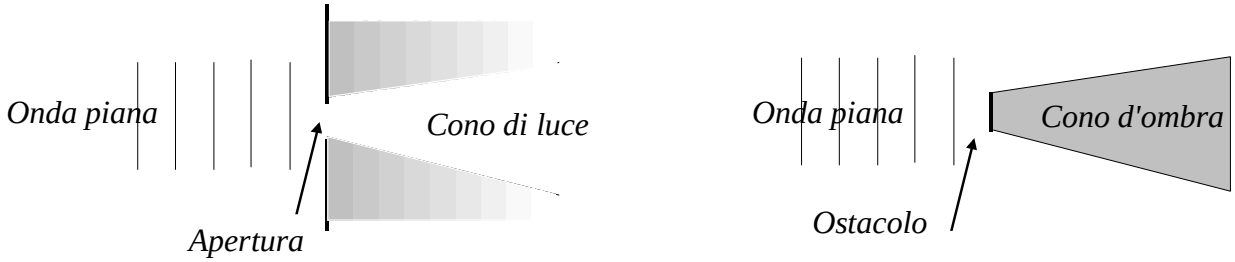
6 DIFFRAZIONE

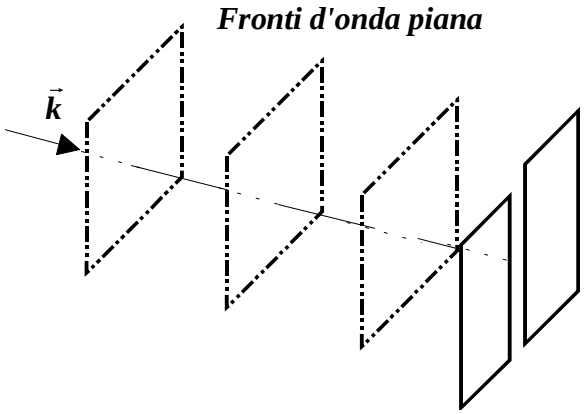
Introduzione

La diffrazione è un fenomeno che avviene ***tutte*** le volte che in qualche modo si limita o si ostacola un fronte d'onda e le dimensioni dell'ostacolo o dell'apertura su uno schermo opaco sono confrontabili con la lunghezza d'onda della radiazione luminosa.

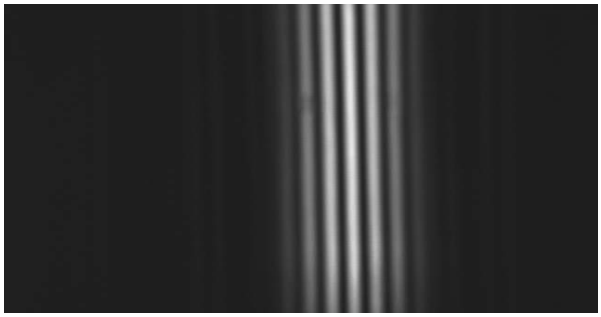
Se non ci fosse il fenomeno della diffrazione, su uno schermo posto ad una certa distanza dall'apertura o ostacolo, avremmo una distribuzione di intensità come mostrato nella figura.



In realtà la l'intensità luminosa sullo schermo si può distribuire in maniera molto diversa. Se per esempio si illumina con luce laser un'apertura di qualche decimo di mm,



su uno schermo posto ad una distanza di circa *1 m* si osserva una distribuzione di intensità come mostrato in figura:



Si può subito notare come la distribuzione di intensità si sviluppi in una direzione ortogonale alla simmetria dell'apertura.

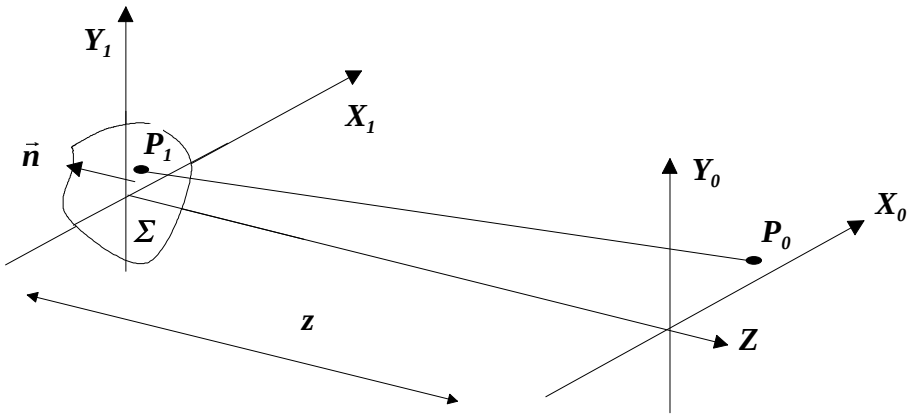
Il poter osservare questo fenomeno e come questo fenomeno appare, dipende fortemente dalle condizioni sperimentale in cui ci mettiamo. In generale si può dire che il fenomeno è *sempre visibile* a condizione di fare osservazioni in tempi inferiori al tempo di coerenza della radiazione luminosa. In altre parole se la radiazione è una radiazione laser, il fenomeno è facilmente osservabile , mentre se si utilizza luce naturale occorre fare osservazioni in tempi dell'ordine del $10^{8\text{-}9}$ secondi.

Nel caso di particolari simmetrie degli ostacoli o aperture la distribuzione di intensità è prevedibile analiticamente. Per questo motivo il fenomeno della diffrazione può essere sfruttato in maniera inversa: dall'analisi della distribuzione dell'energia, nei casi in cui essa presenti qualche particolare simmetria, è possibile risalire al sistema (ostacolo, reticolo) che la genera. Un esempio tipico è l'utilizzo della diffrazione da raggi X per lo studio dei reticoli atomici.

La diffrazione, che è stato un fenomeno tipico delle perturbazioni che possono essere descritte mediante un modello ondulatorio e storicamente è stato, assieme all'interferenza, uno degli esperimenti che hanno portato formulare la teoria ondulatori della luce proprio per poter dare una giustificazione analitica a questo effetto sperimentale.

6,1 Problema generale della diffrazione

Il problema generale della diffrazione può essere cosi illustrato : ***nota la distribuzione di campo, in ogni punto P_1 una regione limitata dello spazio Σ nel piano X_1 Y_1 , per esempio un'apertura su uno schermo opaco, determinare il campo in ogni punto P oltre l'apertura .***



Il piano X_1Y_1 si definisce *piano oggetto,* mentre il piano di osservazione X_0Y_0 , posto a distanza z dal *piano oggetto,* si definisce *piano*.

Il problema può essere matematicamente espresso da quella che viene detta ***formula di Rayleigh per la diffrazione***

$$\vec{E}(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda}\int_{\Sigma} \vec{E}(x_1, y_1, 0)\frac{e^{ik\, r_{01}}}{r_{01}} cos(\vec{n}\cdot\vec{r}_{01})ds \qquad (6,1)$$

dove $cos(\vec{n},\vec{r}_{01})$ è il coseno dell'angolo formato tra $\vec{n}$ = ***normale alla*** Σ (nel verso opposto all'asse Z) e il raggio vettore $\vec{r}_{01}$ che congiunge P_1 a P_0. La (6,1) è anche l'espressione matematica del principio di Huygens-Fresnel per cui il campo diffratto da una fenditura si può considerare come la sovrapposizione delle onde elementari emesse da infinite sorgenti elementari , punti dell'apertura. Per vedere come si giunge alla relazione (6,1) ci si può rifare al paragrafo "***APPENDICE DIFFRAZIONE***"

Consideriamo la diffrazione da una apertura finita Σ su uno schermo opaco, caratterizzata da una trasmittanza $t(x_1,y_1)$. Per semplicità di trattazione formale supponiamo di illuminare l'apertura con onda piana, monocromatica polarizzata linearmente. Questa ipotesi è anche giustificata dal fatto che il *problema della diffrazione* può essere trattato mediante la *teoria scalare* delle onde elettromagnetiche, cioè si considera l'ampiezza scalare di una componente della perturbazione e si suppone che ogni altra componente si comporti in maniera analoga; ipotesi giustificata al principio di sovrapposizione, valido in ottica lineare. Inoltre l'ipotesi di onda piana è anche soddisfatta nella maggior parte dei casi pratici in quanto l'apertura è per lo più posta ad una certa distanza dalla sorgente luminosa e interessa una zona del piano molto limitata.

