4 – LEGGE DELLE FORZE

4,1 INTRODUZIONE

Nell’introdurre le leggi della Dinamica che costituiscono le leggi del moto, si è fatto cenno alla **Legge delle Forze** che forniscono i criteri per formalizzare le interazioni dell’ambiente con il sistema in esame.

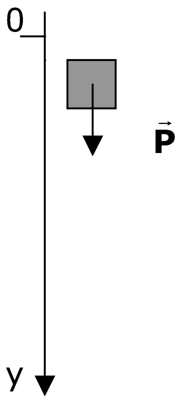
Tra le tante che possono intervenire, ve ne sono alcune che intervengono sempre e delle quali è possibile avere delle espressioni generali, come per esempio la **forza Peso**, le **Reazioni vincolari** e le **forze Elastiche** delle quali può essere utile fare qualche considerazione più in generale.

4,2 FORZA PESO

La forza che sperimentiamo continuamente e che è sempre presente in tutte le esperienze è la **Forza Gravitazionale** per la quale ogni corpo nelle vicinanze della Terra tende a cadere per lo più verticalmente. E’ la misura dell’interazione (a distanza) tra i corpi e la Terra. A questo tipo di forza diamo il nome di **Forza Peso** o più semplicemente **Peso** del corpo.

Sperimentalmente si può dimostrare che tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa inerziale, se lasciati liberi di cadere acquistano tutti praticamente la stessa accelerazione il cui modulo si indica con **g** vale in media **9,8 m/s^2**.

Possiamo ricavare l’espressione delle Forza peso applicando la 2^a Legge delle Dinamica ad un corpo di massa **m**. Si deve notare che questa è una applicazione inversa della legge fondamentale del moto. Generalmente si conoscono le forze e si vuole determinare l’accelerazione. In questo caso, dalla misura dell’accelerazione, che si indica convenzionalmente con $\vec{\mathbf{g}}$ (accelerazione di gravità) di **modulo 9,8 m/s^2 direzione verticale dall’alto verso il basso**, cioè $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \cdot \vec{\mathbf{j}}$, risaliamo ad una l’espressione generale della forza Peso.



Il corpo di massa **m** descrive un moto puramente traslazionale e verticale. Possiamo quindi trattare il corpo come un punto materiale. In tal caso non è più fondamentale il reale punto di applicazione delle forze agenti sulla massa. Per non rischiare di dimenticare tutte le forze che agiscono sul nostro sistema, si considera con chi e con che cosa il sistema interagisce. Sul corpo in caduta libera, trascurando cioè la resistenza dell'aria, interagisce solo con la Terra. **L'unica forza che interviene è** la **Forza Peso**, che convenzionalmente si indica con $\vec{\mathbf{P}}$ e che ha solo componente y. Se ci limitiamo a dislivelli dell'ordine dei metri, il sistema di riferimento solidale con la Terra è da considerarsi inerziale. Inoltre se fissato il verso come in figura possiamo scrivere $\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \cdot \vec{\mathbf{j}}$. Quindi da applichiamo la legge del moto:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\,\vec{\mathbf{a}} \quad \Rightarrow \begin{cases} \sum \mathbf{F_x} = \mathbf{m}\,\mathbf{a_x} \\ \sum \mathbf{F_y} = \mathbf{m}\,\mathbf{a_y} \end{cases}$$

dobbiamo scrivere :

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F_x} = \mathbf{m}\,\mathbf{g} \\ \sum \mathbf{F_y} = \mathbf{o} \end{cases}$$

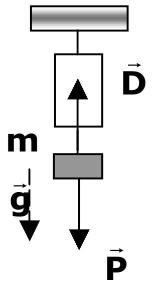
Quindi rimane: $\mathbf{P = m\ g}$

In conclusione la Forza Peso è un **vettore** di modulo $\left|\vec{\mathbf{P}}\right| = \mathbf{m}\,\mathbf{g}$ direzione verticale e verso il basso, cioè

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{g}}$$

Da ciò si osserva che mentre la massa è una caratteristica del corpo e quindi invariate, così non è per **il Peso** che può variare da punto a punto in quanto $\vec{\mathbf{g}}$ può variare. Un corpo allungherà un dinamometro più all'Equatore che non ai Poli.

