioni $y(x)$, se ne esistono, del problema assegnato $y(x) = \ldots\ldots$

☐ Per quali valori di y_0 con $x_0 = 0$ il problema assegnato ammette una unica soluzione $(x_0, y_0) \in \ldots\ldots$

11.95- *ese6. 21-*

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) = 0$$

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) = x$$

11.96- *ese6. 22*-
Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x) + y(x))y'(x) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = a \end{cases}$$

1 - Discutere al variare di x_0 e di a l'esistenza e l'unicità della soluzione.
2 - Mostrare che le funzioni $z(y)$ per cui si ha

$$y'(x) = z(y(x))$$

con $y(x)$ soluzione dell'equazione differenziale relativa al problema di Cauchy assegnato, soddisfano una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea in $z(y)$ e determinarla.
3 - Risolvere l'equazione differenziale lineare di cui al punto precedente e disegnare il grafico delle soluzioni al variare della costante di integrazione.
4 - Per le funzioni $z(y)$ determinate al punto precedente, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = z(y(x)) \\ z(y(x_0)) = y'(x_0) \end{cases}$$

e disegnare al variare di a il grafico della funzione $x(y)$ inversa della soluzione $y(x)$.
5 - Disegnare il grafico della soluzione $y(x)$ al variare di a.
6 - Discutere esistenza ed unicità globale della soluzione del problema di Cauchy assegnato.

11.97- *ese6. 26*-
È dato il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^2(x) - 1}{x^2 - 1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

☐ Stabilire per quali valori di (x_0, y_0) il terorema di esistenza ed unicità permette di affermare che il problema dato ammette una ed una sola soluzione: per $(x_0, y_0) \in \ldots\ldots$

☐ Stabilire per quali valori di (x_0, y_0) il terorema di esistenza ed unicità permette di affermare che il problema dato ammette almeno una soluzione: per $(x_0, y_0) \in \ldots\ldots$

☐ Determinare, se esiste, la o le soluzioni $y(x)$ relative al dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 0)$, precisandone il campo di definizione I. $y(x) = \ldots\ldots$ definita in $I = \ldots\ldots$ ☐ y non esiste

☐ Determinare, se esiste, la o le soluzioni $y(x)$ relative al dato iniziale $(x_0, y_0) = (1, 1)$, precisandone il campo di definizione I: $y(x) = \ldots\ldots$ in $I = \ldots\ldots$ ☐ y non esiste

☐ Determinare, se esiste, la o le soluzioni $y(x)$ relative al dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$, precisandone il campo di definizione I: $y(x) = \ldots\ldots$ in $I = \ldots\ldots$ ☐ y non esiste

11.98- *ese6. 28*-
È dato il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{k\cos(x)}{\cos(y(x))} \\ y(0) = h \end{cases}$$

☐ Stabilire per quali valori di (h, k) il problema dato ammette una ed una sola soluzione

☐ Stabilire per quali valori di (h, k) tale soluzione è crescente in un intorno di 0

☐ Determinare, ove esiste, la o le soluzioni $y(x)$, precisandone il campo di definizione I

☐ La o le soluzioni $y(x)$ trovate al punto precedente sono periodiche?

☐ Determinare, se esistono, i valori di (h, k) per i quali la o le soluzioni $y(x)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

11.99- *ese6. 33*-
Dato il sistema

$$\begin{cases} y_1'(x) = 5y_1(x) - 3y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) = 3y_1(x) - y_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = -5y_1(x) - 3y_2(x) \\ y_2'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) + e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2y_1(x) - y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) = y_1(x) + 4y_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = -2y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) - 4y_2(x) + e^x \end{cases}$$

Determinare le radici dell'equazione caratteristica con la loro molteplicità Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato Determinare una soluzione particolare del sistema non omogeneo Determinare se l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo trovarne la dimensione Determinare se l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo è uno spazio vettoriale ed in caso affermativo trovarne la dimensione Determinare la soluzione $Y^*(x)$ del sistema non omogeneo tale che $Y^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

11.100- *ese6. 36*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$xy'(x) = \ln|x|y(x)$$

☐ Stabilire esistenza ed unicità della soluzione e precisarne il campo di definizione.

☐ Stabilire se esistono soluzioni definite in un intorno di 0

☐ Stabilire se le soluzioni dell'equazione costituiscono uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la deimensione.

☐ Disegnare il grafico della o delle soluzioni tali che $y(1) = 1$.

☐ Disegnare il grafico della o delle soluzioni tali che $y(-1) = 1$.

11.101- *ese6. 39*-

Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + e^t \\ \dot{y}(t) = 2y(t) - x(t) + 1 \end{cases}$$

☐ Determinare tutte le soluzioni del sistema.

☐ Determinare la soluzione tale che

$$x(0) = y(0) = 0$$

☐ Trovare tutte le soluzioni tali che $x(0) = 0$ del sistema omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 2y(t) - x(t) \end{cases}$$

giustificando brevemente le affermazioni

☐ Stabilire se l'insieme delle soluzioni del punto C formano uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinarne la dimensione.

11.102- *ese6. 42-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = e^x + 1$$

☐ Trovare tutte le soluzioni della equazione omogenea associata

☐ Trovare tutte le soluzioni della equazione data (non omogenea)
Si consideri poi, al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$y''(x) + ay'(x) + y(x) = e^x + 1$$

☐ Trovare tutte le soluzioni della equazione omogenea associata

☐ Trovare tutte le soluzioni della equazione data (non omogenea)

11.103- *ese6. 43-*
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

☐ Determinare l'espressione di tutte le soluzioni al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ giustificando brevemente i calcoli.

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

☐ Trovare tutte le soluzioni tali che $y(1) = 1$ giustificando brevemente le affermazioni.

☐ Precisare per quali valori $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le soluzioni ammettono limite per $x \to +\infty$.

11.104- *ese6. 46-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + \sqrt{y(x)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

☐ Provare che posto $z(x) = \sqrt{y(x)}$ si ha

$$\begin{cases} z'(x) = \frac{1}{2}(z(x) + 1) \\ z(0) = \sqrt{\alpha} \end{cases}$$

☐ Determinare $z(x)$.

☐ Determinare $y(x)$.

☐ Trovare le eventuali soluzioni costanti della **equazione** data

11.105- *ese6. 49*-
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\ln x)(1 + y^2(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

☐ Discutere brevemente esistenza ed unicità della soluzione al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

☐ Stabilire crescenza e decrescenza della soluzione al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, giustificando brevemente le affermazioni

☐ Calcolare la soluzione corrispondente ai dati iniziali $x_0 = 1$, $y_0 = \pi$ precisandone il campo di definizione e giustificando brevemente le affermazioni

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni della equazione data

11.106- *ese6. 59*-
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2\sqrt{y(x) - 1}}{x - 2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

☐ Discutere esistenza ed unicità della soluzione precisando se possono esistere soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

☐ Determinare soluzioni costanti e loro campo di definizione

☐ Determinare la soluzione che corrisponde al dato iniziale $y(0) = 1$

☐ Determinare tutte le soluzioni al variare del dato iniziale

☐ Stabilire se esistono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ del problema

$$\begin{cases} (x - 2)y'(x) = 2\sqrt{y(x) - 1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

☐ Precisare per quali dati iniziali (x_0, y_0) la soluzione del problema della domanda I è unica.

☐ Determinare se le soluzioni del problema dato hanno punti di flesso ed individuarli.

11.107- *ese6. 61*-

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) = 2x$$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

☐ Trovare tutte le soluzioni della equazione data tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, precisando se tali soluzioni formano uno spazio vettoriale.
Si consideri poi l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) = 2|x|$$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

11.108- *ese6. 63*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) = 3y'(x) + 2y(x)$$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$ precisando se formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, trovandone la dimensione.

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$ precisando se formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, trovandone la dimensione.

☐ Trovare tutte le soluzioni della equazione

$$y'''(x) = 3y'(x) + 2y(x) + e^{2x}$$

☐ Scrivere un sistema differenziale del primo ordine equivalente alla equazione data.

11.109- *ese6. 64*-
Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 2z(x) \\ z'(x) = y(x) + w(x) \\ w'(x) = w(x) + x \end{cases}$$

☐ Determinare tutte le soluzioni del sistema

☐ Scrivere il sistema omogeneo associato

☐ Determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato

☐ Scrivere la matrice fondamentale del sistema omogeneo associato

☐ Trovare le soluzioni del sistema omogeneo associato soddisfacente la condizione $w(0) = 1$, precisando se formano uno spazio vettoriale ed in caso affermativo determinandone la dimensione.

11.110- *ese6. 69-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$xy''(x) + y'(x) = 0$$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_+$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}_-$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data definite su $\mathbb{R}$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$ e tutte quelle tali che $y(1) = 0$ e $y'(1) = 1$

☐ Le soluzioni trovate al punto precedente sono linearmente indipendenti? Perchè?

11.111- *ese6. 85-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''' = y(x)$$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$, precisando se costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, trovarne la dimensione.

☐ Determinare tutte le soluzioni crescenti dell'equazione data

☐ Determinare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} z''' = z(x) + e^x \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

precisando se costituiscono uno spazio vettoriale.

11.112- *ese6. 86-*
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{e^{-x^2}}{2y(x)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

al variare di $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$
(Si ritiene noto che $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.)

☐ Determinare la soluzione del problema assegnato per $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ precisandone il campo di definizione.

☐ Disegnare il grafico della soluzione trovata al punto precedente.

☐ Determinare la soluzione del problema assegnato per $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$ precisandone il campo di definizione.

☐ Determinare la soluzione del problema assegnato per $x_0 = 0$ e $y_0 = -1$ precisandone il campo di definizione.

☐ Disegnare il grafico delle soluzioni del problema assegnato al variare del dato iniziale (x_0, y_0).

11.113- *ese6. 87*-
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y''(x) = \ln y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

☐ Scrivere un problema di Cauchy del primo ordine ad esso equivalente.

☐ Trovare una formulazione esplicita per l'inversa della soluzione del problema dato.

☐ Disegnare il grafico della soluzione.

☐ Determinare, se esiste una soluzione non costante del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y''(x) = \ln y(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

11.114- *ese6. 91*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x}{y(x) - 1}$$

☐ Trovare la soluzione dell'equazione assegnata tale che $y(0) = 2$, precisandone il campo di definizione

☐ Trovare la soluzione dell'equazione assegnata tale che $y(0) = -2$, precisandone il campo di definizione

☐ Trovare la soluzione dell'equazione assegnata tale che $y(0) = 1$, precisandone il campo di definizione

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione assegnata e disegnarne il grafico.

11.115- *ese6. 95*-
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sin y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

☐ Trovare la soluzione del problema assegnato, precisandone il campo di definizione

☐ Disegnare il grafico della soluzione trovata

☐ Precisare se la soluzione trovata è prolungabile ed eventualmente prolungarla fin quando è possibile

☐ Provare che se $y(x)$ è soluzione anche $y(x) + 2k\pi$ lo è per $]k \in \mathbb{N}$.

11.116- *ese6. 101*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 + 3y^2(x)$$

con i dati iniziali $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = z_0$.

☐ Discutere al variare di x_0, y_0, z_0 esistenza e unicità della soluzione dell'equazione data relativamente ai valori iniziali assegnati.

☐ Tracciare un grafico della soluzione relativa ai dati iniziali $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 1$

☐ Esistono soluzioni costanti dell'equazione data?

☐ Provare che se $y(x)$ è una soluzione dell'equazione data anche $z(x) = y(x+k)$ è soluzione, per ogni $k \in \mathbb{R}$. Precisare il significato di tale affermazione.

11.117- *ese6. 104*-
Si consideri l'equazione differenziale
$$|y'(x)| = \sqrt{1 - y^2(x)}$$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$ e disegnarne il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e disegnarne il grafico.

☐ Stabilire per quali valori x_0 ed y_0 esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione assegnata ed al valore iniziale $y(x_0) = y_0$

11.118- *ese6. 109*-
Si consideri l'equazione differenziale
$$y'''(x) + y'(x) = x$$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

☐ Esistono soluzioni limitate dell'equazione omogenea?

☐ Esistono soluzioni limitate dell'equazione non omogenea?

☐ Le soluzioni limitate della equazione omogenea formano uno spazio vettoriale? In caso affermativo trovarne la dimensione.

11.119- *ese6. 111*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$3y'(x)y''(x) = 1 - y^2(x)$$

☐ Discutere brevemente esistenza ed unicità delle soluzioni al variare dei dati iniziali

☐ Determinare eventuali soluzioni costanti

☐ Trovare ,se esistono, le soluzioni non costanti dell'equazione data tali che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ precisandone il campo di definizione.

☐ Stabilire se tale soluzione è limitata e calcolarne eventuali massimi e minimi assoluti e relativi

☐ Determinare, se esistono, un maggiorante ed un minorante del campo di definizione della soluzione.

11.120- *ese6. 112*-

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - 3y'(x) + 2|y(x)| = 0$$

☐ Stabilire se l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale data costituisce uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinarne la dimensione.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ e $y''(0) = 3$, precisando il loro campo di definizione

☐ Trovare, se possibile, tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$ che assumano valori negativi. precisando il loro campo di definizione

☐ Srivere un sistema del primo ordine equivalente all'equazione data

11.121- *ese6. 115-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$

☐ Trovare tutte le soluzioni di f

☐ Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

☐ Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$.

☐ Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

☐ Trovare a tale che esista almeno una soluzione non nulla dell'equazione data tale che $y(0) = y(a) = 0$.

11.122- *ese6. 117-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = 1 - y^2(x)$$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione differenziale tali che $y(0) = 1$, precisandone il campo di definizione.

☐ Determinare una soluzione della equazione differenziale tale che $y(0) = 0$, precisandone il campo di definizione.

☐ Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = -1$.

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni.

☐ Studiare l'unicità delle soluzioni al variare dei valori iniziali.

11.123- *ese6. 118-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$(y''(x))^2 = 16(y'(x)^3)(y(x))^2$$

☐ Determinare le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = k$, $y'(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = k$, $y'(0) = 1$ e disegnarne il grafico.

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = k$, $y'(0) = -1$ e disegnarne il grafico.

☐ Studiare l'unicità della soluzione al variare dei valori iniziali.

11.124- *ese6. 120-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = y(x) + |x|^3$$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione data su $\mathbb{R}_+$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione data su $\mathbb{R}_-$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione data su $\mathbb{R}$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, e $y(1) = 0$ precisando il loro campo di definizione.

☐ Provare che le soluzioni dell'equazione data non sono di classe $\mathcal{C}^3$

11.125- *ese6. 124-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = |x|\sqrt{y(x)}$$

☐ Determinare, al variare di (x_0, y_0), se esiste soluzione del problema di Cauchy ottenuto associando all'equazione data la condizione $y(x_0) = y_0$.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(2) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(-2) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

☐ Precisare l'ordine di infinitesimo delle soluzioni trovate ai punti precedenti in x_0.

11.126- *ese7. 2-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) = 1 + |x|$$

☐ Determinare tutte le soluzioni della equazione omogenea associata.

☐ Determinarne tutte le soluzioni dell'equazione completa definite su $x > 0$. la dimensione.

☐ Determinarne tutte le soluzioni dell'equazione completa definite su $x < 0$.

☐ Determinarne tutte le soluzioni dell'equazione completa definite su $\mathbb{R}$ per cui $y(0) = 0$.

11.127- *ese7. 4-*
Si consideri l'equazione differenziale
$$(y'(x))^2 = 1 + y(x)$$

☐ Determinare una soluzione della equazione differenziale tale che $y(0) = 1$.

☐ Determinare una soluzione della equazione differenziale tale che $y(0) = -3$.

☐ Trovare tutte le soluzioni costanti

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni.

11.128- *ese7. 6-*

☐ Determinare una equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti, omogenea, che abbia tra le sue soluzioni $\bar{y}(x) = x\sin(x)$.

☐ La soluzione del problema è unica? In caso positivo provare l'affermazione, in caso negativo trovare una equazione, diversa dalla precedente, che risolva il problema dato.

☐ Trovare, tra le equazioni che risolvono il problema dato, se esiste, quella di ordine minimo.

