APPENDICE DIFFRAZIONE

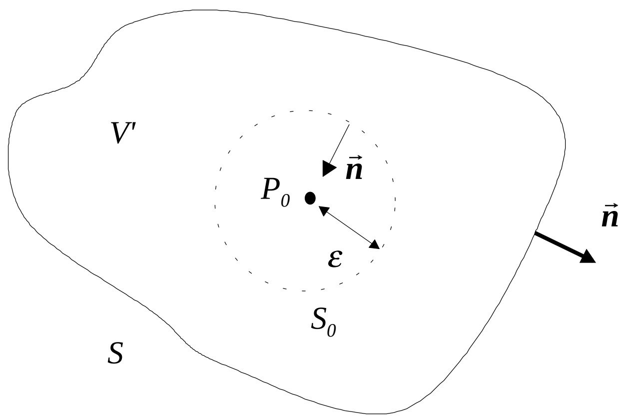
La trattazione che segue è solo un cenno a quello che riguarda il problema generale delle diffrazione che ricordiamo può essere così riassunto : ***nota la distribuzione di campo, in ogni punto P_1 una regione limitata dello spazio Σ nel piano X_1 Y_1 (piano oggetto), per esempio un'apertura su uno schermo opaco, determinare il campo in ogni punto P oltre l'apertura .***

Il *problema della diffrazione* può essere trattato mediante la *teoria scalare* delle onde elettromagnetiche, cioè si considera l'ampiezza scalare di una componente della perturbazione e si suppone che ogni altra componente si comporti in maniera analoga; ipotesi giustificata al principio di sovrapposizione, valido in ottica lineare.

Senza entrare nei dettagli della teoria, tutte le considerazioni che seguono derivano dal ***Teorema di Helmholtz-Kirchhoff***, secondo il quale: *la soluzione dell'equazione delle onde omogenea*

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

(equazione delle onde o equazione di Helmholtz) calcolata in un punto arbitrario può essere espressa in termini dalle soluzioni dell'equazione e delle sue derivate prime su una superficie chiusa arbitraria che circonda il punto



P_0 è il punto di osservazione e S è una superficie chiusa arbitraria che circonda P_0. Il problema è quello di esprimere il campo in P_0 in termini del campo sulla superficie S. In altre parole, nota la distribuzione del campo su una superficie chiusa arbitraria, è possibile determinare il valore del campo in ogni punto dello spazio all'interno della superficie. Questo teorema fu ricavato per la prima volta da Helmholtz per le onde acustiche.

L'applicazione al caso della diffrazione può essere assai significativo applicando il Teorema di Green secondo il quale: "*date due funzioni complesse* $\vec{E}(P)$ *e* $\vec{G}(P)$, *munite di derivate prime e seconde univoche, continue all'interno di S e su S vale la relazione:*

$$\iiint_V \vec{G}\,\nabla^2\vec{E} - \vec{E}\,\nabla^2\vec{G})\,dV = \iint_S \left(\vec{G}\frac{\partial\vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\frac{\partial\vec{G}}{\partial n}\right)ds \tag{A,1}$$

Il primo membro è l'integrale di volume su *V*, mentre il secondo membro è l'integrale si superficie su *S* e dove $\frac{\partial}{\partial n}$ è la derivata parziale nella direzione $\vec{n}$ volta verso l'esterno di *S*.

Prendiamo come funzioni: $\vec{E}(P) = A_0(P)e^{i\Phi(P)}e^{-i2\pi\nu t}$ [*ν frequenza ottica, Φ(P) la fase*] il campo della radiazione luminosa; $\vec{G}(P) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$, che si potrebbe dimostrare essere la parte spaziale di un'onda sferica soluzione dell'equazione delle onde *(equazione di Helmholzt)*, con r_{01} distanza tra P_0 e P_1 che è continua in *V* tranne al più in P_0 e che può considerarsi come un'onda emergente da P_0 (possiamo trascurare la parte temporale in quanto si faranno misure di intensità e quindi mediate nel tempo). Escludiamo il punto P_0 pensandolo chiuso in una sfera S_ε di raggio ε; allora il volume di integrazione sarà *V'* racchiuso tra S e S_ε, la superficie di integrazione sarà $S' = S + S_\varepsilon$ con la normale su S_ε rivolta verso l'interno; P_1 è un punto di *S'*

Introduciamo nella (A,1) le funzioni scelte. Per una più semplice valutazione osserviamo che sia $\vec{E}(P)$ che $\vec{G}(P)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea delle onde $\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ (e analogamente per $\vec{G}(P)$). Ricordando il significato di ∇^2 possiamo allora dire[1] che la $\vec{E}(P)$ e $\vec{G}(P)$ soddisfano anche l'equazione:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\vec{F}(P) = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \nabla^2\vec{F} = -k^2\vec{F}$$

e nella (A,1) risulterà :