Vediamo come si può misurare la massa di un corpo utilizzando un dinamometro. Indichiamo con $\vec{\mathbf{D}}$ la forza misurata dal Dinamometro. Valutiamo le forze che agiscono sulla massa **m**.



E' a contatto diretto solo col Dinamometro e ovviamente risente dell'interazione con la Terra. Indichiamo con $\vec{\mathbf{D}}$ la forza di richiamo del Dinamometro e con $\vec{\mathbf{P}}$ la forza Peso. Entrambe hanno solo componente verticale. La freccia indicata con $\vec{\mathbf{g}}$ nella figura indica il verso positivo fissato. Possiamo allora scrivere:

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_y \cdot \vec{\mathbf{j}} = \mathbf{m\,g} \cdot \vec{\mathbf{j}} \qquad \vec{\mathbf{D}} = -\mathbf{D}_y \cdot \vec{\mathbf{j}} = -\mathbf{D} \cdot \vec{\mathbf{j}}$$

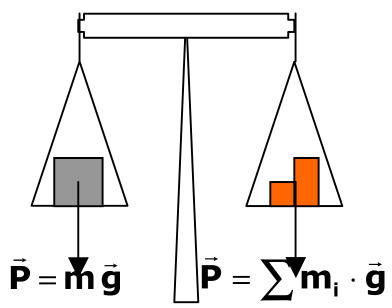
Poiché la massa è in equilibrio scriviamo:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \qquad \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$$

e componendo $\begin{cases} \mathbf{D}_x = \mathbf{P}_x = \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_y + \mathbf{P}_y = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \mathbf{D}_y = \mathbf{D} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \qquad \mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{D}}{\mathbf{g}}$

La massa così trovata, cioè come rapporto tra modulo della forza e l'accelerazione di gravità si chiama " **Massa gravitazionale**". In generale non è detto che "massa inerziale" e "massa gravitazionale" coincidano, il che significa che **la massa di un corpo può essere diversa a seconda che il corpo sia in quiete o in moto**. In meccanica classica **le due masse coincidono**.

Possiamo pensare di ripetere la misura della massa dello stesso corpo ponendola su una **bilancia a due piatti**. Ovviamente su un piatto poniamo il corpo e sull'altro dei pesetti campione. Quando le due braccia sono in equilibrio



alla stessa altezza anche le **Forze Peso** sui due piatti sono le stesse. Poiché su entrambe le masse agisce la stessa $\vec{\mathbf{g}}$, deduciamo non solo che anche le masse sui due piatti sono uguali e leggendo il valore nominale dei pesetti abbiamo direttamente la massa del corpo, ma possiamo essere sicuri che questo valore **non cambierà** anche se si ripete la misura a latitudini diverse. Si dice che le bilance a due piatti, quelle degli orafi, non "**pesano**" ma " **massano**".

4,3 FORZE DI CONTATTO

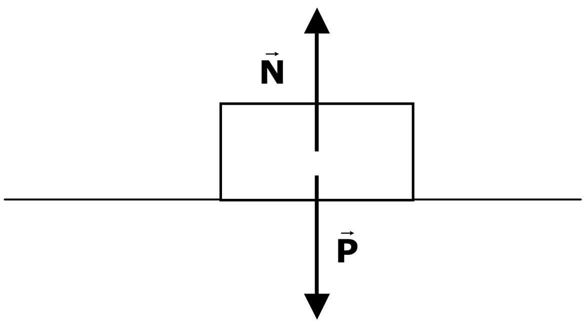
Esaminiamo come è possibile formalizzare l'interazione particolare che si manifesta quando due corpi vengono a contatto. Queste forze, dette **FORZE DI CONTATTO**, in **nessun modo** possono essere conosciute a priori, ma **solo risolvendo il problema inverso**; dall'analisi del moto si risale alle forze di contatto applicate.