☐ Risolvere l'equazione non omogenea ottenuta attribuendo all'equazione trovata il termine noto $b(x) = e^x$.

11.129- *ese7. 8-*
Si consideri l'equazione differenziale
$$y'''(x) = y''(x) - y'(x) + y(x)$$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data precisando se formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinandone la dimensione.

☐ Trovare tutte le soluzioni periodiche dell'equazione data precisando se formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinandone la dimensione.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0 = y(2\pi)$ precisando se formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinandone la dimensione.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che $y(0) = 0$ precisando se formano uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinandone la dimensione.

11.130- *ese7. 10-*
Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(x) = 2 + y^2(x)$$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

☐ Trovare, se esistono, tutte le soluzioni dell'equazione che hanno limite per $x \to +\infty$ e tutte le soluzioni periodiche.

11.131- *ese7. 12-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + 2y'(x) = 1 + e^x$$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione assegnata.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata tali che $y^{(4)}(0) = 0$; formano uno spazio vettoriale? In caso affermativo, di che dimensione?

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + ky'(x) = 0$$

☐ Trovare tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}$, al variare di k in $\mathbb{R}$ precisando se formano uno spazio vettoriale ed, eventualmente calcolandone la dimensione.

11.132- *ese7. 16-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) = |x^2 - 1|$$

☐ Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata

☐ Determinare le soluzioni dell'equazione completa definite per $|x| > 1$

☐ Determinare le soluzioni dell'equazione completa definite per $|x| < 1$

☐ Determinare le soluzioni, se esistono, dell'equazione completa definite su tutto $\mathbb{R}$.

11.133- *ese7. 18-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) + \cos(y(x)) = \sin x$$

con il dato iniziale $y(0) = 0$

☐ Stabilire se la soluzione esiste e se è unica.

☐ Determinare lo sviluppo di McLaurin di y del primo ordine centrato in 0 e tracciare il grafico qualitativo di y in un intorno di 0.

☐ Scrivere e valutare il resto di Lagrange di ordine 2 (relativo al polinomio di primo grado di y centrato in 0)

☐ Supponendo la soluzione y definita su tutto $\mathbb{R}$, trovare un polinomio di grado 2 maggiorante y ed uno minorante y; disegnarne il grafico ed indicare la zona di piano da essi delimitata entro cui si trova la soluzione y.

11.134- *ese7. 20*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = 1 + y(x)$$

☐ Determinare una soluzione della equazione differenziale tale che $y(0) = 1$.

☐ Determinare una soluzione della equazione differenziale tale che $y(0) = -2$.

☐ Trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = -1$.

☐ Disegnare il grafico di tutte le soluzioni.

☐ Studiare l'unicità delle soluzioni al variare dei valori iniziali.

11.135- *ese7. 21*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = |x|\sqrt{y(x)}$$

☐ Determinare, al variare di (x_0, y_0), se esiste soluzione del problema di Cauchy ottenuto associando all'equazione data la condizione $y(x_0) = y_0$.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(1) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(-1) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, precisando il loro campo di definizione e disegnandone il grafico.

☐ Precisare l'ordine di infinitesimo delle soluzioni trovate ai punti precedenti in x_0.

11.136- *ese7. 23*-
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + |y(x)| = 0$$

☐ Stabilire se l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale data costituisce uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinarne la dimensione.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$, precisando il loro campo di definizione

☐ Trovare, se possibile, tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, che assumano anche valori negativi, precisando il loro campo di definizione

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$ precisando il loro campo di definizione

11.137- *ese7. 25*-
Si consideri l'equazione differenziale
$$|y'(x)| = \sqrt{4 - y^2(x)}$$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$ e disegnarne il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e disegnarne il grafico.

☐ Stabilire per quali valori x_0 ed y_0 esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione assegnata ed al valore iniziale $y(x_0) = y_0$

11.138- *ese7. 27*-
Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(x) = x \sin y(x)$$

☐ Stabilire per quali valori x_0 ed y_0 esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione assegnata ed al valore iniziale $y(x_0) = y_0$

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$ e disegnarne il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$ e disegnarne il grafico.

☐ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione e disegnarne il grafico.

11.139- *ese7. 35*-
Si consideri l'equazione differenziale
$$(y''(x))^2 = 4y'(x)y(x)$$

☐ Determinare le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = k$, $y'(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ e disegnarne il grafico.

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ e disegnarne il grafico.

☐ Studiare l'unicità della soluzione al variare dei valori iniziali.

11.140- *ese7. 37*-

Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x > 0$.

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione definite per $x < 0$.

☐ Determinare, se esistono, tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

☐ Stabilire se le soluzioni di cui ai punti precedenti formano uno spazio vettoriale ed in caso affermativo stabilirne la dimensione.

☐ Trovare, se esistono, le soluzioni tali che $y(0) = 1$ e $y(1) = 0$.

11.141- *ese7. 42-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$2y''(x) = 1 - y^2(x)$$

☐ Discutere brevemente esistenza ed unicità delle soluzioni al variare dei dati iniziali

☐ Determinare eventuali soluzioni costanti

☐ Trovare la soluzione dell'equazione data tale che $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$ precisandone il campo di definizione.

☐ Stabilire se tale soluzione è limitata e calcolarne eventuali massimi e minimi assoluti e relativi

☐ Determinare, se esistono, un maggiorante ed un minorante del campo di definizione della soluzione.

11.142- *ese7. 45-*
Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

☐ Calcolare $y''(0)$ per ogni soluzione dell'equazione data

☐ Detti $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, determinare una formula di ricorrenza per i coefficienti a_n di una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ che sia soluzione dell'equazione data.

☐ Per i casi $a = 1$ $b = 0$ e $a = 0$ $b = 1$, determinare le formule di ricorrenza per b_n e c_n in modo che le corrispondenti soluzioni si possano scrivere nella forma $\sum b_n x^{3n}$ e $\sum c_n x^{3n+1}$, precisando la relazione tra a_n b_n e c_n.

☐ Determinare il raggio di convergenza delle serie trovate

☐ Scrivere l'integrale generale dell'equazione data

Serie Numeriche e di funzioni

12.1- *ese2. 1-*
Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\ln n}$$

Si ricordi che

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n = \\ \int_1^2 \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2+x}\right)+\frac{1}{n}\right]dx$$

12.2- *ese2. 2-*
Discutere il carattere delle seguenti serie al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\sum_1^\infty \left(k^2-\frac{1}{n}\right)^n \qquad \sum_1^\infty \frac{\sin k}{n} \qquad \sum_1^\infty e^{-k/n^2};$$
$$\sum_1^\infty \ln\frac{k}{n^2} \qquad \sum_1^\infty (-1)^n \ln\frac{k}{n} \qquad \sum_1^\infty n^n k^n$$
$$\sum_1^\infty e^{kn} \qquad \sum_1^\infty e^{k\ln n} \qquad \sum_1^\infty e^{kn\ln n}$$

12.3- *ese2. 3-*
Calcolare la somma delle serie a meno di $[\cdot]$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{n+1}{4^n} \quad \left[\frac{1}{10}\right] \qquad \sum_1^\infty (-1)^n \frac{(0,3)^n}{(n+1)^n} \quad \left[\frac{1}{100}\right]$$
$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^n} \quad \left[\frac{1}{100}\right]$$

12.4- *ese2. 4-*
Esiste una successione a_n tale che

$$\sum \frac{a_n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \sum a_n = +\infty?$$

12.5- *ese2. 5-*
È vero che

$$\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n^2 < +\infty?$$

È vero il viceversa?

12.6- *ese2. 6-*
È vero che se

$$a_n \geq 0,\ b_n \geq 0,\ \sum a_n^2 < +\infty,\ \sum b_n^2 < +\infty$$

allora

$$\sum a_n b_n < +\infty$$

e che

$$\sum (a_n b_n)^2 < +\infty?$$

Cosa si può dire se di più è noto che

$$\sum a_n < +\infty,\ \sum b_n < +\infty?$$

12.7- *ese2. 7-*
È vero che

$$\left|\sum a_n b_n\right| < \frac{1}{2}\left(\sum a_n^2 + \sum b_n^2\right)?$$

12.8- *ese2. 8-*
È vero che

$$\sum a_n^2 < +\infty \Rightarrow \sum \frac{a_n}{n} < +\infty?$$

12.9- *ese2. 9-*
È vero che se

$$a_n \geq 0,\ a_n \geq a_{n+1}$$

Allora

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} + \cdots < +\infty?$$

12.10- *ese2. 10-*
Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum (-1)^n \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{(n^2+n+1)^\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \sum \frac{\cosh n}{\cosh 2n}$$

$$\sum e^{-\sqrt{1+n}} \qquad \sum \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right);$$

$$\sum \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}},\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

12.11- *ese2. 11-*
Studiare la convergenza assoluta delle serie degli esercizi precedenti.

12.12- *ese2. 12-*

Può esistere una successione a_n tale che

$$\sum a_n = 2 \qquad \text{e} \qquad \sum |a_n| = 1?$$

Perchè?

12.13- *ese2. 13*-
Può esistere una successione a_n tale che

$$\sum a_n^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \sum a_n = 0?$$

Perchè?

12.14- *ese2. 14*-
Siano date due serie convergenti, $0 \leq \sum a_n < \sum b_n < +\infty$. È vero che
a) $a_n \leq b_n \forall n$?
b) $a_n \leq b_n$ definitivamente?
c) $a_n \leq b_n$ per qualche n? Perchè?

12.15- *ese2. 15*-
Sia a_n una successione non decrescente tale che

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \ell < 1.$$

È vero che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$è necessariamente convergente?

12.16- *ese2. 16*-
Studiare il carattere delle serie di termine generale:

$$\frac{1}{(\ln n)^\alpha} \qquad \frac{n}{2^n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n; \qquad \sin\frac{\pi}{n}$$

$$\frac{3^n n!}{n^n} \qquad \left(n^{1/n} - 1\right)^n$$

$$(-1)^n \arctan\frac{1}{2n+1} \qquad \frac{(2n+1)^n}{(2n)!}k^3 \ (k \in \mathbb{R})$$

$$\frac{[\arctan(1-x^2)]^n}{n} \ (x \in \mathbb{R}) \qquad n^2 e^{-n}$$

$$\frac{n!}{n^{2n}} \qquad \frac{(\arctan k)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \ (k \in \mathbb{R})$$

$$\frac{ne^n}{e^{2n} + \ln n} \qquad \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

$$\left(n^2 - e^{-n}\right) \qquad \frac{n}{n^2 - \ln n}$$

$$(-1)^n \frac{n+1}{n^2+100} \qquad (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

$$(-1)^n \frac{1}{n - \ln n} \qquad \sin\frac{(-1)^n}{n}$$

$$(-1)^n (e^{1/n} - 1); \qquad \frac{\sin 1/n}{\sqrt{n-1}}$$

$$\frac{1}{n^2 \sin\frac{n^2\pi}{n^2+1}} \qquad 1 - \sin\left(\frac{(-1)^n/n}{n}\right);$$

$$\ln(n!)$$

$$\frac{\cos n}{n^2-n}$$

$$(-1)^n\frac{(n!)^2}{n^n}$$

$$(-1)^n\frac{n^2}{n!}$$

$$n^n x^{2n}$$

$$\frac{(\cos x)^n}{n+\sqrt{n}}$$

$$\frac{k^{n+1}}{3^{n-1}}$$

$$\sin(x+n\pi)$$

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

$$\ln\frac{n2^n}{3^n}$$

$$\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$\frac{n^{n^{n+1/n}}}{\left(n+\frac{1}{n^2}\right)^n}$$

$$(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

$$(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$$

$$\frac{n}{e^{n^2}}$$

$$n^{-\sqrt[n]{n}}$$

$$\exp\left(\frac{(k+1)n^2+n}{(k^2-n)n-2}\right)\quad (k\in\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{\ln(n!)}$$

$$(-1)^n\frac{n-1}{n^3+1}x^{2n+1}\quad (x\in\mathbb{R})$$

$$\frac{\sqrt[n]{\sin 1/n}}{(n+1)^{\ln n}}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$\ln\frac{x}{n^2}$$

$$\frac{(\sin x)^n}{n\ln n}\quad (x\in\mathbb{R})$$

$$\frac{(x+3)^n+1}{2^n}$$

$$(-1)^n\frac{n-1}{n^3+1}$$

$$\frac{2n+1}{2^n}$$

$$n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)\sqrt[n]{n}$$

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\frac{n!}{2^{2n}}$$

$$\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$$

$$\frac{(-1)^n}{\ln\left(e^n+e^{-n}\right)}$$

$$(-1)^n\frac{n^4}{1+n^2}$$

$$\sin^2\frac{1}{n}$$

$$n^{3/2}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$$

$$n^3\left(\ln\cos\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n^2}\right)^2\quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

12.17- *ese2. 17*-
Sia $a_n\to 0$ per $n\to\infty$, cosa si può dire di

$$\sum n^{-1-a_n}?$$

12.18- *ese2. 18*-
Calcolare il limite e provare la convergenza non uniforme di

$$f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

Tracciare il grafico per $n=1,2,3$.

12.19- *ese2. 19*-
Provare che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

ove

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+x^2n^2}, x \in [-1,1]$$

Provare inoltre che la convergenza non è uniforme.

12.20- *ese2. 20*-
Discutere convergenza semplice e uniforme di

$$f_n(x) = n^\alpha x^2(1+n^2x^2)\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+nx^2}\ x \in [-1,1],$$
$$f_n(x) = (\sin x)^n, \qquad f_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}$$
$$f_n(x) = x(1-(\sin x)^n) \text{ in } [0,\pi] \text{ e } [0,\frac{\pi}{4}] \qquad f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}\sin\frac{1}{nx} \text{ in } (0,1]$$
$$f_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \text{ in}[0,2]$$

.

12.21- *ese2. 21*-
Studiare convergenza semplice, assoluta, uniforme e totale delle serie di termine generale:

$$(-1)^n \frac{n^4}{\tan x^4/n}, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \qquad (-1)^n \frac{n}{e^{n^2}x^{2n}}$$
$$\sin(nx^n) \qquad \sin\frac{x}{n^2}$$
$$(-1)^n \frac{1}{n(1+x^2)} \qquad (-1)^n n \ln\left(1+\frac{x^n}{n(n-1)^2}\right)$$
$$2^{n(x^2-1)} \qquad e^{n(x^2-x)}$$
$$(\cos x)^n \qquad \frac{1}{n^x}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{-1}$$
$$\frac{x^n}{n(\ln n)^x} \qquad (-1)^n \frac{n^{-x}}{(3^x-1)^n}$$
$$\frac{e^{nx}}{n^3} \qquad \frac{(3^x+2)^n}{n+n^x}$$
$$\frac{1}{n^x}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad (-1)^n \frac{2^{-n(x+1)}}{n^x+n}$$
$$\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+2}} \qquad \frac{(n!x+3)^n}{n^n}$$
$$\frac{x^n(-1)^n}{n\ln n} \qquad (-1)^n n^4 \ln\left(1+\frac{x^n}{n(n-1)^2}\right)$$
$$\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n} \qquad \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2x\right)^x$$
$$\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)} \qquad [\arctan nx - \arctan(n-1)x]$$
$$(-1)^n \frac{n^x}{n\ln n} \qquad x^{nx}$$
$$(-1)^n x^n \quad \left(\frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right) \qquad \frac{1}{2^n}\sqrt{1-x^{2n}}\ (x \in [-1,1])$$
$$\frac{\sin nx}{n^2}\ (x \in \mathbb{R}) \qquad (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$x^{n!} \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{\sin x}{e}\right)^n$$

$\dfrac{a^x}{n^x}$; $(0 < a < 1)$

$\dfrac{x^n}{1-x^n}$

$(n!)^2 \dfrac{x^n}{(2n)!}$

$(x \ln x)^n$ in $(0,1], (0,a],\ a \in \mathbb{R}$

$\dfrac{x^n}{n^n}$

$\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$

$(-1)^n \dfrac{1}{x+n}$

$\dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \ln \dfrac{2n+1}{n}$

$n^2 (\arctan x)^n$

$\dfrac{\ln n}{n^x}$

$\dfrac{a^n}{n^x}$ $(a > 1)$

$k^n x^{2n+1} e^{-nx^2}$ $(k \in \mathbb{R})$

$\dfrac{n - \cos x}{n}$

$k^n |\sin nx|$ $(k \in \mathbb{R})$

$\dfrac{n}{n+1} \left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$

$(-1)^{n-1} 2n \dfrac{\sin^{2n} x}{n}$

$\dfrac{2^n \sin^n x}{n^2}$

12.22- *ese2. 61*-
Calcolare il differenziale di

$$f(x,y,z) = x^{(y^z)}$$

$$f(x,y) = e^{x^2/2y} \ln(x+y)$$

.