Indichiamo con $E_i(x_1,y_1)$ il campo scalare che rappresenta la radiazione che illumina l'apertura in un punto generico P_1 nel piano $z = 0$. Il campo immediatamente dopo la maschera sarà dato da:

$$E(x_1,y_1) = t(x_1,y_1)\, E_i(x_1,y_1) \qquad (6,2)$$

Con buona approssimazione la propagazione oltre la maschera può essere descritta facendo l'ipotesi che ciascun punto del piano $(x_1,y_1,0)$ illuminato sia sorgente di onda sferica (*principio di Huygens*). Sul *piano immagine* X_0,Y_0 il campo sarà rappresentato da una funzione del tipo (6,1):

$$\vec{E}(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda}\int_{\Sigma} \vec{E}(x_1, y_1, 0)\frac{e^{ik\, r_{01}}}{r_{01}} cos(\vec{n}\cdot\vec{r}_{01})ds \qquad (6,3)$$

che come detto rappresenta la somma delle onde sferiche elementari originati dai punti $(x_1,y_1,0)$.

Il $cos(\vec{n},\vec{r}_{01})$ è detto anche *fattore di obliquità* ; $1/i\lambda$ è un fattore di ampiezza e di fase.

6,2 Approssimazioni di Fresnel e Fraunhofer

Nei casi reali la regione di osservazione è sempre limitata e di dimensioni lineari sempre molto minori della distanza tra l'apertura e il piano immagine. Questo può essere formalizzato dalle relazioni: $|x_0|,|y_0| << z$ e $|x_1|,|y_1| << z$. Questa si dice anche *condizione parassiale* e significa che possiamo considerare solo i raggi che formano piccoli angoli con l'asse ottico del sistema. Allora possiamo porre :

$$\cos(\vec{n},\vec{r}_{01}) \cong 1$$

e i raggi sono con buona approssimazione paralleli. Questo comporta che si può trascurare la dipendenza dell'ampiezza da r e possiamo anche porre che $r_{01} \cong z$.

L'espressione del campo sul piano immagine (6,3) può essere scritta nella forma:

$$\vec{E}(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda z}\int_{\Sigma} \vec{E}(x_1, y_1, 0)\, e^{ik r_{01}}\, ds \qquad (6,4)$$

La sostituzione $r_{01} \cong z$ non può essere fatta nell'esponenziale nell'integrale in quanto qui r_{01} è moltiplicato per k che molto grande e potrebbe portare ad una variazione di fase non trascurabile. Una ulteriore approssimazione può essere fatta su r_{01} . Con semplici considerazioni geometriche possiamo scrivere:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = z\sqrt{1 + \left(\frac{x_0 - x_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - y_1}{z}\right)^2}$$

e tenendo conto della *condizione parassiale* e ricordandolo sviluppo binomiale

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \ldots \qquad |b| < 1$$

possiamo scrivere:

$$r_{01} = \sqrt{1 + \left(\frac{x_0 - x_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - y_1}{z}\right)^2} \cong \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_0 - x_1}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_0 - y_1}{z}\right)^2\right]$$

Con questa approssimazione detta ***approssimazione di Fresnel*** la (6,4) diventa

$$E(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} \int_{\Sigma} E(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)} e^{-i\frac{k}{2z}(x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_1 dy_1 \qquad (6,5)$$

La (6,5) rappresenta quello che viene definito ***campo diffratto alla Fresnel***. La trattazione della diffrazione nell'*approssimazione di Fresnel* da buoni risultato nella regione molto vicina al piano di diffrazione e più precisamente a distanze dell'ordine delle ***decine di*** λ della radiazione utilizzata. Nei casi in cui la diffrazione può trovare applicazioni anche pratiche, il piano di osservazione si trova a grande distanza (ordine del metro) dall'apertura diffrangente.

Introduciamo quella che viene definita l'***approssimazione di Fraunhofer*** imponendo che il *piano immagine* sia ad una distanza *z* dall'apertura e la regione dell'apertura siano tali che valga la condizione:

$$z >> \frac{k(x_1^2 + y_1^2)_{max}}{2} = \frac{\pi (x_1^2 + y_1^2)_{max}}{\lambda}$$

(condizione verificata per esempio con $\lambda = 0{,}5\ \mu m$, apertura di qualche decimo di mm e $z \approx 1\ m$)

In questo caso si può trascurate il termine quadratico nell'integrale (6,5) e quindi la distribuzione del campo nel piano immagine sarà dato :

$$E(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \int_{\Sigma} E(x_1, y_1)\, e^{-i\frac{k}{2z}(x_0x_1+y_0y_1)} dx_1 dy_1 \qquad (6,6)$$

che rappresenta il ***campo diffratto alla Fraunhofer***. Il termine fuori dell'integrale e un fattore di fase che dipende solo dalla geometria dell'apertura, dalla posizione del ***piano immagine*** e dalla λ della radiazione. E' una espressione integrale che *descrive il campo nei punti del piano immagine in termini della sovrapposizione delle onde emesse dai punti dell'apertura considerati come punti sorgente ciascuna pesata con un certo fattore di fase*.

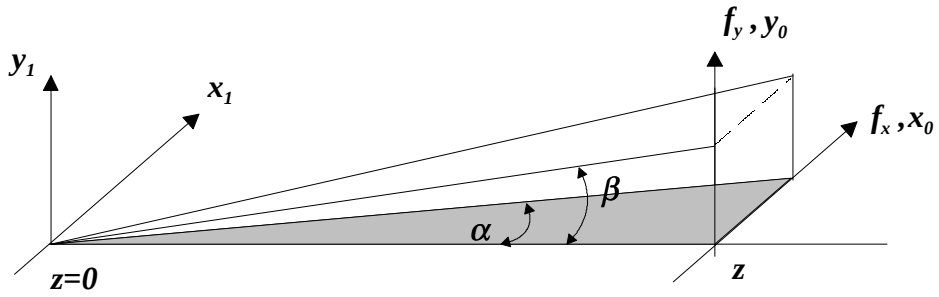
Facciamo la seguente osservazione. Il campo che contribuisce all'integrale (6,6) è solo quello corrispondente ai punti dell'apertura Σ, mentre in tutti gli altri punti del piano oggetto, che ricadono sullo schermo opaco, si può considerare identicamente nullo. Quindi nulla cambia se gli estremi di integrazione si estendono a tutto il piano e lo scriviamo nel modo seguente

$$E(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int E(x_1, y_1) e^{-i\frac{k}{2z}(x_0x_1+y_0y_1)} dx_1 dy_1 \qquad (6,7)$$

Questa ci permette di interpretare la ***diffrazione alla Fraunhofer*** in una maniera leggermente diversa, ma che permette una maggiore generalizzazione e che si inquadra in quella che viene definita ***Ottica di Fourier***, particolarmente significativa in ottica lineare. Introduciamo allora due nuove variabili:

$$f_x = \frac{x_0}{\lambda z} = \frac{\tan\alpha}{\lambda} \cong \frac{\alpha}{\lambda} \qquad\qquad f_y = \frac{y_0}{\lambda z} = \frac{\tan\beta}{\lambda} \cong \frac{\beta}{\lambda}$$

che a parte il fattore $1/\lambda$, possono essere interpretate geometricamente come direzione e che corrispondono agli *angoli* α *e* β *di diffrazione* rispettivamente nei piani x_0,z e y_0,z, cioè le "*direzioni angolari*" lungo le quali si va ad osservare il fenomeno delle diffrazione.