Nonostante non sia possibile conoscerle a priori, le forze di contatto sono quelle che sperimentiamo quotidianamente. La loro origine deriva dalla interazioni di forze elettromagnetiche a livello atomico e molecolare che operano a livello di elettroni e nuclei. Tuttavia nella risoluzioni di problemi di meccanica classica è più significativa una loro analisi macroscopica.

Le forze di contatto intervengono tutte le volte che due corpi interagiscono tra di loro, sia che siano in quiete o in moto relativo uno rispetto all'altro. In generali si dice che un corpo esercita sull'altro una **reazione vincolare**. Possiamo distinguere due casi: 1) **corpo in quiete**; 2) **corpo in moto soggetto a forza esterna** $\vec{F}$.

1) CORPO IN QUIETE

Consideriamo il caso in cui un corpo di massa **m** è appoggiato ad un tavolo. Se il corpo è in quiete oltre avere velocità nulla avrà anche **accelerazione nulla** quindi oltre alla forza peso $\vec{P}$, sempre presente, ci **deve** essere un'altra forza che faccia equilibrio, che non può che essere **uguale ed opposta** alla forza peso $\vec{P}$. Convenzionalmente viene chiamata "**Reazione vincolare normale**" perché costituisce il vincolo per il moto e si indica con $\vec{N}$ (forza normale). Le forze sono quindi disposte come in figura



Per la 2ª Legge della dinamica

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \qquad\qquad \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$$

da cui:

$$\vec{\mathbf{N}} = -\vec{\mathbf{P}}$$

Cioè : **nel caso di corpo in quiete la forza di contatto, cioè la reazione vincolare è una forza uguale e contraria alla forza Peso e quindi ortogonale al piano di appoggio** .

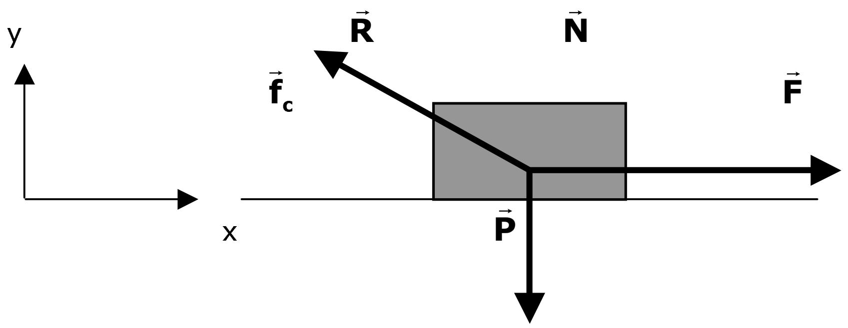
E' opportuno osservare che sarebbe **errato** dire che le due forze**, reazione vincolare e forza peso** sono uguale e contrarie per la IIIª Legge del dinamica in quanto questa deve essere **applicata sempre** a due corpi .

2 CORPO SOGGETTO A FORZE ESTERNE

Attrito dinamico.

Consideriamo il caso in cui al corpo di massa **m** appoggiato al tavolo sia applicata una $\vec{\mathbf{F}}$ (per semplicità orizzontale e diretta secondo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano fissato). **Sperimentiamo che il corpo si muove con velocità costante**.

Valutiamo le possibili forze applicare al corpo osservando con chi è a contato il corpo. Oltre alla forza peso $\vec{\mathbf{P}}$ sempre presente, sul corpo agisce direttamente la forza $\vec{\mathbf{F}}$; inoltre è a **contatto con il piano orizzontale** e quindi ci sarà anche una reazione vincolare che indichiamo con $\vec{\mathbf{R}}$. A priori non possiamo dire quale sarà la direzione di $\vec{\mathbf{R}}$, se non che in qualche modo si oppone al moto. Quindi dovrà avere componenti tali da opporsi all'effetto delle altre forze agenti su **m**, quindi sarà diretta come in figura.