12.23- *ese2. 62*-
Calcolare la derivata seconda, la direzione ℓ di

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$$

.

12.24- *ese2. 63*-
Usando la formula di Taylor, calcolare:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\arctan(x-xy) - x + xy}{x^2 + (y-1)^2}; \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\arctan(xy-y) - xy + y}{(x-1)^2 + y^2};$$

e un intorno ove

$$|\arctan(x-xy) - x + xy| < \frac{1}{100} \quad ; \quad |\arctan(xy-y) - xy + y| < \frac{1}{100}.$$

12.25- *ese5. 8*-
Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right) x^{2n+1}$$

☐ Determinare i coefficienti della serie

☐ Determinare il raggio di convergenza della serie $\quad r = \ldots\ldots$

☐ Stabilire se c'è convergenza negli estremi dell'intervallo di convergenza

12.26- *ese5. 17*-
Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

☐ Determinare il raggio di convergenza della serie data

☐ Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza

☐ Maggiorare l'errore che si commette sostituendo ad $f(1)$ i primi due termini della serie

☐ Maggiorare l'errore che si commette sostituendo ad $f(-1)$ i primi due termini della serie

☐ Determinare lo sviluppo di Taylor di f in 0, se esiste, precisandone il dominio di validità.

☐ Calcolare, se esiste, $f'''(0)$.

12.27- *ese5. 19*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \arctan(n^x)$$

☐ Il campo di definizione di f è
$D = \ldots\ldots$

☐ Determinare gli eventuali insiemi di convergenza uniforme della serie data, giustificandoli.

☐ La funzione f è continua in: $I = \ldots\ldots$

☐ Calcolare $f(-1/2)$ a meno di $1/10$, giustificando la risposta

☐ Determinare se f è derivabile in
☐ $(-1,1)$ ☐ $(-1,1]$ ☐ $(-a,a)$ $\forall a \quad 0 < a < 1$ ☐ $(-\infty,-1)$ ☐ $[-1/2,1)$ ☐ $(1,+\infty)$

☐ Calcolare, se esiste, $f'(0) = \ldots\ldots$

12.28- *ese5. 21*-
Si consideri

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{x^2/n} \frac{\arctan t}{\sqrt{t}} dt$$

☐ L'insieme di definizione di f_n è: $I = \ldots$

☐ L'insieme di definizione di f è:

○ $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ○ $[0,+\infty)$ ○ $\mathbb{R}$

☐ L'insieme di continuità di f è:

○ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ○ $[0,+\infty)$ ○ $\mathbb{R}$

☐ L'insieme di derivabilità di f è:

○ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ○ $(0,+\infty)$ ○ $\mathbb{R}$

☐ L'insieme di crescenza di f è:

○ $(0,+\infty)$ ○ $(-\infty,0)$ ○ $\mathbb{R}$

☐ L'insieme di convessità di f è:

○ $(0,+\infty)$ ○ $(-\infty,0)$ ○ $\mathbb{R}$

☐ Un'espressione per f' è: $f'(x) = \ldots\ldots$

☐ Un'espressione per f'' è: $f''(x) = \ldots\ldots$

☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

○ $+\infty$ ○ $\ell > 0$ ○ 0 ○ $-\infty$

☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

○ $+\infty$ ○ $\ell < 0$ ○ 0 ○ $-\infty$

12.29- *ese6. 76*-
Si consideri la funzione f definita dalla seguente serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{3n} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \frac{1}{8^n}$$

☐ Scrivere esplicitamente i coefficienti a_n della serie data e precisarne il centro x_0

☐ Determinare l'intervallo di convergenza della serie data

☐ Precisare se la serie converge negli estremi dell'intervallo di convergenza

☐ Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la serie converge uniformemente su $[a, b]$

☐ Disegnare il grafico della funzione f

☐ Calcolare $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ a meno di $\frac{1}{10}$ precisandone il segno e determinando se l'approssimazione è per eccesso o per difetto

12.30- *ese6. 97*-
Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}(x-1)^{n^2}$$

☐ Determinare il raggio di convergenza della serie

☐ Determinare il campo di definizione di f, precisandone la continuità

☐ Provare che la serie data è, per $x = 0$, a segni alterni e che $\frac{n^2}{n!}$ è decrescente.

☐ Determinare il segno di $f(0)$ e calcolarlo a meno di .01

12.31- *ese6. 98*-
Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)}$$

☐ Trovare l'intrevallo di convergenza della serie precisando il comportamento negli estremi dell'intervallo.

☐ Determinare l'espressione in serie di potenze di $f'(x)$ precisandone la validità

☐ Determinare l'espressione in serie di potenze di $f''(x)$ precisandone la validità

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Trovare una espressione di f in termini di funzioni elementari.

12.32- *ese6. 100*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & xy \leq 1 \\ x + y + x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2} & xy > 1 \end{cases}$$

☐ Determinare l'insieme D in cui f è continua.

☐ Determinare l'insieme E in cui f è parzialmente derivabile.

☐ Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ rispetto ad una direzione arbitraria (α, β). (cioè calcolare $f'((1,1),(\alpha,\beta))$)

☐ Calcolare

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,x)$$

12.33- *ese6. 103*-
Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)}$$

☐ Trovare l'intrevallo di convergenza della serie precisando il comportamento negli estremi dell'intervallo.

☐ Determinare l'espressione in serie di potenze di $f'(x)$ precisandone la validità

☐ Determinare l'espressione in serie di potenze di $f''(x)$ precisandone la validità

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Trovare una espressione di f in termini di funzioni elementari.

12.34- *ese6. 119*-
Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{n^2}$$

☐ Determinare i coefficienti a_n della serie di potenze e precisare se è vero che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ fornisce il raggio di convergenza della serie

☐ Trovare il raggio di convergenza R della serie

☐ Stabilire se la serie data converge per $x = R$

☐ Stabilire se la serie data converge per $x = -R$

☐ Esprimere in serie di potenze

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad \text{ed} \qquad f'(x)$$

precisando il raggio di convergenza degli sviluppi ottenuti

12.35- *ese7. 36*-
Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n!}}{n!}$$

☐ Determinare i coefficienti a_n della serie di potenze e precisare se è vero che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ fornisce il raggio di convergenza della serie

☐ Trovare il raggio di convergenza R della serie

☐ Stabilire se la serie data converge per $x = R$

☐ Stabilire se la serie data converge per $x = -R$

☐ Esprimere in serie di potenze

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

precisando il raggio di convergenza dello sviluppo ottenuto

12.36- *ese7. 43*-
Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\ln(1 + e^{-n})\Big) x^{n!}$$

☐ Determinare il raggio di convergenza della serie data.

☐ Precisare se la serie è convergente negli estremi dell'intervallo reale di convergenza.

☐ Studiare la convergenza uniforme della serie precisando se è convergente su tutto il suo intervallo di convergenza reale

☐ Determinare, nel piano complesso il cerchio di convergenza della serie data, precisando il suo comportamento sulla frontiera

☐ Stabilire se la serie data è uniformemente o totalmente convergente su tutto il suo cerchio di convergenza, nel piano complesso.

Serie di Taylor e Fourier

13.1- *ese2. 22*-
Studiare le sviluppabilità in serie di Mac Laurin delle funziuoni

e^{-1/x^2}	$\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$	$\dfrac{2x-3}{(x-1)^2}$
$\dfrac{3x-5}{x^2-x+3}$	xe^{-2x}	$\sinh x$
$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{9+x^2}$	$\sin 3x + x\cos 3x$
$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	$\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	$\ln(1+x-2x^2)$
$\arcsin x$	$\arctan x$	$(1-x)\ln(1+x)$
$\ln(x+\sqrt{1-x^2})$	$\sin^2 x\cos^2 x$	$(1+x)e^{-x}$
$(1+e^x)^3$	$\sqrt[3]{8+x}$	$\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$
$\cosh^3 x$	$\dfrac{1}{4-x^4}$	$\ln(x^2+3x+2)$
$\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$	$\tan x$	$\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$
$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$e^x\sin x$	$\ln\cos x$

13.2- *ese2. 23*-
Sviluppare la funzione

$$x^3-2x^2-5x-2$$

in una serie di potenze di $x-4$.

13.3- *ese2. 24*-
Sia

$$f(x)=5x^3-4x^2-3x+2$$

Sviluppare $f(x+h)$ in serie di potenze di h.

13.4- *ese2. 25-*
Sviluppare
$$\frac{1}{x^2+4x+7}$$
e
$$e^x$$
in serie di potenze di $x+2$.

13.5- *ese2. 26-*
Sviluppare $\cos^2 x$ in una serie di potenze di $x-\frac{\pi}{4}$.

13.6- *ese2. 27-*
Sviluppare $\ln x$ in una serie di potenze di
$$\frac{1-x}{1+x}$$

13.7- *ese2. 28-*
Dare una stima dell'errore che si commette approssimando
$$e \quad \text{con} \quad 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

13.8- *ese2. 29-*
Approssimare con numeri razionali
- $\ln 2$ a meno di $\dfrac{1}{1000}$
- $\sqrt[3]{9}$ a meno di $\dfrac{1}{100}$ (sviluppare un serie di Mac Laurin $\sqrt[3]{8+x}$)
- $\sqrt[4]{19}$ a meno di $\frac{1}{1000}$

13.9- *ese2. 30-*
Per quali x si può approssimare
$$\cos x \quad \text{con} \quad 1-\frac{x^2}{2}$$
con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$?, a $\frac{1}{1000}$?, a $\frac{1}{10000}$?

13.10- *ese2. 31-*
Studiare la sviluppabilità delle seguenti funzioni in serie di Fourier nell'intervallo $(-\pi,\pi)$, determinare la somma della serie nei punti di discontinuità e negli estremi dell'intervallo. Disegnare il grafico delle funzioni stesse e delle somme delle corrispondenti serie:

$$f(x)=\begin{cases} c_1 & x\in(-\pi,0] \\ c_2 & x\in(0,\pi) \end{cases} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R} \qquad f(x)=\begin{cases} a^x & x\in(-\pi,0] \\ b^x & x\in(0,\pi) \end{cases} \quad a,b,\ \in\mathbb{R}$$

$f(x)=e^{ax}$ $(a\in\mathbb{R})$ $\qquad$ $f(x)=\sin ax$ $(a\in\mathbb{R})$
$f(x)=x^2$ $\qquad$ $f(x)=\cos ax$ $(a\in\mathbb{R})$
$f(x)=\sinh ax$ $\qquad$ $f(x)=\cosh ax$ $(a\in\mathbb{R})$

13.11- *ese2. 32*-
Sviluppare la funzione
$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$
in serie di Fourier nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

13.12- *ese2. 33*-
Sviluppare la funzione
$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$
in serie di Fourier di soli seni e di soli coseni.

13.13- *ese2. 34*-
Studiare la sviluppabilità in $(0, \pi)$
a) in serie di soli seni
b) in serie di soli coseni
delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^2$$
$$f(x) = e^{ax} \quad , a \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi/2) \\ 0 & x \in [\pi/2, \pi) \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, \pi/2] \\ \pi - x & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Usando lo sviluppo di x^2, trovare la somma di
$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}, \qquad \text{e} \qquad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

13.14- *ese2. 35*-
Studiare la sviluppabilità in $(0, \pi)$ in serie di soli seni delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, \pi/2] \\ 0 & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$
$$f(x) = x(\pi - x)$$
$$f(x) = \sin \frac{x}{2}$$

13.15- *ese2. 36*-
Studiare la sviluppabilità in $(0, \pi)$ in serie di soli coseni delle seguenti funzioni

$$f(x) = x \sin x$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, h] \\ 0 & x \in (h\pi) \end{cases} \quad h \in (0, \pi)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/2h & x \in (0, 2h) \\ 0 & x \in (2h, \pi) \end{cases} \qquad h \in (0, \pi/2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in (0, \pi/2] \\ -\cos x & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

13.16- *ese2. 37*-
Usando lo sviluppo delle funzioni x e x^2 nell'intervallo $(0, \pi)$ in serie di soli coseni, provare l'uguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \qquad x \in [0, \pi].$$

13.17- *ese2. 38*-
Sviluppare le seguenti funzioni in serie di Fourier negli intervalli indicati

$f(x) = \lvert x \rvert$	in	$(-1, 1)$
$f(x) = 2x$	in	$(0, 1)$
$f(x) = e^x$	in	$(-\ell, \ell) \quad \ell \in \mathbb{R}$
$f(x) = 10 - x$	in	$(5, 15)$

13.18- *ese2. 39*-
Studiare la sviluppabilità in serie di soli seni e di soli coseni delle seguenti funzioni , negli intervalli indicati

$f(x) = 1$	$(0, 1)$
$f(x) = x$	$(0, \ell), \quad \ell \in \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2$	$(0, 2\pi)$
$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1] \\ 2 - x & x \in (1, 2) \end{cases}$	$(0, 2)$

13.19- *ese2. 40*-
Studiare la sviluppabilità in serie di soli coseni di

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in (3/2, 2] \\ 3 - x & \text{se} \quad x \in (2, 3) \end{cases}$$

nell'intervallo $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

13.20- *ese4. 1*-
Sia

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

trovare lo sviluppo $F_a(x)$ in serie di Fourier della funzione f sull'intervallo $[-\pi, \pi]$

☐ $F_a(x) = \ldots\ldots$

☐ $F_a(a) = \ldots\ldots$

☐ $F_{\pi/2}(\pi/2) = \ldots\ldots$
Usando il punto precedente provare che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

13.21- *ese5. 3*-
Si considerino le funzioni

$$f(y) = \frac{1}{1+y} \qquad g(x) = \frac{x^6}{1+x^{10}}$$

☐ Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in $y_0 = 0$ di f

☐ Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di g

13.22- *ese7. 34*-
Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^2}$$

☐ Dimostrare che f converge totalmente su $\mathbb{R}$

☐ Dimostrare che f è periodica e determinarne il periodo minimo.

☐ Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di f su $[0, 2\pi]$

☐ Calcolare $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a meno di .1

☐ Precisare se l'approssimazione ottenuta è per eccesso, per difetto e trovare con una cifra esatta $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Funzioni di più variabili

14.1- *ese2. 43*-
Determinare l'insieme di definizione di ciascuna delle seguenti funzioni, precisando se tali insiemi sono aperti, chiusi, limitati,...

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos y}}$$
$$F(x,y) = \arctan\sqrt{\sin xy}$$
$$F(x,y) = \ln\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$F(x,y) = \ln \sin xy$$
$$F(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$$
$$F(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$F(x,y) = \cos \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}}$$
$$F(x,y) = \arcsin \sqrt{4-x^2}$$

14.2- *ese2. 44*-
Determinare le linee di livello delle seguenti funzioni, dopo averne studiato il campo di definizione:

$$F(x,y) = \ln(xy)$$
$$F(x,y) = x^y$$
$$F(x,y) = e^{1/(y-x^2)}$$
$$F(x,y) = \sqrt{\cos(x^2+y^2)-1}$$
$$F(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)-1}$$
$$F(x,y) = e^{1/xy}$$
$$F(x,y) = \arctan \frac{1}{x^2+y^2}$$

14.3- *ese2. 45*-
Calcolare se esistono:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \arctan \frac{x+y}{1-xy} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2 y}{xy}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{xy}}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x^2(y-1)}{(y-1)^2-x^2}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{x^2(y-2)}{x^4-(y-2)^2}; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\ln(x^2y^2+1)}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \ln(xy)$$
$$\lim_{(x,y)\to\infty} e^{1/xy}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$
$$\lim_{(x,y)\to\infty} \arctan \frac{1}{x^2-y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x}{x^2+y^2}$$

14.4- *ese2. 47*-
Calcolare, se esistono,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} (x^2-y^2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+xy}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\frac{x-y}{x+y}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln y; \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ y_0\neq 0}} y\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ x_0\neq 0}} xy\ln y; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

14.5- *ese2. 50*-
Disegnare l'insieme di definizione A della funzione

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{2x^2+y^2-3}-1\right) + \arcsin\left(x^2+y^2\right)$$

e stabilire se A è aperto, chiuso, limitato, connesso, semplicemente connesso.

