5 – APPLICAZIONE LEGGI DI NEWTON

5,1 INTRODUZIONE

Per adesso ci limitiamo allo studio di **moti puramente traslazionali**, il che significa nell'applicazione delle leggi del moto ai vari corpi possiamo utilizzare **l'approssimazione di punto materiale**. Descriviamo quindi il moto di insieme del sistema in esame e possiamo trascurare le caratteristiche puramente geometriche dei corpi e le tutte le forze saranno applicate allo stesso punto.

Tratteremo sia sistemi composti da un unico corpo, sia sistemi più complessi costituiti da più corpi in qualche modo collegati, ma il cui moto sia un moto puramente traslazionale. In questi casi potremo precedere nel modo seguente:

a) applicheremo l'approssimazione di punto materiale ai singoli corpi componenti il sistema;
b) valuteremo le forze applicate ai singoli punti del sistema considerati separatamente, cioè andando a **vedere con chi il singolo elemento è direttamente a contatto** e applicheremo le leggi del moto a ciascun punto materiale separatamente. E' come se guardassimo l'intero sistema attraverso finestre strette che ci permettono di vedere solo un corpo alla volta;
c) terremo conto del fatto che in realtà i vari corpi sono tra loro in qualche modo collegati da quelle che definiamo "**reazioni vincolari**", cercando delle relazioni che permettano di formalizzare queste reazioni vincolari, utilizzando altre informazioni che ci vengono date cioè quelle che si chiamano " **condizioni al contorno**". E' come se alla fine aprissimo contemporaneamente tutte le finestre.

Tutta questa serie di operazioni convenzionalmente si sintetizza dicendo che si applica il " **Diagramma di corpo libero** "

Analizziamo alcuni esempi classici di applicazione delle Leggi del moto.

PIANO INCLINATO

Studiamo il **moto di un corpo** di massa **m** appoggiato ad un piano inclinato. Sia θ l'angolo che il piano inclinato lungo **L** forma con l'orizzontale. Esaminiamo varie situazioni.

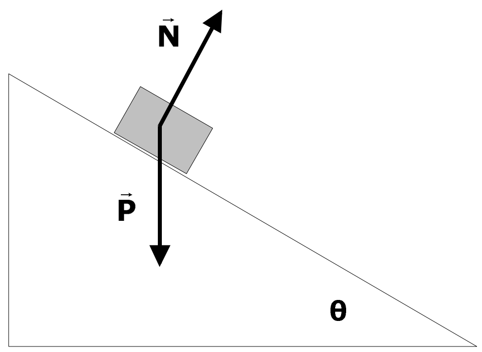
a)Piano liscio

Alla massa **m** saranno applicate:

- La forza peso $\vec{\mathbf{P}}$ diretta verso il basso;

- La reazione vincolare $\vec{\mathbf{N}}$ del vincolo (liscio) che sarà perpendicolare al pino di appoggio e nel verso come in figura ($\vec{\mathbf{N}}$ non fa sprofondare **m** nel piano)

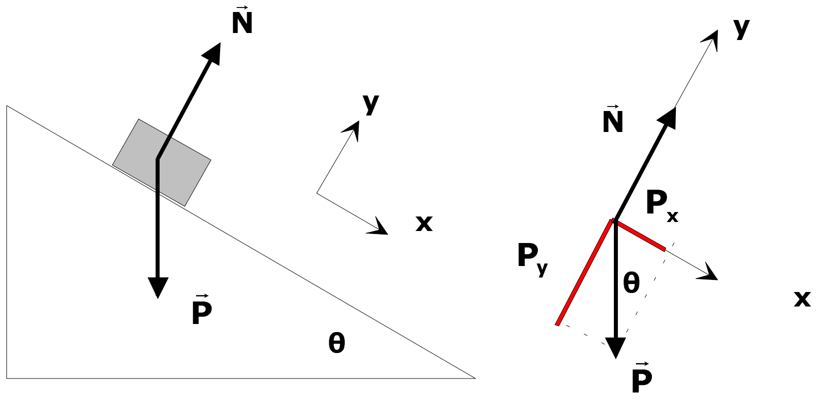
Il diagramma delle forze è rappresentato in figura



Dobbiamo applicare la Legge del moto, mettendoci in un sistema di riferimento inerziale. E' inerziale un sistema di coordinate **solidale con il piano inclinato**, in quanto è **fisso**.