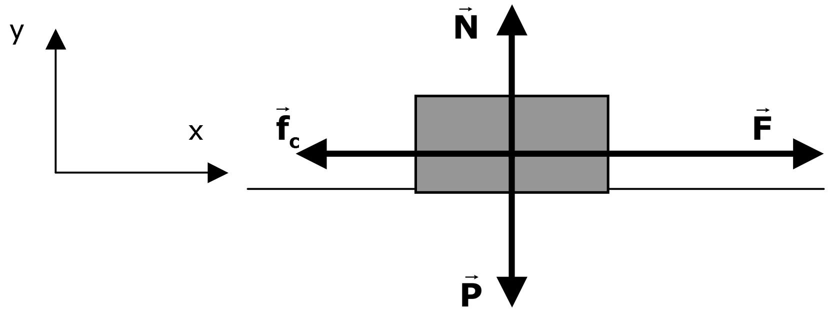


Indichiamo con $\vec{\mathbf{N}}$, **Forza Normale**, la **componente vettoriale y della razione vincolare** $\vec{\mathbf{R}}$, e con $\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{c}}$, **forza di attrito cinetico o dinamico**, la **componente vettoriale della razione vincolare parallela al moto**, che è **sempre opposta alla forza agente che genera il moto**

Se indichiamo $\vec{\mathbf{R}}$ in termini delle **componenti vettoriali** scriviamo:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{N}}$$

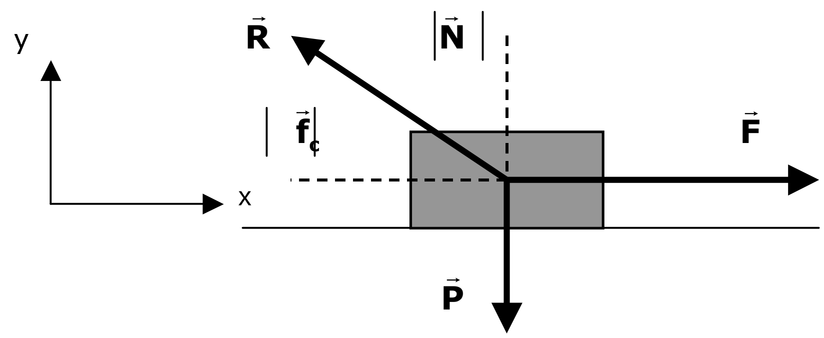
e il corrispondente diagramma delle forze sarà:



mentre in termini di **componenti di cartesiane** scriviamo:

$$\vec{\mathbf{R}} = -\mathbf{f}_{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{N} \cdot \vec{\mathbf{j}}$$

e il corrispondente diagramma delle forze sarà:



Sperimentalmente si trova una relazione tra il modulo della componente normale e il modulo della forza di attrito data da :

$$\boxed{\mathbf{f}_{\mathbf{c}} = \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{N}}$$

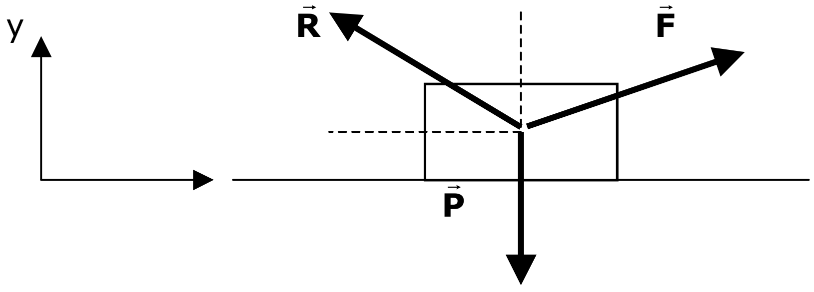
N.B. **E' una relazione trai i moduli e non tra i vettori**. μ_c si chiama coefficiente di attrito dinamico