14.6- *ese2. 53*-
Determinare il campo di definizione delle seguenti funzioni, precisando le sue proprietà topologiche:

$$f(x,y) = \ln(x^2-y-1)$$
$$f(x,y) = \ln(x^2+2y^2)$$
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{9x^2+4y^2-36}{9-x^2-y^2}}$$
$$f(x,y) = \arcsin\frac{x-y}{x+y}$$
$$f(x,y) = \left[\frac{(x^2-y^2)}{x^2+4y^2-4}\right]^{xy}$$
$$f(x,y) = \ln\frac{2-|x|-|y|}{(1-x^2)(y^2-1)}$$
$$f(x,y) = \left(\frac{x\sqrt{x+y}}{\ln(x^2-x-y)}\right)^{1/y}$$
$$f(x,y) = \left[\ln\left(\sqrt{2x^2+y^2-3}-1\right) + \arccos(x+y)\right]$$

14.7- *ese2. 54*-
Determinare, anche graficamente, le curve di livello delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = x+y \qquad f(x,y) = xy$$
$$f(x,y) = \ln(2x^2+y^2) \qquad f(x,y) = x\ln y$$
$$f(x,y) = \arcsin\frac{x-y}{x+y} \qquad f(x,y) = xy\ln y$$

14.8- *ese2. 59-*
Discutere il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

ove

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{y^2 - 4x^2} & \text{se} \qquad y^2 - 4x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se} \qquad y^2 - 4x^2 = 0 \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2 + z^2 - xy)}{x^4 + y^4 + z^4 - xy - yz}.$$

14.9- *ese2. 65-*
Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{\sin xy} \cdot \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(x-2) + 2 - x}{y^2 - 4(x-2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} x - \dfrac{\arctan xy}{y} & \text{se } y^2 \leq x^6 \\ y^4/(x^2 + y^2) & \text{se } y^2 < x^6 \end{cases}$$

14.10- *ese5. 12-*
Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \frac{x}{x^2 + |y|^\alpha} \qquad (x,y) \neq (0,0) \qquad \alpha > 0$$

☐ f_α è differenziabile in $(0,1)$ per i seguenti valori di α, perchè

☐

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y)$$

esiste per i seguenti valori di α, perchè

☐ Disegnare i livelli di f_α per $\alpha = 2$ ed $\alpha = 1/2$
Si consideri la funzione

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_\alpha(x,n)$$

☐ Determinare al variare di α l'insieme I_α di definizione di F

☐ Nel caso in cui I_α non sia ridotto ad un solo punto, determinare per quali α la serie che definisce F converge totalmente su tutto I_α

☐ Nel caso in cui I_α non sia ridotto ad un solo punto, determinare per quali α la serie che definisce F converge totalmente su tutti gli insiemi chiusi e limitati contenuti in I_α

☐ Si ponga $\alpha = 1$ e $D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\ ,\ 1/k < y < 1\}$ e si calcoli
$\displaystyle\int_{D_k} f_1(x,y)dxdy = \ldots\ldots$

☐ Si ponga $\alpha = 1$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1\}$ e si calcoli
$\int_D f_1(x,y)dxdy = \ldots\ldots$

14.11- *ese5. 22*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{\arctan(xy)}{\sqrt{ax^2 + xy + y^2}}$$

☐ Disegnare al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme di definizione di f
Dopo aver prolungato la funzione a zero, ove non è definita

☐ Determinare l'insieme dei punti del piano in cui f è continua

☐ Determinare l'insieme dei punti del piano in cui f è differenziabile

☐ Calcolare ove esista $f'((0,0),(1,1)) = \ldots$
Si consideri la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, tale che

$$\begin{cases} u_{xy} = 0 \\ u(x,1) = x^3 - 1 \\ u(1,y) = y^2 - 2y + 1 \end{cases}$$

☐ Determinare esplicitamente la funzione u : $u(x,y) = \ldots\ldots$

14.12- *ese5. 23*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^4 - x + y + y^2 - 2$$

☐ Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \ldots\ldots$

☐ Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione f su $\mathbb{R}^2$

☐ Stabilire se nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

y è esplicitabile in funzione di x in un intorno del punto $P = (0,1)$

☐ Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto P al grafico della funzione che localmente rappresenta l'insieme dei punti del piano per i quali risulta $f(x,y) = 0$ in un intorno di P.

☐ Disegnare il grafico locale della funzione di cui al punto precedente e della sua tangente nel punto P, precisando monotonia e convessità della funzione.

14.13- *ese5. 24*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{ax^2 + xy + y^2}}$$

☐ Disegnare al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme di definizione di f
Dopo aver prolungato la funzione a zero, ove non è definita

☐ Determinare l'insieme dei punti del piano in cui f è continua

☐ Determinare l'insieme dei punti del piano in cui f è differenziabile

☐ Calcolare ove esista $f'((0,0),(1,1)) = \ldots\ldots$

14.14- *ese5. 25*-
Si consideri la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, tale che

$$\begin{cases} u_{xy} = 0 \\ u(x,1) = x^3 - 1 \\ u(1,y) = y^2 - 2y + 1 \end{cases}$$

☐ Determinare esplicitamente la funzione u: $u(x,y) = \ldots\ldots$

14.15- *ese5. 26*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^4 - x + y + y^2 - 2$$

☐ Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \ldots\ldots$

☐ Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione f su $\mathbb{R}^2$

☐ Stabilire se nell'equazione

$$f(x,y) = 0$$

y è esplicitabile in funzione di x in un intorno del punto $P = (0,1)$

☐ Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto P al grafico della funzione che localmente rappresenta l'insieme dei punti del piano per i quali risulta $f(x,y) = 0$ in un intorno di P.

☐ Disegnare il grafico locale della funzione di cui al punto precedente e della sua tangente nel punto P, precisando monotonia e convessità della funzione.

14.16- *ese5. 30*-
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{1+x^5}$$

☐ Il campo di definizione di f è $D = \ldots\ldots$

☐ I limiti agli estremi del campo di definizione sono

☐ Calcolare, dove esiste, la derivata prima di f $f'(x) = \ldots\ldots$ in $D' = \ldots\ldots$

☐ f è crescente in $D'' = \ldots\ldots$

☐ f è decrescente in $D''' = \ldots\ldots$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Trovare la retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$

☐ Trovare il polinomio di Taylor di f nel punto $x_0 = 1$ di grado 2

☐ Determinare un intervallo in cui f sia invertibile; $I = \ldots\ldots$

☐ Disegnare il grafico di f^{-1} nell'intervallo scelto

☐ disegnare il grafico di $\frac{1}{f}$ dopo averne precisato l'insieme J di definizione $J = \ldots\ldots$

☐ disegnare il grafico di f^2 dopo averne precisato l'insieme J di definizione $J = \ldots\ldots$

14.17- *ese5. 31-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

Determinare a, b, c, d in modo che

☐ f sia convessa

☐ f sia crescente su $\mathbb{R}$

☐ f ammetta minimo assoluto in $x = 0$

☐ f ammetta massimo assoluto in $x = 0$
Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 e^{x+2}$$

☐ Disegnare il grafico di f

☐ Determinare un intervallo in cui f sia invertibile: $I = \ldots\ldots$

☐ Disegnare il grafico di f^{-1} nell'intervallo scelto

14.18- *ese6. 11-*
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 \ln(|y|)$$

☐ Disegnare l'insieme D di definizione di f e studiare continuità e differenziabilità di f in D.

☐ Stabilire se esistono punti di $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ove f può essere prolungata per continuità.

☐ Dopo aver definito

$$f(0, 0) = 0$$

calcolare, se esistono, le derivate di f in $(0, 0)$ lungo le direzioni $P = (\alpha, \beta)$.

☐ Provare che f non è differenziabile in $(0, 0)$.

☐ Disegnare le curve di livello di f.

☐ Studiare il comportamento all'infinito di f.

14.19- *ese6. 23*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 \ln(|y|)$$

1 - Disegnare l'insieme D di definizione di f e studiare continuità e differenziabilità di f in D.
2 - Stabilire se esistono punti di $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ove f può essere prolungata per continuità.
3 - Dopo aver definito

$$f(0,0) = 0$$

calcolare, se esistono, le derivate di f in $(0,0)$ lungo le direzioni $P = (\alpha, \beta)$ e verificare che, dette $f'(0,P)$ tali derivate, $f'(0,\cdot)$ risulta lineare.
4 - Provare che f non è differenziabile in $(0,0)$.
5 - Disegnare le curve di livello di f.
6 - Studiare il comportamento all'infinito di f.

14.20- *ese6. 65*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \ln x - xy$$

☐ Disegnare, nel piano il campo di definizione di f

☐ Disegnare nel piano le curve di livello $f(x,y) = k$ dei f corrispondenti ai valori $k = -1, 0, 1$

☐ Disegnare nel piano le curve di livello $f(x,y) = k$ dei f corrispondenti a qualche valore significativo di k

☐ Disegnare il grafico delle funzioni $f(x, mx)$ al variare di $m \in \mathbb{R}$, precisandone il significato

☐ Calcolare $\nabla f(x,y)$, precisando dove è definito

☐ Disegnare, nel piano il campo di direzioni individuato da ∇f

14.21- *ese6. 96*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + 2xy$$

☐ Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti di f su $[0,1] \times [0,1]$

☐ Scrivere il piano tangente al grafico di f nel punto $P = (1,1)$

☐ Scrivere la formula di Taylor di grado 10 di f centrata in $P = (0,0)$

☐ Determinare, se esiste, $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$

14.22- *ese6. 102*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & xy \leq 1 \\ |x| + |y| + x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2} & xy > 1 \end{cases}$$

☐ Determinare l'insieme D in cui f è continua.

☐ Determinare l'insieme E in cui f è parzialmente derivabile.

□ Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ rispetto ad una direzione arbitraria (α,β). Cioè calcolare $f'((1,1),(\alpha,\beta))$

□ Calcolare

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,x)$$

14.23- *ese7. 31-*
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(\theta(x,y)-\phi)}{\rho^3(x,y)}$$

ove $\rho(x,y)$ e $\theta(x,y)$ sono le usuali coordinate polari nel piano associate al punto (x,y).

□ Determinare il campo di definizione

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x,y)\in\mathbb{R}\}$$

di f

□ Trovare i sottoinsiemi di D in cui f è positiva, negativa o nulla.

□ Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y), \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

□ Calcolare

$$\int\int_T f(x,y)dxdy$$

ove

$$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad 1\le x^2+y^2\le 2\}$$

□ Disegnare le curve di livello di f

Continuità e differenziabilità

15.1- *ese2. 46-*
Determinare le regioni in cui sono continue le seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{se } x=y=0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^6x^2y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x=0, y=0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin \dfrac{1}{x} + x \sin \dfrac{1}{y} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \ln \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin xy}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

15.2- *ese2. 48-*
Siano $A, B \subset \mathbb{R}^2$, A chiuso limitato, B chiuso tali che

$$A \cap B = \emptyset$$

Si può trovare

$$f : \mathbb{R}^2 \to R$$

continua:

$$f(A) = 1, \qquad f(B) = 0, \qquad 0 \leq f(x,y) \leq 1 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2?$$

15.3- *ese2. 49-*
Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq |y| \\ \sqrt{|y|} & \text{se } |x| < |y| \end{cases}$$

Determinare in quali punti è continua, e in quali punti è derivabile; stabilire se l'insieme di derivabilità è aperto e limitato e calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y)$$

15.4- *ese2. 51-*
Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} \sin x \ln(1+|y|) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ essa è continua nell'origine e per quali valori di α è differenziabile nell'origine.

15.5- *ese2. 52-*
Studiare la continuità e la derivabilità in ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ di

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |y| \geq x^2 \\ \sqrt[3]{y} & \text{se } |y| < x^2 \end{cases}$$

f è differenziabile nell'origine?

15.6- *ese2. 55-*

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln |y| & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$$

f è differenziabile in $(0,0)$?
Calcolare, dove esistono, f_x, f_y. Sono entrambe continue in $(0,0)$?

15.7- *ese2. 56*-
Siano

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y} & \text{se} \quad x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad xy = 0 \end{cases}$$

f, g, h sono continue in $(0,0)$ e in $(0,y)$ con $y \neq 0$?
Determinare gli $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ per cui esistono

$$f'\left((0,0), (\alpha, \beta)\right)$$

$$g'\left((0,0), (\alpha, \beta)\right)$$

$$h'\left((0,0), (\alpha, \beta)\right)$$

f, g, h sono differenziabili in $(0,0)$?

15.8- *ese2. 57*-
Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è continua in $(0,0)$? in $\mathbb{R}^2$?
Calcolare, se esistono, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.
Calcolare, se esiste, $f'\left((0,0),\ (1,1)\right)$.
È vero che

$$\nabla f(a) \cdot y = f'(a, y)$$

per ogni $(a, y) \in \mathbb{R}^2$?
f è differenziabile in $(0,0)$?
In quali punti di $\mathbb{R}^2$ sono definite f_x e f_y?
Dove sono continue?
In quali punti di $\mathbb{R}^2$ f è differenziabile?
Calcolare, se esiste, $f'\left((0,0), (1,-1)\right)$.

15.9- *ese2. 58*-
Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln[1 + (3-x)^2 + (2-y)^2] + \sin(x+y-5)}{[(3-x)^2 + (2-y)^2]^\alpha} & \text{se} \quad (x,y) \neq (3,2) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (3,2) \end{cases}$$

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f è continua in tutti i punti?

Per quali valori di α f è differenziabile in tutti i punti?
Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f è derivabile in tutti i punti secondo i versi?

15.10- *ese2. 60*-
Verificare che

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ha le derivate parziali ma non è continua in $(0,0)$,

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

è continua ma non ha le derivate parziali in $(0,0)$,

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

è continua, ha le derivate parziali non è differenziabile in $(0,0)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \cos \dfrac{1}{x^2y^2} & \text{se} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è differenziabile, ma non ha le derivate parziali continue in $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non ha derivate seconde miste uguali in $(0,0)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{1}{y} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

ha derivate seconde miste uguali benchè le derivate parziali prime non siano continue.

15.11- *ese2. 66*-
Determinare campo di definizione, continuità, differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan xy}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{se} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

15.12- *ese2. 67*-
Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è differenziabile in $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\cos xy) + \arctan x^4 - x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se} \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

15.13- *ese2. 70*-
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sia $f(x_0, y_0) \neq 0$. È vero che $1/f$ è differenziabile in (x_0, y_0)?

15.14- *ese2. 72*-
Se ,per $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

come deve essere definito $f(0,0)$ affinchè f sia continua in $(0,0)$?

15.15- *ese2. 73*-
Stabilire dove è differenziabile la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \cos \dfrac{1}{x^2y^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \ y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \ y = 0 \end{cases} ?$$

Calcolare successivamente

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \qquad \text{con} \qquad v = (2,1)$$

15.16- *ese2. 74*-
Sia

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

a) f è continua in $\mathbb{R}^2$?
b) f è derivabile in $(0,0)$? In quali direzioni ammette derivata?
c) f è differenziabile in $(0,0)$?

15.17- *ese2. 75*-
Determinare il campo di definizione di

$$f(x,y) = \frac{xy}{|\sin\ x - y|^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Determinare poi i valori di α per cui f è prolungabile con continuità in $(0,0)$.