In questo modo possiamo interpretare la diffrazione come una distribuzione dell'intensità secondo certe *direzioni angolari*. La $f_0 = 0$ coincide con l'asse ottico del sistema ; i massimi (o i minimi) di diffrazione li troveremo secondo certe particolari direzioni. La deviazione dalla direzione zero aumenta col diminuire della λ della radiazione luminosa.

Introducendo le frequenze spaziali nell'integrale (6,7), possiamo scrivere:

$$E(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int E(x_1, y_1)\, e^{-i2\pi(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1 \qquad (6,8)$$

L'espressione (6,7) rappresenta anche la "***Trasformata di Fourier***" della funzione $E(x_1,y_1)$ nelle variabili f_x , f_y .

Con questa interpretazione la (6,8) può essere scritta nella forma:

$$E(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \Im\{E(x_1, y_1)\}\Big|_{\substack{f_x \\ f_y}} \qquad (6,9)$$

Il simbolo $\Im\{f(x,y)\}_{h}^{g}$ significa "***Trasformata di Fourier, della funzione delle variabili indipendenti x ,y, nelle variabili g,h,***".

La (6,9) si legge nel modo seguente: "***Nell'approssimazione di Fraunhofer*** $(z >> \pi (x_1^2 + y_1^2)_{max} / \lambda$; ***quindi campo lontano dall'apertura), la distribuzione del campo nel piano immagine a z costante è proporzionale, a meno di un fattore di fase quadratico, alla trasformata di Fourier della distribuzione del campo sull'apertura***".

L'utilità di questa visione della diffrazione alla Fraunhofer sta nel fatto che è generalizzabile a qualsiasi tipo di apertura o "*maschera*" diffrangente. In questo modo, nota la geometria dell'apertura o "maschera", è possibile stabilire a priori la distribuzione del campo in un piano a distanza z fissato, applicando l'operazione di trasformata.

E' importante osservare che quando si dice che si "osserva" il fenomeno della diffrazione, questo lo si fa con dei rivelatori di radiazione luminosa (occhio, lastre fotografiche, fotodiodi) che "rispondono" all'intensità luminosa. Si ricordi che l'intensità è data dal valor medio nel tempo del quadrato dell'ampiezza del campo, cioè in generale per una radiazione monocromatica di ampiezza complessa $I(P) = \langle \vec{E}(P) \cdot \vec{E}^{*}(P) \rangle$. Pertanto la funzione di maggior interesse sarà il modulo quadro del campo diffratto in cui non saranno presenti i fattori di fase.

6,3 Trasformata di Fourier

Senza entrare troppo in dettagli analitici circa le condizioni cui debbono soddisfare le funzioni in gioco, facciamo qualche cenno alla "***Trasformata di Fourier***" , che costituisce uno strumento matematico molto utile nell'analisi di fenomeni lineari (ma anche non lineari) e molto applicata nello studio dei sistemi di reti elettriche a sistemi di comunicazione e ovviamente in ottica.

Data una funzione complessa di $\vec{g}(x,y)$, (*x, y variabili indipendenti*), si definisce "***Trasformata di Fourier***" e si indica col simbolo $\Im\{\vec{g}\}$, la funzione integrale complessa nelle variabili indipendenti f_x e f_y definita da :

$$\vec{G} \; o \; \Im(\vec{g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \vec{g}(x,y) \, e^{-i\,2\pi (f_x x + f_y y)} dx dy$$

le variabili indipendenti f_x e f_y sono dette frequenze spaziali.

Per questo motivo la *Trasformata di Fourier* viene anche detta "***Spettro di Fourier*** " o " ***spettro di frequenze***". In ottica le "*frequenze*" sono frequenze spaziali, cioè indicano delle direzioni. Per esempio il fenomeno della diffrazione sparpaglia l'energia che era localizzata nella zona dell'apertura secondo certe direzione (in certe direzione l'energia è zero).

E' possibile anche l'operazione inversa, cioè di "***antitrasformata***" ($\Im^{-1}\{\vec{G}\}$) o "*Trasformata della trasformata*" ($\Im\{\Im\{\vec{g}\}\}$) che è definita da:

$$\Im^{-1}\{\vec{G}\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \vec{G}(f_x, f_y)\, e^{i2\pi(f_x x + f_y y)}\, df_x\, df_y$$

Sempre con riferimento alla diffrazione significa raccogliere , per esempio con una lente , la figura di diffrazione nella zona del fuoco della lente. Si potrebbe dimostrare analiticamente che *l'immagine di una lente, nel suo fuoco, corrisponde alla trasformata di Fourier della distribuzione del campo sull'apertura della lente.*

Può essere utile indicare alcune proprietà valide per la *Trasformata di Fourier* :

Linearità

$$\Im(a\,\vec{g} + b\,\vec{h}) = a\,\Im\{\vec{g}\} + b\,\Im\{\vec{h}\}$$

"Fattore di scala"

$$Se \quad \Im\{\vec{g}(x,y)\} = \vec{G}(f_x, f_y) \quad \rightarrow \quad \Im\{\vec{g}(ax, by\} = \frac{1}{|a\,b|}\vec{G}\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right)$$

"Traslazione"

$$Se \quad \Im\{\vec{g}(x,y)\} = \vec{G}(f_x, f_y) \quad \rightarrow \quad \Im\{\vec{g}(x-a, y-b\} = \vec{G}(f_x, f_y)\; e^{-i\pi(f_x a + f_y b)}$$

Vediamo alcuni esempi significativi di trasformata:

1) Sia la ***rect(x)*** la funzione così definita:

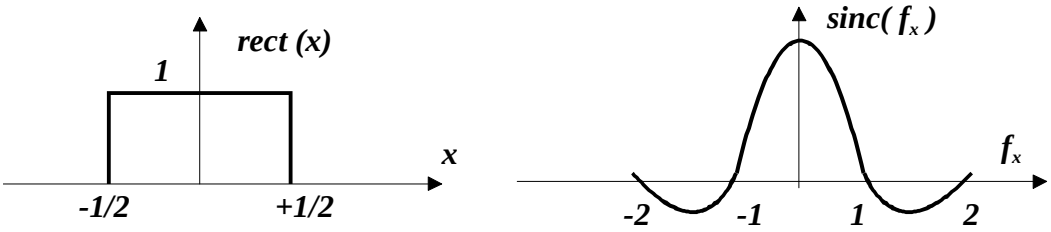
$$rect\,(x) = \begin{cases} 1 & per \quad |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & per\ ogni\ altro\ x \end{cases}$$

La trasformata di Fourier è:

$$\Im[rect(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(x)\, e^{-i2\pi f_x x} dx = \int_{-1/2}^{+1/2} 1 \cdot e^{-i2\pi f_x x} dx = \frac{e^{-i2\pi f_x x}}{-i2\pi f_x}\Bigg|_{-1/2}^{+1/2} = \frac{e^{i\pi f_x} - e^{-i\pi f_x}}{2i(\pi f_x)} = \frac{sen(\pi f_x)}{\pi f_x}$$

La funzione $\frac{sen(\pi f_x)}{\pi f_x}$ spesso è indicata con $sinc(f_x)$. (6,10)

In figura sono mostrati i grafici delle funzioni $rect(x)$ e $sinc(f_x)$.

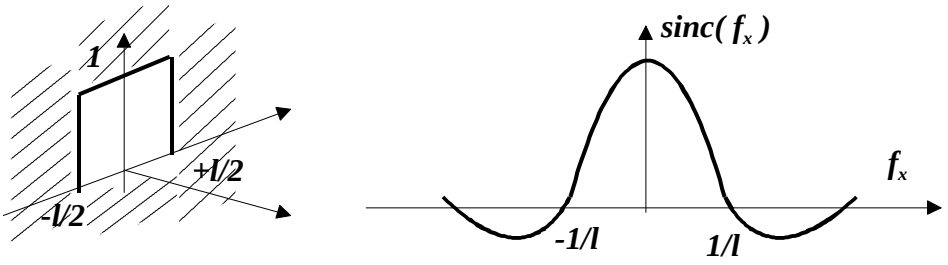


2) Consideriamo ora la $rect\left(\frac{x}{l}\right)$ così definita:

$$rect\left(\frac{x}{l}\right) = \begin{cases} 1 & per\ |x| \le \frac{1}{2} l \\ 0 & per\ ogni\ altro\ x \end{cases}$$

che rappresenta una apertura di larghezza l *(l<<1).* La sua trasformata, per il "*fattore di scala*" sarà

$$\Im\left\{rect\left(\frac{x}{l}\right)\right\} = \frac{1}{1/l} \cdot sinc\left(\frac{f_x}{1/l}\right) = l \cdot sinc(l \cdot f_x) \quad (6,11)$$



Si può osservare che la larghezza dell'apertura rettangolare l e la larghezza del massimo centrale della trasformata di Fourier $2/l$ sono tra loro inversamente proporzionali.