Sperimentalmente si trova ancora che:

1) f_c **dipende solo dalla natura e condizioni** delle superfici a contatto e normalmente ha valori compresi tra **0,1 e 1,5**;
2) f_c (o μ_c) per velocità relative tra i corpi piccole si possono considerare indipendenti dalla velocità.
3) f_c (o μ_c) si possono considerare **indipendenti dall'area delle superfici** a contatto.

OSSERVAZIONE

Nel caso di piano di appoggio orizzontale, la componente normale N o R_y della reazione vincolare è uguale al modulo del forza peso, o più in generale con la componente del forza peso perpendicolare al piano su cui avviene il moto, <u>solo se</u> la forza che agisce sul sistema è parallela al piano su cui avviene il moto. Nel caso in cui la forza applicata sia obliqua rispetto al piano, si dovrà tenere conto anche del componente ortogonale al piano della forza applicata, come mostrato in figura.



Dalla 2ª Legge si ha:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sum F_x = m\, a_x \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} F_x - f_c = m\, a_x \\ F_y + N - m\, g = 0 \end{cases} \qquad f_c = \mu_c \cdot N$$

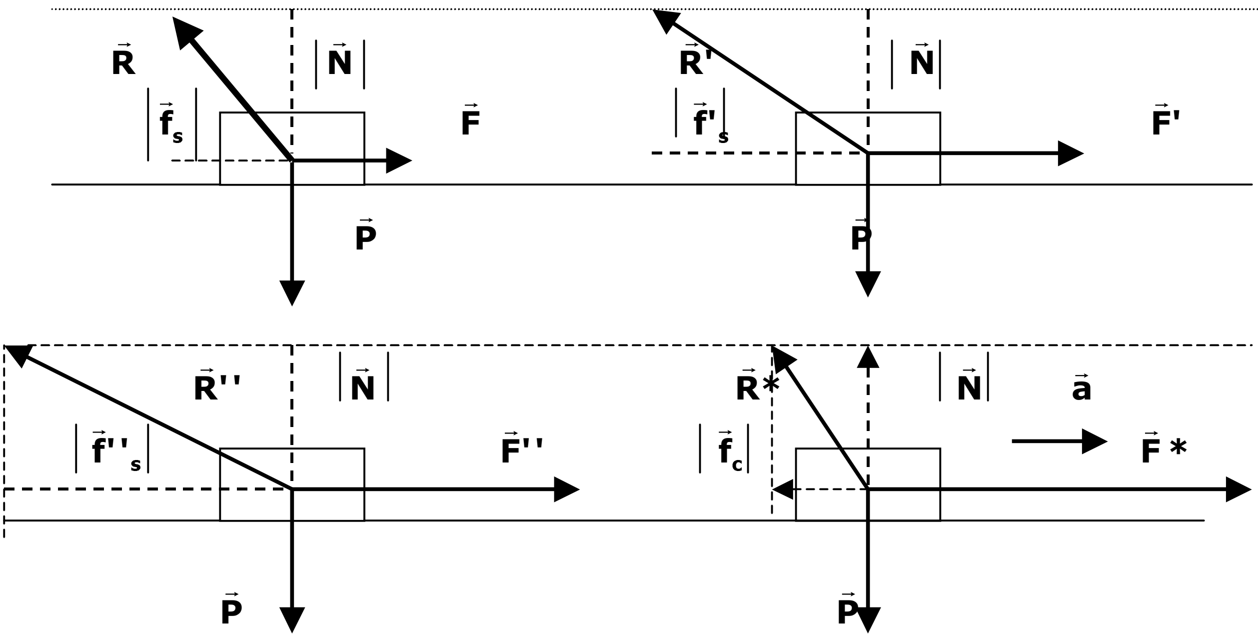
Quindi: $\quad N = mg - F_y \qquad f_c = \mu_c (m\, g - F_y)$