15.18- *ese2. 84*-
Discutere la continuità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy} - e^{-xy}}{2(x^2+y^2)} & \text{se} \quad |y| \leq x^2 \\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad |y| > x^2 \end{cases}$$

15.19- *ese2. 85*-
Studiare continuità e differenziabilità in $(0,0)$ di :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1-\cos y)}{y} & \text{se} \quad |y| > x^4 \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{\sin y^2}{x^4} & \text{se} \quad |y| \leq x^4 \end{cases}$$

15.20- *ese2. 86*-

Verificare che
$$f(x,y) = x^{2/3}y$$
è differenziabile in $(0,0)$ ma f_x non é continua in $(0,0)$.

15.21- *ese2. 87*-
Discutere la continuità delle derivate di
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan xy}{|x|+|y|} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
nei punti $(0,y)$.

15.22- *ese2. 88*-
Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\} \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Verificare che f è derivabile secondo ogni verso in $(0,0)$ ma non è differenziabilein $(0,0)$

15.23- *ese2. 89*-
Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \quad y \neq \\ 0, & \text{se} \quad xy = 0 \end{cases}$$
Stabilire se f è continua in $(0,0)$, in $(0,\bar{y})$, in $(\bar{x},0)$ con $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$.
Determinare, se esiste la derivata nella direzione $(1,1)$ nel punto $(0,0)$.
f è differenziabile in $(0,0)$?

15.24- *ese2. 90*-
Calcolare, se esiste,
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$$
dove
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\lg(1+x^2(y-1))}{x^2+(y-1)^2} & \text{se} \quad |y-1| > 1-e^{-x^2} \\ \dfrac{|\sin(y-e^{-x^2})|}{-\sqrt[3]{y-1}} & \text{se} \quad |y-1| \leq 1-e^{-x^2} \end{cases}$$

15.25- *ese2. 91*-
Determinare insieme di definizione, di continuità e di differenziabilità di
$$f(x,y) = \frac{\arctan(e^y - x - 1)^2}{|x|+|y|}.$$

15.26- *ese2. 92*-

Determinare insieme di definizione, di continuità e di differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\lg(1+\tan xy)}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{se} \qquad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

15.27- *ese2. 150*-
Posto

$$f(x,y) = e^x \cos y + x^3 - 3xy^2$$

risulta

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Determinare g.

15.28- *ese6. 106*-
Si consideri l'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = \rho\cos\theta \ \ y = \rho\sin\theta \ \ 1 \leq z \leq 2 - \rho^2\}$$

☐ Calcolare il volume di D

☐ Calcolare la superficie totale di $S = \partial D$ Si consideri poi il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(1, 1, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

☐ Calcolare il flusso di F attraverso S

☐ Calcolare il lavoro di F lungo la curva

$$D \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 1 \ \ z = 1\}$$

Massimi e minimi liberi e vincolati

16.1- *ese2. 64*-
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita $f(x,y) = a(x^2+y^2) + bx + cy$ ove $a, b, c \in \mathbb{R}$. Quali condizioni è necessario imporre ad a, b, c affinchè $f(x,y) \leq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

16.2- *ese2. 68*-
Calcolare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq\leq 4,\ |y| \leq 4,\ \ x^2 + y^2 \geq 4\}$$

16.3- *ese2. 69-*
Studiare massimi e minimi relativi e assoluti di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,definita da

$$f(x,y) = 9x^4 - y^2 - x^8$$

16.4- *ese2. 71-*
Calcolare massimi e minimi relativi di

$$f(x,y,z) = \int_0^z e^{xyt} dt$$

ove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1,\ 0 \leq\leq z \leq 1.\}$$

16.5- *ese2. 76-*
Sia

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x$$

Determinare :
a) campo di definizione di f, sia esso I,
b) l'insieme dove f è continua ,
c) l'insieme dove f è differenziabile;
d) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$;
e) massimi e minimi relativi e assoluti;
f) massimi e minimi assoluti in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/2\} \cap I$.

16.6- *ese2. 77-*
Determinare i punti di massimo e minimo relativo per le funzioni

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{x^2+xy+y^2+y} \\ f(x,y) &= \cos(x+y) + \sin(x-y) \\ f(x,y) &= \lg(1 + x^3 + y^2) \\ f(x,y) &= y(x^2 + 2y) \\ f(x,y) &= (y - x^2)(y - 2x^2) \\ f(x,y) &= e^{(x+1)^2 + k(y-1)^2},\ k \neq 0 \end{aligned}$$

16.7- *ese2. 78-*
Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di

$$f(x,y) = xy(2x - y - 2)$$

nel triangolo di vertici $(0,0),\ (1,0),\ (0,2)$

$f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
nella corona circolare di centro l'origine e raggi r e R

$f(x,y) = e^{(x+1)^2+k(y-1)^2}\ \ k \neq 0$
in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

$f(x,y) = 10\sqrt{x^2+y} - 6x - 5y^2$
nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2

$f(x,y) = x^3 + 3y^3 + 9y^2 - 3x - 27y - 36$
in
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 4, -4 \leq y \leq 4\}$

$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 + y^2$
in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{3},\ 0 \leq y \leq 1\}$

$f(x,y) = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$
in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

$f(x,y) = x^3 + 5x^2y + 7xy^2 + 5x^2 + 14xy$
in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 5xy - 7y^2 - 7 \leq 0\}$

$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$
nel quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$

$f(x,y) = 3x^2y - y^3$
in$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - y^2 \leq 0\}$

16.8- *ese2. 79*-
Trovare massimi e minimi di

$$f(x,y) = 2x^2 + 10xy + 13y^2 - 7x - 18y$$

in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$

e di

$$g(x,y) = x^2 + 5y^2 + 4y - 2xy$$

in

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq \frac{1}{2}\}.$$

16.9- *ese2. 80*-

Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y,z)=\int_y^z (x+t)dt$$

sulla superficie di equazioni $x^2+y^2+z^2=1$.

16.10- *ese2. 81*-
Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y)=e^{\sin xy}-y$$

in

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, |y|\le 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|y|\le \frac{1}{x}, x>1\}.$$

16.11- *ese2. 82*-
Trovare estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

in

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x+3\ge 0\}$$

16.12- *ese2. 83*-
Sia

$$f(x,y)=\arcsin\frac{x}{x^2+y^2}$$

definire f in $(0,0)$ in modo che risulti ivi continua

16.13- *ese2. 93*-
Trovare i massimi e i minimi relativi ed assoluti di

$$f(x,y)=\int_1^y \frac{e^{x+t}}{t}dt$$

nel rettangolo

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 3\}$$

16.14- *ese2. 94*-
Determinare i massimi e minimi relativi delle funzioni:

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=\exp\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y}+y+2\right)\\
f(x,y)&=\ln(\cos x+\sin y+x)\\
f(x,y)&=x^3y+xy^3-y,\\
f(x,y)&=\sqrt{x^2+xy+2y^2+y+1}
\end{aligned}$$

dopo averne stabilito l'insieme di definizione.

16.15- *ese2. 95*-
Determinare i massimi e minimi di
a)

$$f(x,y) = \cos(x-y) - \sin x + \sin y$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\},$$

b)

$$f(x,y,z) = \exp\left(\frac{1}{x+y+z}\right)$$

con la condizione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

c)

$$(x,y,z) = y^2 + 2z$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0\}.$$

16.16- *ese2. 96*-
Determinare il punto della retta

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2z - y + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha minima distanza da (x_0, y_0, z_0).

16.17- *ese2. 97*-
Fra tutti i cilindri circolari retti inscritti nella sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

determinare quello di superficie totale massima.

16.18- *ese2. 98*-
Studiare i massimi e i minimi relativi e assoluti delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = \sqrt{27 + 18x - 4y^2 - 9x^2}$$
$$f(x,y) = \sqrt{y\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$
$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2y^2$$
$$f(x,y) = (x-1)\sin xy$$
$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

nei loro insiemi di definizione e di:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$
$$\text{in } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$f(x,y) = x^2 + y$$
$$\text{in } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$f(x,y) = x^3 + y^3$$
$$\text{in } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

16.19- *ese2. 99*-
Determinare un rettangolo inscritto nella circonferenza

$$x^2 + y^2 = 1$$

che abbia:
a) area massima,
b) perimetro massimo.

16.20- *ese2. 100*-
Determinare un parallelepipedo, inscrittto nella sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

che abbia:
a) volume massimo;
b) superficie laterale massima.

16.21- *ese2. 101*-
Trovare un punto della superficie di equazione

$$\frac{x^2}{9} + y^2 - z - 1 = 0$$

che abbia distanza minima dall'origine.

16.22- *ese2. 110*-
Determinare estremi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x, y) = \ln\left(\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + 8\right)$$

in

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 - 3 \le 0 \ , \sqrt{3}y - x \le 0, \ \sqrt{3}y + x \ge 0\}$$

e della funzione

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

in

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \ge 1, \ x^2 + y^2 \le 4\}.$$

16.23- *ese5. 6*-
Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

☐ Disegnare le curve di livello di f

☐ Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 4 \ , \ x \ge 1 \ , \ y \le -1\}$ calcolare massimi e minimi assoluti e relativi di f su D precisando i valori e i punti in cui sono assunti

16.24- *ese5. 11*-

Si consideri la funzione $f(x,y) = y^2 - 2x^3y$

☐ Sia $D = [0,1] \times [0,1]$ calcolare massimi e minimi assoluti e relativi di f su D precisando i valori e i punti in cui sono assunti

☐ Disegnare le curve di livello di f

16.25- *ese6. 72-*
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & |y| \le \sqrt{|x|} \\ ax^2 + b & |y| > \sqrt{|x|} \end{cases}$$

☐ Calcolare le derivate direzionali di f in $(0,0)$, precisando per quali direzioni esistono, al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

☐ Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ f è continua in $(0,0)$.

☐ Per tali valori determinare l'insieme in cui f è continua.

☐ Per gli stessi valori stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

☐ Detrminare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ eventuali massimi e minimi assoluti di f su $\mathbb{R}^2$.

16.26- *ese6. 77-*
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |x-1| + |y| \le 1\}$

☐ Determinare massimi e minimi relativi ed assolutidi f, se esistono, su $\mathbb{R}^2$

☐ Determinare massimi e minimi assoluti di f, se esistono, su ∂D e su D

☐ Disegnare le curve di livello di f ed interpretare graficamente i risultati ottenuti ai punti precedenti

☐ Determinare il polinomio di Taylor $P(x,y)$ di f centrato in $(0,0)$ e stabilire se P è una forma quadratica; in caso affermativo stabilire inoltre se è definita o semidefinita e determinarne il segno.

16.27- *ese6. 78-*
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |x-1| + |y| \le 1\}$

☐ Determinare massimi e minimi relativi ed assolutidi f, se esistono, su $\mathbb{R}^2$

☐ Determinare massimi e minimi assoluti di f, se esistono, su ∂D e su D

☐ Disegnare le curve di livello di f ed interpretare graficamente i risultati ottenuti ai punti precedenti

☐ Determinare il polinomio di Taylor $P(x,y)$ di f centrato in $(0,0)$ e stabilire se P è una forma quadratica; in caso affermativo stabilire inoltre se è definita o semidefinita e determinarne il segno.

16.28- *ese6. 108-*

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

☐ Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$

☐ Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\}$

☐ Disegnare $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = -1\}$

☐ Calcolare $\nabla f(x,y)$

☐ Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di f su $\mathbb{R}^2$

16.29- *ese6. 122-*
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{x^2+2y^2}$$

☐ Disegnare

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = -1\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\}$$

☐ Disegnare tutti i livelli di f precisando se sono limitati.

☐ Disegnare

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq k\}$$

☐ Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$$

giustificando brevemente la risposta

☐ Verificare, usando la definizione di limite, la precedente risposta.

16.30- *ese6. 127-*
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 2 + x^2 + \left(\int_1^{y^2} e^{-t^2} dt\right)^2$$

☐ Determinare il campo di definizione di f.

☐ Determinare, se esiste, (giustificando brevemente la risposta)

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$$

☐ Calcolare, se esistono, $\inf f$, $\sup f$, $\min f$ e $\max f$ su $\mathbb{R}^2$

☐ Calcolare, se esistono, $\inf f$, $\sup f$, $\min f$ e $\max f$ su $[0,1]^2$

☐ Determinare, se esistono, un maggiorante ed un minorante del campo di definizione della soluzione.

16.31- *ese7. 32-*

Si consideri la funzione

$$f(k) = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{x^2} dx$$

☐ Dimostrare che f è definita $\mathbb{R}$

☐ Stabilire per quali valori f è derivabile e calcolarne la derivata.

☐ Trovare, integrando per parti $f'(k)$, una relazione differenziale per f

☐ Determinare esplicitamente $f(k)$.

16.32- *ese7. 40-*
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 + \left(\int_0^y e^{-t^2} dt \right)^2$$

☐ Determinare il campo di definizione di f.

☐ Determinare, se esiste, (giustificando brevemente la risposta)

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$$

☐ Calcolare, se esistono, $\inf f$, $\sup f$, $\min f$ e $\max f$ su $\mathbb{R}^2$

☐ Calcolare, se esistono, $\inf f$, $\sup f$, $\min f$ e $\max f$ su $[0, 1]^2$

16.33- *ese7. 48-*

☐ Determinare, se esistono, i punti del piano $z + y = 1$ aventi minima e massima distanza dall'origine.

☐ Studiare la curva ottenuta nel piano (x, y) proiettando sul piano $z = 0$ la curva δ intersezione del piano $z + y = 1$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

☐ Esprimere mediante un problema di minimizzazione vincolata il problema di trovare il punto della curva δ avente massima e minima quota. Trovare tali punti.

Funzioni implicite

17.1- *ese2. 102-*
Sia f definita implicitamente da

$$xy^3 + x^2y + x + 1 = 0 \qquad\qquad f(-1) = 1.$$

Disegnare il grafico di f in un intorno di $x = -1$.

17.2- *ese2. 103*-
Determinare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni implicite:

$$\begin{aligned}
&4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y = 0\\
&-x^3 + y^2 + 3x - 16 = 0\\
&x(x^2 - 3y^2) + x^2y^2 = 0\\
&x(x^2 + y^2) - 3x^2 + y^2 = 0\\
&\ln(x^3 - y^3 + y - 3x + 2) = 0\\
&x^4 - 4x^3 + 16y^2 = 0
\end{aligned}$$

17.3- *ese2. 104*-
Sia

$$\cos xy - x + y - 1 = 0$$

stabilire se y si puó esplicitare in un intorno di $(0,0)$ come funzione $y = y(x)$ della variabile x ;in caso affermativo calcolare $y'(0)$. Stabilire inoltre se x si puó esplicitare in un intorno di $(0,0)$ come funzione $y = y(x)$ della variabile y ;in caso affermativo calcolare $x'(0)$.

17.4- *ese2. 105*-
Sia

$$\sin xy + y^2 + x = 0$$

stabilire se y si puó esplicitare in un intorno di $(0,0)$ come funzione $y = y(x)$ della variabile x ;in caso affermativo calcolare $y'(0)$. Stabilire inoltre se x si puó esplicitare in un intorno di $(0,0)$ come funzione $y = y(x)$ della variabile y ;in caso affermativo calcolare $x'(0)$.

17.5- *ese2. 106*-
Studiare le derivate della funzione

$$f(x,y) = \int_0^y \frac{\sin xt}{t} dt$$

e stabilire in quali punti degli assi è possibile esplicitare rispetto ad una delle variabili l'equazione $f(x,y) = 0$.

17.6- *ese2. 107*-
Studiare in un intorno dei punti indicati il luogo dei punti del piano definito dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&y - k - x\sin y = 0 \quad \text{in } (0,k)\\
&y^2 - x^2 = 0 \quad \text{in } (0,0)\\
&y^3 - x^3 = 0 \quad \text{in}(0,0)
\end{aligned}$$

17.7- *ese2. 108*-
Studiare in un intorno di $(0,0,0)$ il sistema:

$$\begin{cases} e^{3x+5y+2z} + x + y + 4z - 1 = 0 \\ \sin(x + 2y + 5z) + 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

17.8- *ese2. 109*-
Studiare la curva piana di equazione

$$x^3 + y^3 - 3kxy = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

17.9- *ese2. 111*-
Stabilire se l'equazione

$$y(x+1) - x^2 + y^3 = 0$$

definisce rispetto ad uno degli assi una funzione implicita in un intorno di $(0,0)$.
Disegnare in un intorno di $(0,0)$ il luogo dei punti del piano soddisfacente l'eqauzione data.