3) Consideriamo la trasformata di ***due aperture rettangolari di larghezza l e distanti 2a*** (distanza tra i baricentri). E' il caso delle doppia fenditura

Questa doppia apertura, nel sistema di riferimento (x, y) sarà rappresentato dalla funzione:

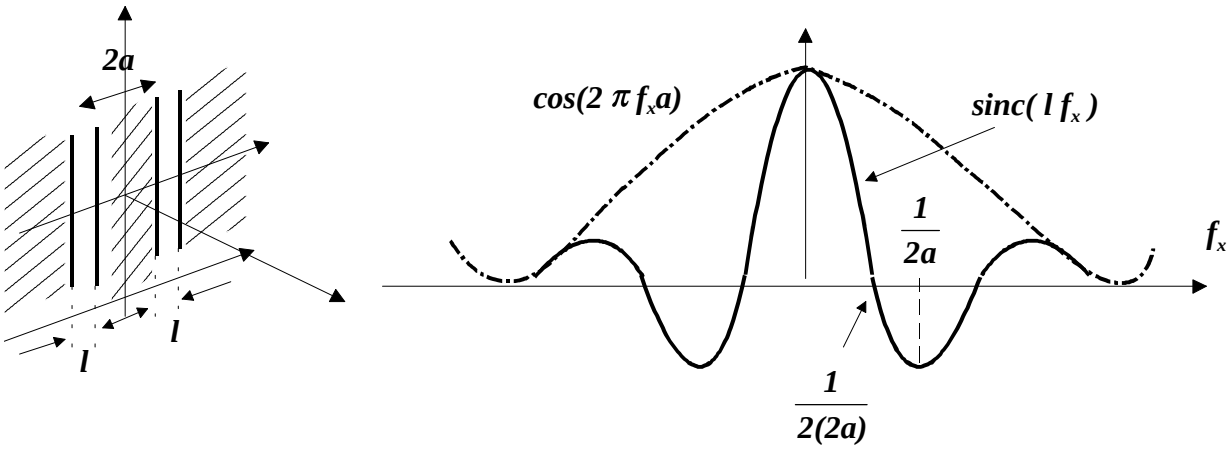
$$\frac{1}{l}\,rect\,(x+a)+\frac{1}{l}\,rect\,(x-a)$$

La sua trasformata, per il "*fattore di scala*" e per la "*traslazione"* sarà data da:

$$\Im\left\{\frac{1}{l}\,rect\,(x+a)+\frac{1}{l}\,rect\,(x-a)\right\}=\frac{1}{1/l}\cdot sinc\left(\frac{f_x}{1/l}\right)\cdot\left(e^{i2\pi\,f_x a}+e^{-i2\pi\,f_x a}\right)=$$

$$=2\,l\cdot sinc(l\;f_x)\cdot cos(2\pi\;f_x a) \qquad (6{,}12)$$

L'andamento delle funzioni è mostrato nella figura seguente



Si può osservare come la ***sinc(l l_x)*** sia "*modulata"* dal fattore ***cos(2πf_xa)*** . I massimi e minimi della ***sinc(l l_x)*** si hanno per $f_x = 0$; $f_x = \frac{1}{2(2a)}$; $f_x = \frac{1}{2a}$ ecc.. e la modulazione si ha nel massimo centrale della ***sinc(l l_x)*** se $\frac{1}{l}$ è maggiore di ***n-volte*** $\frac{1}{2a}$

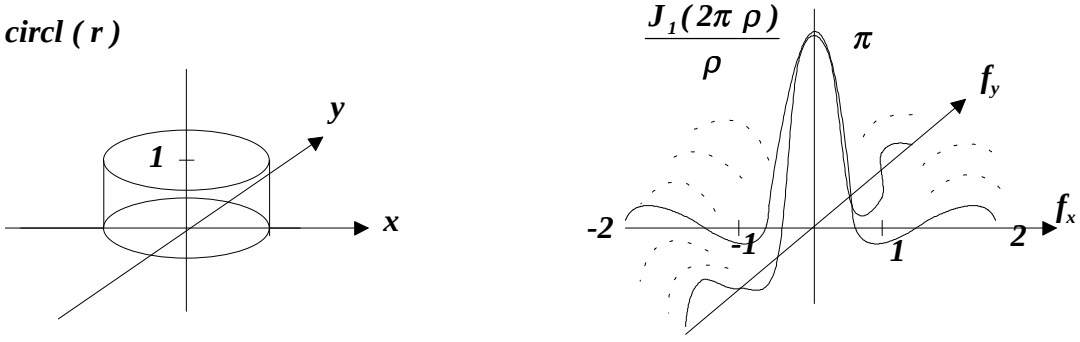
4) Consideriamo ora la trasformata della funzione ***circl(r)*** così definita.

$$circl\,(r) = \begin{cases} 1 & per\ \ r \le 1 \\ 0 & per\ ogni\ \ altro\ \ r \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

che rappresenta un'apertura circolare di raggio r. Questo è un caso particolare per il quale si parla di un particolare tipo di trasformazione, cioè le trasformate di *Bessel-Fourier*. Senza entrare nei dettagli diciamo che la ***trasformata di Bessel –Fourier*** della funzione ***circl(r)*** è data dalla ***funzione di Bessel di ordine uno***

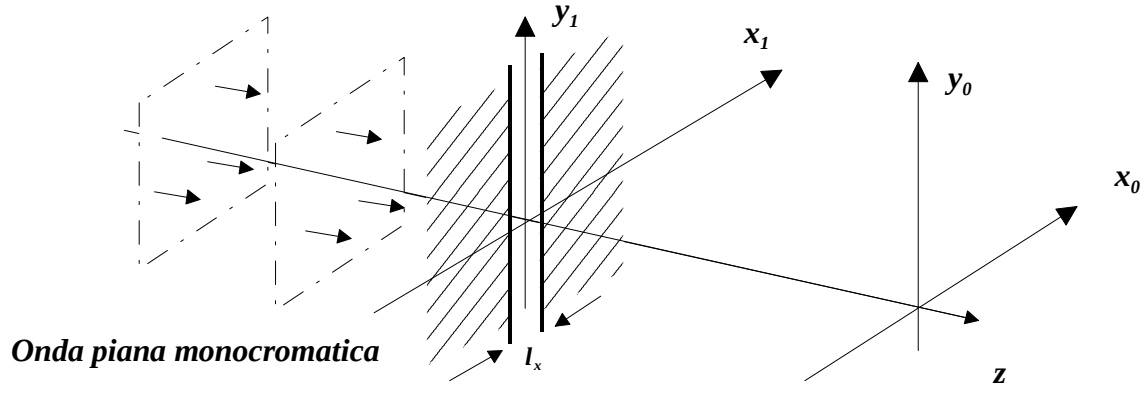
$$\frac{J_1(2\pi\,\rho)}{\rho} \tag{6,13}$$

Questo tipo di funzioni si trovano tabulate sugli Handbook. L'andamento delle funzione è mostrato nella figura seguente



6,4 Esempi di diffrazione alla Fraunhofer

a) <u>Singola fenditura</u>: apertura rettangolare indefinita sull'asse y di larghezza l_x (*non avremo diffrazione lungo y in quanto in questa direzione non si ha limitazione del fronte d'onda*), illuminata con onda piana, monocromatica di ampiezza unitaria.