Attrito statico

Una forza di attrito può esistere anche se due corpi **non sono in moto relativo** tra di loro. Consideriamo un caso analogo al precedente, cioè applichiamo al corpo di massa **m** una forza $\vec{\mathbf{F}}$ (orizzontale). Possiamo sperimentare che pur aumentando $\vec{\mathbf{F}}$ il corpo **non si muove**. Su **m** oltre alla forza $\vec{\mathbf{F}}$ agiranno la forza Peso $\vec{\mathbf{P}}$ e la reazione vincolare $\vec{\mathbf{R}}$ che necessariamente varierà con $\vec{\mathbf{F}}$ come è facile intuire dalle seguenti figure in quanto essendo il corpo in quiete dovrà essere sempre :

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$$

Poichè il corpo è in quiete, $\vec{\mathbf{R}}$ dovrà avere necessariamente una **componente verticale che si oppone alla forza peso** $\vec{\mathbf{P}}$ e quindi costante, ed una **componente orizzontale che si oppone alla forza** $\vec{\mathbf{F}}$, che invece aumenta con $\vec{\mathbf{F}}$ e che chiamiamo **forza di attrito statico** , che convenzionalmente si indica con $\vec{\mathbf{f}}_s$.



Sperimentalmente si può vedere che questa forza, che è a priori sconosciuta perché dipende dalla forza che in qualche modo la sollecita, può raggiungere un **valore massimo**, superato il quale il corpo comincia a muoversi ed è soggetto ad una forza di attrito di tipo dinamico.

Sempre sperimentalmente si può dimostrare che **il valore massimo del modulo della forza di attrito statico** è proporzionale al modulo della **forza normale**, cioè:

$$\boxed{\mathbf{f_{s,\,Max} = \mu_s \cdot N}}$$

N.B. **E' una relazione trai i moduli e non tra i vettori.** μ_s si chiama coefficiente di attrito dinamico.

In generale per quanto riguarda la il modulo della forza di attrito statico, note le caratteristiche delle superfici a contatto espresse da μ_s, possiamo solo prevedere il suo valore massimo e scrivere la relazione:

$$\boxed{\mathbf{f_{s,\,Max} \leq \mu_s \cdot N}}$$

Anche per μ_s valgono le proprietà sperimentali valide per μ_c.

Generalmente $\eta_s > \eta_c$

Ricapitoliamo alcuni concetti importanti.

a) Quando due corpi sono a contatto, indipendentemente che si abbia un moto relativo tra di essi, si manifesta sempre una forza, **forza di contatto**, che esprime la **reazione vincolare** di un corpo rispetto all'altro.
b) La **reazione vincolare** è esprimibile attraverso un vettore di cui a priori **non conosciamo modulo** e **direzione** .Il **verso** sarà sempre quello che si oppone all'eventuale moto del corpo.
c) La **reazione vincolare non dipende** dalla **velocità** (per basse velocità relative), e non dipende dalla superficie di contatto.
d) La **reazione vincolare** può essere sempre espressa come la risultante di due componenti vettoriali: la **forza normale** (**reazione**), perpendicolare al piano di contatto, ed una componente parallela al piano di contatto,

detta **forza di attrito**. Nel caso di **equilibrio o forza esterna applicata parallelamente** al piano di scorrimento, la **forza normale** ha sempre modulo uguale alla **forza peso**. La forza di attrito ha la direzione della forza esterna applicata, ma **verso opposto**.

e) Nel caso di **forza esterna non** parallela al piano di scorrimento la **forza normale** ha modulo **diverso dal modulo della forza peso**.