17.10- *ese2. 112*-
Data l'equazione

$$\lg(1+x^2) = \sin\left[(1+x)\, y^2\right]$$

con la condizione $y(0) = k$
a) determinare il parametro reale k in modo che sia possibile definire implicitamente y come funzione $y = y(x)$ di x vicino a $x = 0$;
b) Scelto uno di tali k, tracciare il grafico della relativa funzione implicita.

17.11- *ese2. 113*-
È data l'equazione nell'incognita z

$$e + \lg(1+xz) + \lg(1+yz) = e^z \qquad\qquad z(0,0) = 1$$

Stabilire l'esistenza e l'unicitá di una funzione implicita $z = z(x,y)$ definita dall'equazione data.
$(0,0)$ è estremo relativo per z?

17.12- *ese6. 73*-
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^3 - x - y^3 + y$$

□ Stabilire per quali punti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è possibile applicare il teorema del Dini all'equazione

$$f(x,y) = 0$$

□ Verificare che

$$f(x, 1/2) > 0 \qquad \text{se} \quad |x| \leq 1/2$$
$$f(x, -1/2) < 0 \qquad \text{se} \quad |x| \leq 1/2$$
$$f_y(x,y) < 0 \qquad \text{se} \quad |x|, |y| \leq 1/2$$

□ Provare che esiste un'unica funzione $\phi : [-1/2, 1/2] \to [-1/2, 1/2]$ tale che $\phi(0) = 0$ e $f(x,y) = 0 \iff y = \phi(x)$ per ogni $|x| \leq 1/2$.

□ Calcolare $\phi'(x)$

☐ Usando l'espressione di $\phi'(x)$ precedentemente ottenuta (in funzione di x e di $\phi(x)$) e ricordando che $\phi(0) = 0$, determinare esplicitamente $\phi(x)$.

Integrali multipli

18.1- *ese2. 114*-
Calcolare gli integrali doppi:

$$\iint_T (x^3 + y) dx\ dy$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\}$$

$$\iint_T (x - 2y) dx\ dy$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq R^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}\ R > a, R > b$$

$$\iint_T e^{x-y} dx\ dy$$
T è il triangolo limitato dalle rette $x + y = 4,\ 3x + y = 4,\ x + 3y = 4$

$$\iint_T \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} dx\ dy,$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$\iint_T (x^2 - y^2) dx\ dy,$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2rx \leq 0, y \geq 0\}$$

$$\iint_T \sqrt{(x^2 + y^2)} dx\ dy,$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

$$\iint_T (x^2 + y^2) dx\ dy,$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\iint_T \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx\ dy,$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, y) \leq 1, |\theta(x, y)| \leq \pi/4\}$$

$$\iint_T (x^2 + y^2) dx\ dy,$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\}$$

$$\iint_T dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, \theta(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \theta^2(x,y) + 1\}$$

$$\iint_T dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0,\ \rho(x,y) \leq \theta^2(x,y)\}$$

$$\iint_T y^2 dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -(x-1)^2 + 2, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$\iint_T (x^2 + y^2) dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho(x,y) \geq \frac{1}{4}, \rho(x,y) \leq \theta(x,y), \rho(x,y) \leq \frac{\pi}{2} - \theta(x,y)\}$$

$$\iint_T dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 \leq \ln(1+\pi), \rho \geq \sqrt{\ln(1+\theta)}\}$$

$$\iint_T (x-y) dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 1, 3 \leq x \leq 4\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/\}$$

$$\iint_T (x+y) dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$\iint_T (x^2 + y^2 - 1) dx\ dy, \iint_T (x + y - 2) dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2/\pi\theta \leq \rho \leq 1\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, y \geq x - 1\}$$

$$\iint_T (x^2 + y^2 + 1)^2 dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, \frac{\theta^2}{\pi} \leq \rho \leq \pi\}$$

$$\iint_T \sqrt{x^2 + y^2 + 2} dx\ dy,$$
$$T = \{(x,y) : y \geq 0, \rho \leq \frac{\theta^2(x,y)}{\pi}\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0, \rho(x,y) \leq 2\pi - \theta(x,y)\}$$

$$\iint_T (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx\ dy$$

T è il quadrilatero di vertici $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$

$$\iint_T \cos(x+y)e^{x-y}dx\ dy$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \le \pi/2, |x-y| \le 1\}$$

$$\iint_T e^{(x^2/4)+y^2} \left|\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right| dx\ dy$$

ove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x^2 + 4y^2 \le 16\}$

$$\iint_T \sin(x-y)\cos(x+2y)dx\ dy,$$

T è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (1,2)$

$$\iint_T x^2 - y^2 dx\ dy$$

T è la porzione del 1°quadrante limitata dalle iperboli $xy = 1, xy = 2$ e dalle rette $y = x, y = 4x$

$$\iint_T (x^2 - y^2)dx\ dy$$

T è la regione limitata dall'asse x e da $y = \sin x$ con $x \in [0, \pi]$

$$\iint_T (y + 2x + 20)dx\ dy$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16\}$$

$$\iint_T \sin(x+y)dx\ dy$$

$$T = \{[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]\}$$

$$\iint_T |x^2 - y - 1|dx\ dy$$

$$T = [-2, 2] \times [-1, 1],$$

$\iint_T f(x,y)dx\ dy$ ove

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{se} \quad x + y \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad x + y > 1 \end{cases}$$

$$T = [-1, 2] \times [-1, 2], \quad T = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$T = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$\iint_T e^{x+y} dx\ dy,$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$$

$$\iint_T x\cos(x+y)dx\ dy,$$

T è il triangolo di vertici $(0,0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$

$$\iint_T (1+x)\sin y\,dx\;dy$$

T è il quadrilatero di vertici $(0,0),(1,0),(0,1),(1,2)$

18.2- *ese2. 115*-
Calcolare i seguenti integrali tripli:

$$\iiint_T y\,dx\;dy\;dz$$

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3y^2 - x^2 - z^2 \geq 0,$$
$$(y-1)^2 - 3(x^2+z^2) \geq 0,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\iiint_T dx\;dy\;dz$$

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 6 \geq z+4 \geq \sqrt{x^2+y^2},$$
$$x^2+y^2+z^2 \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 4\}$$

$$\iiint_T (y+z)dx\;dy\;dz$$

T è il solido di rotazione attorno all'asse z generato da

$$\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : z \geq y^2,\ z \leq \frac{1}{y},\ z \leq 1+2y,\ y \geq 0\}$$

$$\iiint_T dx\;dy\;dz$$

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 \leq 1,\ x^2 \geq y^2,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

$$\iiint_T dx\;dy\;dz$$

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ -(x^2+y^2) \leq z,\ z\sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$$

$$\iiint_T dx\;dy\;dz$$

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$$
$$z \geq 1-\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \leq 4,\ x^2+y^2+z^2 \leq 8\}$$

$$\iiint_T dx\;dy\;dz$$

T è il solido compreso fra $z=0$ e $z = 6-\sqrt{x^2+y^2}$
interno al cilindro di asse l'asse ze sezione col piano xy,

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \leq 0, (x+1)^2+y^2 \geq 1,\ \rho \leq \frac{4}{\pi}(\theta-\pi/2)\}$$

$$\iiint_T dx\;dy\;dz$$

T è il solido limitato da $2z - xy = 0,\ z=0,\ x=0,$
$y=2,\ x^2+y^2-4y=0$

18.3- *ese2. 124*-
Calcolare le coordinate del baricentro del solido

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \le \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

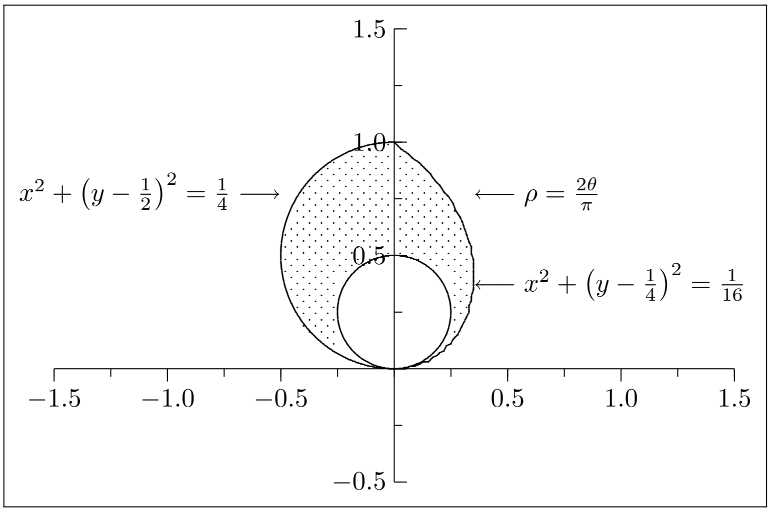
18.4- *ese2. 128*-
Calcolare

$$\int\int_D \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le x^4,\ 1 \le y \le 2\}$$

18.5- *ese2. 129*-
Calcolare l'area dell'insieme D in figura:



18.6- *ese4. 2*-
Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho \cos \vartheta, y = \rho \sin \vartheta, \rho < \vartheta, 0 \le \vartheta \le \pi\}$$

calcolare

☐ $\int_D dxdy =\ldots\ldots$

18.7- *ese5. 5*-
Si consideri il dominio D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le xe^{-x}\}$$

☐ Disegnare il dominio D

☐ Calcolare l'area di D $\quad Area(D) = \ldots\ldots$

☐ Calcolare le coordinate del baricentro del dominio D
$x_B = \ldots\ldots \qquad y_B = \ldots\ldots$

18.8- *ese5. 14*-
Si consideri l'insieme
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \quad 0 \leq z \leq x + y\}$$

☐ Calcolare il volume di V

☐ Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (0, 0, 1)$ attraverso ∂V

18.9- *ese5. 28*-
Si consideri il dominio D per $a, b > 0$

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \leq -\frac{b}{a^2}x^2 + b, z \geq -\frac{a}{x} + 1, x \geq 0\}$$

☐ Disegnare il dominio D
Sia T il solido ottenuto mediante una rotazione del dominio D attorno all'asse z in senso antiorario di ampiezza π

☐ Calcolare il volume di T: $Vol(T) = \ldots\ldots$

☐ Calcolare le coordinate x ed y del baricentro del solido T
$x_B = \ldots\ldots \qquad y_B = \ldots\ldots$

☐ Calcolare l'area della superficie che delimita T che si trova nel semispazio $z \geq 0$: $Area = \ldots\ldots$

18.10- *ese6. 84*-
Si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, \quad z - \frac{3}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2} \leq 0, \quad x \geq \frac{3}{2}\}$$

☐ Disegnare l'insieme $V_{xz} = \{(x, z) : (x, 0, z) \in V\}$.

☐ Disegnare l'insieme $V_{xy} = \{(x, y) : (x, y, 0) \in V\}$.

☐ Scrivere una formula di riduzione per calcolare il volume di V usando le coordinate cartesiane.

☐ Scrivere una formula di riduzione per calcolare il volume di V. usando le coordinate cilindriche.

☐ Calcolare il volume dell'insieme $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, \quad |z| \leq 1\}$.

18.11- *ese6. 99*-
Si consideri $S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \quad \ln x \leq z \leq 0$ ed il solido V ottenuto facendo ruotare S

☐ Calcolare l'area si S

☐ Calcolare il volume di V

☐ Calcolare $\iiint_V x dx dy dz$

☐ Calcolare la superficie σ_K di $\partial V \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq k\}$

☐ Calcolare $\lim_{k\to 0} \sigma_k$

18.12- *ese6. 123*-
Si consideri l'insieme

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - y \leq 0, 1 \geq z \geq x^2 + y^2\}$$

☐ Calcolare il volume del solido T

☐ Calcolare l'area della superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - y \leq 0, 1 \geq z = x^2 + y^2\}$$

☐ Calcolare l'area di L

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - y = 0, 1 \geq z \geq x^2 + y^2\}$$

☐ Calcolare l'area della frontiera di T.

18.13- *ese7. 44*-
Si consideri l'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| \leq 2 \ \ 0 \leq y \leq 2 \ \ 0 \leq z \leq x - x^2\}$$

☐ Calcolare il volume di D

☐ Calcolare la superficie totale di $S = \partial D$

Si consideri poi il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x + zy^2, 0, z+1)$$

☐ Calcolare il flusso di F attraverso S

☐ Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| \leq 2 \ \ 0 \leq y \leq 2 \ \ 0 \leq z = x - x^2\}$$

Integrali di linea di superficie e forme differenziali

19.1- *ese2. 116*-
Sia S la posizione di superficie definita da

$$z = xy \qquad , \qquad 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$$

, calcolare

$$\int_S (|y| + 1) ds.$$

19.2- *ese2. 117*-
Calcolare i seguenti integrali di superficie:

$$\int_S (\sin y)\sqrt{x^2 + y^2} ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\int_S \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\int_S \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt[8]{x^2 + y^2},\ z \leq 2\}$$

$$\int_S \frac{x^2 + y^2}{\sin^2(x^2 + y^2)} ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = 1, \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$$

$$\int_S \frac{\sin x}{(x^2 - y^2 - 2)^2} ds$$
S è la superficie ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z
la curva $z = \sqrt{y}$ limitata dai piani$z = 0$ e $z = 1$

$$\int_S |x| ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + z, 0 \leq y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

$$\int_S |z| ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$\int_S ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \geq 1,\ |y| \leq 1\}$$

19.3- *ese2. 118*-
Determinare le coordinate del baricentro della superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

19.4- *ese2. 119*-
Calcolare l'area della superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{9 + x^2 + y^2}, z \leq 5\}$$

.

19.5- *ese2. 120*-
Calcolare

$$\int_S (x \cos z + y \sin z) ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \arctan \frac{y}{x},\ y \geq 0,\ \ x \leq \sqrt{3}y,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\int_S z^2 ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + 2y \leq 0,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$$

$$\int_S \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} ds$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \leq x\}$$

19.6- *ese2. 121*-
Calcolare

$$\int_S ds$$

ove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \geq -\sqrt{x^2 + y^2},\ z\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0, z \geq 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 + z^2 = 8\}$$

Calcolare inoltre

$$\int_S x ds$$

essendo S la superficie definita dalle equazioni

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \qquad , \qquad x \geq 0$$

.

19.7- *ese2. 122*-
Calcolare il baricentro della superficie S definita dalle equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \qquad , \qquad z \geq 0$$

19.8- *ese2. 123*-
Usando la formula di Green, calcolare:
a) l'area della regione compresa entro la curva

$$\begin{cases} x = \cos t(1 + \sin t) \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

b) $\displaystyle\iint_T (x + 2y)dxdy$, essendo T limitato da

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

c) $\displaystyle\int_{\partial T} ydx - (x + y)dy$ ove

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho \leq \frac{\theta}{\pi} \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]\}$$

d) $\displaystyle\int_{\partial T} (y + \sin x)dx - xdy$ ove

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2/4 \quad , \quad x \geq 0, \rho \geq \theta\}$$

.

19.9- *ese2. 125*-
Determinare il rapporto fra l'area e il perimetro della figura piana compresa fra $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$ e $x+y = 1$.