---

[1] Consideriamo la sola componete x e valutiamo $\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}$ con $E_x = A_x e^{i(kx+\delta)}e^{-2\pi\nu t}$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x e^{i(kx+\delta)}e^{-2\pi\nu t}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[ikA_x e^{i(kx+\delta)}e^{-2\pi\nu t}\right] = -k^2A_x e^{i(kx+\delta)}e^{-2\pi\nu t} = -k^2E_x$$

e analogamente per le altre componenti, da cui possiamo ricavare $\left(\nabla^2 + k^2\right)\vec{E}(P) = 0$

$$\iiint_{V'} (\vec{G}\,\nabla^2\vec{E} - \vec{E}\,\nabla^2\vec{G})\,dV = -\iiint_{V'} (\vec{G}\,k^2\vec{E} - \vec{E}\,k^2\vec{G})\,dV = 0$$

e

$$\iint_{S'} \left(\vec{G}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\,\frac{\partial\vec{G}}{\partial n} \right) ds = 0$$

che possiamo scrivere

$$-\iint_{S_\varepsilon} \left(\vec{G}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\,\frac{\partial\vec{G}}{\partial n} \right) ds' = \iint_{S} \left(\vec{G}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\,\frac{\partial\vec{G}}{\partial n} \right) ds \qquad \text{(A,2)}$$

tenendo conto che $S' = S + S_\varepsilon$.

Calcoliamo al limite per $\varepsilon \to 0$ l'integrale su S_e della (A,2) con $\vec{G}(P_1) = \frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}}$ con P_1 su ε.

Con qualche passaggi matematico si può ricavare che:

$$\frac{\partial\vec{G}}{\partial n} = \cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\left(i\,k - \frac{1}{r_{01}} \right)\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}} \qquad \text{(A,3)}$$

dove $\cos(\vec{n},\vec{r}_{01})$ è il coseno dell'angolo formato tra la normale uscente $\vec{n}$ e il raggio vettore $\vec{r}_{01}$ che congiunge P_0 a P_1. Se in particolare P_1 su è ε , $\cos(\vec{n},\vec{r}_{01}) = -1$ e $\vec{r}_{01} = \varepsilon$, per cui avremo:

$$\vec{G}(P_1) = \frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon} \qquad \frac{\partial\vec{G}}{\partial n} = -\left(i\,k - \frac{1}{\varepsilon} \right)\frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - i\,k \right)\frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon}$$

Allora al limite per $\varepsilon \to 0$, se P_1 è su ε , $P_1 \to P_0$ e poiché $\vec{E}$ è il campo della radiazione luminosa e quindi è continua con le sue derivate prime in P_0 , possiamo scrivere[2]:

2

$$4\pi\,\varepsilon^2\left[\frac{\partial\vec{E}(P_0)}{\partial n}\,\frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon} - \vec{E}(P_0)\left(\frac{1}{\varepsilon} - i\,k \right)\frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon} \right]_{\varepsilon\to 0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \left[4\pi\,\varepsilon^2\,\frac{\partial\vec{E}(P_0)}{\partial n}\,\frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon} \right] - \left[4\pi\,\varepsilon^2\,\frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon^2}\,\vec{E}(P_0) \right] + i\,k\,4\pi\,\varepsilon^2\,\vec{E}(P_0)\,\frac{e^{i\,k\,\varepsilon}}{\varepsilon} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[4\pi\,\varepsilon\,\frac{\partial\vec{E}(P_0)}{\partial n}\,e^{i\,k\,\varepsilon} - 4\pi\,e^{i\,k\,\varepsilon}\,\vec{E}(P_0) + i\,k\,4\pi\,\varepsilon\,\vec{E}(P_0)\,\varepsilon e^{i\,k\,\varepsilon} \right] = \left[0 \cdot \frac{\partial\vec{E}(P_0)}{\partial n} \cdot 1 - 4\pi \cdot 1 \cdot \vec{E}(P_0) + i\,k 4\pi \cdot 0 \cdot \vec{E}(P_0) \cdot 1 \right] = -4\pi\,\vec{E}(P_0)$$

$$\iint_{S_\varepsilon}\left(\vec{G}\frac{\partial\vec{E}}{\partial n}-\vec{E}\frac{\partial\vec{G}}{\partial n}\right)ds' = \iint_{S_\varepsilon}\left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial\vec{E}(P_0)}{\partial n}-\vec{E}(P_0)\left(\frac{1}{\varepsilon}-ik\right)\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right]ds' =$$