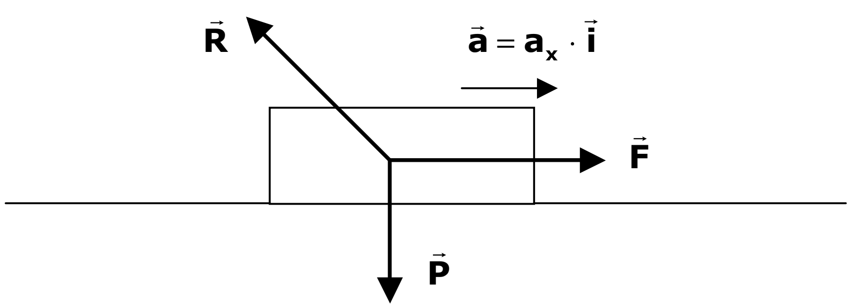
f) La **reazione vincolare** può **variare** al variare della forza applicata.

g) La forza di attrito risulta sperimentalmente proporzionale alla forza normale; le costanti di proporzionalità sono i coefficienti di attrito statico $\boldsymbol{\eta_s}$ o dinamico $\boldsymbol{\eta_c}$ che dipendono dalle caratteristiche chimico-fisiche delle superfici di contatto. In particolare nel caso di attrito statico per quanto riguarda i moduli, possiamo dire solamente che $\mathbf{f_s} \le \boldsymbol{\eta_s} \cdot \mathbf{N}$

Vincolo Liscio

Da queste osservazioni emerge che nel caso di **vincolo liscio**, definito come la superficie che presenta **coefficienti di attrito nullo o trascurabile**, la **reazione vincolare** ha **solo componente perpendicolare al piano di contatto** e in modulo uguale al modulo della forza peso.

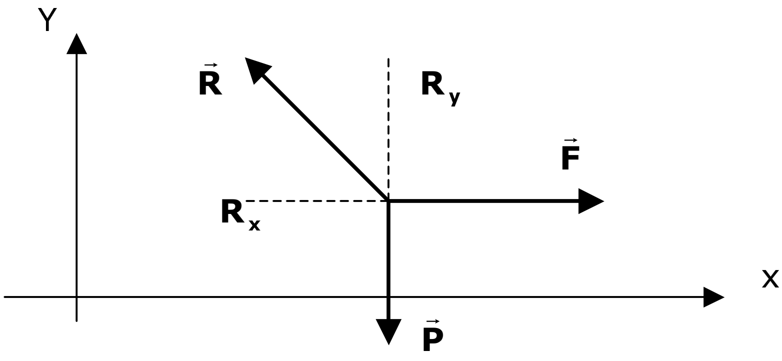
Possiamo vederlo meglio considerando l'esempio schematizzato in figura. Un corpo di massa **m** si muove su un piano orizzontale con accelerazione $\mathbf{a_x}$



Utilizzando il diagramma delle forze e applicando la 2[a] Legge delle Dinamica:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Scomponiamo secondo gli assi scelti come in figura



Deve essere: $$\begin{cases} \sum F_x = m\,a_x \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

cioè, tenendo conto dei versi fissati, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} F - R_x = m\,a_x \\ R_y - m\,g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F - R \cdot \cos\theta = m\,a_x \\ R \cdot \mathrm{sen}\theta - m\,g = 0 \end{cases}$$

ma se sperimentiamo che non essendoci attriti $a_x = \dfrac{F}{m}$ sostituendo nella prima equazione del sistema si ottiene:

$$F - R \cdot \cos\theta = m \cdot \frac{F}{m} \qquad F - R \cdot \cos\theta = F$$

da cui

$$R \cdot \cos\theta = 0 \qquad \cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 90°$$

in quanto R, modulo di una forza non può essere nullo. In conclusione nel caso di **vincolo liscio la reazione vincolare è sempre perpendicolare alla superficie di appoggio**, cioè:

$$\vec{R} = N \cdot \vec{j}$$