Scriviamo la legge dl moto: $\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}}$

Che **dobbiamo esplicitare fissando il sistema di coordinate spaziali**. Essendo un moto puramente traslatorio, possiamo utilizzare un riferimento cartesiano, con asse **x parallelo alla direzione del moto** e asse y perpendicolare, verso l'alto. Scomponiamo le forze secondo gli assi fissati.



$$\vec{N} = N \cdot \vec{j} \qquad\qquad \vec{P} = mg\,sen\theta \cdot \vec{i} - mg\cos\theta \cdot \vec{j}$$

Poichè il moto avviene solo lungo l'asse x possiamo scrivere

$$\begin{cases} \sum F_x = m \cdot a_x \\ \sum F_y = m \cdot a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_x = m \cdot a_x \\ N - P_y = 0 \end{cases}$$

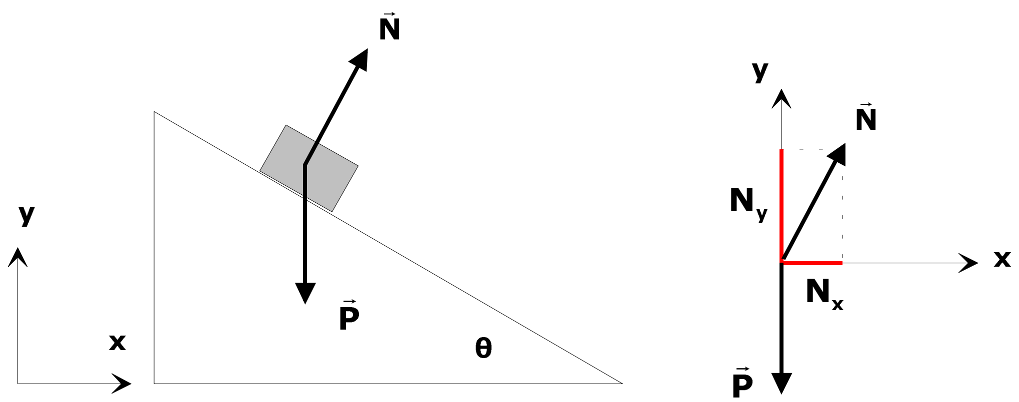
da cui si ricava $\quad mg\,sen\theta = m\,a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = g\,sen\theta$

In conclusione $\quad \vec{a} = g\,sen\theta \cdot \vec{i}$

Il moto lungo il piano inclinato è un moto uniformemente accelerato. Avendo dedotto questo, siamo in grado di trovare tutti gli altri parametri del moto dalle sole relazioni cinematiche tra di loro.

OSSERVAZIONE

Vediamo che cosa cambia se fissiamo un sistema di **riferimento spaziale**, sempre cartesiano, ma **solidale con il piano orizzontale**.



Dobbiamo scomporre la legge del moto nel nuovo sistema di riferimento e scriveremo:

$$\vec{\mathbf{P}} = -\mathbf{mg} \cdot \vec{\mathbf{j}} \qquad\qquad \vec{\mathbf{N}} = \mathbf{N_x} \cdot \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{N_y} \cdot \vec{\mathbf{j}}$$

e la legga del moto scomposta diventa:

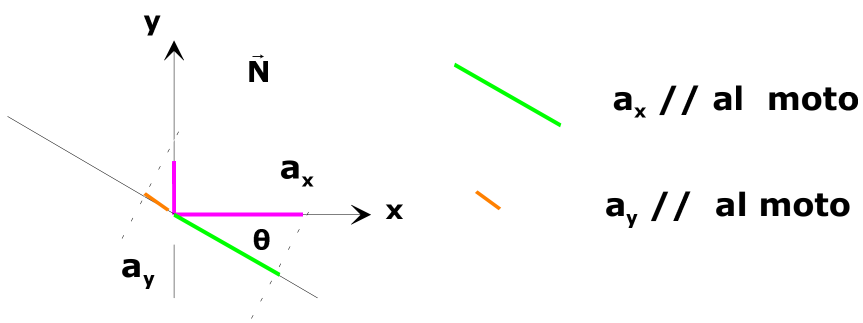
$$\begin{cases} \sum \mathbf{F_x} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a_x} \\ \sum \mathbf{F_y} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a_y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{N_x} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a_x} \\ -\mathbf{mg} + \mathbf{N_x} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a_y} \end{cases}$$

da cui: $$\mathbf{a_x} = \frac{\mathbf{N\,sen\theta}}{\mathbf{m}} \qquad\qquad \mathbf{a_y} = \frac{\mathbf{N\cos\theta - mg}}{\mathbf{m}}$$

$$|\,\mathbf{a}\,| = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{N\,sen\theta}}{\mathbf{m}}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{N\cos\theta - mg}}{\mathbf{m}}\right)^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}\sqrt{\mathbf{N^2} + \mathbf{(mg)^2} + \mathbf{2\,N\,mg\cos\theta}}$$

Dal momento che troviamo l'accelerazione come funzione esplicita di $\vec{\mathbf{N}}$ che è a priori sconosciuta, non possiamo dire immediatamente quanto vale l'accelerazione. Da qui si nota l'importanza delle scelta del sistema di riferimento, che deve essere dettata anche dalle informazioni che si hanno.

Possiamo ritrovare il risultato precedente se facciamo la seguente osservazione:



dove:

$$\mathbf{a_{x,}}\ \mathbf{//\ al\ moto} = \mathbf{a_x}\ \mathbf{\cos\theta} = \frac{\mathbf{N\,sen\theta\cos\theta}}{\mathbf{m}}$$

$$\mathbf{a_{y,}\ //\,al\,moto = a_y\ sen\theta = \frac{N\,sen\theta\,cos\theta - g\,sen\theta}{m}}$$

e quindi:

$$\left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \mathbf{a_y\ //\ al\ moto = a_x\ //\ al\ moto - a_y//\ al\ moto}$$

da cui ritroviamo:

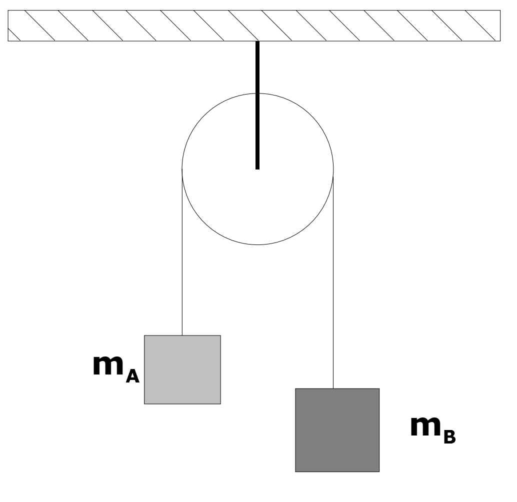
$$\left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \mathbf{\frac{N\,sen\theta\,cos\theta}{m} - \frac{N\,sen\theta\,cos\theta - g\,sen\theta}{m} = g\,sen\theta}$$