L'apertura considerata ha una funzione trasmittanza $t(x_1,y_1)$ definita da:

$$t(x_1, y_1) = rect\left(\frac{x_1}{l_x}\right)$$

Ricordiamo che in base alla (6,2) la distribuzione del campo immediatamente dopo l'apertura nel piano $(x_1,y_1,0)$ vale $E(x_1,y_1) = t(x_1,y_1)\ E_i(x_1,y_1)$, ma nel caso di onda piana incidente sul piano dell'apertura la $E_i(x_1,y_1)$ è una costante su tutto il piano a $z = 0$, per cui ai fini del calcolo, anche nei casi seguenti, possiamo tenere conto della sola funzione di trasmittanza $t(x_1,y_1)$

In base alla (6,9) il campo diffratto in un punto x_0,y_0 , su un piano parallelo a quello delle fenditura posta a distanza z sarà dato da:

$$E(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \Im\left\{rect(\frac{x_1}{l_x})\right\}\Big|_{f_x=\frac{x_0}{\lambda z}}$$

e quindi per la (6,11)

$$E(x_0, y_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)}\ l_x\ sinc(l_x f_x) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)}\ l_x\ sinc\frac{l_x x_0}{\lambda z}$$

La distribuzione di intensità $I(x_0)$, e quindi la figura di diffrazione (indipendente da y_0) sarà data da:

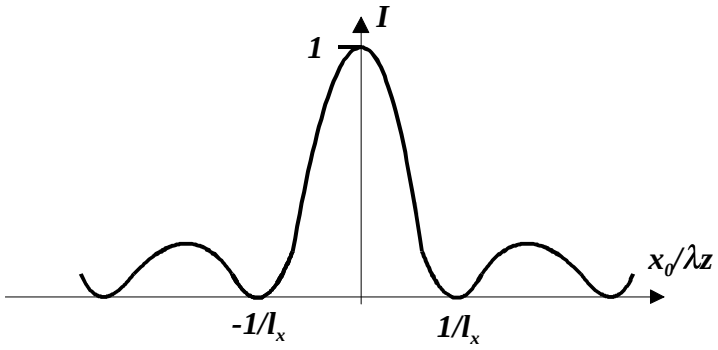
$$I(x_0) = \langle E(x_0, y_0) \cdot E^*(x_0, y_0)\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x_o^2+y_0^2)} l_x\ sinc\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right)\cdot\left(\frac{e^{-ikz}}{-i\lambda z} e^{-i\frac{k}{2z}(x_o^2+y_0^2)} l_x\ sinc\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right)\right\rangle = \frac{l_x^2}{(\lambda z)^2}\cdot sinc^2\left(\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right)$$

Possiamo riassumere: la distribuzione di intensità sul piano immagine x_0,y_0 posto a distanza z dalla fenditura è data dalla funzione;

$$I(x_0) = \frac{l_x^2}{(\lambda z)^2}\cdot sinc^2\left(\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right) = \frac{l_x^2}{(\lambda z)^2}\cdot\left[\frac{sen\left(\pi\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right)}{\left(\pi\frac{l_x x_0}{\lambda z}\right)}\right]^2 \qquad (6,14)$$

il cui andamento, ***normalizzata a 1*** e in funzione di $\frac{x_0}{\lambda z}$ è mostrato in figura



La larghezza Δx_0 , sullo schermo, alla distanza z, del massimo centrale sarà dato dalla distanza tra i primi due zeri della funzione $sinc^2$. La funzione $sen^2\left(\pi \frac{l_x\, x_0}{\lambda\, z}\right)$ si annulla la prima volta per quando *l'argomento della funzione sen* vale $\pm\,\pi$, cioè quando $\pi \frac{l_x\, x_0}{\lambda\, z} = \pm\,\pi$. Il primi zeri simmetrici rispetto all'origine si hanno per $\frac{x_0}{\lambda\, z} = \pm \frac{1}{l_x}$ e quindi la larghezza del massimo centrale sarà data da:

$$\Delta\, x_0 = \frac{\lambda\, z}{l_x} - \left(-\frac{\lambda\, z}{l_x}\right) = 2\frac{\lambda\, z}{l_x} \qquad (6{,}15)$$

Da qui si vede immediatamente come ***la larghezza del massimo centrale sia inversamente proporzionale alla larghezza l_x della fenditura***.

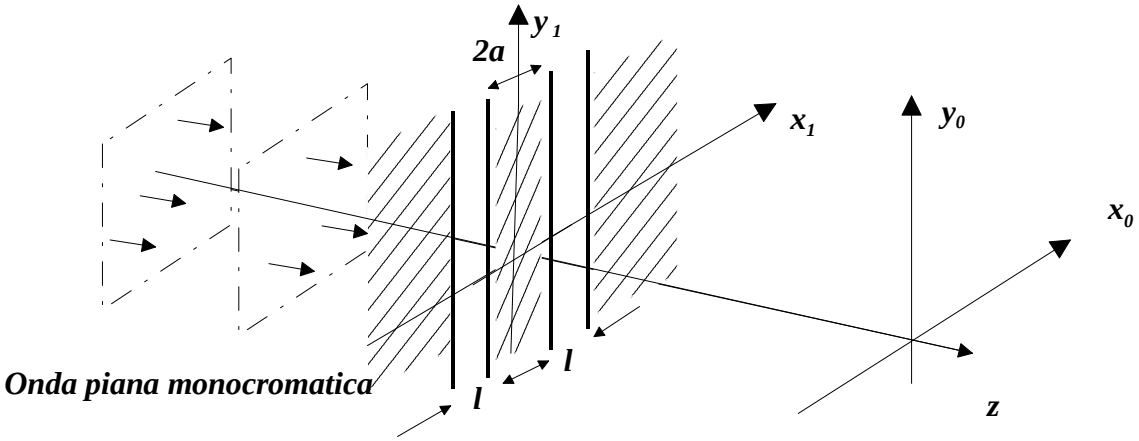
Si può anche valutare le posizione dei massimi di intensità, che si hanno quando sarà massima la funzione:

$$I(x_0) = \left[\frac{sen\left(\frac{l_x\, x_0}{\lambda\, z}\right)}{\left(\frac{l_x\, x_0}{\lambda\, z}\right)}\right]^2 = \left(\frac{senA}{A}\right)^2$$

che con semplici passaggi di analisi si deduce che i massimi si hanno per le x_0 radici dell'equazione:

$$tan\, A - A = 0$$

b) <u>Doppia fenditura</u>: due aperture rettangolari, indefinite sull'asse y, di larghezza l e distanti 2a, illuminate con onda piana, monocromatica di ampiezza unitaria.



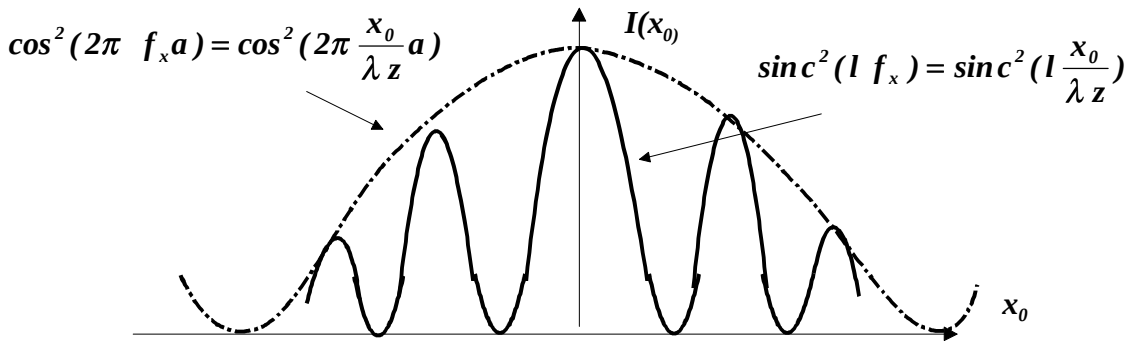
L'apertura considerata ha una funzione trasmittanza $t(x_1,y_1)$ definita da:

$$t(x_1, y_1) = rect(x_1 + a) + rect(x_1 - a)$$

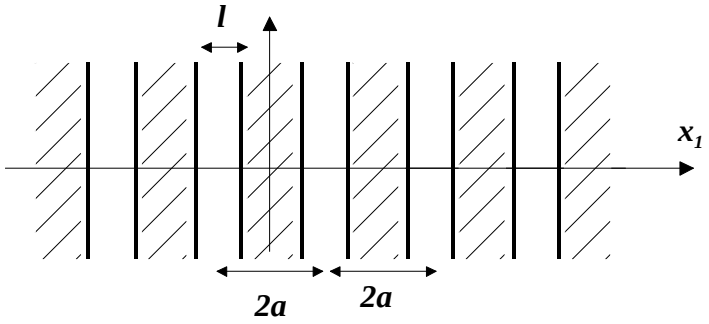
ricordando la (6,12) troviamo che la distribuzione di intensità è data da :

$$I(x_0) = \frac{4l}{\lambda^2 z^2} sinc^2(l f_x) \cdot cos^2(2\pi f_x a) \qquad (6,16)$$

All'interno del massimo centrale di diffrazione da singola fenditura, espresso dalla $sinc^2(l f_x)$, si ha la modulazione data da $cos^2(2\pi f_x a)$ che esprime l'***interferenza*** *tra i campi diffratti dalle due singole aperture*.



c) <u>Reticolo</u>: insieme di numerose aperture rettangolari, indefinite sull'asse y, di larghezza l, distanti 2a e parallele tra di loro, illuminate con onda piana, monocromatica di ampiezza unitaria. La radiazione esce dal foglio.



L'apertura considerata ha una funzione trasmittanza $t(x_1,y_1)$ definita da:

$$t(x_1, y_1) = rect(x_1 + a) + rect(x_1 - a) + rect(x_1 + 2a) + rect(x_1 - 2a) + ...$$

Il campo diffratto, cioè la trasformata di Fourier del reticolo , sempre per il "*fattore di scala*" e per la "*traslazione"* si può scrivere come

$$E(x_1, y_1) = E(f_x) \propto sinc(l\ f_x) \cdot (1 + e^{i2\pi f_x \cdot 2a} + e^{-i2\pi f_x \cdot 2a} + e^{i2\pi f_x 2 \cdot 2a} + ...) = sinc(l\ f_x) \cdot \sum_{-m}^{m} e^{i\ p \cdot 2\pi f_x \cdot 2a}$$

dove la somma è fatto su *p* e $2m+1$ è il numero totale di fenditure. Si può dimostrare che la relazione precedente equivale a:

$$E(x_1, y_1) = E(f_x) \propto sinc(l\ f_x) \cdot \frac{sen\left[(2m+1)\pi\ f_x \cdot 2a\right]}{sen(\pi\ f_x \cdot 2a)}$$

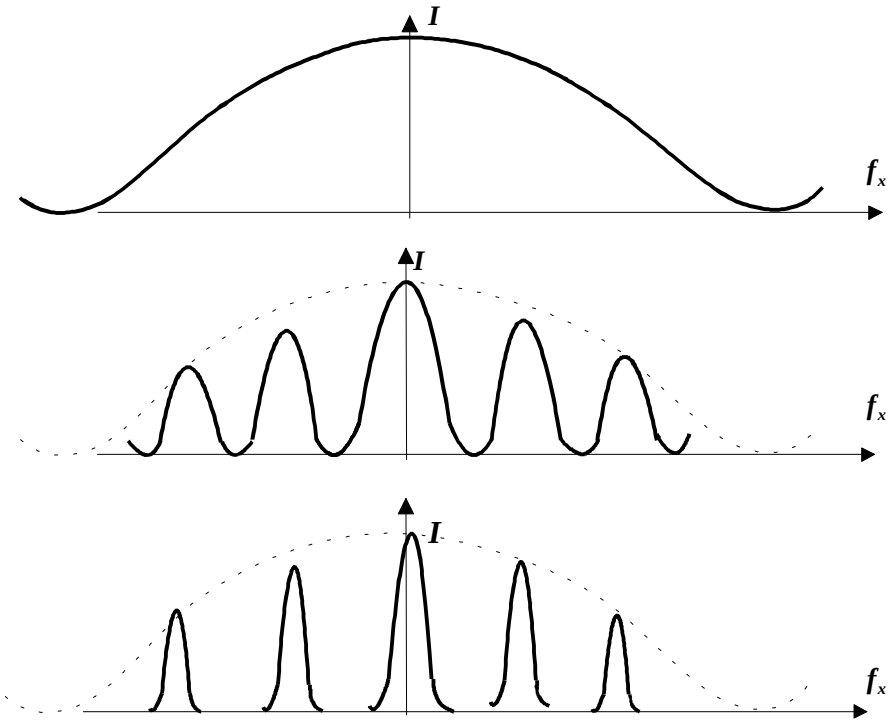
Da cui l'intensità $I(f_x)$ è data da:

$$I(x_1, y_1) = I(f_x) \propto sinc^2(l\ f_x) \cdot \frac{sen^2\left[(2m+1)\pi\ f_x \cdot 2a\right]}{sen^2(\pi\ f_x \cdot 2a)} \qquad (6,17)$$

I massimi principali si trovammo in corrispondenza degli zeri simultanei del numeratore e denominatore e per il *k-esimo* zero si avrà:

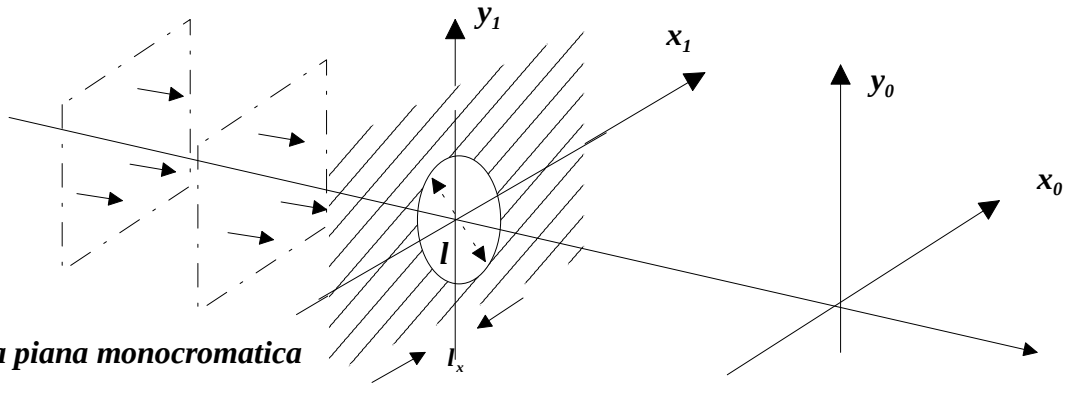
$$\pi\ f_x \cdot 2a = k\pi$$

Si può notare come i massimi principali del reticolo si hanno per frequenze spaziali (cioè nelle direzioni) uguali a quelle di interferenza da doppia fenditura ($sinc^2$).