19.10- *ese2. 126*-
Calcolare

$$\int\int_\Sigma \sqrt{z}ds$$

dove Σ è una superficie una cui rappresentazione parametrica è

$$\begin{cases} x(u, v) = u + v \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = u^2 \end{cases} , \ (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

19.11- *ese2. 127*-
Calcolare

$$\int_\gamma 1/x^3 ds$$

dove γ è l'arco di curva

$$\{(x, y) \in [1, 2] \times \mathbb{R} : x = e^y\}$$

19.12- *ese2. 130*-

Dei seguenti campi vettoriali stabilire se sono conservativi e, in caso affermativo calcolarne le funzioni potenziali:

$f_1(x,y) = 2xe^y + y$ $\quad$ $f_2(x,y) = x^2e^y + x - 2y$
$f_1(x,y) = \sin y - y\sin x + x$ $\quad$ $f_2(x,y) = \cos x + x\cos y + y$
$f_1(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$ $\quad$ $f_2(x,y) = x^2\cos(xy)$

19.13- *ese2. 131*-
Dei seguenti campi vettoriali $f = (f_1, f_2)$ determinare l'insieme di definizione, illustrandolo graficamente, stabilire se sono conservativi e in caso affermativo calcolarne il potenziale φ tale che $\varphi(x_0, y_0) = 1$:

$$f_1(x,y) = \frac{1-3x^2-2y^2}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} \qquad f_2(x,y) = -\frac{4xy}{\sqrt{1-x^2-2y^2}}$$
$(x_0, y_0) = (0,0)$

$$f_1(x,y) = x\sqrt{1-x^2-3y^2} \qquad f_2(x,y) = 3y\sqrt{1-x^2-3y^2}$$
$(x_0, y_0) = (1/2,0)$

$$f_1(x,y) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2-y^2}} \qquad f_2(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x-x^2-y^2}}$$
$(x_0, y_0) = (1/2,0)$

$$f_1(x,y) = \frac{y-2xy}{\sqrt{x-x^2-y^2}} \qquad f_2(x,y)\frac{x-x^2-3y^2}{\sqrt{x-x^2-y^2}}$$
$(x_0, y_0) = (1/2,0)$

$$f_1(x,y) = \frac{(2x-1)(y+1)}{(y-x^2+x)^2} \qquad f_2(x,y) = \frac{x-x^2-1}{(x^2-x-y)^2}$$
$(x_0, y_0) = (0,-1/2)$

$$f_1(x,y) = \frac{x}{x^2-y^2-1} \qquad f_2(x,y) = \frac{y}{y^2-x^2+1}$$
$(x_0, y_0) = (0,0)$

$$f_1(x,y) = x\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad f_2(x,y) = y\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$(x_0, y_0) = (0,0)$

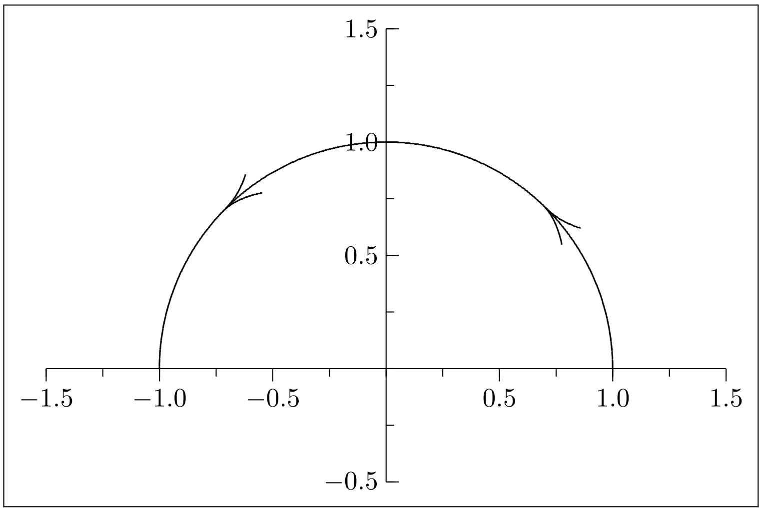
$$f_1(x,y) = y\tan(x^2+y^2) \qquad f_2(x,y) = x\tan(x^2+y^2)$$
$(x_0, y_0) = (0,0)$

$$f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-2y} \qquad f_2(x,y) = \frac{y-1}{(x^2+y^2-2y)}$$
$(x_0, y_0) = (1,0)$

19.14- *ese2. 132*-
Dato il campo vettoriale F di componenti F_1, F_2 :

$$F_1(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad F_2(x,y) = \frac{x^2+y^2-2y}{x^2+y^2}$$

a) calcolare $\int_C F$, essendo C la semicirconferenza in figura



b) determinare tutte le eventuali primitive nel semipiano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

19.15- *ese2. 133*-
Calcolare

$$I = \int_\gamma [(3x^2y - \sin x)dx + (x^3 + \ln y)dy],$$

dove γ è la spezzata con i lati paralleli agli assi di vertici

$$A(1, -1), B(2, -1), C(2, 7)$$

L'integrale dipende dalla linea scelta?

19.16- *ese2. 134*-
Stabilire se la forma

$$\omega = \frac{y}{x+y}dx + \frac{x}{x+y}dy$$

è esatta e calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ è linea chiusa definita da

$$x^2 + y^2 = r^2$$

19.17- *ese2. 135*-
Siano $A = (2, 0), B = (2, 1), C = (0, 1)$.
Calcolare

$$\int_\gamma [(3x^2y - 2x)dx + (x^3 - y^2)dy]$$

quando
- $\gamma = \gamma_1$, poligonale di vertici A, B, C;
- $\gamma = \gamma_2$ è il segmento della retta $x + 2y - z = 0$ di estremi A e C;
- $\gamma = \gamma_3$ è l'arco dell'iperbole $y = \frac{2-x}{2+x}$ di estremi A e C.

19.18- *ese2. 136*-
Siano $A(0,0), B(2,0), C(0,1), D(1,1)$,
Calcolare

$$\int_\gamma \frac{dx}{y+1} - \frac{x+1}{(y+1)^2}dy$$

quando
- $\gamma = \gamma_1$ è il segmento di estremi A e B;
- $\gamma = \gamma_2$ è la poligonale di vertici A , B e C;
- $\gamma = \gamma_3$ è l'arco di parabola $y = x^2$ di estremi A e D;
- $\gamma = \gamma_4$ è l'arco di cerchio $x^2 + y^2 - 2x = 0$ di estremi A e D.

19.19- *ese2. 137*-
Calcolare

$$\int_\gamma [(y+x)dx + (y-x)dy]$$

su $\gamma = \gamma_1$ di supporto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, -1 \leq x \leq 1\}$$

e su $\gamma = \gamma_2$ di supporto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{2-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}.$$

19.20- *ese2. 138*-
Si consideri

$$\int_\gamma \omega$$

ove

$$\omega = \left(\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right)$$

Verificare che le derivate in croce di ω sono uguali per $x \neq 0$, ma non esistono per $x = 0$.
Verificare poi che, nonostante ciò, l'integrale dato è nullo se γ è la linea chiusa di equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

19.21- *ese2. 139*-
Calcolare

$$\int_{\partial D} xdy + ydx$$

ove

$$D = \{(x,y) : \rho \leq 1 + \cos\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

e la frontiera è orientata positivamente.

19.22- *ese2. 140*-
Determinare $\varphi, \psi \in C'(\mathbb{R})$ tali che

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 = \psi(0,) = 0$$

ed in modo che

$$w = [\psi(y) - y\cos x]dx + [x\cos y - \varphi(x)]dy$$

sia una forma differenziale esatta su $\mathbb{R}^2$.

(Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono tali che $f(x) = g(x)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ allora $f = g =$ costante).

19.23- *ese2. 141*-
Trovare l'insieme ove è integrabile la forma differenziale

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - zy^2 - 2x}} \left[\left(\frac{3}{2} + xy^2 \right) dx + xydy \right]$$

e calcolarne una primitiva.

19.24- *ese2. 142*-
Dire se sono esatte

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$\frac{2x \left(\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4} + 1 \right)}{x^2 + 4y^2 - 4} dx + 8y \frac{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4} + 1}{x^2 + 4y^2 - 4} dy$$

19.25- *ese2. 143*-
Calcolare

$$\int_\gamma \frac{y - x}{x^2 + y^2 - 2x + 1} dx - \frac{ydy}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

ove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 16\}.$$

19.26- *ese2. 144*-
Determinare le curve chiuse semplici piane di classe $C^{(1)}$, che siano frontiera di un dominio non vuoto di $\mathbb{R}^2$, per cui

$$\int_\gamma (-ydx + xdy) = 0$$

19.27- *ese2. 145*-
Calcolare

$$\int_\gamma (dx + dy)$$

ove γ è spezzata di vertici

$$(1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 1)$$

orientata in senso antiorario.

19.28- *ese2. 146*-
Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x^2 + y - z^2 = 0 \\ 2x^2 - 4y - z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{per } 1 \le z \le 2$$

19.29- *ese2. 147*-
Calcolare la lunghezza della curva piana di equazione

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3} \quad R > 0$$

di un arco della spirale di Archimede $\rho = h\theta$,
della circonferenza di centro l'origine e raggio R.
Si usino sia le coordinate parametriche che le coordinate cartesiane.

19.30- *ese2. 148*-
Calcolare

$$\int_\gamma y ds$$

ove $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma 3$ essendo
γ_1 è la curva di equazione $x^2 + y^2 - x = 0$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$ di estremi $A(0,0)$ e $B(1,0)$
γ_2 è la curva di equazione $x = 1$ di estremi $B(1,0)$ e $C(1,1)$
γ_3 è la curva di equazione $y = x^2$ di estremi C e A

19.31- *ese2. 149*-
Calcolare A e B

$$\int_\gamma yx^2 ds,$$

ove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = a$$

con estremi,

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2}, 2\sqrt{2}\right), B = (\sqrt{a}, \sqrt{a})\}$$

Calcolare

$$\int_\gamma xy ds$$

ove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{x}$$

con estremi

$$A = (0,0), \; B = (3, \sqrt{3})$$

19.32- *ese2. 151*-
Calcolare

$$\int_\gamma [(y + x)dx - (y - x)dy]$$

ove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, -1 \leq x \leq 1\}$$

19.33- *ese2. 152*-

Si considerino le forme differenziali

$$\omega(x,y) = \frac{e^{xy}y}{e^{xy}-e^2}dx + \frac{e^{xy}x}{e^{xy}-e^2}dy,$$

$$\omega(x,y) = \frac{ye^{xy}}{e^{xy}-e^{-2}}dx + \frac{xe^{xy}}{e^{xy}-e^{-2}}dy$$

Di ciascuna stabilire dove è definita, se è esatta e trovarne tutte le primitive.

19.34- *ese2. 153*-
Sia

$$\omega(x,y) = (x+ay)^2dx + a(x-ay)^2dy, a \in \mathbb{R}$$

Determinare tutte le rette Γ di equazione $y = mx + n$ lungo le quali

$$\int_\Gamma \omega = 0$$

19.35- *ese2. 154*-
Siano

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}dx + \frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}dy$$

$$\omega = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{y}{((x-1)^2+y^2)}dy$$

Per ciascuna forma differenziale calcolare, se esiste,

$$\int_\gamma \omega$$

, ove γ ha equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0$$

con estremi $A = (-2,0)$ e $B(2,0)$.

19.36- *ese2. 155*-
Sia

$$\omega = \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$$

Calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

Calcolare inoltre

$$\int_{\gamma_2} \omega$$

ove γ_2 ha equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

19.37- *ese2. 156*-
Sia

$$\omega(x,y,z) = \frac{e^{x-y}}{(x^2+y^2)^2}\left\{\left(x^2+y^2-2x\right)dx - (x^2+y^2+2y)dy\right\}$$

Calcolare

$$\int_\Gamma \omega$$

ove

$$\Gamma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z=\theta, 0\le\theta\in 2\pi\} r\in\mathbb{R}_+$$

19.38- *ese2. 157*-
Determinare campo di definizione, stabilire se sono esatte e calcolare, se possibile la primitiva F tale che $F(a) = 1$ delle seguenti forme differenziali:

$$\omega(x,y) = \frac{1-3x^2-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx + \frac{2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy$$
$$a = (0,0)$$

$$\omega(x,y) = x\sqrt{1-x^4-3y^4}dx + 3y\sqrt{1-x^4-3y^4}dy$$
$$a = (0,0)$$

$$\omega(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}dx + \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}dy$$
$$a = (1,1)$$

$$\omega(x,y) = \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}dx + \frac{2y}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}dy$$
$$a = (1,1)$$

19.39- *ese2. 158*-
Determinare campo di definizione, stabilire se sono esatte, trovare, se possibile, la primitiva F tale che $F(a) = 1$ e calcolare

$$\int_\Gamma \omega$$

essendo:

$$\omega(x,y) = \frac{xdx}{x^2+y^2-2y} + \frac{ydy}{x^2+y^2-2y}$$
Γ è la curva di equazione $9x^2+y^2=9$

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+4y^2}dx + \frac{x}{x^2+4y^2}dy$$
Γ è il cerchio di raggio 1 e centro $(3,3)$

$$\omega(x,y) = 3x\sqrt{3x^2+y^2-1}dx + y\sqrt{3x^2+y^2-1}dy$$
Γ è la curva di equazione $x^2+y^2=16$

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}dx + \frac{(x+1)}{(x+1)^2+y^2}dy$$
$$\Gamma \text{ di equazione } \ x^2+4y^2 = \frac{1}{4}$$

19.40- *ese2. 159-*
Determinare campo di definizione, stabilire se sono esatte e calcolare, se possibile la primitiva F tale che $F(a) = 1$ delle seguenti forme differenziali:

$$\omega(x,y) = 2xydx + (x^2+3y^2)dy$$
$$a = (0,0)$$

$$\omega(x,y) = \cos x \cos^2 ydx - \sin x \sin 2ydy$$
$$a = (1,1)$$

$$\omega(x,y) = (x^2+xy)dx + xydy$$
$$a = (0,0)$$

$$\omega(x,y) = x^2y^3dx - x^3y^2dy$$
$$a = (1,0)$$

$$\omega(x,y) = e^x dx + e^y(y+1)dy$$
$$a = (0,0)$$

$$\omega(x,y) = (2ye^{2x} + 2x\cos y)dx + (e^{2x} - x^2\sin y)dy$$
$$a = (0,0)$$

$$\omega(x,y) = (3x^2\ln|x| + x^2 + y)dx + xdy$$
$$a = (1,0)$$

$$\omega(x,y) = y\sin xydx + x\sin xydy$$
$$a = (\pi/2, \pi/2)$$

$$\omega(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx + \frac{2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy$$
$$a = (0,0)$$

19.41- *ese4. 4-*
Sia
$$\Gamma \begin{cases} x(t) = -7\cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

☐ La curva Γ è chiusa
SI ◯ **NO** ◯ perchè

☐ La curva Γ è semplice

SI ◯ **NO** ◯ perchè

☐ La curva Γ è regolare
SI ◯ **NO** ◯ perchè

☐ Disegnare la traccia della curva Γ

☐ Calcolare l'area della parte di piano delimitata dalla traccia della curva.

19.42- *ese4. 5-*
Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x - y, -x + y)$$

☐ Il campo F è chiuso
SI ◯ **NO** ◯ perchè

☐ Il campo F è conservativo **SI** ◯ **NO** ◯ perchè

☐ Calcolare tutte le primitive di F su $(0, \pi) \times (0, +\infty)$

☐ Calcolare tutte le primitive di F in $\mathbf{R}^2$

☐ posto Γ' la restrizione di Γ all'intervallo $[0, 3/2\pi]$, calcolare

$$\int_{\Gamma'} F =$$

Scelta una primitiva g del campo F tale che $g(0, 0) = 3$

☐ Calcolare massimi e minimi assoluti di g su Γ

☐ Calcolare massimi e minimi assoluti di g su $\mathbf{R}^2$

19.43- *ese5. 9-*
Si considerino le curve di equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\delta : \begin{cases} x(t) = \cos(t) - \frac{\sin(t)}{2} \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

☐ γ è semplice?
☐ SI ☐ NO perchè ......

☐ γ è regolare?
☐ SI ☐ NO perchè ......

☐ γ è chiusa? ☐ SI ☐ NO perchè ......

☐ γ è limitata?
☐ SI ☐ NO perchè ......

☐ Disegnare γ.