MACCHINA DI ATWOOD

Due masse $\mathbf{m_A}$ ed $\mathbf{m_B}$ sono collegate mediante una **fune inestendibile** che passa attraverso una carrucola priva di attrito e di massa trascurabile. Determinare la **tensione** della fune e l'**accelerazione** del sistema nei casi:

a) massa della fune trascurabile;

b) massa della fune $\neq 0$; massa = $\mathbf{m_f}$



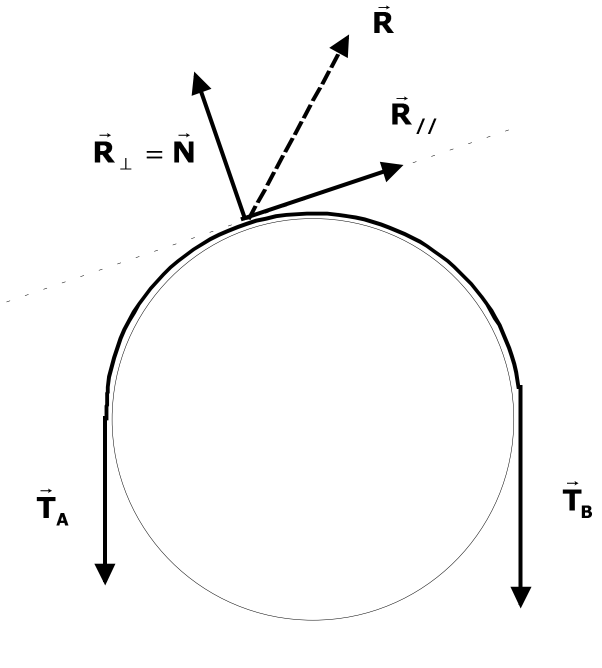
SOLUZIONE

Innanzitutto interpretiamo le informazioni che ci fornisce il testo: " **carrucola fissa priva di attrito** " e " **carrucola massa trascurabile** " e " **fune in estendibile** "

Carrucola priva di attrito

Questa informazione ci dice che la **reazione vincolare** che la carrucola esercita sulla fune, che è a diretto contatto con essa, deve essere necessariamente **ortogonale punto per punto alla tangente** al profilo delle carrucola. Questo è in accordo con la condizione di **vincolo liscio**.

Vediamo che deve essere così osservando il caso particolare di $\mathbf{m_A = m_B}$.



In questo caso il sistema deve essere in equilibrio. Sulla fune agirebbero le reazioni delle due masse che saranno identiche e quindi la fune non dovrebbe scivolare. Se la reazione vincolare della puleggia sulla fune fosse obliqua, cioè con una componente tangenziale alla fune , su di essa agirebbe una forza non equilibrata da nessun'altra e quindi la fune scivolerebbe e il sistema non sarebbe in equilibrio.

Ò è un esempio che conferma che la condizione di "**vincolo liscio**" qualunque esso sia è rappresentabile con un vettore punto per punto ortogonale alla superficie del vincolo.

Carrucola di massa trascurabile

Sempre facendo riferimento alla figura precedente nello scrivere la legge del moto per la puleggia

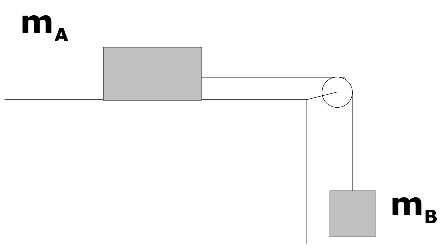
$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\mathbf{pul.}} = \mathbf{m}_{\mathbf{pul.}} \cdot \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{pul.}}$$

avremo sempre

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\mathbf{pul.}} = \mathbf{0}$$

e quindi la puleggia

APPARECCHIO DI FLECHER



Un corpo di massa $\mathbf{m_A}$ è appoggiato ad un piano orizzontale. Mediante una **fune in estendibile** e **massa trascurabile** che passa attraverso la gola di una carrucola priva di attrito, è collegata una massa $\mathbf{m_B}$ come in figura. Distinguiamo i casi:

a) **piano liscio**;

b) **piano con attrito** con coefficienti μ_d e μ_s.

Determinare:

1) L'**accelerazione** del sistema:
2) La **tensione** della fune.

SOLUZIONE

Osserviamo subito che indipendentemente dal tipo di piano, la condizione di fune priva di massa implica che l

a) piano liscio.