In figura viene mostrato l'andamento dell'intensità (per una fissata larghezza di ogni singola fenditura), al passare dafenditura singola, a doppia fenditura, al reticolo. All'aumentare del numero delle fenditura i massimi "*si assotigliano*" e tra un massimo e il consecutivo ci sono massimi secondari che al crescere di m diventano sempre meno intensi. Per questo motivo i reticoli vengono utilizzati per la risoluzione spettrale, ossia permettono di separazione duo o più lunghezze d'onda presenti in una radiazione, dal momento che la diffrazione, cioè la direzione angolare a cui si distribuiscono i massimi di intensità, dipende dalla lunghezza d'onda. Il potere separatore dei reticoli, definito da $\Delta\lambda/\lambda$, è proporzionale al numero di fenditure.

d) <u>Apertura circolare di raggio l</u> (*diffrazione da foro*) illuminata con onda piana monocromatica di ampiezza unitaria



L'apertura ha una funzione trasmittanza $t(x_1,y_1)$ definita da:

$$circl\left(\frac{r_1}{l/2}\right)=\begin{cases}1 & per\ \ r_1 \le \frac{l}{2}\\ 0 & per\ tutti\ gli\ altri\ r_1\end{cases}$$

Come accennato il campo diffratto nel piano (x_0,y_0) sarà dato dalla *trasformata di Bessel-Fourir*

$$E(x_0,y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{i\frac{k}{2z}r_0^2}\Im\left\{Circl\left(\frac{r_1}{l/2}\right)\right\}\Big|_{\rho=\frac{r_0}{\lambda z}}$$

per cui per la (6,13)

$$E(x_0,y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda\ z}e^{i\frac{k r_0^2}{2z}}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{J_1(\pi\ l\rho)}{l\rho/2}\right]=\frac{e^{ikz}}{i\lambda\ z}e^{i\frac{k r_0^2}{2z}}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{J_1\left(\frac{\pi\ l\ r_0}{\lambda z}\right)}{\frac{l\ r_0}{2\lambda\ z}}\right]=$$

$$=e^{ikz}e^{i\frac{k r_0^2}{2z}}\frac{k\ l^2}{i\ 8\ z}\left[2\ \frac{J_1\left(\frac{k\ l\ r_0}{2\ z}\right)}{\frac{k\ l\ r_0}{2\ z}}\right]$$

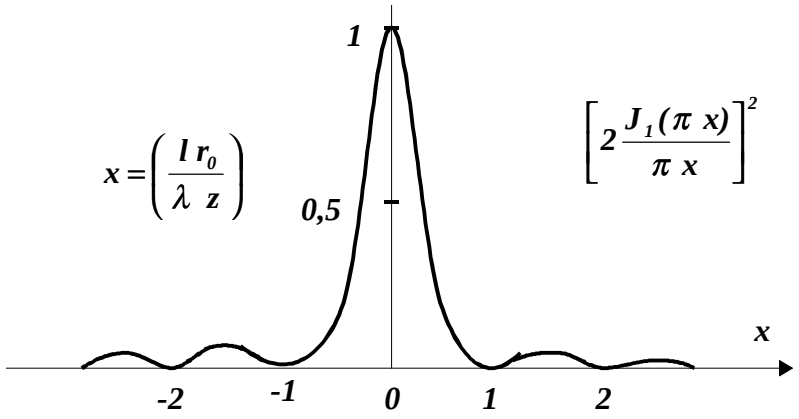
Mentre la distribuzione di intensità sarà data da:

$$I(r_0)=\left(\frac{k\ l^2}{8\ z}\right)^2\left[2\ \frac{J_1\left(\frac{k\ l\ r_0}{2\ z}\right)}{\frac{k\ l\ r_0}{2\ z}}\right]^2 \qquad (6,18)$$

Questa distribuzione di intensità viene generalmente chiamata "***pattern di Airy***" I valori e le successive posizioni dei massimi e minimo di questa *funzione di Bessel di ordine uno* si trovano tabulati sugli Handbooks. I valori e le successive posizioni di alcuni dei massimi e dei minimi sono riportati nella tabella seguente

x	0	1.220	1,635	2,233	2,679	3,238	3,699
$\left[2\frac{J_1(\pi\ x)}{\pi\ x}\right]^2$	1	0	0,0175	0	0,0042	0	0,0016
Max o min	M	m	M	m	M	m	M

Nella figura è mostrata una sezione dell'andamento del pattern di Airy



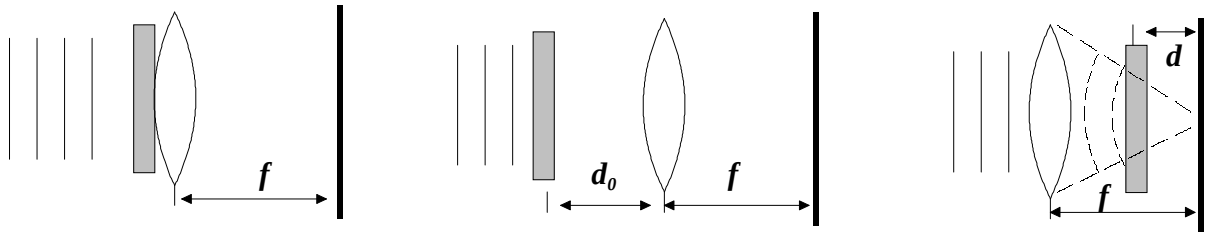
Dalla tabella si può vedere che il raggio del primo zero della funzione è dato da:

$$\Delta r_0 = 1{,}22 \frac{\lambda z}{l} \tag{6,20}$$

Questa relazione ha una notevole importanza in quanto definisce anche quello che si definisce "***potere risolutivo***" di uno strumento ottico. Infatti ogni strumento ottico,e in particolare gli obiettivi da microscopio hanno un limitato raggio di apertura e quindi limitano molto il fronte d'onda. Allora nel suo fuoco si ha la figura di diffrazione dell'apertura dell'obiettivo, cioè il suo pattern di Airy. Questo significa anche che ad ogni punto dell'oggetto corrisponderà, nel fuoco dell'obiettivo, una macchia di diametro pari a Δr_0. Per esempio per un obiettivo di *fuoco z = 2mm*, *apertura l = 5mm*, usando una radiazione sul verde ($\lambda \approx 0{,}5\ \mu m$) la macchia avrà un raggio di $\approx 0{,}3\ \mu m$. Allora due punto più vicini di $0{,}3\ \mu m$ non sono più distinguibili (per poterli distinguere devo usare una radiazione con più corta λ) . Ancora un esempio: in una macchina fotografica con fuoco $f = 5\ cm$ e *diaframma* $d = 3\ mm$ in luce bianca ($\lambda_{medio} \approx 0{,}3\ \mu m$), la macchia sulla pellicola sarà $\approx 10\ \mu m$

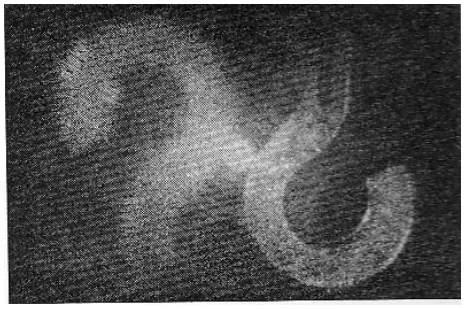
Per concludere questa trattazione della diffrazione può essere importante accennare all'uso di una lente per raccogliere l'immagine di una "maschera" (cioè una regione di piano caratterizzata da una certa trasmittività) in particolari disposizioni di illuminazione.

Supponiamo di illuminare con onda piana, monocromatica una maschra, con uno dei tre modi indicati nella figura seguente:



Senza entrare nei dettagli teorici, si può dimostrare analiticamente che nel fuoco delle lente si ha proprio la ***trasformata di Fourier*** della distribuzione del campo sull'apertura della lente stessa. Quindi nel fuoco della lente si possono ritrovare le figure di diffrazione alla Fraunhofer della distribuzione del campo sulla "maschera" che si vuole osservare.