☐ Determinare l'equazione cartesiana della curva γ

☐ Disegnare la curva δ

☐ Calcolare l'area racchiusa dalla curva δ

19.44- *ese5. 10-*
Sia $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una curva semplice, regolare definita da

$$\eta : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \\ z(t) = t^2 \end{cases}$$

si considerino il solido V e la superficie S generati rispettivamente dal cerchio e dalla circonferenza di centro $\eta(t)$ e raggio t giacenti nel piano ortogonale all'asse delle y

☐ Calcolare il volume di V, giustificando la risposta

☐ Calcolare la lunghezza della curva η

☐ Trovare una parametrizzazione di S

☐ Calcolare l'area di S

☐ Calcolare il flusso del campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (-x, y, y)$$

attraverso ∂V

☐ Calcolare il flusso del campo vettoriale F definito da

$$F(x, y, z) = (-x, y, y)$$

attraverso S giustificando la risposta

19.45- *ese5. 15-*
Si consideri la curva

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = x + y\}$$

☐ Determinare una parametrizzazione della curva data

☐ La curva data è semplice? perchè

☐ La curva data è regolare? perchè

☐ La curva data è chiusa? perchè

☐ Determinare una espressione intgrale per la lunghezza della curva data

19.46- *ese5. 29-*
Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2)(y-1)}, \frac{2y}{(x^2 + y^2)(y-1)} - \frac{\log(x^2 + y^2)}{(y-1)^2} \right)$$

☐ Disegnare il campo di definizione di F

☐ Sapendo che il campo è chiuso (come può essere facilmente verificato) determinare il sottoinsieme del piano in cui F ammette potenziale. $I = \ldots\ldots$

☐ Determinare tutti i potenziali ϕ di F: $\phi(x, y) = \ldots\ldots$

19.47- *ese6. 83*-
Si consideri il seguente campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) = (\frac{z}{x}, \frac{z}{y}, 1 + \ln xy)$$

☐ Determinare il campo di definizione di F e stabilire se è semplicemente connesso.

☐ Calcolare $\operatorname{rot} F$ e stabilire se F è un campo irrotazionale.

☐ Stabilire se F è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

☐ Sia γ il cerchio di centro $(2, 3, 4)$, giacente nel piano di equazione $x = 2$, di raggio 1; determinare una rappresentazione parametrica di γ.

☐ Calcolare $\int_\gamma F$ e, detto γ_1 la parte del cerchio suddetto che giace nel semispazio $z \geq 0$, calcolare $\int_{\gamma_1} F$

19.48- *ese6. 88*-
Si consideri

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

☐ Calcolare

$$\iiint_V z dx dy dz$$

☐ Determinare una parametrizzazione di ∂V (si ricordi la parte di piano $z = 0$)

☐ Calcolare l'area di ∂V

☐ Calcolare il flusso attraverso ∂V del campo vettoriale (x, y, z)

☐ Verificare il teorema di Stokes, relativamente al volume V ed al campo vettoriale (x, y, z).

19.49- *ese6. 89*-
Si consideri, nel piano (y, z) dello spazio cartesiano, un cerchio C di centro $(0, 2, 0)$ e raggio 1 e si denoti con γ la sua circonferenza.

☐ Determinare una parametrizzazione della superficie S generata dalla circonferenza γ

☐ Calcolare

$$\iint_S z dx \wedge dy$$

☐ Determinare una parametrizzazione del volume generato dal cerchio C e la corrispondente parametrizzazione della sua frontiera ∂V

☐ Calcolare
$$\iiint_V dx \wedge dy \wedge dz$$

19.50- *ese6. 110*-
Si consideri il campo vettoriale F associato ad una funzione potenziale ottenuta sommando due quantità, rispettivamente, proporzionali ai quadrati delle distanze dai punti $(0,1)$ e $(0,-1)$.

☐ Scrivere le componenti F_1 ed F_2 del campo $F=(F_1,F_2)$

☐ Calcolare $\int_\gamma F$ dove
$$\gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^4=10000\}$$

☐ Calcolare $\int_\gamma F$ dove
$$\gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+xy+y^2=2 \ \ y\geq x\}$$

☐ Disegnare le curve equipotenziali del campo .

☐ Disegnare le linee di forza del campo.

19.51- *ese6. 126*-
Sia $C=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : z=\cos(y), y\in[-\pi,\pi]\}$

☐ Scrivere una parametrizzazione della superficie R ottenuta facendo ruotare di π radianti C attorno all'asse z,

☐ Scrivere una parametrizzazione della superficie T ottenuta traslando di 3 unità C lungo l'asse x,

☐ Calcolare la superficie di R.

☐ Calcolare la superficie di T

☐ Calcolare il volume delimitato da R e dal piano $z=0$

19.52- *ese7. 33*-
Si consideri il campo vettoriale di componenti
$$F(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2},\frac{z}{x^2+y^2}\right)$$

☐ Determinare il campo di definizione D di F

☐ Stabilire se F è conservativo in D

☐ Calcolare il flusso del campo F attraverso la superficie laterale del cilindro $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R} \ \ : \ \ 1\leq x^2+y^2\leq 2 \ , \ \ |z|\leq 1\}$

☐ Calcolare il flusso del campo F attraverso le superfici di base del cilindro.

19.53- *ese7. 39*-
Sia $C = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \sin(y), y \in [0, \pi]\}$

☐ Scrivere una parametrizzazione della superficie R ottenuta facendo ruotare C di 2π radianti attorno all'asse z,

☐ Scrivere una parametrizzazione della superficie T ottenuta traslando C di 3 unità lungo l'asse x,

☐ Calcolare la superficie di R.

☐ Calcolare la superficie di T

☐ Calcolare il volume delimitato da R e dal piano $z = 0$

19.54- *ese7. 41*-
Si consideri il campo vettoriale piano F associato ad una funzione potenziale ottenuta sommando due quantità, rispettivamente, proporzionali all'inverso dei quadrati delle distanze dai punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

☐ Scrivere le componenti F_1 ed F_2 del campo $F = (F_1, F_2)$

☐ Calcolare $\int_\gamma F$ dove
$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^4 + y^4 = 10000\}$$

☐ Calcolare $\int_\gamma F$ dove
$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 2 \ \ y \geq x\}$$

☐ Stabilire se è vero che $\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial x} F_2$ precisando, in caso affermativo per quali (x, y) è vero.

☐ Calcolare il flusso del rotore di $G = (F_1, F_2, 0)$ attraverso un quadrato avente un vertice in $(0, 0)$ e in $(1/2, 1/2)$

19.55- *ese7. 47*-
Si consideri in campo vettoriale
$$F(x, y, z) = (0, 0, y)$$

☐ Calcolare **rot** F e $\div F$

☐ Sia S la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x = 0, \quad z^2 + y^2 \leq 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di **rot** F attraverso S.

☐ Sia S la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ calcolare il vettore normale ad S ed il flusso di **rot** F attraverso S.

☐ Calcolare il lavoro di F sulla curva γ intersezione di $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con il piano $x = 1/2$.

☐ Calcolare il flusso di **rot** F attraverso la superficie $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \leq 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 1/2 \ , x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Qualche esercizio più difficile

20.1- *ese6. 24*-
Sia H uno spazio di Hilbert dotato di un sistema ortonormale completo che indicheremo con $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ e si consideri la funzione

$$f : H \to \mathbb{R}$$

definita da

$$f(x) = (|x|^2 - 1)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\langle x, e_n \rangle)^2}{2^n}$$

1 - Provare che f è fortemente continua su H.
2 - Provare che

$$\inf\{f(x) : x \in H\}$$

3 - Provare che f non è debolmente continua su H.
4 - Provare che f non ammette minimo su H.
5 - Provare che f ha i livelli limitati in H.
6 - Provare che f è differenziabile in H e calcolare $\nabla f(x)$.

20.2- *ese6. 79*-
Data l'equazione differenziale

$$xy' = y^3 - y$$

si chiede di
(a) determinarne le soluzioni al variare del dato iniziale $y(x_0) = y_0$, discutendo l'esistenza di una soluzione globale;
(b) disegnare il grafico qualitativo di tutte le soluzioni;
(c) provare che le soluzioni sono pari.

20.3- *ese6. 80*-
Data l'equazione differenziale

$$y'' - y|y|^\epsilon = 0, \qquad \epsilon > 0,$$

si chiede di
(a) determinarne la soluzione con il suo intervallo massimale di definizione sotto le seguenti condizioni: $y(1) = y_0 > 0$, $y'(1) = y_0' < 0$ con $\frac{1}{2}y_0'^2 - \dfrac{y_0^{2+\epsilon}}{2+\epsilon} = 0$;
(b) determinare i valori del parametro $\epsilon > 0$ per i quali la soluzione è integrabile su $[1, +\infty)$;
(c) determinare i valori y_0 in funzione di ϵ per i quali la soluzione non è prolungabile a sinistra di 0.

20.4- *ese6. 81*-
Data la funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - xy$$

si chiede di
(a) studiare il segno di $f(1, y)$, $f(-1, y)$, $f(0, y)$, $f(x, 1)$, $f(x, -1)$ e $f(x, 0)$, $f(x, x)$;
(b) studiare il segno di $f_x(x, y)$ e di $f_y(x, y)$;
(c) disegnare nel piano la curva di equazione $f(x, y) = 0$.

20.5- *ese6. 107*-

Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \qquad t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$ e $u(t,1) = 0$.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$, $u(t,1) = 0$ e $u(0,x) = \sin \pi x$.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$, $u(t,1) = 0$ e $u(0,x) = \sin \pi x \cos \pi x$.

20.6- *ese7. 38*-
Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

☐ Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data che si possono ottenere per separazione delle variabili.

☐ Determinare tutte le soluzioni che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(0,x) = e^x$.

☐ Determinare tutte le soluzioni che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(0,x) = e^x$ e $u(1,x) = 2e^x$.

20.7- *ese7. 46*-
Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \qquad t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$ e $u(t,\pi) = 0$.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$, $u(t,\pi) = 0$ e $u(0,x) = \sin x + 2\sin 4x$.

☐ Determinare tutte le soluzioni limitate, dell'equazione data, che si possono ottenere per separazione delle variabili tali che $u(t,0) = 0$, $u(t,\pi) = 0$ e $u(0,x) = x(x-\pi)$.

00

Domande Brevi.1- *brevi. 1-*
È dato il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = -(\sqrt{1+4y^2(x)})/2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Giustificare brevemente esistenza ed unicità della soluzione.

Domande Brevi.2- *brevi. 2-*
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log_a(1-x), \ x \le 0 \\ b - \arctan x, \ x > 0 \end{cases} \quad a, b \text{ parametri reali.}$$

Calcolare, per gli a e b per cui f è invertibile e derivabile, $(f^{-1})'(0)$

Domande Brevi.3- *brevi. 3-*
Trovare tutte le soluzioni di $y'(x) = y(x) + 2 \qquad y(x) = \ldots\ldots$

Domande Brevi.4- *brevi. 4-*
Disegnare il grafico di

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Domande Brevi.5- *brevi. 5-*
Scrivere il polinomio di Taylor di grado 5 $p(x)$ di $f(x) = \sin x^2$ $p(x) = \ldots\ldots$

Domande Brevi.6- *brevi. 6-*
Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\sin t|}{t^2-1} dt = \ldots\ldots$

Domande Brevi.7- *brevi. 7-*
Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - \cos x}{x^\alpha}$

Domande Brevi.8- *brevi. 8-*
Calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \ldots\ldots$

Domande Brevi.9- *brevi. 9-*
Esprimere in funzione della base l'area di un triangolo isoscele di perimetro costante

Domande Brevi.10- *brevi. 10-*

Dare un esempio di funzione non uniformemente continua su $[0, \pi]$

Domande Brevi.11- *brevi. 11-*
Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2, centrato in 0 della soluzione y del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$p(x) = \ldots\ldots$

Domande Brevi.12- *brevi. 12-*
Dare un esempio che mostri come il teorema di Lagrange non sia più vero su un insieme che non è un intervallo.

Domande Brevi.13- *brevi. 13-*
Scrivere l'espressione dell'area di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r.

Domande Brevi.14- *brevi. 14-*
Disegnare, al variare di n, per r fissato, il grafico della funzione ottenuta al punto precedente

Domande Brevi.15- *brevi. 15-*
Disegnare, al variare di r, per n fissato, il grafico della funzione considerata al punto precedente

Domande Brevi.16- *brevi. 16-*
Stabilire per quali valori di α converge $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t^\alpha} dt$

Domande Brevi.17- *brevi. 17-*
Scrivere il resto nella forma di Lagrange relativo al polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 della funzione $f(x) = e^x - x^2$

Domande Brevi.18- *brevi. 18-*
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Domande Brevi.19- *brevi. 19-*
Calcolare,

$$\int_0^1 t \ln(t) dt$$

$\displaystyle\int_0^1 t \ln(t) dt = \ldots\ldots$

Domande Brevi.20- *brevi. 20-*

Disegnare il grafico di
$$\frac{x^{10001}}{x^{20002}-1}$$

Domande Brevi.21- *brevi. 21-*
Esprimere in funzione dell'apertura il volume di un cono di altezza 1

Domande Brevi.22- *brevi. 22-*
Trovare tutte le soluzioni di
$$y''(x) + 1 = \sin(x)$$

Domande Brevi.23- *brevi. 23-*
Trovare tutte le soluzioni di
$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Domande Brevi.24- *brevi. 24-*
Trovare tutte le primitive di
$$\frac{x}{x^2-1}$$

Domande Brevi.25- *brevi. 25-*
Calcolare, se esiste,
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sin(t)} dt$$

Domande Brevi.26- *brevi. 26-*
Disegnare il grafico di
$$\Big|\big||x^2-1|-1\big|-1\Big|$$

Domande Brevi.27- *brevi. 27-*
Trovare la retta passante per il punto $(1,1)$ tale che il triangolo da essa detreminato nel primo quadrante abbia area minima.

Domande Brevi.28- *brevi. 28-*
Scrivere la formula di Taylor di ordine 3con il resto nella forma di Peano della funzione $f(x) = \cos(x^2 - x)$ con centro nel punto 1

Domande Brevi.29- *brevi. 29-*
Scrivere il resto nella forma di Lagrange relativo alla formula di Taylor di cui al punto precedente

Domande Brevi.30- *brevi. 30-*
Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^{100})}{x^{98}} =$

Domande Brevi.31- *brevi. 31-*
Calcolare, se esiste,

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

Domande Brevi.32- *brevi. 32-*
Calcolare, se esiste,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

Domande Brevi.33- *brevi. 33-*
Trovare una frazione decimale che approssimi e a meno di .001

Domande Brevi.34- *brevi. 34-*
Individuare il triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza di raggio 1, che abbia area massima

Domande Brevi.35- *brevi. 35-*
Individuare il triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza di raggio 1, che abbia area minima

Domande Brevi.36- *brevi. 36-*
Calcolare, se esiste, $\frac{d}{dx} \sin\ln x^x =$

Domande Brevi.37- *brevi. 37-*
Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \sin(x)}{x^2}$$

Domande Brevi.38- *brevi. 38-*
Calcolare, se esiste,

$$\frac{d}{dx}x^{\sin(x)}$$

Domande Brevi.39- *brevi. 39-*
Calcolare, se esiste,

$$\frac{d}{dx}\tan(\arctan(x))$$

Domande Brevi.40- *brevi. 40-*

Determinare il numero di soluzioni reali, al variare di k, dell'equazione

$$kx^3 - x - 2k = 0$$

Domande Brevi.41- *brevi. 41-*
Determinare, tra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio 4, quello di area massima.

Domande Brevi.42- *brevi. 42-*
Calcolare

$$\int_0^1 x \cos x \; dx$$

Domande Brevi.43- *brevi. 43-*
Calcolare

$$\int_0^1 x \; \mathrm{e}^{x^2} \; dx$$

Domande Brevi.44- *brevi. 44-*
Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Domande Brevi.45- *brevi. 45-*
Determinare tutte le soluzioni di

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^x$$

Domande Brevi.46- *brevi. 46-*
Determinare il numero di soluzioni reali, al variare di k, dell'equazione

$$kx^3 - x - 2k = 0$$

Domande Brevi.47- *brevi. 47-*
Determinare, tra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio di raggio 4, quello di area massima.

Domande Brevi.48- *brevi. 48-*
Calcolare

$$\int_0^1 x \cos x \; dx$$

Domande Brevi.49- *brevi. 49-*

Calcolare

$$\int_0^1 x \ \mathrm{e}^{x^2} \ dx$$

Domande Brevi.50- *brevi. 50*-
Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Domande Brevi.51- *brevi. 51*-
Determinare tutte le soluzioni di

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^x$$