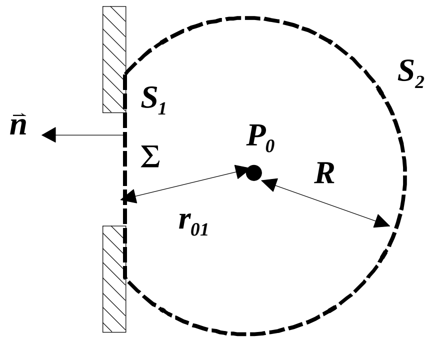
$$= 4\pi\,\varepsilon^2\left[\frac{\partial\vec{E}(P_0)}{\partial n}\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}-\vec{E}(P_0)\left(\frac{1}{\varepsilon}-ik\right)\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon\to 0} = -4\pi\,\vec{E}(P_0)$$

e sostituendo nella (A,2) si ottiene:

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\vec{G}\frac{\partial\vec{E}}{\partial n}-\vec{E}\frac{\partial\vec{G}}{\partial n}\right)ds = \frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial n}\left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}-\vec{E}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}\right)\right]ds \qquad \text{(A,4)}$$

che è ***l'integrale di Helmholtz e Kirckhoff*** su cui si basa la *teoria scalare delle diffrazione*.

Possiamo applicare la (A,4) al problema della diffrazione utilizzando una particolare superficie S, come mostrato in figura.



$S = S_1 + S_2$ dove S_1 è una superficie adagiata sull'apertura S e S_2 è una *coppa sferica* di centro P_0 raggio R e appoggiata a S_1 sullo schermo opaco.

Consideriamo la parte della (A,4) che riguarda solo al superficie S_2.
Per un punto P_1 su S_2 avremo:

$$\vec{G}(P_1) = \frac{e^{ikR}}{R} \qquad\qquad \frac{\partial\vec{G}}{\partial n} = \left(ik-\frac{1}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R} \approx ik\,\vec{G}(P_1)$$

per R sufficientemente grande. Quindi l'integrale in questione si riduce a :

$$\iint_{S_2}\left(\vec{G}\frac{\partial\vec{E}}{\partial n}-\vec{E}\,ik\,\vec{G}\right)ds = \int_\Omega\vec{G}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial n}-ik\,\vec{E}\right)R^2 d\Omega$$

dove Ω è l'angolo solido sotteso da S_2 su P_0.

Quando $\boldsymbol{R} \rightarrow \infty$ questo integrale ***si annulla*** se il valore del campo $\vec{E}$ associato alla perturbazione, nell'apertura angolare Ω, è tale che:

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - i\,k\,\vec{E}\right) = 0$$

Questa è detta " ***condizione di radiazione di Sommerfeld***" che si può dimostrare esser ***vera*** per *onde sferiche o combinazioni lineari di onde sferiche* e quindi in pratica sempre soddisfatta in quanto la radiazione che illumina una fenditura è generalmente un'onda sferica o piana. Quindi l'integrale (A,3) si riduce a:

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\vec{G}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\,\frac{\partial \vec{G}}{\partial n}\right)ds \qquad \text{(A,5)}$$

dove ***il valore del campo in P_0 dipende solo dai valori del campo e della sua derivata sulla superficie S_1***.

La superficie di integrazione può essere ridotta alla sola superficie dell'apertura Σ facendo le seguenti considerazioni (*condizioni al contorno di Kirchhoff*):

a) attraverso Σ il valore del campo e della sua derivata sono gli stessi indipendentemente che I sia o meno lo schermo opaco. Questo ci permette di specificare la radiazione incidente sull'apertura trascurando la presenza dello schermo;
b) sulla porzione di S_1 che giace nell'ombra dello schermo il valore del campo e della sua derivata sono nulli. Questa ci permette di trascurare tutta la superficie di integrazione tranne la porzione che giace immediatamente davanti all'apertura.