Ricordiamo ora l'ologramma alla luce di quanto detto circa la diffrazione. Possiamo dire che mentre la fase di registrazione dell'ologramma costituisce la registrazione di un fenomeno di interferenza, nella fase di ricostruzione, in particolare quando si osserva l'ologramma, illuminandolo con il fascio laser non espanso e proiettato su uno schermo, osserviamo un fenomeno di diffrazione. Quello che si può vedere sono tre immagini della scena ologrammata (una nitida, una sfuocata capovolta ed una centrale confusa)



La "*maschera*"dell'ologramma, nella zona colpita al laser, di fatto ne limita il fronte d'oda e quindi quello che osserviamo è la diffrazione alla Fraunhofer di quella porzione di lastra illuminata con l'onda piana del fascio laser. E' importante notare che dopo lo sviluppo della lastra quello che rimane impressionato è proprio un *reticolo interferenziale tipo* $\boldsymbol{\cos^2(\pi p x)}$ dove $\boldsymbol{1/p}$ è l'interfrangia. Allora se calcoliamo la *trasformata di Fourier* della funzione $\boldsymbol{\cos^2(\pi p x)}$ troviamo

$$\Im\{\cos^2(\pi\ p\ x)\} = \Im\left\{\frac{1+\cos(2\pi\ p\ x)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\int[1+\cos(2\pi\ p\ x)]e^{-i\,2\pi\,p\,f_x x}dx =$$

$$\propto \delta(f_x) + \frac{1}{2}\delta(f_x + \lambda\ p) + + \frac{1}{2}\delta(f_x - \lambda\ p)$$

cioè la *trasformata di Fourier di un* $\boldsymbol{\cos^2(\pi p x)}$ presenta solo tre massimi, a differenza del reticolo di diffrazione visto in precedenza che ne presenta infiniti, e questo spiega il perché delle tre immagini. In generale possiamo anche dire che la figura di diffrazione è la risposta del sistema ad un segnale. Allora noto il segnale, la "*lettura*" della figura di diffrazione ci può dare informazioni riguardo al sistema che la produce. Questa è in linea di principio una tecnica utilizzata in ottica lineare per lo studio di sistemi e valida anche nel campo dell'interferometria e della ellisometria.

IMMAGINI DI DIFFRAZIONE

Di seguito sono riportate alcune immagini che si riferiscono a *figure di diffrazione alla Fraunhofer*

Diffrazione da singola fenditura

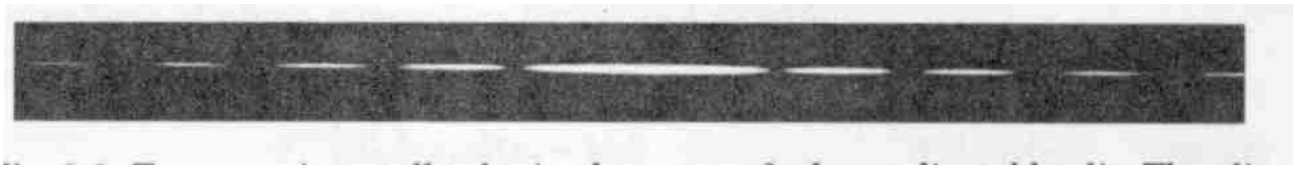


Figura di diffrazione da singola fenditura verticale ($l_y >> l_x$) illuminata con luce laser non espanso

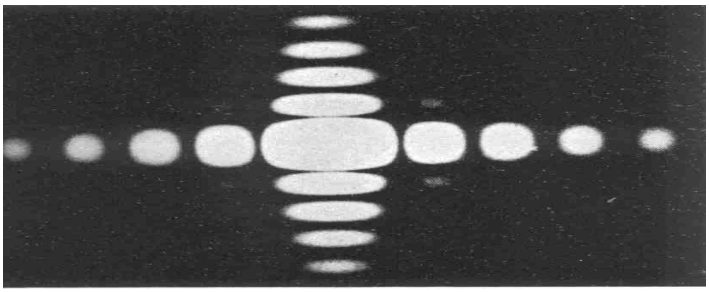
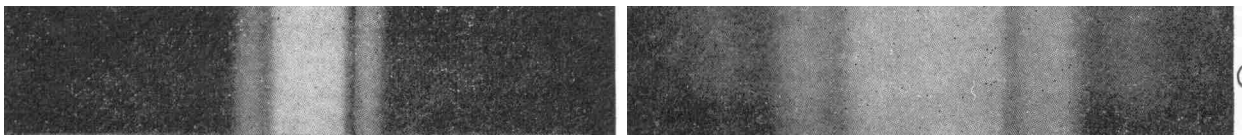
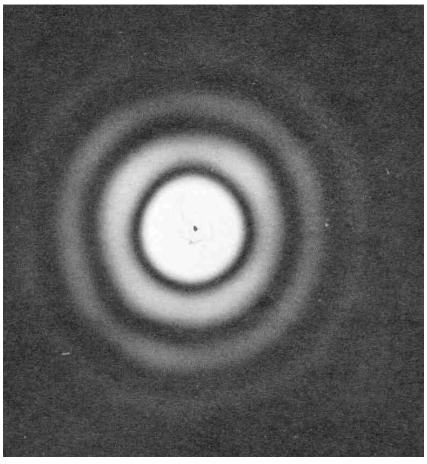


Figura di diffrazione da singola fenditura rettangolare ($l_y \approx l_x$) illuminata con luce laser non espanso



a ***b***

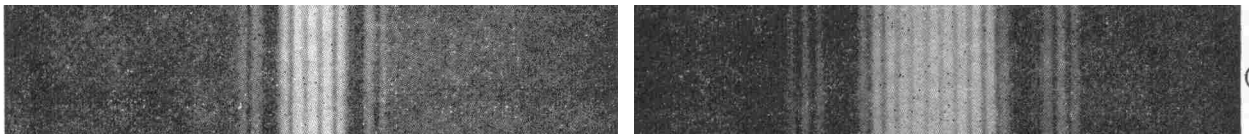
Figure di diffrazione da singola fenditura verticale ($l_a > l_b$) illuminata con luce laser espanso



Diffrazione da foto cirolare
Pattern di Airy

Diffrazione da doppia fenditura

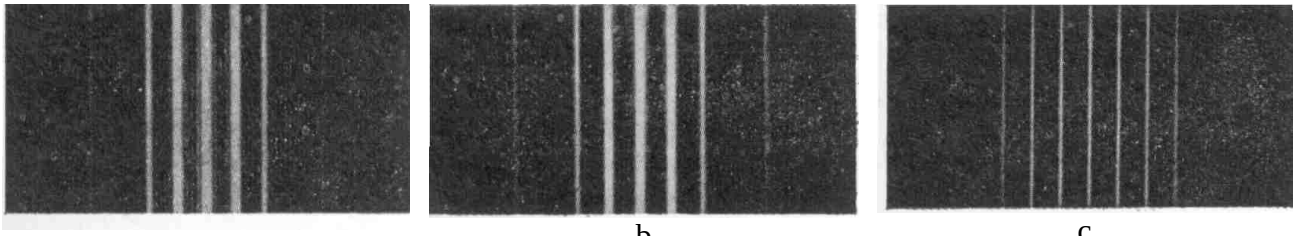
Figura di diffrazione alla Fraunhofer da doppia fenditura illuminata con fascio laser non espanso (l'immagine si riferisce alla modulazione all'interno del massimo centrale di diffrazione)



a ***b***

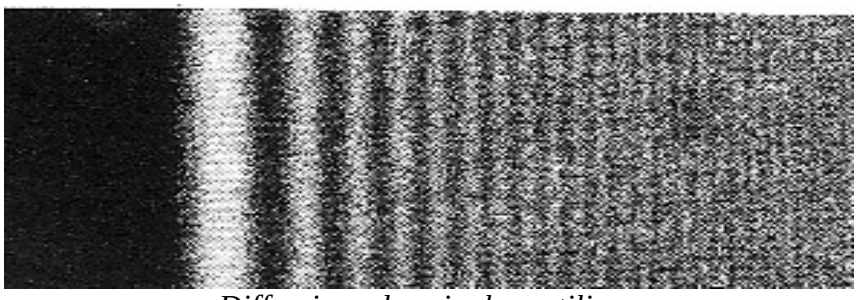
Figure di diffrazione da doppia fenditura verticale ($l_a > l_b$) illuminata con luce laser espanso Si osservi come la modulazione in tutti i massimi di diffrazione sia sempre equispaziata.

Diffrazione da reticoli verticali



a b c

Frange di diffrazione da reticoli con m crescente (fino a 20 fenditure fig.c)



Diffrazione da spigolo reetilineo