La (A,5) diventa

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\vec{G}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\,\frac{\partial \vec{G}}{\partial n}\right)ds \qquad \text{(A,6)}$$

E' opportuno rilevare che le *condizioni al contorno di Kirchhoff* semplificano notevolmente la soluzione del problema, ma nella realtà sono difficilmente realizzabili per due motivi in particolare: *1)* l'ombra dell'apertura non è mai perfetta, per cui il campo si estende anche sopra lo schermo per distanze di diverse lunghezze d'onda; *2)* i bordi stessi diffrangono per cui la perturbazione oltre l'apertura ne è influenzata. Tuttavia questi effetti possono essere trascurati se le dimensioni dell'apertura sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda

Una ulteriore semplificazione si ha se si considera il punto di osservazione P_0 a distanza tale che r_{01} contenga molte lunghezze d'onda per cui $k >> 1/r_{01}$. In questo caso l'equazione (A,3) diventa:

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial n} = cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\left(i\,k - \frac{1}{r_{01}} \right)\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}} \cong i\,k\,cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}}$$

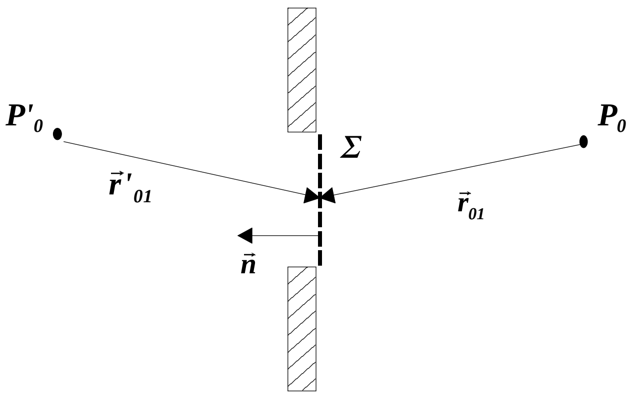
Se il punto P_1 lo si considera sull'apertura Σ, sostituendo questa espressione e l'espressione di $\vec{G}(P_1) = \dfrac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}}$ nella (A,6) si ottiene:

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}}\left[\frac{\partial \vec{E}(P_1)}{\partial n} - i\,k\,\vec{E}(P_1)\,cos(\vec{n},\vec{r}_{01}) \right] ds$$

(A,7)

Per risolvere questa equazione si devono dare anche delle condizioni al contorno contemporaneamente per il campo $\vec{E}$ e la sua derivata $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial n}$. Questo può essere evitato con una opportuna scelta della funzione di Green.

Si suppone che la $\vec{G}$ sia generata da un'onda sferica emergente da P_0 più una generata dal punto P_0', *immagine* di P_0 rispetto a Σ.



Supponiamo anche che le due sorgenti oscillino in controfasce (questa condizione è solo comoda dal punto di vista formale, ma non assolutamente necessaria). Allora la funzione di Green sarà:

$$\vec{G}(P_1) = \frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{i\,k\,r'_{01}}}{r'_{01}} = 0$$

e la sua derivata è:

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial n} = cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\left(i\,k - \frac{1}{r_{01}} \right)\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}} - cos(\vec{n},\vec{r}\,'_{01})\left(i\,k - \frac{1}{r'_{01}} \right)\frac{e^{i\,k\,r'_{01}}}{r'_{01}}$$

poiché $r_{01} = r'_{01}$ e $cos(\vec{n},\vec{r}_{01}) = -cos(\vec{n},\vec{r}\,'_{01})$ si ottiene:

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial n} = 2\,cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\left(i\,k - \frac{1}{r_{01}} \right)\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}} \cong 2\,cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,i\,k\,\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}}$$

ricordando che $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e che è sempre praticamente verificato che $r_{01} >> \lambda$.

Quindi con i valori ottenuti: $\vec{G} = 0$ e $\frac{\partial \vec{G}}{\partial n} = 2\,cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,i\,k\,\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}}$, sostituiti nella (A,6), si ottiene:

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\vec{G}\frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\frac{\partial \vec{G}}{\partial n} \right)ds = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\cdot 2\,cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,ik\,\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}} \right)ds =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\,i\,\frac{2\pi}{\lambda}\,2\iint_{\Sigma}\left(\vec{E}\cdot cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}} \right)ds = \frac{1}{i\,\lambda}\iint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\frac{e^{i\,k\,r_{01}}}{r_{01}}cos(\vec{n},\vec{r}_{01})\,ds$$

Questo risultato:

$$\vec{E}(P_0) = \frac{1}{i\,\lambda}\int_{\Sigma}\vec{E}(P_1)\frac{e^{ik\,r_{01}}}{r_{01}}cos(\vec{n}\cdot\vec{r}_{01})ds$$

$\vec{n} = normale\ alla\ \Sigma$ costituisce la ***formula di Rayleigh per la diffrazione*** . Rappreesenta anche l'espressione matematica del principio di Huygens-Fresnel per cui il campo diffratto da una fenditura si può considerare come la sovrapposizione delle onde elementari emesse da infinite sorgenti elementari , punti dell'apertura.